Vorwort.

Bekannt sind die Reformbestrebungen F. Kleins, die namentlich in der Schrift: Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts (Leipzig, Teubner 1904) enthalten sind. Es wird darin hauptsächlich eine stärkere Betonung der Anschauung, der Anwendungen, des Funktionsbegriffes, und die Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung gefordert.

Der Verfasser hat einige ähnliche Gedanken in einem Vortrage im Verein zur Förderung des mathematischen Unterrichts [1898 S. 2: Zur Reform des Unterrichts in der Arithmetik] veröffentlicht, und seine Aufgabensammlung für die oberen Klassen*) (Leipzig, Teubner 1902) enthält eine weit stärkere Berücksichtigung des Funktionsbegriffes und der Anwendungen als andere Sammlungen. Der Differentialquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist dort zwar erwähnt und vielfach benutzt, das Wort „Differentialrechnung" aber vermieden, weil eine direkte Einführung derselben damals aussichtslos erschien. Da jetzt aber die Sachlage vollständig geändert ist, und da das Unterrichtsministerium gestattet hat, Versuche mit der Behandlung der Differential- und Integralrechnung**) zu machen, so sind im folgenden einige Aufgaben aus diesem Gebiete ohne Anspruch auf Vollständigkeit als Ergänzung für die Aufgabensammlung II zusammengestellt.

Wie soll nun die Differential- und Integralrechnung in den Unterricht eingeführt werden? Wenn eine zusammenhängende Behandlung in O I stattfindet, so wird man ungefähr den Weg einschlagen, der in den zahlreichen für die Hochschule bestimmten Büchern vorgezeichnet ist. Aber dies scheint mir schweren Bedenken zu unterliegen. Der ohnehin schon reichlich bemessene Stoff müßte noch stärker zusammengepreßt werden und eine starke Überbürdung könnte nicht ausbleiben. Meiner Ansicht nach kann es sich nur darum handeln — wie es von F. Klein angegeben und von Behrendsen

*) Im folgenden abgekürzt bezeichnet durch Aufgaben II.

**) Auch dem Verfasser ist Gelegenheit dazu gegeben.

1*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und Götting am Gymnasium zu Göttingen ausgeführt ist — daß der Unterrichtsstoff von dem neuen Geiste durchdrungen wird, daß die einzelnen Abschnitte der Differential- und Integralrechnung da eingeschaltet werden, wo sie sich an die Lehraufgabe natürlich anschließen, und daß zum Teil dieselben Aufgaben behandelt werden wie gegenwärtig (Geschwindigkeit, Tangente, Maxima, Inhalte, Gleichungen). Aber weil man alles, was jetzt getrennt erscheint, in Zusammenhang bringt, wird der ganze Lehrstoff leichter und übersichtlicher, und trotz Einführung der neuen Begriffe wird die Gesamtarbeit, die der Schüler aufzuwenden hat, geringer als bisher.

Allerdings muß man früh, schon auf Tertia, mit der Umgestaltung des Unterrichts anfangen. Wenn die Behandlung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vorgeschrieben ist, wird man selbstverständlich auch eine Gleichung mit zwei Unbekannten besprechen müssen, also den Funktionsbegriff. Ich will jedoch hier nicht näher darauf eingehen, da ich in meiner Aufgabensammlung für die mittleren Klassen*) (Leipzig, Teubner 1906) dies ausführlich dargelegt habe. Der Stoff ist dort sehr reichlich angegeben und man wird namentlich auf dem Gymnasium einiges nach O II hinüber nehmen.

Wie sehr die Reform der Mathematik eine innere ist, geht daraus hervor, daß es garnicht notwendig ist die amtlichen Lehrpläne zu ändern, wenn man nur die Worte der Lehrpläne nicht so deutet, wie es in den meisten Schulbüchern geschieht, sondern so, wie sie ein Unbefangener auffassen müßte, der zwar die Mathematik, aber nicht den jetzigen Schulbetrieb kennt. Einige Beispiele aus dem Lehrplan der Gymnasien mögen dies beweisen. Für O II ist vorgeschrieben: Anwendung der Algebra auf Geometrie. Das sehr weit verbreitete Lehrbuch von Mehler gibt in diesem Abschnitt:

$$r = \frac{abc}{4\Delta}, \quad \Delta = \sqrt{\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c}, \quad \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}$$

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_c} = \frac{2}{h_c}, \quad \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2t_c^2, \quad w_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} \text{ usw.}$$

Offenbar sind all diese Beziehungen ganz hübsch, aber — auch ganz entbehrlich. Der Fachmathematiker braucht sie während des Universitätsstudiums nicht, und für die allgemeine Bildung geben sie einen geringen Beitrag; denn da ein Dreieck durch 3 Stücke bestimmt ist, so ist es selbstverständlich, daß zwischen abc, $h_a\, h_b\, h_c$, $w_a\, w_b\, w_c$, $t_a\, t_b\, t_c$, $s\;\; s-a\;\; s-b\;\; s-c$ $\varrho_a\, \varrho_b\, \varrho_c\, \varrho\, r$, $\varrho_a \pm \varrho_b$ zahlreiche Bedingungsgleichungen bestehen müssen. Welches ist aber bei weitem die wichtigste Anwendung der Algebra auf Geometrie?

*) Im folgenden bezeichnet durch Aufgaben I.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sicherlich die analytische Geometrie. Daß eine Gerade oder ein Kreis durch eine Gleichung dargestellt werden kann, daß man die Geometrie arithmetisch behandeln und arithmetische Gleichungen geometrisch deuten kann, dies gibt eine wesentliche Erweiterung des Gesichtskreises, und die einfachsten Sätze aus diesem Gebiet sind so leicht, daß man sie nicht bis Prima zu verschieben braucht. Man gewinnt damit den ferneren Vorteil, daß die Lehraufgabe in Arithmetik Gleichungen, besonders quadratische mit mehreren Unbekannten in enge Verbindung mit dem vorigen gebracht wird. Wenn man die gekünstelten Beispiele Bardeys wegläßt, so sind quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten in geometrischer Deutung Kegelschnitte; man wird die höchsten und tiefsten Punkte bestimmen, die Tangente in gegebenem Punkte berechnen und dann zeichnen usw. Dies gibt zugleich die besten und wichtigsten Konstruktionsaufgaben, besonders auch solche mit algebraischer Analysis. So kann das Gymnasium mit Leichtigkeit die Differentiale ganzer rationaler Funktionen in O II einführen.

In U I wird man gleich zum Beginn (im Anschluß an die arithmetischen Reihen oder den binomischen Satz) die Potenzsummen betrachten. Hiermit und besser noch durch Umkehrung der Differentialrechnung ist ein Mittel gewonnen, um nicht allein beliebige Flächen- und Rauminhalte abzuleiten, sondern auch, wie vorhin schon hervorgehoben, ganz allgemein von der Gesetzmäßigkeit kleinster Teilchen einen Schluß auf die Gesamtheit zu machen. Das übliche Verfahren z. B. den Inhalt der Kugel als Differenz zwischen Walze und Kegel zu finden, ist zwar elegant, aber vom allgemein-pädagogischen Standpunkt wenig wertvoll, denn es ist ein mathematisches Kunststück und der Schüler kann keinen anderen Rauminhalt in ähnlicher Weise finden. In der Trigonometrie wird man im Anschluß an das Additionstheorem auch Differentiale, Maxima usw. von trigonometrischen Funktionen bestimmen, und man erhält damit ebenso geeignete Übungen für die Umformung der Funktionen, wie bei der Berechnung von Dreiecken aus „möglichst unzweckmäßigen Stücken"; zugleich aber gewährt die geometrische Darstellung dieser Funktionen noch bemerkenswerte Einblicke in die Theorie der Obertöne und der Wechselströme.

Auch die Forderung: Gleichungen, auch solche höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen läßt sich anders erfüllen als durch die gekünstelten Beispiele, die so häufig bei der Reifeprüfung gestellt werden. Im letzten Abschnitte ist dies an einigen Aufgaben über den Schnitt von Geraden, Tangenten, Wendetangenten, Kreisen mit Kurven angegeben.

Im einzelnen bemerke ich noch, daß durch den Grenzbegriff zwar mit einem Schlage alle der Differentialrechnung früher anhaftenden Unbestimmtheiten beseitigt sind, aber ich habe absichtlich den weniger strengen aber

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

anschaulichen Weg eingeschlagen, zunächst kleine Größen einzuführen und höhere Potenzen zu vernachlässigen, denn der Schüler muß erst die Schwierigkeiten, die Jahrhunderte hindurch bestanden haben, deutlich sehen, um den Wert der strengen Methode richtig zu schätzen. Auch sind nicht die mechanischen Regeln des Differenzierens an den Anfang gestellt, sondern der Schüler soll in der ersten Zeit den Schritt von $x + dx$ zu $y + dy$ jedesmal wirklich ausführen. Ebenso sind die durch uv und $u:v$ erreichbaren Abkürzungen erst ganz spät benutzt, um ein gründliches Verständnis der Rechnungen zu erreichen.

Endlich bemerke ich noch, daß die tatsächliche Einführung dieser Neuerung am leichtesten erfolgen kann, wenn man allmählich vorgeht. Es genügt zunächst eine kurze Besprechung des Differentialquotienten (oder des Integrals) und später fügt man bei passender Gelegenheit einen weiteren Abschnitt hinzu und läßt anderes dafür weg. Da die einzelnen Teile sich aber gegenseitig ergänzen und stützen, so wird der volle Nutzen erst dann hervortreten, wenn der ganze Unterricht von den neuen Begriffen durchdrungen ist.

Im folgenden ist also keine systematische u. vollständige Behandlung der Differential- und Integralrechnung gegeben — dazu sind ja zahlreiche Bücher vorhanden — sondern der Verfasser sieht den Wert der vorliegenden Arbeit darin, daß aus dem weiten Gebiet ein Ausschnitt gegeben ist, der in der Schule leicht bewältigt werden kann, und der zugleich durch das Zusammenwirken von reiner und angewandter Mathematik dem Schüler die Grundlagen der Infinitesimalrechnung zu voller Klarheit bringt. Deutlich geht daraus hervor, daß durch sie die Leistungsfähigkeit der Mathematik in ähnlicher Weise erhöht wird wie die Sehkraft des Auges durch Mikroskop und Fernrohr; die Differentialrechnung zeigt, daß wir aus der allgemeinen Betrachtung eines Vorganges einen Blick tun können ins Innere der Natur, und die Integralrechnung leitet aus einfachen Annahmen über die Beschaffenheit der kleinsten Teilchen die Erscheinungen in ihrer Gesamtheit her. Diese Geistesarbeit der letzten Jahrhunderte, die weit über die Leistungen des Altertums in der Mathematik hinausgeht, läßt sich also für die allgemeine Bildung und den Unterricht nutzbar machen, während die logische Seite der Wissenschaft in keiner Weise darunter leidet.

Königsberg i. Pr.

A. Schülke.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf