Beilage zum Jahresbericht 1907
der Königlichen Oberrealschule auf der Burg in Königsberg i. Pr.

Differential- und Integralrechnung im Unterricht

von

Prof. Dr. A. Schülke

Druck von B. G. Teubner in Leipzig 1907

Jahresbericht 1907. Nr. 25.

Vorwort.

Bekannt sind die Reformbestrebungen F. Kleins, die namentlich in der Schrift: Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts (Leipzig, Teubner 1904) enthalten sind. Es wird darin hauptsächlich eine stärkere Betonung der Anschauung, der Anwendungen, des Funktionsbegriffes, und die Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung gefordert.

Der Verfasser hat einige ähnliche Gedanken in einem Vortrage im Verein zur Förderung des mathematischen Unterrichts [1898 S. 2: Zur Reform des Unterrichts in der Arithmetik] veröffentlicht, und seine Aufgabensammlung für die oberen Klassen*) (Leipzig, Teubner 1902) enthält eine weit stärkere Berücksichtigung des Funktionsbegriffes und der Anwendungen als andere Sammlungen. Der Differentialquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist dort zwar erwähnt und vielfach benutzt, das Wort „Differentialrechnung" aber vermieden, weil eine direkte Einführung derselben damals aussichtslos erschien. Da jetzt aber die Sachlage vollständig geändert ist, und da das Unterrichtsministerium gestattet hat, Versuche mit der Behandlung der Differential- und Integralrechnung**) zu machen, so sind im folgenden einige Aufgaben aus diesem Gebiete ohne Anspruch auf Vollständigkeit als Ergänzung für die Aufgabensammlung II zusammengestellt.

Wie soll nun die Differential- und Integralrechnung in den Unterricht eingeführt werden? Wenn eine zusammenhängende Behandlung in O I stattfindet, so wird man ungefähr den Weg einschlagen, der in den zahlreichen für die Hochschule bestimmten Büchern vorgezeichnet ist. Aber dies scheint mir schweren Bedenken zu unterliegen. Der ohnehin schon reichlich bemessene Stoff müßte noch stärker zusammengepreßt werden und eine starke Überbürdung könnte nicht ausbleiben. Meiner Ansicht nach kann es sich nur darum handeln — wie es von F. Klein angegeben und von Behrendsen

*) Im folgenden abgekürzt bezeichnet durch Aufgaben II.

**) Auch dem Verfasser ist Gelegenheit dazu gegeben.

und Götting am Gymnasium zu Göttingen ausgeführt ist — daß der Unterrichtsstoff von dem neuen Geiste durchdrungen wird, daß die einzelnen Abschnitte der Differential- und Integralrechnung da eingeschaltet werden, wo sie sich an die Lehraufgabe natürlich anschließen, und daß zum Teil dieselben Aufgaben behandelt werden wie gegenwärtig (Geschwindigkeit, Tangente, Maxima, Inhalte, Gleichungen). Aber weil man alles, was jetzt getrennt erscheint, in Zusammenhang bringt, wird der ganze Lehrstoff leichter und übersichtlicher, und trotz Einführung der neuen Begriffe wird die Gesamtarbeit, die der Schüler aufzuwenden hat, geringer als bisher.

Allerdings muß man früh, schon auf Tertia, mit der Umgestaltung des Unterrichts anfangen. Wenn die Behandlung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vorgeschrieben ist, wird man selbstverständlich auch eine Gleichung mit zwei Unbekannten besprechen müssen, also den Funktionsbegriff. Ich will jedoch hier nicht näher darauf eingehen, da ich in meiner Aufgabensammlung für die mittleren Klassen*) (Leipzig, Teubner 1906) dies ausführlich dargelegt habe. Der Stoff ist dort sehr reichlich angegeben und man wird namentlich auf dem Gymnasium einiges nach O II hinüber nehmen.

Wie sehr die Reform der Mathematik eine innere ist, geht daraus hervor, daß es garnicht notwendig ist die amtlichen Lehrpläne zu ändern, wenn man nur die Worte der Lehrpläne nicht so deutet, wie es in den meisten Schulbüchern geschieht, sondern so, wie sie ein Unbefangener auffassen müßte, der zwar die Mathematik, aber nicht den jetzigen Schulbetrieb kennt. Einige Beispiele aus dem Lehrplan der Gymnasien mögen dies beweisen. Für O II ist vorgeschrieben: Anwendung der Algebra auf Geometrie. Das sehr weit verbreitete Lehrbuch von Mehler gibt in diesem Abschnitt:

$$r = \frac{abc}{4\Delta}, \quad \Delta = \sqrt{\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c}, \quad \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}$$

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_c} = \frac{2}{h_c}, \quad \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2t_c^2, \quad w_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} \text{ usw.}$$

Offenbar sind all diese Beziehungen ganz hübsch, aber — auch ganz entbehrlich. Der Fachmathematiker braucht sie während des Universitätsstudiums nicht, und für die allgemeine Bildung geben sie einen geringen Beitrag; denn da ein Dreieck durch 3 Stücke bestimmt ist, so ist es selbstverständlich, daß zwischen abc, $h_a\, h_b\, h_c$, $w_a\, w_b\, w_c$, $t_a\, t_b\, t_c$, $s \;\; s-a \;\; s-b \;\; s-c$ $\varrho_a\, \varrho_b\, \varrho_c\, \varrho\, r$, $\varrho_a \pm \varrho_b$ zahlreiche Bedingungsgleichungen bestehen müssen. Welches ist aber bei weitem die wichtigste Anwendung der Algebra auf Geometrie?

*) Im folgenden bezeichnet durch Aufgaben I.

sicherlich die analytische Geometrie. Daß eine Gerade oder ein Kreis durch eine Gleichung dargestellt werden kann, daß man die Geometrie arithmetisch behandeln und arithmetische Gleichungen geometrisch deuten kann, dies gibt eine wesentliche Erweiterung des Gesichtskreises, und die einfachsten Sätze aus diesem Gebiet sind so leicht, daß man sie nicht bis Prima zu verschieben braucht. Man gewinnt damit den ferneren Vorteil, daß die Lehraufgabe in Arithmetik Gleichungen, besonders quadratische mit mehreren Unbekannten in enge Verbindung mit dem vorigen gebracht wird. Wenn man die gekünstelten Beispiele Bardeys wegläßt, so sind quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten in geometrischer Deutung Kegelschnitte; man wird die höchsten und tiefsten Punkte bestimmen, die Tangente in gegebenem Punkte berechnen und dann zeichnen usw. Dies gibt zugleich die besten und wichtigsten Konstruktionsaufgaben, besonders auch solche mit algebraischer Analysis. So kann das Gymnasium mit Leichtigkeit die Differentiale ganzer rationaler Funktionen in O II einführen.

In U I wird man gleich zum Beginn (im Anschluß an die arithmetischen Reihen oder den binomischen Satz) die Potenzsummen betrachten. Hiermit und besser noch durch Umkehrung der Differentialrechnung ist ein Mittel gewonnen, um nicht allein beliebige Flächen- und Rauminhalte abzuleiten, sondern auch, wie vorhin schon hervorgehoben, ganz allgemein von der Gesetzmäßigkeit kleinster Teilchen einen Schluß auf die Gesamtheit zu machen. Das übliche Verfahren z. B. den Inhalt der Kugel als Differenz zwischen Walze und Kegel zu finden, ist zwar elegant, aber vom allgemein-pädagogischen Standpunkt wenig wertvoll, denn es ist ein mathematisches Kunststück und der Schüler kann keinen anderen Rauminhalt in ähnlicher Weise finden. In der Trigonometrie wird man im Anschluß an das Additionstheorem auch Differentiale, Maxima usw. von trigonometrischen Funktionen bestimmen, und man erhält damit ebenso geeignete Übungen für die Umformung der Funktionen, wie bei der Berechnung von Dreiecken aus „möglichst unzweckmäßigen Stücken"; zugleich aber gewährt die geometrische Darstellung dieser Funktionen noch bemerkenswerte Einblicke in die Theorie der Obertöne und der Wechselströme.

Auch die Forderung: Gleichungen, auch solche höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen läßt sich anders erfüllen als durch die gekünstelten Beispiele, die so häufig bei der Reifeprüfung gestellt werden. Im letzten Abschnitte ist dies an einigen Aufgaben über den Schnitt von Geraden, Tangenten, Wendetangenten, Kreisen mit Kurven angegeben.

Im einzelnen bemerke ich noch, daß durch den Grenzbegriff zwar mit einem Schlage alle der Differentialrechnung früher anhaftenden Unbestimmtheiten beseitigt sind, aber ich habe absichtlich den weniger strengen aber anschaulichen Weg eingeschlagen, zunächst kleine Größen einzuführen und höhere Potenzen zu vernachlässigen, denn der Schüler muß erst die Schwierigkeiten, die Jahrhunderte hindurch bestanden haben, deutlich sehen, um den Wert der strengen Methode richtig zu schätzen. Auch sind nicht die mechanischen Regeln des Differenzierens an den Anfang gestellt, sondern der Schüler soll in der ersten Zeit den Schritt von $x + dx$ zu $y + dy$ jedesmal wirklich ausführen. Ebenso sind die durch uv und $u:v$ erreichbaren Abkürzungen erst ganz spät benutzt, um ein gründliches Verständnis der Rechnungen zu erreichen.

Endlich bemerke ich noch, daß die tatsächliche Einführung dieser Neuerung am leichtesten erfolgen kann, wenn man allmählich vorgeht. Es genügt zunächst eine kurze Besprechung des Differentialquotienten (oder des Integrals) und später fügt man bei passender Gelegenheit einen weiteren Abschnitt hinzu und läßt anderes dafür weg. Da die einzelnen Teile sich aber gegenseitig ergänzen und stützen, so wird der volle Nutzen erst dann hervortreten, wenn der ganze Unterricht von den neuen Begriffen durchdrungen ist.

Im folgenden ist also keine systematische u. vollständige Behandlung der Differential- und Integralrechnung gegeben — dazu sind ja zahlreiche Bücher vorhanden — sondern der Verfasser sieht den Wert der vorliegenden Arbeit darin, daß aus dem weiten Gebiet ein Ausschnitt gegeben ist, der in der Schule leicht bewältigt werden kann, und der zugleich durch das Zusammenwirken von reiner und angewandter Mathematik dem Schüler die Grundlagen der Infinitesimalrechnung zu voller Klarheit bringt. Deutlich geht daraus hervor, daß durch sie die Leistungsfähigkeit der Mathematik in ähnlicher Weise erhöht wird wie die Sehkraft des Auges durch Mikroskop und Fernrohr; die Differentialrechnung zeigt, daß wir aus der allgemeinen Betrachtung eines Vorganges einen Blick tun können ins Innere der Natur, und die Integralrechnung leitet aus einfachen Annahmen über die Beschaffenheit der kleinsten Teilchen die Erscheinungen in ihrer Gesamtheit her. Diese Geistesarbeit der letzten Jahrhunderte, die weit über die Leistungen des Altertums in der Mathematik hinausgeht, läßt sich also für die allgemeine Bildung und den Unterricht nutzbar machen, während die logische Seite der Wissenschaft in keiner Weise darunter leidet.

Königsberg i. Pr.

A. Schülke.

I. Differentialrechnung.

1. Das Wachstum einer Funktion.

Es sei $y = 2x + 3$, dann wird für

$$\begin{array}{ll} x = 0 & y = 3 \\ x = 1 & y = 5 \\ x = 2 & y = 7, \end{array}$$

also wenn x um 1 wächst, so wächst y um 2, oder wenn x um h zunimmt, so steigt y um k, und da $y + k = 2(x + h) + 3$ ist, so muß $k = 2h$ oder $k : h = 2$ sein.

Bei einem Wege bezeichnet man das Verhältnis der Höhenänderung zum wagerechten Fortschritt mit Steigung (Neigung), entsprechend nennt man auch bei einer Funktion dies Verhältnis $k : h$ die Steigung oder das Wachstum der Funktion. Wenn y mit wachsendem x kleiner wird, so ist die Steigung negativ. Die Steigung bei einer Funktion ersten Grades ist konstant und gleich der Tangente des Neigungswinkels.

1.—5. Bestimme in Aufgaben I, S. 119, **1—5** oder II, S. 33, **1—19** die Steigung und den Neigungswinkel.

Bei Funktionen höheren Grades ist die Neigung (ebenso wie bei einem Wege im Hügellande) veränderlich, man erhält aber für jeden Punkt einen bestimmten Wert, wenn man sich auf ein so kleines Stück beschränkt, daß man die Kurve als geradlinig ansehen kann.

Z. B. Bei $y = x^2$ wird

I. für $x = 1$	$y = 1$	und	II. für $x = 2$	$y = 4$
$x = 1{,}1$	$y = 1{,}21$		$x = 2{,}1$	$y = 4{,}41$
$x = 1{,}01$	$y = 1{,}0201$		$x = 2{,}01$	$y = 4{,}0401$
$x = 1{,}001$	$y = 1{,}002001$		$x = 2{,}001$	$y = 4{,}004001$

Dividiert man den Zuwachs von y durch den Zuwachs von x, so erhält man bei I. 2,1; 2,01; 2,001 und bei II. 4,1; 4,01; 4,001.

Wenn x um ein sehr kleines Stück wächst, so versagen die Logarithmentafeln bei der Berechnung des zugehörigen y; man erhält aber eine brauchbare

Bestimmung, wenn man die Glieder nach den verschiedenen Größenordnungen trennt. Bezeichnet man nämlich den Zuwachs von x mit dx und den Zuwachs von y mit dy [entsprechend die Änderung von r mit dr, von J mit dJ*) usw.], so wird für einen Nachbarpunkt mit den Koordinaten $x + dx$ und $y + dy$

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x\,dx + dx^2$$
$$dy = + 2x\,dx + dx^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx\,.$$

Aus diesen Gleichungen kann man für ein beliebig kleines dx das zugehörige dy finden.**) Für den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ erhält man nur dann einen bestimmten Wert, wenn man dx so klein annimmt, daß man dx neben x oder Glieder mit dx^2, $dx \cdot dy$, dy^2 neben dx vernachlässigen kann. Das bedeutet geometrisch, daß man das Stück der Kurve zwischen dem Punkte xy und dem Nachbarpunkte $x + dx$, $y + dy$ als geradlinig und als zusammenfallend mit der Tangente ansieht. $\frac{dy}{dx}$ gibt also das Wachstum der Kurve oder die Tangente des Neigungswinkels α an.

Bisher erhielt man die Gestalt einer Funktion nur dadurch, daß man für $x = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \pm \infty$ die zugehörigen Werte von y berechnete und die Schnittpunkte der Kurve mit den Achsen bestimmte. Jetzt hat man ein weiteres Mittel für die Untersuchung, da der Wert von $\frac{dy}{dx}$ zeigt, ob die Kurve in einem Punkte stark oder schwach ansteigt oder abfällt, und die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ liefert den höchsten oder tiefsten Punkt der Kurve.

Beispiele:

a) $y = x^2 + 2x$ b) $y = 0{,}1x^2 + 1{,}6x$ c) $y = x^2 + 4x + 3$

d) $y = x^2 - 4x$ e) $y = 3x - x^2$ f) $y = -0{,}2x^2 - 0{,}4x$

g) $y = 0{,}1\,(x - 1)\,(x - 5)$ h) $y = 0{,}2\,(x + 1)\,(x - 3)$

i) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 1$ k) $y = 1 + 0{,}8x - 0{,}1x^2$

1. Wie groß wird y für $x = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ -1;\ -2$?

2. Wie groß ist das Wachstum der Kurve in diesen Punkten?

3. Welchen Winkel α bildet die Tangente in diesen Punkten mit der x Achse?

4. In welchen Punkten ist $\operatorname{tg} \alpha = 0;\ 1;\ 2;\ -1;\ -2$?

---

*) Diese sehr zweckmäßige Bezeichnung verdanken wir Leibniz.

**) Anwendungen namentlich bei der Fehlerbestimmung.

5. In welchen Punkten ist $\alpha = 0$; 45^0; 30^0; 120^0; $36{,}87^0$?

6. Wo liegt der höchste oder tiefste Punkt der Kurve?

7. $y - y_1 = A(x - x_1)$ bedeutet eine Linie, welche durch den Punkt $x_1 y_1$ geht; welchen Wert muß man A erteilen, damit die durch $x_1\ y_1$ gehende Linie eine Tangente an die Kurve wird?

8. a) Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkte $P_1\,[x_1 = 1,\ y_1 = 3]$ an die Kurven **8.** $y = 4x - x^2$ **9.** $y = x^2 + 2x$ **10.** $y = x^2 + x + 1$ **11.** $y = -x^2 + 3x + 1$. b) Um zu prüfen, ob die gefundene Linie wirklich eine Tangente ist, sollen die Schnittpunkte der Linie mit der Parabel bestimmt werden. c) Die Schnittpunkte einer beliebigen Linie durch P_1 $y - 3 = A(x - 1)$ mit der Parabel sollen bestimmt werden. d) Welchen Wert muß A erhalten, damit auch der zweite Schnittpunkt auf P_1 fällt?

Nach diesem Abschnitt kann man entweder den Grenzbegriff behandeln, oder die Kurven dritten Grades, oder man untersucht in derselben Weise die Steigung $\frac{dy}{dx}$ bei gebrochenen und irrationalen Funktionen, z. B.

a)
$$y = \frac{a}{x}$$
$$xy = a$$
$$(x + dx)(y + dy) = a$$
$$x\,dy + y\,dx = 0$$
$$dy = -\frac{y}{x}dx$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}.$$

Man kann auch das dx aus dem Nenner fortschaffen, indem man mit der Differenz erweitert und dx^2 vernachlässigt.

a_1)
$$y + dy = \frac{a}{x + dx} \cdot \frac{x - dx}{x - dx}$$
$$= \frac{ax}{x^2 - dx^2} - \frac{a\,dx}{x^2 - dx^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}.$$

b)
$$y = \frac{x^2 + ax}{bx + c},$$

für den Nachbarpunkt wird

$$(y + dy)(bx + b\,dx + c) = (x + dx)^2 + a(x + dx)$$
$$y(bx + c) + dy(bx + c) + yb\,dx = x^2 + 2x\,dx + ax + a\,dx$$

$$dy\,(bx + c) = (2x + a)\,dx - by\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x + a)(bx + c) - (x^2 + ax)\,b}{(bx + c)^2}$$

c)

$$y = a\sqrt[3]{x}$$
$$y^3 = a^3 x$$
$$(y + dy)^3 = a^3 (x + dx)$$
$$3y^2 dy = a^3 dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^3}{3y^2} = \frac{1}{3}\,a \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

d)

$$y = \sqrt{a^2 + x^2}$$
$$y^2 = a^2 + x^2$$
$$y^2 + 2y\,dy = a^2 + x^2 + 2x\,dx$$
$$2y\,dy = 2x\,dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Die trigonometrischen Funktionen behandelt man nach dem Additionstheorem. Es ist dabei noch zu beachten, daß für kleine Winkel $\sin dx = dx$,*) $\cos dx = \sqrt{1 - \sin^2 dx} = \sqrt{1 - dx^2} = 1 - \frac{dx^2}{2} = 1$ und folglich $\operatorname{tg} dx = dx$ ist.

e)

$$y = \sin x$$
$$y + dy = \sin(x + dx)$$
$$= \sin x \cos dx + \cos x \sin dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

f)

$$y = \sin(a - x)$$
$$y + dy = \sin(a - x - dx)$$
$$= \sin(a - x)\cos dx - \cos(a - x)\sin dx$$
$$\frac{dy}{dx} = -\cos(a - x).$$

g)

$$y = \operatorname{tg} x$$
$$y + dy = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} dx}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} dx}$$
$$y + dy - y \operatorname{tg} x \cdot dx = \operatorname{tg} x + dx$$
$$dy = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

h)

$$y = a\cos^2 x$$
$$y + dy = a(\cos x \cos dx - \sin x \sin dx)^2$$
$$= a(\cos x - \sin x\,dx)^2$$
$$= a\cos^2 x - 2a\cos x \sin x\,dx$$
$$\frac{dy}{dx} = -2a\sin x \cdot \cos x$$
$$= -2a\sin 2x.$$

---

*) Nähere Begründung siehe unter Grenzwert.

i) $$y = \frac{a}{\sin x}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a \cos x}{\sin^2 x}$$
$$= -\frac{a}{\sin x \operatorname{tg} x}.$$

k) $$y = \frac{a \sin x}{\cos^2 x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\cos^3 x}(1 + \sin^2 x).$$

2. Grenzwert.

Wenn eine veränderliche Größe $f(x)$ für einen Wert von x, z. B. $x = \alpha$, einer Zahl a beliebig nahe gebracht werden kann (oder wenn die Differenz $f(\alpha) - a$ sich unbegrenzt der Null nähert), dann sagt man, die Grenze (limes) von $f(\alpha)$ ist gleich a und schreibt $\lim\limits_{x=\alpha} f(x) = a$. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob $f(x)$ den Wert a erreicht oder nicht, z. B. die obere Grenze aller echten Brüche ist 1, denn 1 ist zwar selbst kein Bruch, sondern eine ganze Zahl, aber der Bruch 0,999 ... kann der 1 beliebig nahe gebracht werden; man sagt daher: der Grenzwert von 0,999 ... ist gleich 1, oder $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

Bestimme den Grenzwert von

1. a) $\frac{1}{n}$ b) $\frac{2n-1}{n}$ c) $\frac{2n+1}{n}$ d) $\frac{2n}{3n-4}$

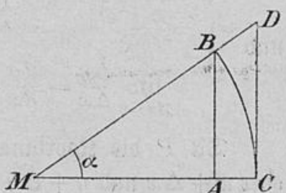
e) $\frac{n(n \pm 1)}{2n^2}$ f) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$ für $n = \infty$.

2. a) $\frac{n+1}{n-2}$ b) $\frac{2n-3}{3n+4}$ c) $\frac{n^2-n+1}{n^2+2n+3}$ d) $\frac{2n^2+n-3}{n^2-2n+6}$

e) $\frac{2n^2-1}{3n^3+1}$ f) $\frac{(n-1)(2n+3)(3n-4)}{(n+1)(n+2)(2n-3)}$ für $n = 0$ und $n = \infty$.

3. a) $\lim\limits_{k=0} \frac{(x+k)^2 - x^2}{k}$ b) $\lim\limits_{k=0} \frac{a(x+k)^3 + b(x+k) - ax^3 - bx}{k}$

4. a) $\lim\limits_{k=0} \frac{\sin k}{k}$



Es ist $ABM < BCM < CDM$

$$\frac{1}{2} r \sin \alpha \cdot r \cos \alpha < \frac{1}{2} r \cdot r\alpha < \frac{1}{2} r \cdot r \operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos \alpha < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

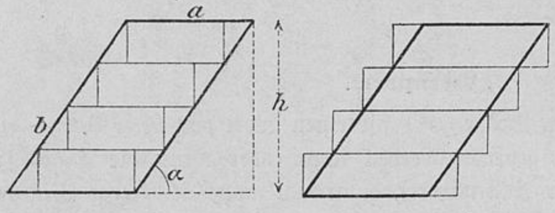
b) $\lim\limits_{k=0} \frac{1-\cos k}{k}$ c) $\lim\limits_{k=0} \frac{\operatorname{tg} k}{k}$ d) $\lim\limits_{k=0} \frac{1-\cos k}{\sin k}$ *)

*) Man erhält auch durch Einführung halber Winkel

$$\frac{1-\cos k}{\sin k} = \frac{2 \sin^2 \frac{k}{2}}{2 \cdot \sin \frac{k}{2} \cos \frac{k}{2}} = \operatorname{tg} \frac{k}{2}.$$

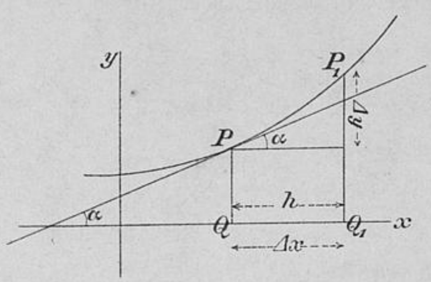
5. a) $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ c) $\lim\limits_{n=\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

durch Reihenentwicklung.



6. Die Höhe eines Parallelogramms (a, h, α) ist in n gleiche Teile geteilt und zur Grundlinie sind Parallelen gezogen (s. Fig.) a) Wie groß ist die Summe der eingeschriebenen, b) der umgeschriebenen Rechtecke? c) Welcher Grenze nähern sich beide Summen, wenn $n = \infty$ wird?

3. Der Differentialquotient.



Die Neigung einer Kurve war vorhin vorläufig festgesetzt; die strenge Erklärung lautet: Wenn $y = f(x)$ ist und x wächst um h, dann ist der Grenzwert von $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für $h = 0$ der gesuchte Wert; oder wenn x um Δx wächst, so ändert sich y um Δy; nun berechnet man den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und läßt dann $\Delta x = 0$ werden. Zur Abkürzung setzt man gewöhnlich

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

und

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = y' = \operatorname{tg}\alpha .$$

Da P die Koordinaten xy, P_1 die Koordinaten $x+h$ und $f(x+h)$ oder $x+\Delta x$ und $y+\Delta y$ hat, so bezeichnet man den Grenzwert des Differenzenquotienten auch als Differentialquotienten.

Wenn man hiernach den Differentialquotienten bestimmt, so erhält man dieselben Rechnungen wie vorhin, der Unterschied liegt nur darin, daß die Glieder, die vorhin „vernachlässigt" wurden, jetzt streng fortfallen, sobald man $h = 0$ oder $\Delta x = 0$ setzt. Durch die Einführung des Grenzbegriffes wird also eine scharfe Definition für den Differentialquotienten geschaffen, und die unbestimmten Begriffe des Unendlichkleinen und des Vernachlässigens werden beseitigt.

Zu beachten ist noch, daß hiermit nur der Differentialquotient erklärt ist, die Differentiale dx und dy haben zunächst noch keine Bedeutung. Wir setzen daher fest: wenn $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ist, so soll, wenn dx einen kleinen Wert bedeutet, $dy = f'(x) \cdot dx$ sein, d. h. wir nehmen an, daß die Funktion eine kurze Strecke hindurch gleichmäßig mit der Tangente wächst. Statt eines Differentialquotienten, z. B. $\frac{dy}{dx} = ax^2$, kann man also immer auch die Gleichung $dy = ax^2 \cdot dx$ schreiben.

Als Beispiele behandelt man Funktionen zweiten Grades oder die folgenden Funktionen dritten Grades ebenso wie I, **1—11.**

1. a) $y = x^3$ b) $y = 2x^3$ c) $y = 0{,}1x^3$

d) $y = -x^3$ e) $y = -0{,}5x^3$ f) $y = \frac{x^3}{p^2}$.

2. a) $y = x^3 + 1$ b) $y = x^3 - 2$ c) $y = 3 - x^3$.

3. a) $y = x^3 - 4x$ b) $y = x^3 + 6x$ c) $y = 0{,}2x^3 - 1{,}8x$

d) $y = 2x - 0{,}5x^3$ e) $y = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x^3$ f) $y = \frac{x^3}{a^2} - 9x$

g) $y = x^3 + 2x^2$ h) $y = x^3 - 3x^2$ i) $y = 4x^2 - x^3$.

4. a) $y = x(x-1)(x-2)$ b) $y = x(x-1)(x+3)$

c) $y = 0{,}1x(x-1)(3-x)$ d) $y = 0{,}1x(x+1)(x+4)$

5. a) $y^3 = 8x$ b) $y^3 = 8(x-1)$ c) $y^3 = \frac{27}{8}(3-x)$.

6. a) $y^2 = \frac{1}{3}x^3$ b) $y^3 = 2x^2$ c) $y^3 = \frac{1}{4}(x-2)^2$.

$1_1 - 4_1$ ersetze in **1.—4.** y durch y^2.
$1_2 - 4_2$ " " " y " y^3.
Weitere Beispiele s. Aufgaben II, S. 38.

Wenn x und y Strecken [oder Zahlen] sind, dann bedeutet der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ eine Zahl, welche gleich der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels ist.

Welche Bedeutung hat $\frac{dy}{dx}$, wenn

1. y eine Fläche, x eine Strecke,
2. y ein Rauminhalt, x eine Strecke,
3. y eine Strecke, x eine Zeit,
4. y eine Geschwindigkeit, x eine Zeit ist?

z. B. 1. a) $F = a^2$, b) $K = r^2\pi$, welche geometrische Bedeutung hat $\frac{dF}{da}$, $\frac{dK}{dr}$?

2. a) $I = w^3$, b) $K = \frac{4r^3}{3}\pi$, welche geometrische Bedeutung hat $\frac{dI}{dw}$, $\frac{dK}{dr}$?

3. a) $s = ct + \frac{g}{2}t^2$, b) $s = a\cos t$, c) $s = a\sin\alpha t$,

4. a) $v = c + gt$, b) $v = -a\sin t$, c) $v = a\,\alpha\cos\alpha t$.

4. Fehlerbestimmung.*)

Die meisten Größen können nicht direkt gemessen werden, sondern sie werden aus gemessenen Größen durch Rechnung abgeleitet, z. B. der Inhalt eines Quadrats oder einer Kugel wird durch Messung der Seite oder des Durchmessers bestimmt. Da bei jeder Messung ein Beobachtungsfehler entsteht, so muß man den Einfluß untersuchen, welchen dieser Fehler auf das Ergebnis hat. Es empfiehlt sich, dabei die Bezeichnung der Differentialrechnung anzuwenden, also den Fehler von x mit dx, von r mit dr zu bezeichnen, sodaß, wenn x eine gemessene Größe ist, der wahre Wert davon zwischen $x + dx$ und $x - dx$ liegt. Da die Fehler im Verhältnis zur gemessenen Größe immer klein sind, so sollen, ebenso wie in I. die Quadrate und die höheren Potenzen von dx gegen dx vernachlässigt werden. Z. B.: Der Inhalt eines Kreises ist $F = r^2\pi$, durch den Beobachtungsfehler dr geht der Inhalt über in $F + dF = (r + dr)^2\pi = r^2\pi + 2r\,dr\cdot\pi$, also $dF = 2r\pi\cdot dr$ d. h. wenn der Radius r 1 cm beträgt, so bewirkt ein Fehler von 0,1 mm, daß der Inhalt des Kreises um 6,28 qmm unsicher ist. Wenn $r = 1$ dm, so bewirkt derselbe Fehler von 0,1 mm beim Radius einen Fehler von 62,8 qmm beim Kreise, für $r = 1$ km wird $dF = 0{,}628$ qm.

Häufig ist neben dem absoluten Fehler auch der relative von Bedeutung, d. h. das Verhältnis des Fehlers zu der gemessenen Größe. Durch Division von dF durch F erhält man $\frac{dF}{F} = 2\cdot\frac{dr}{r}$, also der relative Fehler bei der Kreisfläche ist doppelt so groß wie bei dem Radius, oder wenn die Unsicherheit bei der Messung des Halbmessers 1% beträgt, so steigt die Unsicherheit bei der Kreisfläche auf 2%. Umgekehrt, wenn F bis auf 1% richtig sein soll, so muß r bis auf 0,5% genau gemessen sein. Hieraus folgt auch, daß, wenn eine Strecke auf 3 (oder 4) geltende Ziffern gemessen ist, so können bei den daraus abgeleiteten Flächen oder Körpern auch nur 3 (oder 4) geltende Ziffern richtig sein.

1.—4. Es ist gemessen die Strecke $s = 25$ cm mit dem Fehler $ds =$ a) 0,8 cm, b) 1 mm, c) 0,2 mm, d) 0,03 mm, e) 0,001 mm.

*) Dieser Abschnitt soll nicht im Zusammenhange durchgenommen werden, sondern man kann entsprechende Fragen an jede beliebige Aufgabe knüpfen.

Wie groß ist der Inhalt **1.** eines Quadrats, **2.** eines gleichseitigen Dreiecks, **3.** eines Sechsecks, **4.** eines Kreises mit der Seite s? α) Wieviel % beträgt der Fehler bei der Messung der Strecke? β) Wie groß ist der absolute und γ) der relative Fehler bei der Fläche?

1_1—4_1 Die entsprechenden Aufgaben für **1_1** Würfel, **2_1** Achtflach, **3_1** Vierflach, **4_1** Kugel.

5. Die Fläche eines Quadrats, und **6.** eines Kreises sei a) 1 qkm $\pm$ 100 qm, b) 25 qcm $\pm$ 1 qmm. Wie groß ist die Seite (Halbmesser) und bis zu welcher Genauigkeit ist die Bestimmung möglich?

7. Der mittlere Erdradius ist nach Bessel 6370 km (nach Clarke 6371 km). Wie ändert sich a) die Oberfläche und b) der Inhalt der Erde, wenn man den Halbmesser 1 m größer oder kleiner annimmt?

8. Ein Kupferdraht ist 1 mm dick und 1 km lang. a) Wie groß ist das Gewicht? b) Wie ändert sich das Gewicht, wenn bei Bestimmung der Dicke ein Fehler von 0,01 mm, c) bei der Dichte von 0,01 vorgekommen ist?

9. Es ist die Strecke $s = 5$ m und der Neigungswinkel $\alpha = 1^0$; 40^0; 89^0 gegeben. a) Wie lang ist der Grundriß und b) der Aufriß? a_1 b_1). Wie ändern sich diese Größen, wenn α um $0{,}1^0$ wächst?

10. Ein 10 km langer Weg steigt unter 1^0 auf. a) Wie lang ist der Grundriß, b) wie hoch liegt der Endpunkt über dem Ausgangspunkt? a_1 b_1). Welche Änderung tritt ein, wenn die Steigung um $0{,}01^0$ unsicher ist?

$$\left[\cos\alpha = \sqrt{1-\alpha^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2}\right].$$

11. In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete $s = 5$ m und $\alpha = 1^0$; 40^0; 89^0 gegeben. a) Wie lang ist die Hypotenuse und b) die andere Kathete? a_1 b_1). Wie ändern sie sich, wenn α um $0{,}01^0$ wächst?

Weitere Beispiele s. Aufgaben II, S. 68, 1—7.

12. a) Der Abstand des Mondes ist $a = r : \sin\alpha$, worin $r = 6370$ km und $\alpha = 57'$. Wie groß ist a, und wie hat sich a geändert, wenn $\alpha = 57{,}6'$ gemessen wird?

b) Für die Sonne ist $\alpha = 0{,}002444^0$; wie groß wird a und welchen Einfluß hat eine Änderung von α am $0{,}0001^0$?

13. Von den Endpunkten einer Standlinie von $c = 100$ m erscheint ein in derselben Richtung liegender Berg unter den Winkeln $\alpha = 20^0$ und $\beta = 22^0$. a) Wie hoch ist der Berg? b) Welchen Einfluß hat ein Fehler von $0{,}01^0$ [$0{,}001^0$] bei der Messung von α, c) von β und d) von 0,01 m bei c?

14. Die Länge des Tagebogens wird bestimmt durch $\cos t = -tg\,a\ tg\,b$, worin a die Abweichung, b die Breite bezeichnet. a) Wie groß ist t für den 1. April 1900 in Greenwich und b) wie ändert sich t, wenn a um $0{,}01^0$ wächst? α) Wieviel ist der Nachmittag länger als der Vormittag?*) β) Wann erfolgt der Sonnenaufgang 1907; 1908; 1909; 1910? γ) Wie ändert sich t bei einer um $0{,}001^0$ größeren Breite? δ) Wieviel Kilometer muß man nach Norden gehen, damit eine Änderung der Tageslänge von 1 Sekunde eintritt?

15. Am 6. Mai beobachtet man beim Aufgang der Sonne eine Morgenweite $m = 45^0$. a) Welche geographische Breite ergibt sich daraus und b) wie groß ist die erreichte Genauigkeit, wenn m bis auf $0{,}1^0$ festgestellt ist?

16. a) Welche Höhe erreicht in Rom die Sonne am 1. Mai, wenn sie gerade im Osten steht? b) Wie ändert sich die Höhe mit der Breite, und c) mit der Abweichung?

17. a) Ein Zwanzigmarkstück wiegt in Luft $p = 7{,}965$ g, in Wasser $q = 7{,}500$ g. α) Wie groß ist die Dichte? β) Welchen Einfluß hat ein Fehler von 0,001 g bei der Bestimmung von p oder γ) von q?

b) Dasselbe für ein Einmarkstück: $p = 5{,}556$ g, $q = 5{,}016$ g und

c) für ein Stück Glas: $p = 1{,}350$ g, $q = 0{,}810$ g.

18. a) Die Wurfweite ist $w = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha$. α) wie groß ist w für $c = 500$ m und $\alpha = 5^0$; 40^0; 80^0? β) Wie ändert sich w, wenn $dc = 1$ m oder γ) $d\alpha = 0{,}1^0$? δ) Für welchen Wert von α ist die Änderung von w am geringsten?

b) Dieselben Aufgaben für die Wurfhöhe $h = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha$.

19. Um den inneren Widerstand w eines galvanischen Elementes $\left(I = \frac{E}{w}\right)$ zu bestimmen, schaltet man den Widerstand R ein und erhält $i = \frac{E}{w + R}$ oder $w = \frac{iR}{I - i}$. Wie groß muß man i wählen, damit w möglichst genau bestimmt wird? $\left(\frac{dw}{di} = 0\right)$.

5. Maximalaufgaben.

Bestimme die größten und kleinsten Werte für Aufgaben von folgender Form:

I. $y = ax^2 + bx + c$ II. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

III. $y = ax + b + \frac{c}{x + d}$ IV. $y = ax + b + \sqrt{cx + d}$

*) Angaben über die Änderung der Deklination findet man in der Logarithmentafel des Verfassers.

V. $y = ax + b + \sqrt{cx^2 + dx + e}$

VI. Aufgaben aus der Geometrie, Raumlehre, Physik usw.

Zahlreiche Beispiele hierzu findet man in Aufgaben I, S. 121 – 126 und II, S. 39—40 und 183—187.

6. Der zweite Differentialquotient.

Wenn $y = x^2(3 - x)$ ist, so wird $y' = \frac{dy}{dx} = 6x - 3x^2$. Dies ist wieder eine Funktion von x, man kann also davon den Differentialquotienten bilden und man schreibt $\frac{dy'}{dx} = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 6 - 6x$.

Zeichnet man y, y' und y'' in demselben Koordinatensystem und betrachtet die Kurve von P_0 $(x = 0,\ y = 0)$ bis P_2 $(x = 2, y = 4)$, so ist der Differentialquotient anfangs 0, wächst, nimmt dann ab und erreicht bei P_2 wieder den Wert 0. Der größte Wert von y' muß natürlich da liegen, wo $\frac{dy'}{dx} = y'' = 0$ wird, also bei P_1 $(x = 1,\ y = 2)$. Von P_0 bis P_1 und überall da, wo $y'' > 0$ ist, wendet die Kurve die konvexe Seite der x-Achse zu, von P_1 bis P_2, wo $y'' < 0$ ist, die konkave Seite. [Wenn die Kurve unterhalb der x-Achse liegt, z. B. für $y = x^2(3 - x) - 4$, ist es umgekehrt, die Kurve ist für $y'' > 0$ konkav, $y'' < 0$ konvex zur x-Achse.]

Der Punkt P_1, in dem die eine Krümmung in die andere übergeht, heißt **Wendepunkt**, und man findet ihn durch die Bedingung $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Bestimme die Lage der Wendepunkte für beliebige Kurven dritten oder vierten Grades. Beispiele s. S. 13 und Aufgaben II S. 38.

Ferner für

1. $y = \sin\alpha$ **2.** $y = \cos\alpha$ **3.** $y = \operatorname{tg}\alpha$

4. $y = \sin^2\alpha$ **5.** $y = \sin\alpha\cos\alpha$ **6.** $y = \cos^2\alpha$

7. $y = \sin 2x$ **8.** $y = 2\cos 2x$ **9.** $y = 1{,}5\sin 3x$

10. $y = \sin x + \sin 2x$ **11.** $y = \cos x + \cos 2x$

12. $y = 2\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ **13.** $y = 2\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$

14. $y = \cos 2x \pm \frac{1}{2}\cos x$ **15.** $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

7. Anwendung auf die Physik.

Eine Kurve ist stetig gekrümmt, wir konnten aber durch Differentialrechnung feststellen, wie groß die Steigung der Kurve in jedem einzelnen Punkte ist, indem wir annahmen, daß die Kurve für eine kurze Strecke sich durch die Tangente ersetzen läßt. Die große Bedeutung der Differentialrechnung liegt nun darin, daß man durch dieselbe Betrachtung überall, wo eine stetige Veränderung vor sich geht, aus der Kenntnis des ganzen Vorganges bestimmen kann, wie die Entwickelung an jedem Ort und in jedem Augenblick verläuft. Die genauere Erklärung physikalischer Erscheinungen ist also nur durch Differentialrechnung*) möglich. Z. B. Wenn man beim freien Fall, beim Fall auf der schiefen Ebene, oder bei der Atwoodschen Fallmaschine beobachtet, daß der Weg proportional dem Quadrat der Zeit ist $s = \frac{b}{2} t^2$, so folgt daraus, daß in jedem Punkte die Geschwindigkeit (= Weg durch Zeit) $\frac{ds}{dt} = bt$, und die Änderung der Geschwindigkeit oder die Beschleunigung konstant $\frac{dv}{dt} = b$ sein muß.

Wenn man beobachtet, daß bei den Schwingungen eines Pendels, oder eines elastischen Stabes, einer gespannten Saite der Abstand von der Ruhelage gegeben ist durch $x = a \sin \alpha t$, so folgt daraus, daß die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = a\alpha \cos \alpha t$, und die Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2} = -a\alpha^2 \sin \alpha t = -\alpha^2 x$, also proportional dem Abstande von der Ruhelage ist.

Beobachtet man eine elliptische Bahn um den Mittelpunkt nach den Gleichungen $x = a \cos \alpha t$, $y = b \sin \alpha t$, so wird $v_x = \frac{dx}{dt} = -a\alpha \sin \alpha t$, $v_y = b\alpha \cos \alpha t$, und $b_x = -a\alpha^2 \cos \alpha t$, $b_y = -b\alpha^2 \sin \alpha t$, die Beschleunigung ist also $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \alpha^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha t + b^2 \sin^2 \alpha t} = \alpha^2 \sqrt{x^2 + y^2}$ d. h. proportional dem Abstande vom Mittelpunkte.

Ebenso kann man aus den Keplerschen Gesetzen das Newtonsche erhalten, aus der Wirkung eines Stromkreises auf einen Magnetpol die Wirkung eines Stromteilchens auf den Pol usw.

8. Umkehrung der Differentialrechnung.

Aus $a + b = c$ folgt $a = c - b$,
„ $ab = c$ „ $a = \frac{c}{b}$,
„ $a^n = b$ „ $a = \sqrt[n]{b}$,

umgekehrt kann man aus den rechts stehenden Gleichungen wieder die ursprünglichen ableiten. Entsprechendes gilt auch von der Differentialrechnung.

Aus $y = ax$ wurde abgeleitet $dy = a dx$,
„ $y = bx^2$ „ „ $dy = 2bx \cdot dx$,
„ $y = \frac{a}{x^3}$ „ „ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3a}{x^4}$,

*) Anwendungen der Integralrechnung auf Physik s. S. 23—26.

Aus $y = a\sqrt{x}$ wurde abgeleitet $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$,

„ $y = a \sin x$ „ „ $dy = a \cos x\,dx$ usw.,

also folgen aus den Differential-Gleichungen rechts auch die Gleichungen links. Diese Umkehrung des Differenzierens bezeichnet man als Integrieren, Integralrechnung und das Rechnungszeichen ist $\int$. Es wird also

$$\int f(x)\,dx = F(x), \text{ wenn } \frac{d\,[F(x)]}{dx} = f(x) \text{ ist.*)}$$

1. a) $\int 2\,dx$ b) $\int 3x\,dx$ c) $\int 6x^2\,dx$

d) $\int (2x+3)\,dx$ e) $\int (4x-5)\,dx$ f) $\int \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{4}\right) dx$

g) $\int (0{,}1\,x^2 + 0{,}2)\,dx$ h) $\int (3 - 0{,}4\,x^2)\,dx$ i) $\int (a - bx^2)\,dx$

k) $\int (2x^3 + 3x^5)\,dx$ l) $\int (5x^4 - 6x^3)\,dx$

m) $\int \left((n+1)\,x^n - (n-1)\,x^{n-1}\right) dx.$

2. a) $\int \frac{a\,dx}{x^2}$ b) $\int \frac{3\,dx}{x^5}$ c) $\int \left(2x - \frac{3}{x^2}\right) dx.$

3. a) $\int a\sqrt{x}\,dx$ b) $\int a\sqrt{bx^3}\,dx$ c) $\int \sqrt{a+bx}\,dx.$

d) $\int \sqrt[3]{ax}\,dx$ e) $\int \sqrt[3]{ax^2}\,dx$ f) $\int \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{x}}\,dx.$

4. a) $\int a \sin x\,dx$ b) $\int a \cos \alpha x\,dx$ c) $\int 2 \sin x \cos x\,dx.$

9. Weitere Übungen.

1. Wenn $y = ax^n$ ist, so wird $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$. Beweise, daß diese Regel auch für negative und gebrochene Exponenten gilt.

2. Wie groß ist $\frac{dy}{dx}$, wenn $y =$ a) uv, b) $u:v$ ist, und uv Funktionen von x sind?

3.
$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$
$$y + dy = e^{x+dx} = e^x \cdot e^{dx}$$
$$= e^x\left(1 + \frac{dx}{1} + \frac{dx^2}{1 \cdot 2} + \cdots\right)$$

*) Die Bedeutung dieser Rechnungsart wird im nächsten Abschnitt besprochen, dort wird auch die Konstante oder die Integration zwischen Grenzen eingeführt.

$$dy = e^x \left(dx + \frac{dx^2}{1 \cdot 2} + \cdots\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

4. $$y = e^{\alpha x}; \quad \frac{dy}{dx} = \alpha \cdot e^{\alpha x}$$

5. $$y = 10^x = (e^\alpha)^x = e^{\alpha x}.$$

$$e^\alpha = 10$$

$$\alpha = \log \text{nat } 10 = 2{,}303 \text{ oder } 1 = \alpha \log e$$

$$\frac{dy}{dx} = 2{,}303 \cdot 10^x = \frac{1}{0{,}4343} \cdot 10^x = 2{,}303\, y.$$

6. $$y = 2^x = e^{\alpha x}$$

$$e^\alpha = 2$$

$$\alpha = \log \text{nat } 2 = 0{,}693 \text{ oder } \log 2 = \alpha \cdot \log e$$

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}693 \cdot 2^x = 0{,}693\, y.$$

7. Aus **3.** folgt $x = \log \text{nat } y$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$

$$\frac{d \log \text{nat } x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

8. $$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{2{,}303\, x} = \frac{0{,}4343}{x}$$

z. B. für $x = 1000$ u. $dx = 1$ wird $\frac{d \log x}{dx} = 0{,}0004343$

" $x = 2000$ " $dx = 1$ " " $= 0{,}000217$

" $x = 5000$ " $dx = 1$ " " $= 0{,}000087$

Der Differentialquotient ergibt die Proportionalteile genauer als die Logarithmentafel.

II. Integralrechnung.

1. Potenzsummen.

1. Setzt man in $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ für x der Reihe nach die Werte 1; 2; 3; $\cdots n$ und addiert alle Gleichungen, so erhält man $0 = n^2 - 2(1 + 2 + 3 \cdots n) + n$. Wie groß wird also $1 + 2 + 3 + \cdots n = \sum n$?
2. Bestimme auf dieselbe Weise aus $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ den Wert von $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \sum n^2$.
3. Bestimme auf dieselbe Weise $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \sum n^3$ und **4.** $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots n^4 = \sum n^4$.

1_1—4_1. Berechne diese Summen für $n =$ α) 4; β) 10; γ) 100; δ) 10^5; ε) 10^6 auf 4 geltende Ziffern.

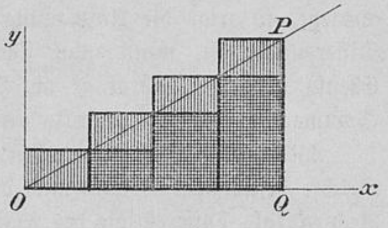
1_2—4_2. Berechne diese Summen für α) 1 bis $n-1$; β) 1 bis $2n$; γ) von n bis $2n$.

5. Wie groß sind die Werte von a) $\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdot\cdot n)$;

b) $\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdot\cdot n^2)$; c) $\frac{1}{n^4}(1^3+2^3+\cdot\cdot n^3)$; d) $\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+\cdot\cdot n^4)$, in welchem Grenzwert nähern sie sich, wenn n unendlich groß wird?

6. Dasselbe, wenn man im Zähler nur bis a) $n-1$; $(n-1)^2$; $(n-1)^3$; $(n-1)^4$ geht.

7. Es sei $OQ = a$, $PQ = b$ und die Gleichung der geraden Linie OP sei $y = \frac{b}{a}x$. Wenn man a in n gleiche Teile teilt, in den Teilpunkten Lote errichtet und Parallelen zieht (s. Fig.), wie groß wird a) die Summe der senkrecht schraffierten Rechtecke, b) die Summe der wagerecht schraffierten? c) Welchem Grenzwert nähern sich beide Summen, wenn $n = \infty$ wird?



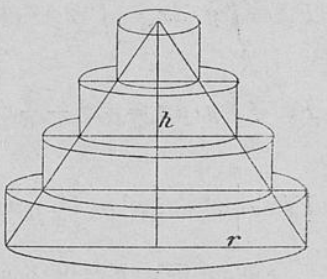
Die entsprechenden Aufgaben, wenn die Gleichung für OP lautet:

8. $y = cx^2$, **9.** $y = \frac{x^2}{2p}$, **10.** $y = qx^3$, **11.** $y = tx^4$.

Bestimme die Flächeninhalte*) OPQ für $a =$ α) 2 cm, β) 3 cm, wenn gegeben ist: **12.** $y = x^2$, **13.** $y = 0{,}6\,x^2$, **14.** $y = 0{,}1\,x^3$, **15.** $y = 0{,}05\,x^4$. **16.** $y = 0{,}5\,x^2 + x$, **17.** $y = 0{,}3\,x\,(x+2)$, **18.** $y = 0{,}1\,x^3 + 0{,}4\,x^2$, **19.** $y = -x^2$, **20.** $y = -0{,}4\,x^2 - 0{,}5\,x$, **21.** $y = -0{,}2\,x^3 - 0{,}8\,x$.

12_1—21_1. Wie groß sind die Flächen zwischen der Kurve in der x-Achse von α) $x = 0$ bis $x = 1$, β) $x = 1$ bis $x = 2$, γ) $x = 2$ bis $x = 3$, δ) $x = 3$ bis $x = 5$? Zeige, daß $F^2{}_0 = F^1{}_0 + F^2{}_1$; $F^3{}_2 = F^3{}_0 - F^2{}_0$ usw.

22. Die Höhe eines Kegels ist in n gleiche Teile geteilt und durch die Teilpunkte sind Ebenen parallel zur Grundfläche gelegt. a) Wie groß ist die Summe der n Walzen (s. Fig.)



*) Zeichne die Figuren auf Millimeter-Papier (1 = 1 cm), zähle die Quadratmillimeter und vergleiche hier und im folgenden die so erhaltenen Werte mit den berechneten.

welche um den Kegel beschrieben sind? b) Wie groß ist die Summe der $n-1$ innerhalb des Kegels liegenden Walzen? c) Welchem Grenzwerte nähern sich beide Summen, wenn $n = \infty$ wird?

23. Wie groß werden diese Summen, wenn in ähnlicher Weise gerade Walzen bei einem schiefen Kegel gezeichnet werden (Satz des Cavalieri).

24.—29. Wie groß sind diese Summen, wenn gerade Prismen in ähnlicher Weise bei einer geraden **24.** vierseitigen, **25.** dreiseitigen, **26.** n-seitigen Pyramide oder bei einem schiefen **27.** vierseitigen, **28.** dreiseitigen, **29.** n-seitigen Prisma gezeichnet werden.

2. Integralrechnung.

Wenn ein Kreis $r^2 \pi$ gegeben ist, so ist das Differential $2 r \pi \cdot dr$ die Fläche eines schmalen Ringes; umgekehrt wenn man von dem Differential ausgeht, so zeigt die Anschauung, daß das Integral $r^2 \pi$ die Summe aller Differentiale ist, wenn man sich den Radius von o bis r wachsend denkt. Ebenso ist das Quadrat a^2 die Summe aller Differentiale $2a \cdot da$, da die Summe der kleinen Quadrate da^2 beim Grenzübergang verschwindet.

Wenn $y = x^2$ ist, und man soll die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse bestimmen, so kann man die im vorigen Abschnitte **7.—11.** erwähnten Rechtecke als Differentiale des Flächeninhalts ansehen $dF = y \cdot dx = x^2 \cdot dx$, und man findet daraus einfacher und übersichtlicher dieselben Ergebnisse wie vorhin $F = \frac{1}{3} x^3$. Dies unbestimmte Integral erlangt einen bestimmten Wert, wenn man es es zwischen Grenzen nimmt.

Es ist durchaus notwendig, daß man bestimmte Beispiele, etwa $y = 2x - 0{,}5x^2$ auf Millimeterpapier aufzeichnet, die Flächeninhalte F_0^1, F_1^2, $F_2^3 \ldots$ berechnet und mit der Zeichnung vergleicht. Wenn y negativ ist, wird natürlich auch $y \cdot dx$ und damit der Flächeninhalt negativ z. B.

$$F_0^2 = \int_0^2 y \cdot dx = \int_0^2 (2x - 0{,}5x^2)\,dx = \Big|_0^2\, x^2 - 0{,}5\,\frac{x^3}{3} = 4 - \frac{4}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ qcm},$$

$$F_0^4 = \int_0^4 y \cdot dx = \Big|_0^4\, x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 16 - \frac{32}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ qcm},$$

$$F_0^5 = \Big|_0^5\, x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 4\frac{1}{6} \text{ qcm}.$$

Man sieht F_0^4 ist doppelt so groß wie F_0^2, dagegen F_0^5 ist offenbar nicht richtig, da hier $F_0^5 < F_0^4$ ist. Man muß daher F_0^5 zerlegen in $F_0^4 + F_4^5$, und $F_4^5 = 4\frac{1}{6} - 5\frac{1}{3} = -1\frac{1}{6}$ qcm.

Ebenso bestimme man die Fläche zwischen der Kurve und der y-Achse $dF = x \cdot dy = x(2-x)dx$. Wie groß wird F_0^1, F_1^2, F_2^3? Was bedeutet das negative Zeichen in diesem Falle?

Ähnliche Inhaltsbestimmungen kann man für beliebige Parabeln $y = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$ ausführen.

Rotationskörper.

Es ist die Parabel $y^2 = 2px$ gegeben und für $x = a$ sei $y = b$.

1. Wie groß ist das Parabolid, das durch Umdrehung um die x-Achse entsteht?

$$dI = y^2\pi \cdot dx = 2px \cdot \pi \cdot dx$$

$$I = \Big|_0^a p\pi x^2 = p\pi a^2 = \frac{1}{2}ab^2\pi.$$

2.—3. Bestimme die Körper, die bei der Rotation um die y-Achse und **3.** um $y = b$ entstehen.

$$dI = x^2\pi \cdot dy = \frac{y^4}{4p^2}\pi dy \text{ und } dI = (a-x)^2\pi dy.$$

4. Man bestimme den Inhalt eines Kegels, wenn das Achsenkreuz a) durch die Spitze oder b) durch den Mittelpunkt der Grundfläche gelegt wird.

5. Inhalt von a) Kugel und b) Kugelabschnitt, wenn man das Achsenkreuz α) durch den tiefsten Punkt, β) durch den Mittelpunkt legt.

6. Inhalt von Ellipsoid und **7.** Hyperboloid.

8. Rotationskörper, die durch Umdrehung von Kurven dritten Grades entstehen.

Die Gleichung für die Bogenlänge einer beliebigen Kurve läßt sich zwar leicht aufstellen, weil $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ist, aber die Ausführung der Integration ist gewöhnlich schwieriger als in den vorigen Fällen.

3. Drehungsmoment und Schwerpunkt.

$$D = m \cdot r.$$

Wenn die Parabel $y^2 = 2px$ und für $x = a$, $y = b$ gegeben ist, so ist das Drehmoment um die y-Achse

$$D = \int y dx \cdot x = \int y \cdot \frac{y}{p} dy \cdot \frac{y^2}{2p} = \int_0^b \frac{y^4}{2p^2} dy$$

$$= \Big|_0^b \frac{y^5}{10p^2} = \frac{2}{5}x^2y = \frac{2}{5}a^2b.$$

Die Summe der einzelnen Drehmomente ist gleich dem Drehmoment der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtfläche.

$$\frac{2}{5}a^2b = \frac{2}{3}ab \cdot x_s;\ x_s = 0{,}6a.$$

In derselben Weise findet man die y-Koordinate des Schwerpunkts y_s, und die Schwerpunkte für beliebige Flächen und Körper, z. B. $y = 0{,}2x^3$; $y^2 = 0{,}2x^3$; $y^4 = px^3$, Kegel, Kugel, Kugelabschnitt, Paraboloid.

4. Trägheitsmoment.

$$T = mr^2.$$

1. Ein Stab von der Länge l dreht sich um eine Achse, die senkrecht zum Stabe a) durch einen Endpunkt, b) durch den Mittelpunkt, c) durch einen Punkt geht, der um a von einem Endpunkte entfernt ist. Wie groß ist das Trägheitsmoment?

a) Setzt man die Masse von 1 cm gleich m, so wird

$$dT = mdx \cdot x^2$$

$$T = \Big|_0^l m\frac{x^3}{3} = \frac{ml^3}{3} = \frac{M}{3}l^2,$$

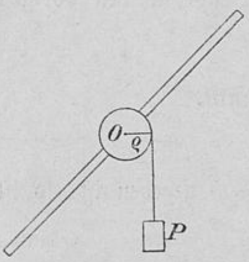
wenn die Masse des Stabes $ml = M$ ist; b) $\frac{M}{12}l^2$; c) $\frac{M}{3}(3a^2 + 3al + l^2)$.

2. Wie groß ist das Trägheitsmoment a) einer Scheibe r, b) eines Ringes $r\varrho$, wenn die Achse durch den Mittelpunkt geht?

a) $dT = m2r\pi dr \cdot r^2$

$$T = \frac{m\pi r^4}{2} = \frac{M}{2}r^2$$

b) $T = \frac{M}{2}(r^2 + \varrho^2)$.



3. Durch eine Stahlachse mit dem Halbmesser ϱ ist eine Stange gesteckt (s. Fig. 8), und um die Achse ein Faden geschlungen, an dem das Gewicht P befestigt ist. Wenn dies h cm herunterfällt, wird die Arbeit Ph in die Energie der Bewegung $\frac{m}{2}v^2$ verwandelt. Da bei der drehenden Bewegung v mit dem Abstand von der Drehungsachse wächst, so führt man die Winkelgeschwindigkeit $\frac{v}{r} = \alpha$ ein, die bei der Drehung konstant bleibt. Dann wird

$$Ph = \frac{m}{2}v^2 = \frac{mr^2}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}T \cdot \alpha^2.$$

a) Wie groß ist das Trägheitsmoment T des Apparates, wenn $P = 50$ g, $h = 40$ cm, $\varrho = 4$ mm und die Fallzeit $t = 10$ sek. beträgt?*

Es ist $h = \frac{b}{2}t^2$

$v = bt$ also $b = 0{,}8$ cm, $v = 8$ cm, $\alpha = 20$, $T = 10$.

b) Dasselbe, wenn $\varrho = 0{,}459$ cm ist.

c) Welche Trägheitsmomente haben 2 Bleigewichte von je 40 g im Abstande 22 cm?

d) Welche Fallzeit ergibt sich mit den vorigen Gewichten für $P = 50$ g und $h = 40$ cm?

e) Berücksichtigt man die lebendige Kraft des fallenden Gewichts, so wird $Ph = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}T\alpha^2$. Wie ändern sich dadurch die Ergebnisse der vorigen Aufgaben? (3 geltende Ziffern).

4. Ein Rad macht 2 (n) Umdrehungen in der Sekunde, welche Winkelgeschwindigkeit hat es?

5. Eine Scheibe von $r = 50$ cm wiegt 100 kg, **6.** Ein Schwungring wiegt 1000 kg und hat die Radien 1,8 und 2 m. Wie groß ist das Trägsheitsmoment und die Energie bei 2 (n) Umdrehungen in der Sekunde?

5. Arbeit.

1. Ein Zylinder vom Querschnitt q und Höhe h soll durch eine Pumpe mit Wasser gefüllt werden. Welche Arbeit ist erforderlich, wenn sich die Grundfläche des Zylinders a) 0 m, b) h_1 m über der Wasserfläche befindet?

$dA = q\,dh \cdot h$ b) $A = \frac{1}{2}q[(h + h_1)^2 - h_1^2]$

a) $A = \frac{1}{2}qh^2$ $= qh\left(h_1 + \frac{h}{2}\right)$

2. Dasselbe für einen Kegel, **3.** Kegelstumpf und **4.** Kugel.

$$dA = x^2\pi\,dy \cdot y$$

$$x = \frac{r}{h} \cdot y$$

*) Näheres über die Ausführung dieser Versuche und Material für weitere Aufgaben, di sich durch Versuche bestätigen lassen, findet man in der sehr interessanten Abhandlung von Professor Dr. Mischpeter: Die Behandlung des Trägheitsmomentes in der Schule, Programm des Realgymnasiums auf der Burg, Königsberg i. Pr. 1896.

$$A = \Big|_0^h \frac{r^2}{h^2}\pi \cdot \frac{y^4}{4} = \frac{r^2\pi h}{3} \cdot \frac{3h}{4}.$$

Bei elastischen Kräften ist die Kraft $K = k \cdot s$, die Arbeit $A = \int K ds$
$$= \frac{1}{2} ks^2.$$

Bei der Schwerkraft ist $K = \frac{m}{r^2}$, $\quad A = \int \frac{m}{r^2} dr$
$$= m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Wenn in dem Zylinder einer Dampfmaschine der Dampfzutritt abgesperrt ist, wird $p \cdot v = k$ $\quad A = \int p dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{k}{v} dv$
$$= k \cdot \log \text{nat} \frac{v_2}{v_1}.$$

Durch Integralrechnung findet man ferner den Druck einer Flüssigkeit auf die Seitenwände des Gefäßes, die Bahn bei gegebener Beschleunigung usw.

III. Gleichungen.

1. Schnittpunkte von Kurven und Geraden.

1. Die Schnittpunkte einer Kurve zweiten Grades und einer Geraden werden durch eine Gleichung zweiten Grades bestimmt (Beispiele s. Aufgaben I S. 115). Kurven dritten Grades führen auf eine Gleichung dritten Grades, die sich auf den zweiten Grad zurückführen läßt, wenn die Gerade durch einen gegebenen Punkt der Kurve geht z. B.

$$y = 0{,}1 x^3.$$

Auf der Kurve liegt der Punkt P_1 ($x_1 = 2$ $y_1 = 0{,}8$). $y - 0{,}8 = A(x-2)$ ist eine Gerade, die durch P_1 geht; die Schnittpunkte werden bestimmt durch

$$0{,}1 x^3 - Ax + 2A - 0{,}8 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösung $x_1 = 2$, und muß sich daher durch den Faktor $x - 2$ teilen lassen.

1. Welche Lösungen hat die obige Gleichung für $A =$ a) 1,9; b) 0,7; c) 0,3; d) -1?

Wenn die Gerade im Punkte P_1 berührt, so fallen hier zwei Lösungen zusammen, die Gleichung hat also den Faktor $(x - x_1)^2$.

2. In welchen Punkten wird $y = 0{,}1x^3$ von den Tangenten in P_1 $(x_1 = 1)$, P_2 $(x_1 = 2)$, P_3 $(x_1 = 3)$ geschnitten?

3. Wie heißt die Gleichung der Wendetangente, und wo schneidet sie die Kurve?

Man kann auch die Schnittpunkte einer Kurve vierten Grades mit einer Tangente durch Gleichungen zweiten Grades bestimmen.

Zerlegt man die kubische Gleichung $x^3 - px - q = 0$ in $y = x^3$ und $y = px + q$, so erhält man durch die graphische Darstellung eine angenäherte Lösung der kubischen Gleichung.

2. Krümmungskreis.

1. a) In welchen Punkten wird die Parabel $y^2 = 2px$ von dem Kreis $(x - x_m)^2 + y^2 = r^2$ geschnitten? b) $r = x_m$. c) Welchen Wert muß x_m erhalten, damit alle 4 Schnittpunkte in den Scheitelpunkt fallen?

2. a) Dasselbe für die Ellipse (Hyperbel) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und den Kreis $(x - x_m)^2 + y^2 = r^2$. b) $r = a - x_m$. c) Wie groß ist x_m und r für den Krümmungskreis?

Es ist $y^2 = 4x$ gegeben, darauf der Punkt P_1 $(x_1 = 1,\ y_1 = 2)$ und durch P_1 ist die Normale $y = -x + 3$ gelegt. Nimmt man auf der Normalen einen Punkt M an und schlägt mit MP_1 einen Kreis, so hat dieser die Gleichung

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = (x_m - 1)^2 + (2 - y_m)^2.$$

Für die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Parabel erhält man die Gleichung vierten Grades

$$\frac{y^4}{16} - \frac{y^2}{2}(x_m - 2) + 2y(x_m - 3) - 2x_m + 7 = 0,$$

und da der Kreis bei $y = 2$ berührt, so hat die Gleichung den Faktor $y^2 - 4y + 4$. Durch Division erhält man $y^2 + 4y - 4(2x_m - 7) = 0$. Man kann nun x_m immer so wählen, daß noch einmal $y = 2$ wird [$x_m = 5$], daß also der Kreis die Parabel in drei Punkten berührt. In ähnlicher Weise kann man zu jedem Punkt den Krümmungskreis bestimmen. Durch Einführung der Differentialquotienten kommt man zu allgemeineren Ergebnissen.

3. Newtons Verfahren zur angenäherten Lösung von Gleichungen.

Wenn die Gleichung $f(x) = x^n + ax^{n-1} + \cdots = 0$ gegeben ist, und man hat durch Versuchen einen Wert x_1 gefunden, welcher eine angenäherte Lösung ergibt, so wird man durch Hinzufügung der Korrektion k die richtige Lösung erhalten. Es wird also

$$(x_1 + k)^n + a\,(x_1 + k)^{n-1} + \cdots = 0$$
$$x_1{}^n + a x_1{}^{n-1} + \cdots + k\,[n x_1{}^{n-1} + a\,(n-1)\,x_1{}^{n-2} + \cdots] = 0.$$

Wenn k so klein ist, daß man die höheren Potenzen davon vernachlässigen kann, wird also
$$f(x_1) + k\,f'(x_1) = 0$$
$$k = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhält man genauere Werte.

Als Beispiele hierzu können namentlich die kubischen Gleichungen dienen (Aufgaben II, S. 28).

4. Interpolation.

Es ist $\sin(20^0 + x^0) = \sin 20 \cos x + \cos 20 \sin x$. Wenn aber in einer trigonometrischen Tafel die Funktionen für jeden ganzen Grad gegeben sind, so rechnet man nicht nach dieser Formel, sondern man setzt
$$\begin{aligned}\sin(20 + x) &= \sin 20 + (\sin 21 - \sin 20)\,x \\ &= 0{,}342 + 0{,}016\,x.\end{aligned}$$
Gewöhnlich benutzt man diese Formel nur für $x = 0{,}1^0 \,..\, 0{,}9^0$, aber sie liefert noch für $x = 7^0$ auf drei Stellen ein richtiges Ergebnis, für größere Werte von x erhält man immer stärkere Abweichungen.

Ebenso setzt man bei einer vierstelligen Logarithmentafel
$$\log(200 + x) = 2{,}3010 + 0{,}0022\,x$$
brauchbar von $x = 0{,}1$ bis $x = 2$. Dieses sehr häufig gebrauchte Einschaltungsverfahren beruht also darauf, daß man statt einer beliebigen Funktion eine gerade Linie $y = a + bx$ einsetzt, welche auf eine kurze Strecke mit der Funktion zusammenfällt.

Eine bessere Interpolation erhält man, wenn man statt der Geraden eine Parabel $y = a + bx + cx^2$ so bestimmt, daß sie an drei Punkten mit der Funktion zusammenfällt, z. B.
$$\begin{aligned}\sin(20^0 + x^0) &= 0{,}342 + ax + bx^2 \\ \sin(20 + 10) &= 0{,}342 + 10a + 100b = 0{,}500 \\ \sin(20 + 20) &= 0{,}342 + 20a + 400b = 0{,}643 \\ 10a + 100b &= 0{,}158 \\ 10a + 300b &= 0{,}143 \\ 200b &= -\,0{,}015 \\ b &= -\,0{,}000075 \\ a &= +\,0{,}01655 \\ \sin(20 + x) &= 0{,}342 + 0{,}01655\,x - 0{,}000075\,x^2.\end{aligned}$$

Dies ist auf 3 Stellen gültig für $-2^0 < x < 21^0$.

1.—3. Berechne eine Interpolation zweiten Grades für **1.** sin 30, sin 40, sin 50. **2.** tg 45, tg 50, tg 65. **3.** log 5, log 6, log 7 usw.

Auch beliebige Zahlen, die durch Beobachtung gefunden sind, kann man auf diese Weise durch eine Formel darstellen. Z. B. die Mitteltemperaturen im Mai in Königsberg sind:

6^a	7^a	8^a	9^a	10^a	11^a	12^m	1^p	2^p	3^p	4^p	5^p	6^p
8,8°	10,4	11,7	13,0	13,9	14,7	15,2	15,7	16,0	15,8	15,3	14,7	13,9

4. Berechne aus den Temperaturen um 8^a, 12^m, 4^p die übrigen und vergleiche sie mit den beobachteten Temperaturen

$$\text{Temp.}\,(8^a + x) = 11{,}7^0 + 1{,}3x - 0{,}106x^2$$

oder

$$\text{Temp.}\,(12 + x) = 15{,}2^0 + 0{,}45x - 0{,}106x^2.$$

In allen diesen Fällen empfiehlt es sich, die wirkliche Kurve und die interpolierte zur geometrischen Darstellung zu bringen.

Weitere Annäherung erhält man durch eine Parabel dritten Grades $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, die man durch 4 Punkte legt; und dies führt auf den Gedanken, eine Funktion in eine Reihe zu entwickeln.

5. Reihen.

Durch Division erhält man

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

Bestimme die Schnittpunkte der Kurven

$$y = 1 - x;\quad y = 1 - x + x^2;\quad y = 1 - x + x^2 - x^3;\ \cdots$$

miteinander und mit der Hyperbel $y = (1+x)^{-1}$. Die Rechnung und die Zeichnung zeigt, daß sich alle Kurven bei $x = 0$ berühren und daß die Parabeln sich der Hyperbel von $-1 < x < 1$ immer mehr anschmiegen. Für $x = -1$ erreicht die Reihe den Grenzwert ∞ ebenso wie die linke Seite, für $x = +1$ wird die Reihe 1 oder 0, die Hyperbel $= 0{,}5$; für $x > 1$ findet keine Annäherung (Konvergenz) mehr statt.

In derselben Weise kann untersucht werden

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \cdots$$

$$\sqrt[3]{(1+x)} \qquad \sqrt[3]{(1+x)^2} \quad \text{usw.}$$

Nimmt man an, daß eine beliebige Funktion $f(x)$ in eine Reihe entwickelt werden kann, so wird

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots$$

Für $x = 0$ erhält man $a = f(0)$, und durch Differenzieren wird

$$f'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \cdots$$

Setzt man wieder $x = 0$, so wird $b = f'(0)$ und ähnlich

$$c = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}$$

$$d = \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Also wird

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \cdots$$

Hieraus erhält man die Reihenentwicklungen für e^x, $\sin x$ und $\cos x$.

$$\begin{aligned}
\text{z. B.}\quad f(x) &= \sin x & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0\\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1
\end{aligned}$$

usw.

$$f(x) = \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots$$

Auch hier erkennt man die Bedeutung der Reihenentwicklung am besten, indem man die Reihe nach dem ersten, zweiten, dritten Gliede abbricht und geometrisch darstellt. z. B. für $y = e^x$

$$y = 1 + \frac{x}{1}; \quad y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}; \quad y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Besonders interessant ist es, wie bei der sinus- und cosinus-Reihe durch jedes neue Glied eine bessere Annäherung an die Wellenlinie hervorgebracht wird.

Setzt man

$$f(1 + x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4 \cdots$$

so kann man durch $x = 0$ und durch Differenzieren ableiten

$$f(1 + x) = f(1) + \frac{x}{1} \cdot f'(1) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(1) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(1) + \cdots$$

und dies ergibt die Entwicklung für $(1 + x)^n$ und $\log(1 + x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 + x)^n & f(1) &= 1\\
f'(x) &= n(1 + x)^{n-1} & f'(1) &= n\\
f''(x) &= n(n - 1) \cdot (1 + x)^{n-2} & f''(1) &= n(n - 1)
\end{aligned}$$

usw.

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots$$

$f(x$

Für $x = 0$ erhält m … wird

f'

Setzt man wieder x

Also wird

$f(x) = f(0)$ … $0) + \cdots$

Hieraus erhält man … nd $\cos x$.

3. A

1

$f(x) =$ … $\cdots$

Auch hier erken … cklung am besten, indem man die Rei … iede abbricht und geometrisch darstellt.

$y = 1 + \frac{x}{1}$; … $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Besonders inte … d cosinus-Reihe durch jedes neue G … Wellenlinie hervorgebracht wird.

Setzt man

$f($ … .

so kann man durch … n

$f(1 + x) = f($ … $f'''(1) + \cdots$

und dies ergibt die … $+ x)$.

$f(x) =$

$f'(x) =$

$f''(x) =$ … $(n - 1)$

$(1$