Kollineare und orthologische Dreiecke.

Von

W. Fuhrmann,
Professor an der Königlichen Oberrealschule auf der Burg in Königsberg i. Pr.

Beilage zum Jahresbericht 1902 der Königlichen Oberrealschule auf der Burg in Königsberg i. Pr.

Königsberg i. Pr.
Hartungsche Buchdruckerei.
1902.

1902. Progr. Nr. 23

Vorbemerkung: Vorliegende Arbeit verfolgt im wesentlichen das Ziel, an einigen Beispielen zu zeigen, daſs die Determinanten auch für den elementaren Unterricht von Bedeutung sind. Es wird nicht nur erkannt, daſs die Koeffizienten in den Gleichungen besonderer Geraden Determinanten sind, und daſs gewisse Bedingungsgleichungen in dieser Form erscheinen, sondern auch, daſs durch Benutzung einfacher Sätze dieser Formen eine Vereinfachung der Rechnung herbeigeführt werden kann. Verschiedene der hier angegebenen Sätze sind bereits von mehreren Mathematikern behandelt. Da dieselben in den meisten Fällen sich jedoch andern Untersuchungen, die mit der Geometrie des Dreiecks in Verbindung stehen, anschlossen, so lag es wohl in der Natur der Sache, daſs die Beweise für das Verständnis manche Schwierigkeiten boten. Es erschien mir daher nicht überflüssig, auf diese Sätze nochmals einzugehen, um solche Beweise zu bringen, die ein einigermaſsen befähigter Primaner verstehen kann. Die Einführung gewisser Hilfsgröſsen zeigt ferner in der äuſsern Form der Bedingungen für kollineare und orthologische Dreiecke eine Analogie, die verdient, hervorgehoben zu werden. Vielleicht führt dies zu neuen Resultaten. Es sei mir ferner gestattet, auf einige Sätze von Determinanten dritter Ordnung hinzuweisen, da es nicht unmöglich ist, daſs sie einer Erweiterung fähig sind.

Während die Eigenschaften der kollinearen Dreiecke schon in elementaren Lehrbüchern behandelt werden, sind die orthologischen Dreiecke, von denen bereits Steiner zwei Haupteigenschaften angegeben hat, erst in ganz neuester Zeit, hauptsächlich wohl durch die Arbeiten veranlaſst, welche sich an die Geometrie des Dreiecks knüpfen, in den Kreis der Untersuchungen gezogen. Die Sätze darüber scheinen sich einer sehr verbreiteten Bekanntschaft nicht erfreut zu haben. Ich schlieſse dies daraus, daſs man Sätze aus der neuern Geometrie des Dreiecks mit vieler Mühe bewiesen hat, die sich als einfache Folge eines Hauptsatzes von orthologischen Dreiecken ergeben, und daſs Jahre vergingen, ehe auf diesen Umstand hingewiesen wurde.

Von den Männern, welche sich mit diesen Dreiecken beschäftigt und ihre Eigenschaften erweitert haben, kann ich nur Lemoine und Neuberg nennen; doch sind sicherlich noch andere vorhanden, da Casey in seinem Werk: „Analytical geometry of the point, line, cercle and conic sections, II edition 1893“ diese Dreiecke erwähnt.

---

1. Einleitung.

Im zweiten Bande des Journals von Crelle S. 287 gab Steiner folgende Sätze:

Sind irgend zwei in einer Ebene liegende Dreiecke so beschaffen, daſs, wenn aus den Ecken des einen auf die Seiten des andern in irgend einer Ordnung Lote gefällt werden, alsdann diese drei Lote einander in einem Punkte treffen, so treffen auch diejenigen drei Lote, welche in entsprechender Ordnung aus den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten gefällt werden, einander ebenfalls in einem Punkte.

Oder

1. Fällt man aus einem willkürlichen Punkte D in der Ebene eines Dreiecks ABC auf die Seiten des letztern Lote Da, Db, Dc, nimmt auf diesen Loten drei beliebige Punkte a, b, c als Ecken eines Dreiecks an, und fällt auf dessen Seiten aus den Ecken des gegebenen Dreiecks in gehöriger Ordnung genommen die Lote, so werden sich dieselben in einem Punkte d schneiden.

2. Nimmt man in ähnlicher Weise ein drittes Dreieck $a_1\, b_1\, c_1$ an, dessen Ecken in denselben drei Loten Da, Db, Dc liegen, so wird demselben auf gleiche Weise ein Punkt d_1 entsprechen, und alsdann liegen die Schnittpunkte der drei Paare entsprechender Seiten des zweiten und dritten Dreiecks, d. h. die Durchschnittspunkte α, β, γ der Seiten bc und $b_1 c_1$, ca und $c_1 a_1$, ab und $a_1 b_1$ in einer Geraden, und diese Gerade $\alpha\beta\gamma$ ist zur Geraden dd_1 senkrecht.

Eberty beweist diese Sätze mittelst der Eigenschaften der Chordale von zwei Kreisen und damit zusammenhängenden Sätzen. Bei besonderer Lage der Gebilde können manche der vorkommenden Hilfskreise imaginär werden, so daſs die Beweise nicht mehr elementar bleiben. Solche Dreiecke erhielten auch keinen besondern Namen, vermutlich weil man weitere Folgerungen nicht zog, ein Bedürfnis zu einem Namen somit nicht vorlag. Erst viel später (Lemoine 1889) ist für diese Dreiecke die Bezeichnung als orthologische eingeführt. Im Anschluſs daran sind dann die Schnittpunkte jener Lote orthologische Centra genannt.

Ehe wir näher auf die Eigenschaften dieser Dreiecke eingehen, sei noch auf eine andere Art von Dreiecken hingewiesen, die teilweise entsprechende Eigenschaften wie die orthologischen aufweisen. Da für dieselben noch keine Bezeichnung eingeführt ist, obwohl sie schon erwähnt sind, so seien sie durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet.

Haben zwei Dreiecke solche Beschaffenheit, daſs die Parallelen durch die Ecken des einen zu den Seiten des andern sich in einem Punkte schneiden, so werden auch die Parallelen durch die Ecken des zweiten zu den Seiten des ersten in entsprechender Ordnung genommen sich in einem Punkte schneiden.

Der Kürze halber wollen wir von solchen Dreiecken sagen, sie stehen in paralleler Korrelation. Die Schnittpunkte jener Parallelen sollen die Centra der parallelen Korrelation heiſsen.

Die Bedingung für das Schneiden der angegebenen Geraden kann in die Form gebracht werden:

$$(1)\ \sin(AB,C'B')\sin(BC,A'C')\sin(CA,B'A') = \sin(AC,C'B')\sin(BA,A'C')\sin(CB,B'A'),$$

wenn die Dreiecke ABC und A'B'C' sind. Vertauscht man die Dreiecke mit einander, so wird an der Relation (1) nichts geändert. Aus dem Schneiden des ersten Systems von Geraden folgt somit auch das Schneiden des zweiten Systems.

Man ersieht hieraus leicht, daſs man folgende Bedingung dafür erhält, daſs die Lote von den Ecken des einen Dreiecks auf die Seiten des andern sich in einem Punkte schneiden:

$$(2)\ \cos(AB,B'C')\cos(BC,C'A')\cos(CA,A'B') = \cos(AC,B'C')\cos(BA,C'A')\cos(CB,A'B').$$

Diese Relation ergiebt ebenfalls die Gegenseitigkeit der Beziehungen.

Analytisch läſst sich dies ebenfalls leicht feststellen.

Sind x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 die Koordinaten der Ecken von ABC, ferner u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3 die Koordinaten der Ecken von A'B'C', so sind die Bedingungen dafür, daſs die Dreiecke in paralleler Korrelation stehen, bezw., daſs sie orthologisch sind, folgende:

$$(3)\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Vertauschung von x_h mit u_h, und y_h mit v_h, wo der Index h die Werte 1, 2, 3 annimmt, ändert an den Bedingungsgleichungen nichts, woraus also die Gegenseitigkeit der Beziehungen folgt.

Bei der Untersuchung weiterer Eigenschaften solcher Dreiecke werden wir sowohl Parallelkoordinaten, als auch Dreieckskordinaten benutzen, wobei die Gleichungen der Seiten des Grunddreiecks $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sein sollen.

2. Kollineare Dreiecke.

Für die folgenden Untersuchungen sollen der Kürze halber gleich einige allgemeine Bemerkungen gemacht werden. Bezeichnen wir zwei zugehörige Dreiecke mit ABC und A′B′C′, so wenden wir Dreieckskoordinaten an. Das Grunddreieck ist stets ABC, dessen Seiten a, b, c, dessen entsprechende Winkel A, B, C sein sollen.

Es seien ABC und A′B′C′ kollinear; ferner $x_1\ y_1\ z_1$; $x_2\ y_2\ z_2$; $x_3\ y_3\ z_3$ die Koordinaten von A′, B′, C′, dann sind die Gleichungen von AA′, BB′, CC′ bez.

$$(5)\quad \frac{y}{y_1} - \frac{z}{z_1} = 0,\ \frac{z}{z_2} - \frac{x}{x_2} = 0,\ \frac{x}{x_3} - \frac{y}{y_3} = 0.$$

Damit diese Geraden sich in einem Punkte schneiden, mufs die Bedingung (6) $y_1\ z_2\ x_3 = z_1\ x_2\ y_3$ erfüllt sein. Da diese Gleichung von x_1, y_2, z_3 unabhängig ist, so folgt, dafs die relativen Koordinaten folgende Form annehmen können:

$u + u_1$, v, w; u, $v + v_1$, w; u, v, $w + w_1$.

Sind x_h, y_h, z_h ($h = 1, 2, 3$) die absoluten Koordinaten, so müssen folgende Gleichungen stattfinden können:

(7) $\lambda_2 x_2 = \lambda_3 x_3$, $\lambda_3 y_3 = \lambda_1 y_1$, $\lambda_1 z_1 = \lambda_2 z_2$, wo die λ zunächst unbekannte Proportionalitätsfaktoren sind. Dies ist aber der Fall, da die Multiplikation dieser Gleichungen wieder zur Bedingungsgleichung (6) führt. Legen wir für die relativen Koordinaten der Ecken von A′B′C′ die vorher angegebene Form zu grunde, so sind die Koordinaten des Kollineationscentrums

(8) $\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}$, während die Gleichung der Kollineationsachse ist:

$$(9)\quad \frac{x}{u_1} + \frac{y}{v_1} + \frac{z}{w_1} = 0.$$

Die Bedingungsgleichung erscheint in ganz analoger Form, wenn man von den Gleichungen der Seiten des Dreiecks ausgeht. Dieselben seien:

$$(10)\quad l_h x + m_h y + n_h z = 0,\ (h = 1, 2, 3).$$

Ist $lx + my + nz = 0$ die Gleichung der Kollineationsachse, so sind die Bedingungen für jene Koeffizienten;

(11) $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n}{m}$, $\frac{l_2}{n_2} = \frac{l}{n}$, $\frac{m_3}{l_3} = \frac{m}{l}$, daraus folgt:

$$(12)\quad m_1\, n_2\, l_3 = n_1\, l_2\, m_3.$$

Die Gleichungen der Seiten können wir daher in folgender Form annehmen.

$$(13)\quad \begin{aligned} (l + \lambda)\, x + my + nz &= 0, \\ lx + (m + \mu)\, y + nz &= 0, \\ lx + my + (n + \nu)\, z &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Kollineationsachse ist dann:

(14) $lx + my + nz = 0$, die Koordinaten des Kollineationscentrums sind

(15) $\lambda x = \mu y = \nu z$.

---

3. Dreiecke in paralleler Korrelation.

Die Dreiecke sind wieder ABC und A'B'C', und die Gleichungen der Seiten des letztern: $l_h x + m_h y + n_h z = 0$, $(h = 1, 2, 3)$.

Soll nun eine Gerade AS ∥ B'C' sein, so mufs ihre Gleichung die Form haben $l_1 x + m_1 y + n_1 z + k\,(ax + by + cz) = 0$. Entsprechend lauten die Gleichungen durch B und C parallel zu C'A' und A'B'. Berücksichtigen wir, dafs in der ersten Gleichung der Koeffizient von x verschwinden mufs, in den andern aber die von y und z, so finden wir folgende Gleichungen dieser Geraden:

$$(16)\quad \begin{aligned} &y\,(am_1 - bl_1) + z\,(an_1 - cl_1) = 0,\\ &z\,(bn_2 - cm_2) + x\,(bl_2 - am_2) = 0,\\ &x\,(cl_3 - an_3) + y\,(cm_3 - bn_3) = 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung des Schneidens dieser 3 Geraden ist somit

$$(17)\quad (am_1 - bl_1)\,(bn_2 - cm_2)\,(cl_3 - an_3) + (an_1 - cl_1)\,(bl_2 - am_2)\,(cm_3 - bn_3) = 0.$$

Setzen wir (18) $R = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$, und bezeichnen mit L_h, M_h, N_h die in l_h, m_h, n_h multiplizierten Unterdeterminanten von R, so nimmt die Bedingungsgleichung (17) folgende Form an:

$$(19)\quad \begin{aligned} &abc\,(m_1 n_2 l_3 + n_1 l_2 m_3 - 2 l_1 m_2 n_3)\\ &\quad - bcl_1\,(cN_1 + bM_1) - cam_2\,(aL_2 + cN_2) - abn_3\,(bM_3 + aL_3) = 0. \end{aligned}$$

Da ferner $m_1 n_2 l_3 + n_1 l_2 m_3 - 2 l_1 m_2 n_3 = R - (l_1 L_1 + m_2 M_2 + n_3 N_3)$ ist, so erhält sie auch die Form:

$$(20)\quad abcR - [bcl_1\,(aL_1 + bM_1 + cN_1) + cam_2\,(aL_2 + bM_2 + cN_2) + abm(aL_3 + bM_3 + cN_3)] = 0.$$

Die Gleichung einer Ecktransversalen durch A' parallel zu BC mufs von folgenden Formen sein:

(21) $\lambda x + ax + by + cz = 0$,

(22) $k_2\,(l_2 x + m_2 y + n_2 z) + k_3\,(l_3 x + m_3 y + n_3 z) = 0$.

Aus der Vergleichung folgt:

(23) $\lambda + a = k_2 l_2 + k_3 l_3$, $b = k_2 m_2 + k_3 m_3$, $c = k_2 n_2 + k_3 n_3$.

Bestimmt man aus den letzten Gleichungen k_2 und k_3 und setzt die Werte in die erste Gleichung ein, so folgt:

(24) $-\lambda L_1 = aL_1 + bM_1 + cN_1$.

Die Gleichungen der Geraden durch A', B', C' parallel zu BC, CA, AB lauten somit:

$$(25)\quad \begin{aligned} &x\,(bM_1 + cN_1) - bL_1 y - cL_1 z = 0,\\ &-axM_2 + (cN_2 + aL_2)\,y - cM_2 z = 0,\\ &-axN_3 - byN_3 + (aL_3 + bM_3)z = 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung, dafs sich diese Geraden in einem Punkte schneiden, ist daher:

$$(26)\quad \begin{aligned} &(bM_1 + cN_1)\,(cN_2 + aL_2)\,(aL_3 + bM_3) - 2abcL_1 M_2 N_3\\ &\quad - bcM_2 N_3\,(bM_1 + cN_1) - caN_3 L_1\,(cN_2 + aL_2) - abL_1 M_2\,(aL_3 + bM_3) = 0 \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} &abc\,(M_1 N_2 L_3 + N_1 L_2 M_3 - 2 L_1 M_2 N_3) - bc\,(M_2 N_3 - M_3 N_2)\,(bM_1 + cN_1)\\ &\quad - ca\,(N_3 L_1 - N_1 L_3)\,(cN_2 + aL_2) - ab\,(L_1 M_2 - L_2 M_1)\,(aL_3 + bM_3) = 0. \end{aligned}$$

Nun ist $M_2 N_3 - M_3 N_2 = Rl_1$, $N_3 L_1 - L_3 N_1 = Rm_2$, $L_1 M_2 - L_2 M_1 = Rn_3$. Setzt man noch:

$$P = \begin{vmatrix} L_1 M_1 N_1 \\ L_2 M_2 N_2 \\ L_3 M_3 N_3 \end{vmatrix} = R^2, \text{ so ist}$$

$$\frac{dP}{dL_1} = M_2 L_3 - M_3 L_2 = Rl_1, \text{ u. s. w., daher}$$

$$M_1 N_2 L_3 + N_1 L_2 M_3 - 2L_1 M_2 N_3 = P - (L_1 \frac{dP}{dL_1} + M_2 \frac{dP}{dM_2} + N_3 \frac{dP}{dN_3})$$
$$= R(R - (l_1 L_1 + m_2 M_2 + n_3 N_3))$$
$$= R(m_1 n_2 l_3 + n_1 l_2 m_3 - 2l_1 m_2 n_3).$$

Die Bedingungsgleichungen (19) und (20) sind daher identisch.

Nebenbei sei bemerkt, dafs der Ausdruck $m_1 n_2 l_3 + n_1 l_2 m_3 - 2l_1 m_2 n_3$ in sich selbst mit der Determinante $R = \begin{vmatrix} l_1 m_1 n_1 \\ l_2 m_2 n_2 \\ l_3 m_3 n_3 \end{vmatrix}$ multipliziert übergeht, wenn man statt der Gröfsen l_h, m_h, n_h die zugehörigen Unterdeterminanten setzt.

Einfacher gestaltet sich der Beweis für die Gegenseitigkeit zwischen Dreiecken, die in paralleler Korrelation stehen, wenn man noch einen andern Determinantensatz benutzt.

Man habe folgende Determinanten:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

aus denselben bilde man die Determinanten

$$u_{11} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ b_{12} & b_{13} \end{vmatrix}, \quad u_{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}, \quad u_{13} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$u_{21} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ b_{13} & b_{11} \end{vmatrix}, \quad u_{22} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ b_{23} & b_{21} \end{vmatrix}, \quad u_{23} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ b_{33} & b_{31} \end{vmatrix},$$

$$u_{31} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix}, \quad u_{32} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad u_{33} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix},$$

welche Bildungen zusammengefafst werden können in $u_{hk} = \begin{vmatrix} a_{h,\,h+1}, & a_{h,\,h+2} \\ b_{k,\,h+1}, & b_{k,\,h+2} \end{vmatrix}$, wenn dabei angenommen wird, dafs falls $h+1$ oder $h+2$ gröfser als 3 wird, der um 3 kleinere Index gesetzt wird. Dann ergiebt sich folgender Satz:

$$(27) \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = B(a_{12} a_{23} a_{31} - a_{21} a_{32} a_{13}).$$

Sind die Determinanten A und B identisch, so folgt

$$(28) \quad A_{12} A_{23} A_{31} - A_{21} A_{32} A_{13} = A(a_{12} a_{23} a_{31} - a_{21} a_{32} a_{13}),$$

wobei A_{12}, A_{23} etc. die zu a_{12}, a_{23} etc. gehörigen Unterdeterminanten sind.

Setzen wir nun

$$(29) \quad F_h = cm_h - bn_h, \quad G_h = an_h - cl_h, \quad H_h = bl_h - am_h,$$

so heifst die Relation (17) jetzt:

$$(30) \quad H_1 F_2 G_3 - G_1 H_2 F_3 = 0.$$

Die Gleichungen (25) erhalten durch die Einführung der genannten Gröfsen eine einfache Form. Es ist

$$
\begin{aligned}
(31)\quad bM_1 + cN_1 &= b(n_2 l_3 - n_3 l_2) + c(l_2 m_3 - l_3 m_2) \\
&= l_2(cm_3 - bn_3) - l_3(cm_2 - bn_2) \\
&= l_2 F_3 - l_3 F_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(32)\quad -bL_1 &= b(m_2 n_3 - m_3 n_2) = m_2(cm_3 - bn_3) - m_3(cm_2 - bn_2) \\
&= m_2 F_3 - m_3 F_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(33)\quad -cL_1 &= -c(m_2 n_3 - m_3 n_2) = n_2(cm_3 - bn_3) - n_3(cm_2 - bn_2) \\
&= n_2 F_3 - n_3 F_2.
\end{aligned}
$$

Die Umformung der Koeffizienten in den andern Gleichungen (25) ist ganz analog. Dieselben lauten nun:

$$
\begin{aligned}
(34)\quad & x(l_2 F_3 - l_3 F_2) + y(m_2 F_3 - m_3 F_2) + z(n_2 F_3 - n_3 F_2) = 0, \\
& x(l_3 G_1 - l_1 G_3) + y(m_3 G_1 - m_1 G_3) + z(n_3 G_1 + n_1 G_3) = 0, \\
& x(l_1 H_2 - l_2 H_1) + y(m_1 H_2 - m_2 H_1) + z(n_1 H_2 - n_2 H_1) = 0.
\end{aligned}
$$

Nach Formel (27) ist die Determinante aus den Koeffizienten dieser Gleichungen $R(G_1 H_2 F_3 - H_1 F_2 G_3)$.

Wir erhalten also genau die Bedingung (30) für das Schneiden dieser Geraden.

4. Orthologische Dreiecke.

Die orthologischen Dreiecke seien wieder ABC und A'B'C', ebenso die Gleichungen der Seiten des zweiten $l_h x + m_h y + n_h z = 0$. Es seien ferner die Gleichungen von 3 Geraden, die zu den Seiten von A'B'C' senkrecht stehen:

$$(35)\quad a_h x + b_h y + c_h z = 0.$$

Die Geraden, welche dann durch die Ecken des Dreiecks ABC zu diesen Geraden in gehöriger Ordnung parallel gezogen werden, schneiden sich alsdann in einem Punkte. Setzen wir dann:

$$
\begin{aligned}
(36)\quad F_h &= l_h - m_h \cos C - n_h \cos B, \\
G_h &= m_h - n_h \cos A - l_h \cos C, \\
H_h &= n_h - l_h \cos B - m_h \cos A,
\end{aligned}
$$

so sind die Bedingungen, dafs die Geraden $a_h x + b_h y + c_h z = 0$ zu den Geraden $l_h x + m_h y + n_h z = 0$ senkrecht sind,

$$(37)\quad a_h F_h + b_h G_h + c_h H_h = 0.$$

Sind x_h, y_h, z_h die Koordinaten eines Punktes der Geraden $a_h x + b_h y + c_h z = 0$, so ist

$$(38)\quad a_h x_h + b_h y_h + c_h z_h = 0.$$

Aus den Gleichungen (37) und (38) folgt dann:

$$(39)\quad a_h : b_h : c_h = (G_h z_h - H_h y_h) : (H_h x_h - F_h z_h) : (F_h y_h - G_h x_h).$$

Setzen wir diese Werte von a_h, b_h, c_h statt der Werte l_h, m_h, n_h in Gleichung (17) ein, so erhalten wir die Bedingung, dafs ABC und A'B'C' orthologisch sind. Die Bedingung lautet:

$$
\begin{aligned}
(40)\quad & \big[a(H_1 x_1 - F_1 z_1) - b(G_1 z_1 - H_1 y_1)\big]\big[b(F_2 y_2 - G_2 x_2) - c(H_2 x_2 - F_2 z_2)\big]\big[c(G_3 z_3 - H_3 y_3) \\
& - a(F_3 y_3 - G_3 x_3)\big] + \big[a(F_1 y_1 - G_1 x_1) - c(G_1 z_1 - H_1 y_1)\big]\big[b(G_2 z_2 - H_2 y_2) \\
& - a(H_2 x_2 - F_2 z_2)\big]\big[c(H_3 x_3 - F_3 z_3) - b(F_3 y_3 - G_3 x_3)\big] = 0.
\end{aligned}
$$

Indem wir x_h, y_h, z_h als die absoluten Normalkoordinaten annehmen, lassen sich die einzelnen Faktoren des Ausdrucks in (40) umformen. Es ist

$$
\begin{aligned}
(41)\quad & a(H_1 x_1 - F_1 z_1) - b(G_1 z_1 - H_1 y_1) = H_1(ax_1 + by_1 + cz_1) - z_1(aF_1 + bG_1 + cH_1) = 2JH_1, \\
& b(F_2 y_2 - G_2 x_2) - c(H_2 x_2 - F_2 z_2) = F_2(ax_2 + by_2 + cz_2) - x_2(aF_2 + bG_2 + cH_2) = 2JF_2, \\
& c(G_3 z_3 - H_3 y_3) - a(F_3 y_3 - G_3 x_3) = G_3(ax_3 + by_3 + cz_3) - y_3(aF_3 + bG_3 + cH_3) = 2JG_3;
\end{aligned}
$$

denn es ist $aF_h + bG_h + cH_h = 0$. Für die Faktoren des zweiten Gliedes der Gleichung (40) erhält man die Gröfsen $-2JG_1, -2JH_2, -2JF_3$, wobei J den Inhalt von ABC bezeichnet. Die Bedingung des Schneidens der 3 Geraden lautet daher nach Auslassung des Faktors $8J^3$ jetzt:

(42) $H_1 F_2 G_3 - G_1 H_2 F_3 = 0$, eine in ihrer äufsern Form gleichlautende Bedingung mit der der parallelen Korrelation.

Die Auflösung der homogenen Gleichungen:

$$l_2 x + m_2 y + n_2 z = 0,\ l_3 x + m_3 y + n_3 z = 0,$$

giebt (43) $x : y : z = L_1 : M_1 : N_1$, d. h. die Koordinaten der Ecke A′ des zweiten Dreiecks sind den Gröfsen L_1, M_1, N_1 proportional. Ebenso sind die Koordinaten von B′, C′ proportional zu L_2, M_2, N_2, bez. L_3, M_3, N_3. Die Gleichungen der Lote von diesen Ecken auf die zugehörigen Seiten des Grunddreiecks sind dann folgende:

$$(44)\quad \begin{aligned} &x\,(N_1 \cos C - M_1 \cos B) + y\,(N_1 + L_1 \cos B) - z\,(M_1 + L_1 \cos C) = 0,\\ -&x\,(N_2 + M_2 \cos A) + y\,(L_2 \cos A - N_2 \cos C) + z\,(L_2 + M_2 \cos C) = 0,\\ &x\,(M_3 + N_3 \cos A) - y\,(L_3 + N_3 \cos B) + z\,(M_3 \cos B - L_3 \cos A) = 0. \end{aligned}$$

Es ist (45)
$$\begin{aligned} N_1 \cos C - M_1 \cos B &= (l_2 m_3 - l_1 m_2) \cos C - (n_2 l_3 - n_3 l_2) \cos B\\ &= l_3 (l_2 - m_2 \cos C - n_2 \cos B) - l_2 (l_3 - m_3 \cos C - n_3 \cos B)\\ &= l_3 F_2 - l_2 F_3 .\\ N_1 + L_1 \cos B &= l_2 m_3 - l_3 m_2 + (m_2 n_3 - m_3 n_2) \cos B\\ &= m_3 (l_2 - m_2 \cos C - n_2 \cos B) - m_2 (l_3 - m_3 \cos C - n_3 \cos B)\\ &= m_3 F_2 - m_2 F_3 . \end{aligned}$$

Entsprechend lassen sich die übrigen Koeffizienten der Gleichungen (45) umformen. Die Gleichungen erhalten dann die Gestalt:

$$(46)\quad \begin{aligned} &x\,(l_3 F_2 - l_2 F_3) + y\,(m_3 F_2 - m_2 F_3) + z\,(n_3 F_2 - n_2 F_3) = 0,\\ &x\,(l_1 G_3 - l_3 G_1) + y\,(m_1 G_3 - m_3 G_1) + z\,(n_1 G_3 - n_3 G_1) = 0,\\ &x\,(l_2 H_1 - l_1 H_2) + y\,(m_2 H_1 - m_1 H_2) + z\,(n_2 H_1 - n_1 H_2) = 0, \end{aligned}$$

also genau die Gestalt der Gleichungen (34). Nach Formel (27) ist die Determinante dieser Gleichungen

$R\,(G_1 H_2 F_3 - H_1 F_2 G_3)$, woraus also die Gegenseitigkeit der orthologischen Beziehungen folgt.

---

5. Kollineare Dreiecke, die zugleich orthologisch sind.

Die Dreiecke, deren Eigenschaften wir zunächst mittelst kartesischer Koordinaten untersuchen wollen, seien PQR und P′Q′R′. Indem wir den Anfangspunkt als Kollineationscentrum wählen, können wir für die Ecken der Dreiecke folgende Koordinaten annehmen:

$$\begin{aligned} PQR &: x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3;\\ P'Q'R' &: lx_1, ly_1;\ mx_2, my_2;\ nx_3, ny_3. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Geraden durch P, Q, R senkrecht zu Q′R′, R′P′, P′Q′ sind dann:

$$(47)\quad \begin{aligned} &x\,(mx_2 - nx_3) + y\,(my_2 - ny_3) - m\,(x_1 x_2 + y_1 y_2) + n\,(x_1 x_3 + y_1 y_3) = 0,\\ &x\,(nx_3 - lx_1) + y\,(ny_3 - ly_1) - n\,(x_2 x_3 + y_2 y_3) + l\,(x_2 x_1 + y_2 y_1) = 0,\\ &x\,(lx_1 - mx_2) + y\,(ly_1 - my_2) - l\,(x_3 x_1 + y_3 y_1) + m\,(x_3 x_2 + y_3 y_2) = 0. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen die Eigenschaft haben, dafs die Summe der Koeffizienten von x und y verschwindet, so mufs auch die Summe der andern Glieder verschwinden. Die Bedingung, dafs die Dreiecke orthologisch sind, ist daher

$$(48)\quad (x_2 x_3 + y_2 y_3)(m - n) + (x_3 x_1 + y_3 y_1)(n - l) + (x_1 x_2 + y_1 y_2)(l - m) = 0$$

$$\text{oder}\quad \begin{vmatrix} x_2 x_3 + y_2 y_3, & l & 1 \\ x_3 x_1 + y_3 y_1, & m & 1 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2, & n & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen der Geraden durch P', Q', R' senkrecht zu QR, RP, PQ lauten:

$$(49)\quad \begin{aligned} x(x_2 - x_3) + y(y_2 - y_3) - l\left\{x_1 x_2 + y_1 y_2 - (x_1 x_3 + y_1 y_3)\right\} &= 0, \\ x(x_3 - x_1) + y(y_3 - y_1) - m\left\{x_2 x_3 + y_2 y_3 - (x_2 x_1 + y_2 y_1)\right\} &= 0, \\ x(x_1 - x_2) + y(y_1 - y_2) - n\left\{x_3 x_1 + y_3 y_1 - (x_3 x_2 + y_3 y_2)\right\} &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort, daſs die Bedingung, daſs sich diese Geraden in einem Punkte schneiden, auf die Relation (48) zurückkommt.

Der Kürze halber führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

$$(50)\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = D, \quad (51)\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & mn \\ x_2 & y_2 & nl \\ x_3 & y_3 & lm \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} lx_1, & ly_1, & 1 \\ mx_2, & my_2, & 1 \\ nx_3, & ny_3 & 1 \end{vmatrix} = D',$$

$$(52)\quad \begin{vmatrix} lu_1, & l, & 1 \\ mu_2, & m, & 1 \\ nu_3, & n, & 1 \end{vmatrix} = K_u, \qquad (53)\quad \begin{aligned} p &= m\,(x_1 x_2 + y_1 y_2) - n\,(x_1 x_3 + y_1 y_3), \\ q &= n\,(x_2 x_3 + y_2 y_3) - l\,(x_2 x_1 + y_2 y_1), \\ r &= l\,(x_3 x_1 + y_3 y_1) - m\,(x_3 x_2 + y_3 y_2). \end{aligned}$$

$$(54)\quad \begin{aligned} p' &= l\,(x_1 x_2 + y_1 y_2) - l\,(x_1 x_3 + y_1 y_3), \\ q' &= m\,(x_2 x_3 + y_2 y_3) - m\,(x_2 x_1 + y_2 y_1), \\ r' &= n\,(x_3 x_1 + y_3 y_1) - n\,(x_3 x_2 + y_3 y_2), \end{aligned}$$

$$(55)\quad x_2 y_3 - x_3 y_2 = Z_1, \quad x_3 y_1 - x_1 y_3 = Z_2, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 = Z_3.$$

Aus diesen Erklärungen folgt sofort:

$$(56)\quad Z_1 + Z_2 + Z_3 = D, \qquad (57)\quad mn\,Z_1 + nl\,Z_2 + lm\,Z_3 = D',$$

$$(58)\quad p + q + r = p' + q' + r' = 0.$$

Sind dann x_0, y_0 die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden (47) (des orthologischen Centrums des Dreiecks PQR in Bezug auf $P'Q'R'$), so ergiebt sich

$$(59)\quad \begin{aligned} D' x_0 &= -(p l y_1 + q m y_2 + r n y_3), \\ D' y_0 &= p l x_1 + q m x_2 + r n x_3. \end{aligned}$$

Sind x_0', y_0' die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden (49) (des orthologischen Centrums von $P'Q'R'$ in Bezug auf PQR), so folgt ebenso:

$$(60)\quad \begin{aligned} D x_0' &= -(p' y_1 + q' y_2 + r' y_3), \\ D y_0' &= p' x_1 + q' x_2 + r' x_3. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (48) folgt nun, daſs wir die in p, q etc. vorkommenden Gröſsen $x_h x_k + y_h y_k$ durch 2 Hilfsgröſsen ausdrücken können. Es folgt:

$$(61)\quad x_2 x_3 + y_2 y_3 = \lambda l + \lambda', \quad x_3 x_1 + y_3 y_1 = \lambda m + \lambda', \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 = \lambda n + \lambda'.$$

Dann ist

$$(62)\quad p = \lambda' (m - n), \quad q = \lambda' (n - l), \quad r = \lambda' (l - m),$$

$$(63)\quad p' = -\lambda l\,(m - n), \quad q' = -\lambda m\,(n - l), \quad r' = -\lambda n\,(l - m),$$

$$\text{somit}\quad (64)\quad \begin{aligned} p l u_1 + q m u_2 + r n u_3 &= \lambda' \left[l u_1 (m - n) + m u_2 (n - l) + n u_3 (l - m)\right] \\ &= \lambda' K_u, \end{aligned}$$

$$\text{ebenso}\quad (65)\quad p' u_1 + q' u_2 + r' u_3 = -\lambda K_u.$$

Dies giebt dann

$$(66)\quad D' x_0 = -\lambda' K_y, \quad D' y_0 = \lambda' K_x, \quad (67)\quad D x_0' = \lambda K_y, \quad D y_0' = -\lambda K_x.$$

Daraus folgt endlich

$$(68)\quad \frac{x_0}{y_0} = \frac{x'_0}{y'_0},$$

d. h. die orthologischen Centra liegen in einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden. Die Gleichung derselben ist, wie sich leicht ergiebt:

$$(69)\quad xK_x + yK_y = 0.$$

Sind ferner $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \xi_3, \eta_3$ die Koordinaten der Schnittpunkte von QR und Q'R', RP und R'P', PQ und P'Q', so folgt leicht:

$$(70)\quad \begin{aligned} \xi_1 (m - n) &= m x_2 (1 - n) - n x_3 (1 - m), \\ \eta_1 (m - n) &= m y_2 (1 - n) - n y_3 (1 - m), \\ \xi_2 (n - l) &= n x_3 (1 - l) - l x_1 (1 - n); \end{aligned}$$

und ähnlich die anderen Koordinaten. Die Gleichung der Kollineationsachse ist

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ausführung der Rechnung ergiebt leicht:

$$(71)\quad xK_y - yK_x + D' - lmnD = 0.$$

Wir sehen daraus, dafs diese Gerade zur Geraden (69) senkrecht ist.

Es dürfte nicht überflüssig sein, diese Eigenschaft solcher Dreiecke auch mittelst Dreieckskoordinaten zu behandeln, um einzusehen, welche Bedeutung die Determinanten in der analytischen Geometrie haben. Wir benutzen dabei die vorher festgestellten Bedingungen für Kollineation und Orthologie. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks A'B'C', das zum Grunddreieck ABC kollinear ist, sind:

$$(72)\quad \begin{aligned} (l + \lambda) x + my + nz &= 0, \\ lx + (m + \mu) y + nz &= 0, \\ lx + my + (n + \nu) z &= 0, \end{aligned}$$

das Centrum der Kollineation ist dann durch die Gleichungen $\lambda x = \mu y = \nu z$ gegeben und die Gleichung der Achse ist $lx + my + nz = 0$.

Die Bedingung der Orthologie war in die Form $H_1 F_2 G_3 - G_1 F_2 H_3 = 0$ gebracht. Setzen wir nun

$$(73)\quad L = l - m \cos C - n \cos B,\ M = m - n \cos A - l \cos C,$$
$$N = n - l \cos B - m \cos A,$$ so erhalten wir für dieselbe:

$$(74)\quad (N - \lambda \cos B)(L - \mu \cos C)(M - \nu \cos A) - (M - \lambda \cos C)(N - \mu \cos A)(L - \nu \cos B) = 0,$$

oder

$$(75)\quad \begin{vmatrix} MN + L\lambda \cos A, & \lambda, & \cos A \\ NL + M\mu \cos B, & \mu, & \cos B \\ LM + N\nu \cos C, & \nu, & \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen der Lote von A, B, C auf B'C', C'A', A'B' sind

$$(76)\quad \begin{aligned} y (N - \lambda \cos B) - z (M - \lambda \cos C) &= 0, \\ z (L - \mu \cos C) - x (N - \mu \cos A) &= 0, \\ x (M - \nu \cos A) - y (L - \nu \cos B) &= 0. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden, d. h. das orthologische Centrum von ABC bezüglich A'B'C' giebt:

$$(77)\quad \frac{x}{(L - \nu \cos B)(L - \mu \cos C)} = \frac{y}{(M - \nu \cos A)(L - \mu \cos C)}$$
$$= \frac{z}{(L - \nu \cos B)(N - \mu \cos A)},$$

Die Gleichung des Lotes vom Centrum auf die Achse der Kollineation ist:

$$(78)\quad \lambda x(M\mu - N\nu) + \mu y(N\nu - L\lambda) + \nu z(L\lambda - M\mu) = 0.$$

Soll das orthologische Centrum von ABC auf dieser Geraden liegen, so gilt folgende Gleichung:

$$(79)\quad \lambda \left\{ L^2 - L\mu\cos C - L\nu\cos B + \mu\nu\cos B\cos C \right\}(M\mu - N\nu)$$
$$+ \mu \left\{ LM - L\nu\cos A - M\mu\cos C + \mu\nu\cos C\cos A \right\}(N\nu - L\lambda)$$
$$+ \nu \left\{ LN - L\mu\cos A - N\nu\cos B + \mu\nu\cos A\cos B \right\}(L\lambda - M\mu) = 0.$$

Die aus den ersten Gliedern des Polynoms in der grofsen Klammer hervorgehenden Glieder der ganzen Summe geben offenbar 0. Wir bezeichnen dann die Koeffizienten der in MN, NL, LM, L, M, N multiplizierten Glieder mit $\overline{MN}$, $\overline{NL}$, $\overline{LM}$, $\overline{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$, und erhalten

$$(80)\quad \overline{MN} = \mu\nu(\nu\cos B - \mu\cos C),\quad \overline{L} = \lambda\mu\nu\cos A(\nu\cos B - \mu\cos C),$$
$$\overline{NL} = \mu\nu(\lambda\cos C - \nu\cos A),\quad \overline{M} = \mu^2\nu\cos B(\lambda\cos C - \nu\cos A),$$
$$\overline{LM} = \mu\nu(\mu\cos A - \lambda\cos B),\quad \overline{N} = \mu\nu^2\cos C(\mu\cos A - \lambda\cos B).$$

Die Relation (79) wird daher nach Fortlassung des Faktors $\mu\nu$:

$$(MN + L\lambda\cos A)(\nu\cos B - \mu\cos C) + (NL + M\mu\cos B)(\lambda\cos C - \nu\cos A)$$
$$+ (LM + N\nu\cos C)(\mu\cos A - \lambda\cos B) = 0.$$

Wir finden daher, dafs die Bedingung, dafs das orthologische Centrum von ABC auf dem Lote vom Kollineationscentrum auf die Achse liegt, identisch ist mit der Bedingung, dafs die Dreiecke kollinear und orthologisch sind. Da ferner die Dreiecke in ihren orthologischen Beziehungen vertauscht werden können, ohne dafs sich Achse und Centrum der Kollineation ändern, so ergiebt sich der Satz: (81).

Sind 2 Dreiecke zugleich kollinear und orthologisch, so liegen die orthologischen Centra und das Kollineationscentrum auf einem Lote zur Kollineationsachse.

6. Kollineare Dreiecke, die in paralleler Korrelation stehen.

Die Dreiecke seien wieder mit PQR und P′Q′R′ bezeichnet, die Koordinaten der Ecken wie in Nummer 5, sodafs also der Anfangspunkt das Kollineationscentrum ist. (Fig. 1.) Die Gleichungen der Geraden durch P, Q, R parallel zu Q′R′, R′P′, P′Q′ sind dann:

$$(82)\quad x(my_2 - ny_3) - y(mx_2 - nx_3) - mZ_3 - nZ_2 = 0,$$
$$x(ny_3 - ly_1) - y(nx_3 - lx_1) - nZ_1 - lZ_3 = 0,$$
$$x(ly_1 - my_2) - y(lx_1 - mx_2) - lZ_2 - mZ_1 = 0,$$

wo Z_1, Z_2, Z_3 die durch die Gleichungen (55) gegebenen Ausdrücke sind. Hieraus folgt, dafs diese Geraden sich in einem Punkte S schneiden, wenn die Bedingungsgleichung stattfindet:

$$(83)\quad (m + n)Z_1 + (n + l)Z_2 + (l + m)Z_3 = 0.$$

Die Gleichungen der entsprechenden Geraden durch P′, Q′, R′ sind dann:

$$(84)\quad x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) - l(Z_2 + Z_3) = 0,$$
$$x(y_3 - y_1) - y(x_3 - x_1) - m(Z_3 + Z_1) = 0,$$
$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) - n(Z_1 + Z_2) = 0.$$

Die Bedingung, dafs sich diese Gerade in einem Punkte S′ schneiden, ist die obige. Es läfst sich hieraus durch Benutzung eines einfachen Determinantensatzes eine Folgerung machen. Es bedeutet $Z_1 + Z_2 + Z_3 = D$ offenbar den positiven oder negativen doppelten

Inhalt des Dreiecks PQR und ebenso $mnZ_1 + nlZ_2 + lmZ_3 = D'$ den von P'Q'R'. Denken wir uns nun den Inhalt eines Dreiecks noch mit einem Zeichen versehen in der Weise, daſs ein Dreieck PQR positiv sein soll, wenn die Reihenfolge der Ecken PQR in derselben Art der Drehung geschieht, wie die Reihenfolge der Quadranten der Koordinatenachsen, im entgegengesetzten Falle aber negativ, so bedeuten D und D' den doppelten Inhalt der Dreiecke PQR und P'Q'R'. Wir haben nun folgende Gleichungen:

$$(85)\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & (1 \pm m)(1 \pm n) \\ x_2 & y_2 & (1 \pm n)(1 \pm l) \\ x_3 & y_3 & (1 \pm l)(1 \pm m) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & mn \\ x_2 & y_2 & nl \\ x_3 & y_3 & lm \end{vmatrix} = D + D',$$

$$(86)\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & (1 \pm m)(1 \pm n) \\ x_2 & y_2 & (1 \pm n)(1 \pm l) \\ x_3 & y_3 & (1 \pm l)(1 \pm m) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1 \pm l)\, x_1, & (1 \pm l)\, y_1, & 1 \\ (1 \pm m)\, x_2, & (1 \pm m)\, y_2, & 1 \\ (1 \pm n)\, x_3, & (1 \pm n)\, y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Setzen wir daher:

$$(87)\quad \begin{vmatrix} (1 + l)\, x_1, & (1 + l)\, y_1, & 1 \\ (1 + m)\, x_2, & (1 + m)\, y_2, & 1 \\ (1 + n)\, x_3, & (1 + n)\, y_3, & 1 \end{vmatrix} = T, \quad \begin{vmatrix} (1 - l)\, x_1, & (1 - l)\, y_1, & 1 \\ (1 - m)\, x_2, & (1 - m)\, y_2, & 1 \\ (1 - n)\, x_3, & (1 - n)\, y_3, & 1 \end{vmatrix} = T',$$

so ist

$$(88)\quad T = T' = D + D'.$$

Tragen wir nun OP', OQ', OR' von P, Q, R erst nach einer Richtung (Fig. 1) ab, entsprechend den Zeichen von l, m, n, wodurch wir die Punkte U, V, W erhalten, dann ebenso nach der andern Richtung, wodurch wir die Punkte U', V', W' erhalten, so geben uns die Gröſsen T und T' offenbar die doppelten Inhalte der Dreiecke UVW und U'V'W'. Somit gilt der Satz:

(89) Stehen 2 kollineare Dreiecke PQR und P'Q'R' in paralleler Korrelation mit O als Kollineationscentrum, und trägt man von P, Q, R auf den Strahlen OP, OQ, OR die Längen OP', OQ', OR' nach beiden Richtungen ab, wodurch man die Punkte U, V, W und U', V', W' erhält, so sind die Dreiecke UVW und U'V'W' einander gleich und zwar gleich der algebraischen Summe der Dreiecke PQR und P'Q'R'.

Wir führen nun folgende Hilfsgröſsen ein:

$$(90)\quad H_u = \begin{vmatrix} l^2u_1 & l & 1 \\ m^2u_2 & m & 1 \\ n^2u_3 & n & 1 \end{vmatrix}, \qquad (91)\quad H'_u = \begin{vmatrix} u_1 & l & 1 \\ u_2 & m & 1 \\ u_3 & n & 1 \end{vmatrix},$$

$$(92)\quad \Delta = \begin{vmatrix} mn & l & 1 \\ nl & m & 1 \\ lm & n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l^2 & l & 1 \\ m^2 & m & 1 \\ n^2 & n & 1 \end{vmatrix},$$

$$(93)\quad p_o = m\, Z_3 + n\, Z_2,\ q_o = n\, Z_1 + l\, Z_3,\ r_o = l\, Z_2 + m\, Z_1,$$

$$(94)\quad p'_o = l\,(Z_2 + Z_3),\ q'_o = m\,(Z_3 + Z_1),\ r'_o = n\,(Z_1 + Z_2),$$

so daſs auch hier $p_o + q_o + r_o = p'_o + q'_o + r'_o = 0$ ist.

Aus den Gleichungen:

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = D,$$
$$(m + n)\, Z_1 + (n + l)\, Z_2 + (l + m)\, Z_3 = 0,$$
$$m\, n\, Z_1 + n\, l\, Z_2 + l\, m\, Z_3 = D'$$

folgt

$$(95)\quad \begin{aligned} \Delta Z_1 &= (m - n)\, D' + l^2 (m - n)\, D, \\ \Delta Z_2 &= (n - l)\, D' + m^2 (n - l)\, D, \\ \Delta Z_3 &= (l - m)\, D' + n^2 (l - m)\, D. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (82) geben uns die Koordinaten des Schnittpunktes S der betreffenden Geraden, welche mit x_o, y_o bezeichnet werden sollen.

$$(96)\quad \begin{aligned} x_o D' &= p_o l x_1 + q_o m x_2 + r_o n x_3, \\ y_o D' &= p_o l y_1 + q_o m y_2 + r_o n y_3. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (84) erhält man analog für die betreffenden Koordinaten x_o', y_o' des Schnittpunktes S' die Werte

$$(97)\quad \begin{aligned} x'_o D &= p'_o x_1 + q'_o x_2 + r'_o x_3, \\ y'_o D &= p'_o y_1 + p'_o y_2 + r'_o y_3. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} -\Delta p_o = -\Delta (mZ_3 + nZ_2) = &- m\,(l - m)\, D' - mn^2 (l - m)\, D, \\ &- n\,(n - l)\, D' - m^2 n\,(n - l)\, D, \end{aligned}$$

oder

$$(98)\quad -\Delta p_o = (m - n)\, lmnD + (m - n)\,(l + m + n - 2l)\, D',$$

ebenso:

$$(99)\quad -\Delta p'_o = l\,(m - n)\,(mn + nl + lm - 2mn)\, D + l\,(m - n)\, D'.$$

Die Gröfsen q_o, q'_o etc. erhält man hieraus durch cyklische Vertauschung. Wir erhalten

$$(100)\quad \Delta\,(p_o l x_1 + q_o m x_2 + r_o n x_3) = -lmnDK_x - (l + m + n)\, D'K_x + 2D'H_x,$$

$$(101)\quad \Delta\,(p'_o x_1 + q'_o x_2 + r'_o x_3) = -(mn + nl + lm)\, DK_x + 2Dlmn\, H'_x - D'K_x,$$

also

$$(102)\quad \begin{aligned} x_o DD'\Delta &= 2DD'H_x - D^2 lmnK_x - DD'\,(l + m + n)\, K_x, \\ x'_o DD'\Delta &= 2DD' lmnH'_x - DD'\,(mn + nl + lm)\, K_x - D'^2 K_x. \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} DD'\Delta \frac{x_o + x'_o}{2} &= DD'\,(H_x + lmn\, H'_x) \\ &- \frac{K_x}{2}\Big[D^2 lmn + DD'(mn + nl + lm + l + m + n) + D'^2 \Big]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck von $DD'\Delta \frac{y_o + y'_o}{2}$ lautet ganz entsprechend, es wird nur x_h mit y_h vertauscht. Die Gleichung der Kollineationsachse von PQR und $P'Q'R'$ war vorher (71) angegeben.

$$xK_y - yK_x + D' - lmn\, D = 0.$$

Setzen wir in dem Ausdruck der linken Seite nach Multiplikation mit $DD'\Delta$ die Werte von $\frac{x_o + x'_o}{2}$ und $\frac{y_o + y'_o}{2}$ ein, so erhalten wir:

$$(103)\quad \begin{aligned} &DD'\,[K_y H_x - K_x H_y + lmn\,(K_y H'_x - K_x H'_y)] \\ &+ DD'^2\Delta - lmn\, D^2 D'\Delta. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Ausdruck $K_y H_x - K_x H_y$

$$\begin{aligned} &= \Big(l^2 x_1 (m - n) + m^2 x_2 (n - l) + n^2 x_3 (l - m)\Big)\Big(l y_1 (m - n) + m y_2 (n - l) + n y_3 (l - m)\Big) \\ &- \Big(l^2 y_1 (m - n) + m^2 y_2 (n - l) + n^2 y_3 (l - m)\Big)\Big((l x_1 (m - n) + m x_2 (n - l) + n x_3 (l - m)\Big), \end{aligned}$$

so ergiebt sich sofort, dafs bei der Entwickelung die Glieder verschwinden, welche in $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ multipliziert sind. Die in $x_2 y_3$ multiplizierten Glieder des ersten Produkts sind:

$$\begin{aligned} &m^2 n\, x_2 y_3 (n - l)\,(l - m) - mn^2\, x_2 y_3 (n - l)\,(l - m). \\ &= -\Delta mn\, x_2 y_3. \end{aligned}$$

Diesem entspricht im zweiten Produkt ein Glied mit $x_3 y_2$, das aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Demnach ist

$$(104)\quad H_x K_y - H_y K_x = -\Delta\,(mn\, Z_1 + nl\, Z_2 + lm\, Z_3) = -\Delta D'.$$

Ebenso ergiebt sich die Gleichung:

$$(105)\quad H'_x K_y - H'_y K_x = \Delta (Z_1 + Z_2 + Z_3) = \Delta D.$$

Der Ausdruck (103) verschwindet daher, woraus folgt, dafs der Mittelpnnkt der Strecke zwischen den Centren der parallelen Korrelation auf der Kollineationsachse liegt. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

(106) Wenn zwei kollineare Dreiecke in paralleler Korrelation stehen, so halbiert die Kollineationsachse die Strecke zwischen den Centren der parallelen Korrelation.

Zusatz. Liegt also das eine Centrum auf der Kollineationsachse, so auch das andere.

7. Dreiecke, die zweifach kollinear oder orthologisch sind oder zweifach in paralleler Korrelation stehen.

Zwei Dreiecke ABC und A'B'C' können sich sechsfach entsprechen. Diese sechs Fälle sind. Es entsprechen sich:

1. A und A', B und B', C und C',
2. A und B', B und C'. C und A',
3. A und C', B und A', C und B',
4. A und A', B und C', C und B',
5. A und C', B und B', C und A',
6. A und B', B und A', C und C'.

Soll eine der genannten Beziehungen zweifach sein, so bilden die drei ersten Fälle eine Gruppe, sowie auch die drei letzten. Von den drei ersten Fällen sagen wir, dafs sie in cyklischer Permutation stehen. Da zwischen denselben ein Zusammenhang besteht, so bieten sie das Hauptinteresse dar und sollen hier allein betrachtet werden. Der Fall der Kollineation ist schon früher untersucht z. B. von Rosanes im zweiten Bande der „Mathematischen Annalen von Clebsch"; ebenso von Schröter ebenda, von Valyi im 70. Bande des Archivs für Mathematik und Physik. Weniger behandelt sind die mehrfachen Beziehungen der Orthologie und der parallelen Korrelation; doch haben sich Lemoine und Neuberg mit ihnen beschäftigt und zu einer Grundeigenschaft noch manches hinzugefügt. Der Vollständigkeit wegen, da unsere Formeln damit in Zusammenhang stehen, soll darauf noch, wenn auch nur kurz, eingegangen werden.

Für die Betrachtung der Kollineation benutzen wir die Relation (12) in N. 2

$$m_1 n_2 l_3 - n_1 l_2 m_3 = 0.$$

Soll nun A zu B', B zu C', C zu A' entsprechend sein, so sind nur die Indices cyklisch zu vertauschen. Für den Fall der zweifachen Kollineation in cyklischer Permutation erhalten wir:

$$(106) \quad \begin{aligned} m_1 n_2 l_3 - n_1 l_2 m_3 &= 0, \\ m_2 n_3 l_1 - n_2 l_3 m_1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen folgt also auch:

$$l_1 m_2 n_3 - n_1 l_2 m_3 = 0,$$

d. h. es entsprechen sich A und C', B und A', C und B'. Die Dreiecke sind also dreifach kollinear.

Die Bedingung für Orthologie oder parallele Korrelation lautet $G_1 H_2 F_3 - H_1 F_2 G_3 = 0$; wobei freilich die Bedeutung der Gröfsen andere sind. Aber auch hier giebt die cyklische Vertauschung der Indices die Zugehörigkeit von A und B', B und C', C und A'. Daher findet bei zweifacher Beziehung in cyklischer Permutation stets eine dreifache statt.

Von Lemoine ist dann noch eine weitere Folgerung an die Dreiecke geknüpft, welche zweifach orthologisch in cyklischer Permutation sind.

Sind zwei Dreiecke ABC und A'B'C' orthologisch, so folgt leicht, dafs die Seiten des Dreiecks A'B'C' parallel den Seiten eines Dreiecks sind, dessen Ecken die Fufspunkte der Lote von einem willkürlichen Punkte P auf die Seiten von ABC sind. Wir nennen dies

Dreieck das Fuſspunktdreieck des Punktes P in Bezug auf ABC. Man kann nun fragen, welche Kurve muſs der Punkt P durchlaufen, damit die Fuſspunktdreiecke desselben orthologisch in cyklischer Permutation sind. Der Punkt P habe die Koordinaten x_1, y_1, z_1, dann sind die Koordinaten der Fuſspunkte A_1, B_1, C_1 von P bez.

$$(107)\quad \begin{aligned} &A_1: 0,\ y_1 + x_1 \cos C,\ z_1 + x_1 \cos B, \\ &B_1: x_1 + y_1 \cos C,\ 0,\ z_1 + y_1 \cos A, \\ &C_1: x_1 + z_1 \cos B,\ y_1 + z_1 \cos A,\ 0. \end{aligned}$$

Die Lote von C_1, A_1, B_1 auf BC, CA, AB haben somit die Gleichungen:

$$(108)\quad \begin{aligned} &x \cos B\,(y_1 + z_1 \cos A) - y \cos B\,(x_1 + z_1 \cos B) + z\,(x_1 \cos C + y_1 + z_1 \sin B \sin C) = 0, \\ &x\,(x_1 \sin C \sin A + y_1 \cos A + z_1) + y \cos C\,(x_1 \cos B + z_1) - z \cos C\,(x_1 \cos C + y_1) = 0, \\ &-x\,(y_1 \cos A + z_1) \cos A + y_1\,(x_1 + y_1 \sin A \sin B + z_1 \cos B) + z \cos A\,(x_1 + y_1 \cos C) = 0. \end{aligned}$$

Sollen diese Geraden durch einen Punkt gehen, so muſs die Determinante dieser Gleichungen verschwinden.

Setzt man $\cos A \cos B \cos C = \nu$, $\sin A \sin B \sin C = \mu$, so erhält man daraus also die Gleichung:

$$(109)\quad \begin{aligned} &\nu(y_1 + z_1 \cos A)(z_1 + x_1 \cos B)(x_1 + y_1 \cos C) - \nu(y_1 \cos A + z_1)(z_1 \cos B + x_1)(x_1 \cos C + y_1) \\ &+ (x_1 + y_1 \sin A \sin B + z_1 \cos B)(x_1 \cos C + y_1 + z_1 \sin B \sin C)(x_1 \sin C \sin A + y_1 \cos A + z_1) \\ &+ \cos B \cos C\,(y_1 + z_1 \cos A)(x_1 \cos C + y_1)(x_1 + y_1 \sin A \sin B + z_1 \cos B) \\ &+ \cos C \cos A\,(y_1 \cos A + z_1)(x_1 \cos B + z_1)(x_1 \cos C + y_1 + z_1 \sin B \sin C) \\ &+ \cos A \cos B\,(x_1 + z_1 \cos B)(x_1 + y_1 \cos C)(x_1 \sin C \sin A + y_1 \cos A + z_1) = 0. \end{aligned}$$

Die Ausführung der Rechnung ergiebt, wenn man noch die Relationen benutzt:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2\,(1 + \nu),\quad \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\mu.$$

$$(110)\quad \begin{aligned} &\mu\,(x_1^3 \sin A + y_1^3 \sin B + z_1^3 \sin C) + 2\,x_1 y_1 z_1 \left\{ (1 + \nu)^2 + \mu^2 \right\} \\ &+ x_1^2 y_1 \sin A \sin C\,(\sin^2 A + 2 \sin^2 B) + x_1 y_1^2 \sin B \sin C\,(2 \sin^2 A + \sin^2 B) \\ &+ y_1^2 z_1 \sin B \sin A\,(\sin^2 B + 2 \sin^2 C) + y_1 z_1^2 \sin C \sin A\,(2 \sin^2 B + \sin^2 C) \\ &+ z_1^2 x_1 \sin C \sin B\,(\sin^2 C + 2 \sin^2 A) + z_1 x_1^2 \sin A \sin B\,(2 \sin^2 C + \sin^2 A) = 0. \end{aligned}$$

Ist r der Radius des Umkreises im Dreieck ABC, und setzt man $2r \sin A = a$, $2r \sin B = b$, $2r \sin C = c$, so erhält man

$$(111)\quad \begin{aligned} &abc \sum a x_1^3 + \sum a y_1 z_1 \left\{ b y_1 (b^2 + 2c^2) + c z_1 (c^2 + 2b^2) \right\} \\ &+ 2 x_1 y_1 z_1 \sum b^2 c^2 = 0, \end{aligned}$$

wo $\sum$ die bekannte Bedeutung hat, daſs aus dem einen Gliede die andern durch cyklische Vertauschung erhalten werden. Für den Ausdruck erhalten wir aber auch, wobei wir die Indices fortlassen wollen:

$$(112)\quad (bcx + cay + abz)(ax + by + cz)^2 = 0.$$

Da $ax + by + cz$ konstant ist, so erhalten wir als Bedingung für die Orthologie in cyklischer Permutation:

$$(113)\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

d. h. der Punkt P muſs auf der Geraden von **Lemoine** liegen.

Verbindet man einen Punkt P mit den Ecken des Dreiecks ABC, so steht ein Dreieck, dessen Seiten parallel den Geraden PA, PB, PC sind, mit ABC in paralleler Korrelation. Man kann nun fragen, wie muſs P liegen, damit diese Beziehung dreifach in cyklischer Permutation ist. Diese Frage wird durch einen Satz von der Ellipse beantwortet:

(114) Zeichnet man in eine Ellipse zwei Dreiecke ABC und XYZ (Fig. 2), deren Schwerpunkt das Centrum der Ellipse ist und zwar in umgekehrter cyklischer Ordnung, so findet folgende Beziehung statt:

$$AX \parallel BY \parallel CZ,\quad AY \parallel BZ \parallel CX,\quad AZ \parallel BX \parallel CY.$$

Der Beweis ist sehr einfach mittelst Einführung der excentrischen Anomalie. Die Koordinaten der Ecken von ABC und XYZ können wir, wenn a und b die Achsen der Ellipse sind, folgendermafsen bezeichnen:

$A: a\cos\alpha,\ b\sin\alpha;\ B: a\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right),\ b\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right);\ C: a\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right),\ b\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right);$

$X: a\cos\xi,\ b\sin\xi;\ Y = a\cos\left(\xi-\frac{2\pi}{3}\right),\ b\sin\left(\xi-\frac{2\pi}{3}\right);\ Z: a\cos\left(\xi+\frac{2\pi}{3}\right),\ b\sin\left(\xi+\frac{2\pi}{3}\right).$

Die Gleichung von AX ist:

$$bx\cos\frac{\alpha+\xi}{2} + ay\sin\frac{\alpha+\xi}{2} - ab\cos\frac{\alpha-\xi}{2} = 0.$$

Nehmen wir nun α um $\frac{2\pi}{3}$ gröfser, ξ um $\frac{2\pi}{3}$ kleiner, so bleibt $\frac{\alpha+\xi}{2}$ ungeändert, d. h. BY $\parallel$ AX, CZ $\parallel$ AX. Um AY zu bestimmen, tritt nur $\xi-\frac{2\pi}{3}$ für ξ ein, wobei aber ξ ein willkürlicher Winkel ist. Daher ist auch AY $\parallel$ BX $\parallel$ CY.; und ebenso folgt AZ $\parallel$ BX $\parallel$ CY.

Nun ist für irgend ein Dreieck die Steinersche Ellipse diejenige, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt des Dreiecks ist. Legt man also um das Dreieck ABC die Steinersche Ellipse und verbindet einen Punkt derselben mit den Ecken des Dreiecks, dann folgt aus dem eben angeführten Satz, dafs ein Dreieck, dessen Seiten parallel den Verbindungslinien PA, PB, PC eines Punktes P auf der Steinerschen Ellipse mit den Ecken A, B, C sind, mit ABC in dreifacher paralleler Korrelation steht. Dabei bilden die drei Centra der parallelen Korrelation ein Maximaldreieck der Ellipse.

Wir betrachten noch zwei Dreiecke, die sowohl orthologisch sind, als auch in paralleler Korrelation stehen. Ist ABC das eine Dreieck und S und T die zugehörigen Centra der parallelen Korrelation und Orthologie, so geht der Kreis über ST als Durchmesser durch alle Ecken des Dreiecks. Die angegebenen Centra müssen daher auf dem Umkreise des Dreiecks liegen und sind stets die Endpunkte eines Durchmessers. Man sieht ferner leicht ein, dafs die beiden Dreiecke dann einander symmetrisch ähnlich sind, auch haben die betreffenden Centra in den beiden Dreiecken stets ähnliche Lage. Nebenbei sei endlich noch folgendes bemerkt, was aus bekannten Sätzen leicht folgt: Hat man zwei Dreiecke, die entweder zweifach orthologisch sind, oder in zweifacher paralleler Korrelation in cyklischer Permutation stehen, oder endlich sowohl orthologisch sind, als auch in paralleler Korrelation stehen, so müssen solche Dreiecke denselben Brocardschen Winkel haben.

---

8. Einige Anwendungen.

Das Hauptziel der vorigen Untersuchungen war, die Bedeutung der Determinanten für den elementaren Unterricht zu zeigen, so dafs die Arbeit hiermit abgebrochen werden könnte; indessen ist es doch wohl angebracht, noch einige Anwendungen der Hauptsätze zu machen, die sich auf Dreiecke beziehen, die kollinear und orthologisch sind, oder noch in paralleler Korrelation stehen, da manche Sätze der neuern Geometrie des Dreiecks in einem neuen Lichte erscheinen, auch wohl noch einige Ergänzungen erhalten.

a) Zeichnet man über den Seiten eines Dreiecks ABC ähnliche gleichschenklige Dreiecke, so bestimmen die Spitzen X, Y, Z ein Dreieck, das als Kiepertsches zu ABC gehöriges Dreieck bezeichnet wird. Es dürfte dies wohl bekannt sein, doch sei es noch für alle Fälle erwähnt. Es ist ferner bekannt, jedenfalls auch leicht einzusehen, dafs diese beiden Dreiecke ABC und XYZ sowohl kollinear als auch orthologisch sind. Ist φ der Basiswinkel an den Grundlinien der ähnlichen gleichschenkligen Dreiecke, so sind die

Koordinaten des Kollineationscentrums bez. $\sin(A+\varphi)^{-1}$, $\sin(B+\varphi)^{-1}$, $\sin(C+\varphi)^{-1}$. Bei der Veränderung des Winkels φ beschreibt der Punkt eine gleichseitige Hyperbel, die Kiepertsche Hyperbel heifst. Aus unserem Satze folgt sofort, dafs das Kollineationscentrum und die orthologischen Centra der Dreiecke auf einer Geraden liegen, die zur Kollineationsachse senkrecht ist. Hierbei findet noch folgender Umstand statt (Fuhrmann, Synthet. Beweise, p. 183 ff.): Es giebt immer je 2 Winkel φ an den Grundlinien der gleichschenkligen Dreiecke, welche solche Kiepertschen Dreiecke bestimmen, dafs die Kollineationsachse mit dem Grunddreieck dieselbe ist. Diese Winkel ergänzen sich zu 90^0. Dabei ist ferner das orthologische Centrum des Grunddreiecks zu dem einen das Kollineationscentrum des Grunddreiecks mit dem andern Kiepertschen Dreieck. Das orthologische Centrum der Kiepertschen Dreiecke ist stets der Mittelpunkt O des Umkreises vom Grunddreieck; auf dem Lote von O auf die Kollineationsachse mit einem Kiepertschen Dreieck liegen daher stets zwei Kollineationscentren. Besondere Kiepertsche Dreiecke sind noch (abgesehen vom Mittendreieck) die, welche durch $\varphi = 30^0$ und $\varphi = 60^0$ erhalten werden. Das letztere führt zu den isogonen Centren des Dreiecks. Über letzere Punkte, sowie die zugehörigen Dreiecke ist eine Abhandlung von Lieber verhanden, die als Programmabhandlung 1896 des Stettiner Realgymnasiums erschienen ist. Zu den Kiepertschen Dreiecken gehört endlich noch das erste Brocardsche Dreieck, welches zum Grunddreieck zugleich symmetrisch ähnlich ist. Das orthologische Centrum ist der Punkt von Tarry T. Wegen der Ähnlichkeit steht es mit demselben auch in paralleler Korrelation; die Centren sind der Punkt von Steiner S und der Punkt von Lemoine L. Ist D das Kollineationscentrum der Dreiecke, so folgt aus den gegebenen Sätzen, dafs die Punkte T, O, D, S auf einem Lote zur Kollineationsachse liegen, und dafs die Strecke LS durch diese Achse halbiert wird. Dies letzte Resultat scheint mir neu zu sein, wenigstens habe ich es noch nicht erwähnt gefunden; die anderen Resultate sind ja bekannt, erscheinen aber hier im Zusammenhange mit andern Eigenschaften. Da der Punkt von Steiner auf der Steinerschen Ellipse liegt, so mufs das Grunddreieck mit dem ersten Brocardschen Dreieck in dreifacher paralleler Korrelation stehen. Dies giebt also noch folgendes Resultat:

Ist A'B'C' das erste Brocardsche Dreieck und zieht man durch A', B', C' die Parallelen zu AB, BC, CA einerseits und zu AC, BA, CB andrerseits, so werden sich diese betreffenden Geraden in zwei Punkten schneiden, die in Verbindung mit dem Punkte von Lemoine ein Dreieck geben, das mit ABC denselben Schwerpunkt hat.

b) Eine zweite Anwendung knüpft an eine Figur an, von der einige Eigenschaften in einer kleinen Abhandlung gegeben sind, die in Mathesis X. p. 105—111 erschienen ist, aufserdem in dem schon erwähnten Werke: Fuhrmann, „Synthetische Beweise", p. 107 ff. vorkommt. Des allgemeinen Verständnisses halber sei einiges kurz erwähnt. Schneidet man von den Höhen eines Dreiecks ABC Längen von der Ecke nach den Gegenseiten ab, die gleich dem Durchmesser des Inkreises sind, so erhält man ein Dreieck UVW, das kollinear und orthologisch zu ABC ist. Der Höhenschnittpunkt H von ABC ist, wie sofort ersichtlich, das Kollineationscentrum der beiden Dreiecke und das orthologische Centrum von UVW. Da ferner UVW symmetrisch ähnlich zu ABC ist, so steht es mit demselben in paralleler Korrelation. Das Centrum der Korrelation von UVW ist der Punkt von Nagel N des Grunddreiecks. Diesem entspricht im Dreieck ABC ein Punkt L, dessen Koordinaten $1:(b-c)$, $1:(c-a)$, $1:(a-b)$ sind. Das orthologische Centrum des Dreiecks ABC ist also der Gegenpunkt T von L auf dem Umkreise von ABC. Natürlich müssen auch H und N auf dem Umkreise von UVW (Kreis von Fuhrmann) liegen. Ist ϱ der Radius des Inkreises von ABC, so ist die Gleichung des angegebenen Kreises:

(1) $4r\varrho(ax+by+cz)(ax\cos A+by\cos B+cz\cos C)-abc(ayz+bzx+cxy)=0.$

Setzt man $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\tau$, so erhält man noch folgendes:

(2) Die Koordinaten von T sind: $1:(\cos A-4\tau)$, $1:(\cos B-4\tau)$, $1:(\cos C-4\tau)$

(3) Die Gleichung der Kollineationsachse der Dreiecke ist

$$\frac{x \sin A}{\cos A - 4\tau} + \frac{y \sin B}{\cos B - 4\tau} + \frac{z \sin C}{\cos C - 4\tau} = 0 .$$

(4) Die Gleichung von TH ist: $x \cos A (\cos B - \cos C)(\cos A - 4\tau)$
$+ y \cos B (\cos C - \cos A)(\cos B - 4\tau) + z \cos C (\cos A - \cos B)(\cos C - 4\tau) = 0.$

Nach unseren Sätzen (81), (106) ergiebt sich, dafs TH zur Kollineationsachse senkrecht ist, und LN von derselben halbiert wird.

c) Die vorher betrachteten Dreiecke sind zum Grunddreieck kollinear, orthologisch und stehen mit demselben in paralleler Korrelation. Man sieht leicht ein, dafs man beliebig viele solcher Dreiecke erhalten kann, indem man irgend einen Punkt P des Umkreises mit den Ecken A, B, C verbindet und dann ein Dreieck konstruiert, dessen Seiten parallel zu PA, PB, PC sind, und das zugleich kollinear zu ABC ist. Manche mögen noch besondere Eigenschaften haben, doch soll dieser Punkt hier nicht weiter verfolgt werden. Es soll nur noch eine Anwendung auf ein Dreieck gemacht werden, das dem Grunddreieck einbeschrieben und zu demselben kollinear und orthologisch ist. Ein solches Dreieck geben uns die Berührungspunkte X, Y, Z der Ankreise auf den zugehörigen Seiten (Fig. 3). Zunächst bemerken wir darüber folgendes:

(5) Die Gleichungen der Seiten YZ, ZX, XY sind:

$$-x \sin^2\frac{A}{2} + y \sin^2\frac{B}{2} + z \sin^2\frac{C}{2} = 0,$$

$$x \sin^2\frac{A}{2} - y \sin^2\frac{B}{2} + z \sin^2\frac{C}{2} = 0,$$

$$x \sin^2\frac{A}{2} + y \sin^2\frac{B}{2} - z \sin^2\frac{C}{2} = 0.$$

Die Gleichungen der Lote in X, Y, Z zu den Seiten, welche sich in L schneiden mögen, sind:

$$(6)\quad x\left(\sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right) + y \sin^2\frac{B}{2} - z \sin^2\frac{C}{2} = 0,$$

$$-x \sin^2\frac{A}{2} + y\left(\sin^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right) + z \sin^2\frac{C}{2} = 0,$$

$$x \sin^2\frac{A}{2} - y \sin^2\frac{B}{2} + z\left(\sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B}{2}\right) = 0.$$

(7) Die Koordinaten des Schnittpunktes L:

$$\left(\sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right) : \left(\sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B}{2}\right) : \left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right)$$
$$= a_1 : b_1 : c_1 .$$

(8) Die Kollineationsachse, welche die Seiten in X_o, Y_o, Z_o schneiden möge, hat die Gleichung:

$$x \sin^2\frac{A}{2} + y \sin^2\frac{B}{2} + z \sin^2\frac{C}{2} = 0.$$

Durch die Punkte X, Y, Z wird ein Kreis gelegt, der jede Seite noch in einem zweiten Punkte schneidet. Sind X_1, Y_1, Z_1 diese Punkte, so ist auch $X_1 Y_1 Z_1$ zu ABC kollinear, orthologisch und dem Dreieck einbeschrieben. Die Gleichung des Kreises ist, wenn a_1, b_1, c_1, die obige Bedeutung haben:

$$(9)\quad \left(x \sin A + y \sin B + z \sin C\right)\left(a_1 x \sin^2\frac{A}{2} + b_1 y \sin^2\frac{B}{2} + c_1 \sin^2\frac{C}{2}\right)$$
$$- 4\tau\left(yz \sin A + zx \sin B + xy \sin C\right) = 0.$$

Daraus ergeben sich die Koordinaten von X_1, Y_1, Z_1.

(10) $X_1 : 0, 1 : b_1 \sin B, 1 : c_1 \sin C$; $Y_1 : 1 : a_1 \sin A, 0, 1 : c_1 \sin C_1$;
$Z_1 : 1 : a_1 \sin A : 1 : b_1 \sin B, 0$.

Daraus folgt die Gleichung der Kollineationsachse von ABC und $X_1 Y_1 Z_1$, nämlich:

(11) $a_1 x \sin A + b_1 y \sin B + c_1 z \sin C = 0$.

Die Koordinaten des Kollineationscentrums N_1 sind

(12) $a_1 x \sin A = b_1 y \sin B = c_1 z \sin C$.

Bekannt ist, dafs sich die Lote in X_1, Y_1, Z_1 zu den Seiten in dem zu L isogonal verwandten Punkte L_1 schneiden, so dafs die Koordinaten desselben sind:

(13) $x : y : z = (1 : a_1) : (1 : b_1) : (1 : c_1)$.

In demselben Punkte müssen sich aber auch die von A, B, C auf YZ, ZX, XY gefällten Lote, d. h. in dem orthologischen Centrum von ABC zu XYZ schneiden. Das Kollineationscentrum von ABC und XYZ ist der Punkt von Nagel N. Aus dem vorigen folgt nun, dafs auf LL_1 die Punkte N und N_1 liegen müssen, und dafs diese Gerade zur Kollineationsachse von ABC und XYZ senkrecht stehen mufs, ferner aber, dafs die Kollineationsachse von ABC und $X_1 Y_1 Z_1$ zu der von ABC und XYZ parallel sein mufs.

Von sonstigen Eigenschaften dieser Figur sei noch einiges bemerkt, was zwar nicht den eigentlichen Untersuchungen angehört, aber doch zur letzten Figur einige Beziehungen hat. Die Kollineationsachse von ABC und XYZ geht durch den Schnittpunkt der Geraden

(14) $x + y + z = 0$ und $x \cos A + y \cos B + z \cos C = 0$.

Dieselben sind von Vigarié in seiner Arbeit: Géométrie du triangle als axe antiorthique und axe orthique bezeichnet. Die erste Gerade ist auch gelegentlich als Nulllinie bezeichnet, da ja von ihr sofort die Eigenschaft erkannt wird, dafs die Summe der Lote von einem Punkte derselben auf die Seiten gleich Null ist. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten : $(\cos B - \cos C) : (\cos C - \cos A) : (\cos A - \cos B)$. Der diesem isogonal verwandte Punkt ist also der trilineare Pol der Geraden, welche die Mittelpunkte des In- und Umkreises verbindet.

Dann wäre noch zu bemerken, dafs sich auf diese Figur die kontinuierliche Transformation anwenden läfst.

(10) $X_1 : 0, 1 : b_1 \sin$ … $\sin C_1$;
$Z_1 : 1 : a_1 \sin A :$ …

Daraus folgt die Gleich… und $X_1 Y_1 Z_1$, nämlich:

(11) $a_1 x \sin A + b_1 y$ …

Die Koordinaten des K…

(12) $a_1 x \sin A = b_1$ …

Bekannt ist, dafs sich … in dem zu L isogonal verwandten Punkte L_1 schneid… …en sind:

(13) $x : y : z = (1$ …

In demselben Punkte … C auf YZ, ZX, XY gefällten Lote, d. h. in dem orthologi… …hneiden. Das Kollineationscentrum von ABC und X… …us dem vorigen folgt nun, dafs auf LL_1 die Punkte N… …ese Gerade zur Kollineationsachse von ABC und XYZ… …, dafs die Kollineationsachse von ABC und $X_1 Y_1 Z_1$ zu… …in mufs.

Von sonstigen Eigensc… …s bemerkt, was zwar nicht den eigentlichen Untersuch… …ten Figur einige Beziehungen hat. Die Kollineationsach… …den Schnittpunkt der Geraden

(14) $x + y + z =$ … 0.

Dieselben sind von Vi… …u triangle als axe antiorthique und axe orthique bezeic… …gelegentlich als Nulllinie bezeichnet, da ja von ihr s… …dafs die Summe der Lote von einem Punkte derselben … Schnittpunkt hat die Koordinaten : $(\cos B - \cos C) :$ (… …r diesem isogonal verwandte Punkt ist also der triline… …ittelpunkte des In- und Umkreises verbindet.

Dann wäre noch zu be… kontinuierliche Transformation anwenden läfst.

Fig. 1.

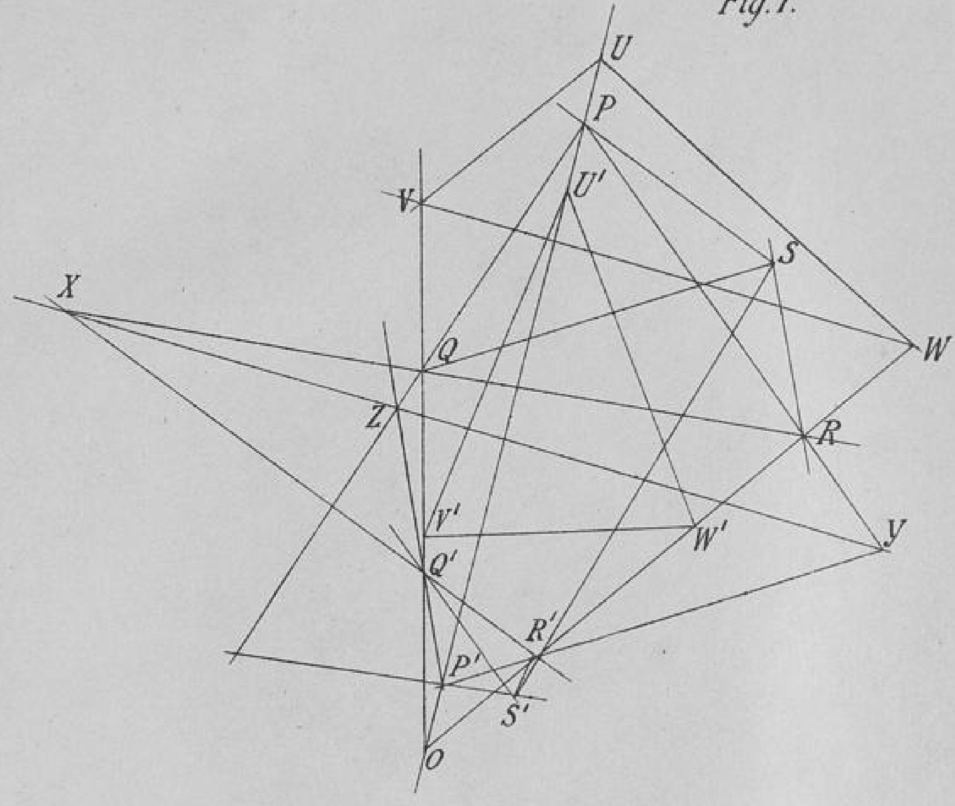
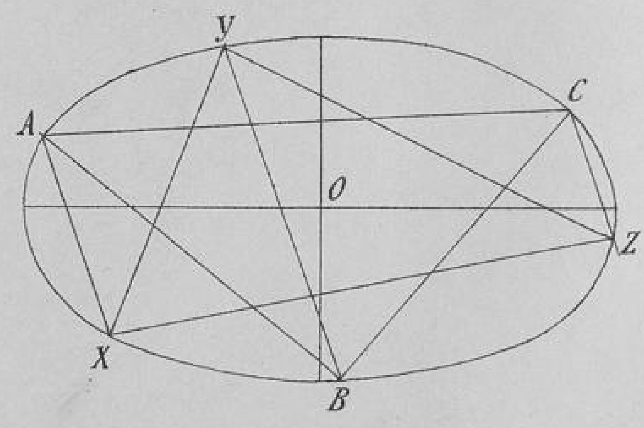


Fig. 2.



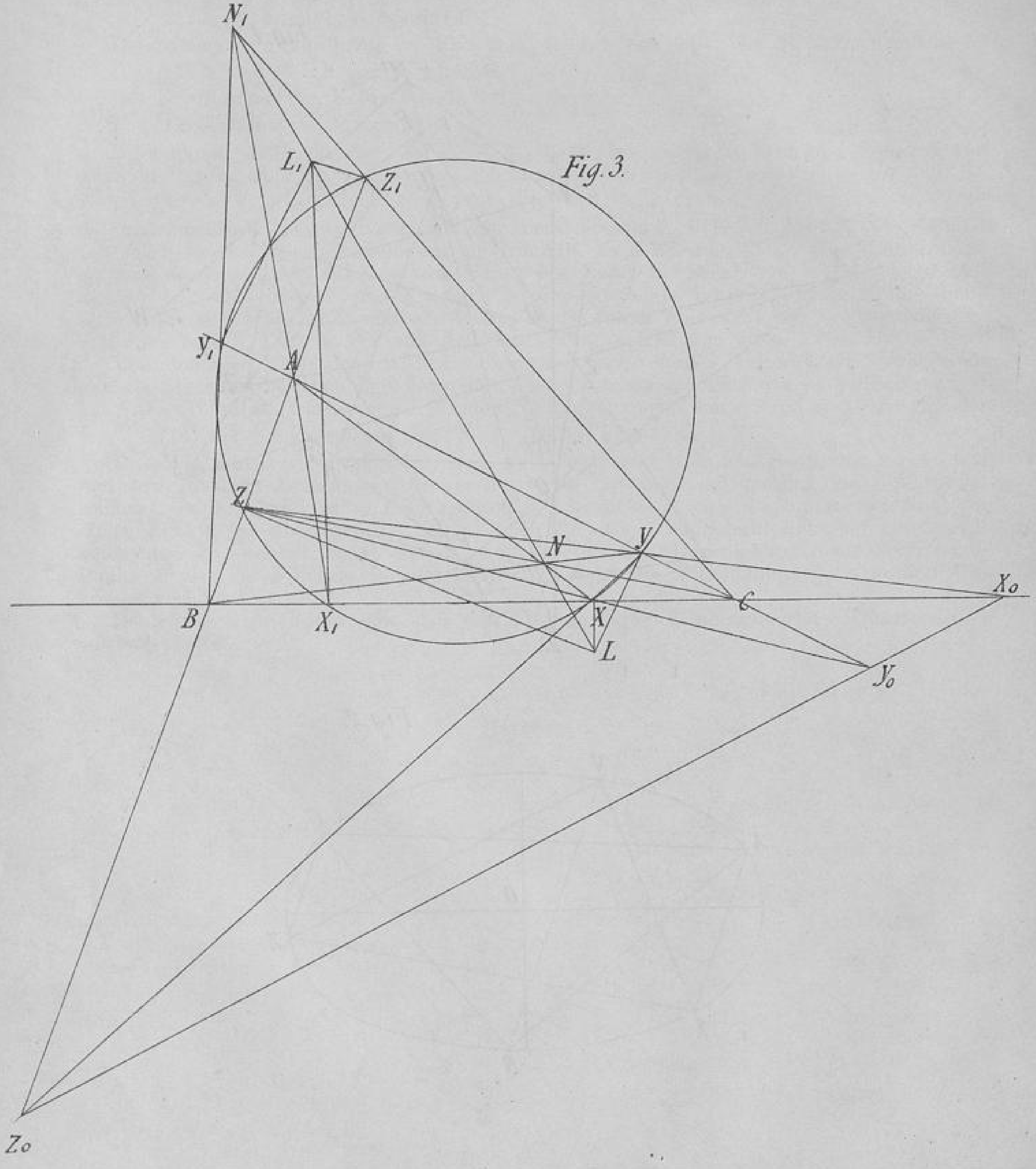


Fig. 3.