A. Thaer,

Kennzeichen

der

Entartung einer Fläche zweiter Ordnung.

(Beilage des Jahresberichtes der städtischen Realschule zu Halle a. S.)

1892. Pr. Nr. 262.

Kennzeichen der Entartung einer Fläche zweiter Ordnung.

Eine Fläche zweiter Ordnung, deren Hessesche Determinante verschwindet, ist entweder eine ausserordentliche, d. h. ein Kegel oder Cylinder, oder eine uneigentliche, d. h. sie entartet in ein Ebnenpaar oder in eine Doppelebene. Notwendige und hinreichende Bedingungen, dass eine bestimmte Art einer Fläche zweiter Ordnung vorliegt, sind von mir in Schlömilchs Zschr. XXIX S. 376 aufgestellt worden unter der Voraussetzung, dass der Coeffizient von x^2 in der Gleichung positiv ist. Es soll im folgenden bewiesen werden, dass nach geringer Abänderung der Bedingungen diese Voraussetzung fallen kann. Vorher sollen aber einige Sätze über verschwindende Subdeterminanten entwickelt werden, die zur Erkennung und Unterscheidung der ausserordentlichen und uneigentlichen Flächen zweiter Ordnung wichtig sind, wie ich Schlömilchs Zchr. XXI S. 382 angedeutet habe.

Ist nämlich die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Punktkoordinaten

$$\Sigma\ a_{ik}\ x_i x_k = o\ (i = 1,\ 2,\ 3;\ k = 1,\ 2,\ 3;\ a_{ik} = a_{ki}),$$

und wird in der Hesseschen Determinante $|\ a_{ik}\ |$ der Coeffizienten die Adjuncta von a_{ik} durch α_{ik} ausgedrückt, so lautet die Gleichung derselben Fläche in Ebenenkoordinaten bekanntlich

$$\Sigma\ \alpha_{ik}\ \xi_i\ \ \xi_k = 0.$$

Diese Gleichung muss identisch verschwinden, wenn die Fläche zweiter Ordnung entarten soll. Scheinbar sind hierzu zehn Gleichungen nötig. Da aber nur drei Gleichungen erforderlich sind, eine Fläche zweiter Ordnung zu einer uneigentlichen zu machen, so ist hier, wie häufig (vgl. Clebsch, Binäre Formen S. 91 u. 163) eine Überzahl von Bedingungen vorhanden, deren Reduktion mit Hilfe der folgenden Subdeterminanten-Relationen gelingt.

§ 1.

Subdeterminanten-Relationen.

„Die aus einer adjungierten Determinante ausgesonderte beliebige. Determinante m. Grades ist gleich dem korrespondierenden Faktor der entsprechenden Unterdeterminante der ursprünglichen Determinante multipliziert mit der (m—1). Potenz des Wertes der letzteren. (Schrader, Theorie d. Det. §37).

$$D\ (\alpha_{i,k})^{\substack{i_1\ i_2 \ldots i_m\\ k_1\ k_2 \ldots k_m}} = R^{m-1}\ D'\ (a_{i,k})^{\binom{i_1\ i_2\ \ldots\ i_m}{k_1\ k_2\ \ldots\ k_m}}$$

Wendet man statt der sehr praktischen, aber noch wenig bekannten Schraderschen Bezeichnung die ältere Baltzersche (Det. § 7, 3) an, so ist insbesondere

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix} = |\ a_{ik}\ | \times \frac{\partial^2\ |\ a_{ik}\ |}{\partial a_{fi}\ \partial a_{gk}} \tag{1}$$

Ferner folgt aus der (nach Analogie der von Pasch Schlömilch Zschr. XXVII S. 123 aufgestellten) Identität

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_i x_i & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \Sigma b_i x_i & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \Sigma c_i x_i & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \Sigma d_i x_i & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ \Sigma e_i x_i & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix} = 0$$

wenn $\Sigma a_i x_i = \Sigma \pm 1 c_2\, d_3\, e_4$ u. s. w.

$$(1ade)\,(bcde) - (1bde)\,(acde) + (1cde)\,(abde) = 0 \qquad (2)$$

wobei $(bcde) = \Sigma \pm b_1\, c_2\, d_3\, e_4$ u. s. w. Da der Beweis ebenso für n^2 Elemente geführt werden kann, gilt der Satz:

Je drei Subdeterminanten $n-1$. Grades derselben Reihen-Combination einer Determinante $n$ten Grades sind unter einander durch eine lineare Gleichung verbunden, welche als Coeffizienten: Summen von Subdeterminanten $n-2$ten Grades derselben Reihen-Combination enthalten, z. B. wenn $(a_2\, d_3) = \Sigma \pm a_2\, d_3$

$$[(a_2\, d_3) + (a_3\, d_1) + (a_1\, d_2)]\,(bcd) - [(b_2\, d_3) + (b_3\, d_1) + (b_1\, d_2)]\,(cda)$$
$$+ [(c_2\, d_3) + (c_3\, d_1) + (c_1\, d_2)]\,(dab) = 0.$$

Aus der Identität (1) folgt zunächst der bekannte Satz, dass bei verschwindender Determinante die Adjunkten der Elemente einer Reihe den Adjunkten der Elemente einer Parallel-Reihe proportioniert sind. Umgekehrt folgt aus der Proportionalität zweier Zeilen der adjungierten Determinante $|\alpha_{ik}|$ das Verschwinden der ursprünglichen $|a_{ik}|$. Denn ist $\alpha_{il} = \lambda \alpha_{kl}$, so folgt aus der ständigen Identität $\sum\limits_l a_{il}\alpha'_{kl} = o$ das Verschwinden der Determinante $\sum\limits_l a_{il}\alpha_{il}$.

I. Wenn die Determinante ersten Grades und eine Subdeterminante $n-1$ten Grades verschwinden, so verschwinden alle Subdeterminanten $n-1$ten Grades entweder derselben Zeilen-Combination, oder derselben Colonnen-Combination.

Denn da $|a_{ik}| = 0$, so ist $\alpha_{ji}\,\alpha_{gk} - \alpha_{jk}\,\alpha_{gi} = 0$ und mit α_{fi} muss entweder α_{jk} oder α_g verschwinden.

II. Verschwinden zwei Subdeterminanten $n-1$ten Grades einer Zeilen-Combination, so verschwinden alle Subdeterminanten $n-1$ten Grades derselben Zeilen-Combination, vorausgesetzt dass eine der Subdeterminanten $n-2$ten Grades aus den gemeinsamen Colonnen der beiden verschwindenden Subdeterminanten von Null verschieden ist.

Denn jede Subdeterminante $n-1$ten Grades derselben Zeilen-Combination kann durch die verschwindenden dargestellt werden und hat dabei als Coeffizient eine Summe von Subdeterminanten $n-2$ten Grades, welche aus den gemeinsamen Colonnen der verschwindenden Subdeterminanten genommen wird. Ist eine dieser Subdeterminanten $n-2$ten Grades von Null verschieden, so kann es die Subdeterminante $n-1$ten Grades nicht sein. Auch aus dem Satz über Proportionalität der Subdeterminanten kann der Beweis geführt werden: Verschwinden in der Determinante $(abcd)$ die Subdeterminanten (abc) und (abd), so sind die Subdeterminanten (bc) und (bd) den (ab) proportional, und wenn die letzteren von Null verschieden sind, ist $(bcd) = 0$.

III. Verschwinden zwei Subdeterminanten m. Grades mit $m-1$ gemeinsamen Colonnen und ist eine der Subdeterminanten $m-1$ten Grades dieser Colonnen von Null verschieden, so verschwinden alle Subdeterminanten derselben Zeilen-Combination, welche die $m+1$ Colonnen der verschwindenden Subdeterminanten enthalten.

Der Satz folgt aus II, wenn man dort $n = m + 1$ setzt. Ist $(abcdef)$ vorgelegt und verschwinden (abc) und (bcd), so verschwindet auch (acd), wie gleichzeitig aus der Proportionalität von (ac), (bc), (ad) ersichtlich ist.

Unabhängig von einander sind deshalb drei Subdeterminanten m. Grades derselben Zeilen-Combination nur, wenn sie mindestens $m+2$ verschiedene Colonnen enthalten. Solche unabhängigen Gruppen erhält man bei cyklischer Aufeinanderfolge oder bei Festhalten von $m-1$ Colonnen. Sind n Colonnen vorhanden, so werden $n+1-m$ unabhängige Subdeterminanten m. Grades aufgestellt werden können und in einem System von n^2 Elementen im allgemeinen $(n+1-m)^2$.

IV. Verschwinden von den Subdeterminanten m. Grades einer Zeilen-Combination $n+1-m$ von einander unabhängige, ohne dass gleichzeitig alle Subdeterminanten $m-1$ten Grades einer in zweien enthaltenen Colonnen-Combination verschwinden, so verschwinden alle Subdeterminanten m. Grades dieser Zeilen-Combination [Specialfall Baur. Diss. Giessen 1880. S. 13.]

Der Beweis wird durch wiederholte Anwendung von III geführt. Ist wiederum $(abcdef)$ vorgelegt und verschwinden (abc), (abd), $abe)$, (abf), so verschwinden alle Subdeterminanten 3ten Grades der ersten drei Colonnen, wenn nicht alle Subdeterminanten (ab) verschwinden. Sind die cyklisch folgenden Subdeterminanten (abc), (bcd), (cde), (def) gegeben, so verschwinden die übrigen unter entsprechenden Bedingungen: ein $(bc) \lesseqgtr 0$, ein $(cd) \lesseqgtr 0$ u. s. w., wie ja auch wiederum die Proportion der (ab), (bc), (cd) erkennen lässt.

Verschwinden von den Subdeterminanten m. Grades überhaupt $(n+1-m)^2$ von einander unabhängige, so verschwinden alle Subdeterminanten m. Grades des Systems unter entsprechenden Bedingungen, d. h. es darf aus dem Verschwinden der einen Subdeterminante nicht das Verschwinden einer der übrigen gegebenen $(n+1-m)^2-1$ mit Notwendigkeit gefolgt sein, was eintritt, sobald die zweien gemeinsamen Subdeterminanten $m-1$ten Grades sämmtlich verschwinden. Ist $(abcd)$ vorgelegt, so verschwinden mit (ab), (ac), (ad), (a_1c_3), (a_1c_3), (a_1d_3), (a_1b_4), (a_1c_4), (a_1d_4) alle Subdeterminanten zweiten Grades, wenn die a nicht Null sind. [cf. Subdeterminanten-Relationen Baltzer, Det. § 7. Kronecker Berl. Ber. 1874. März.]

Diese Sätze sollen für Subdeterminanten symmetrischer Determinanten spezialisiert werden. Dabei sei erwähnt, dass sich die folgenden Sätze wohl auch als besondere Fälle der bekannten linearen Kroneckerschen Relation [Berl. Ber. 1882 S. 824] ergeben, die als die einzigen fundamentalen nachgewiesen sind [Runge, Kronecker J. B. 93. S. 319ff. Anwendungen Caspary, Kronecker J. Bd. 96. S. 183 u. S. 325. cf. auch Günther Det. III, 7.]

V. Verschwindet eine symmetrische Determinante und eine Diagonaladjunkte, so verschwinden alle Adjunkten der Elemente derselben Zeile und Kolonne.

Denn da bei einer symmetrischen Determinante $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, demnach

$$\alpha_{ii}\ \alpha_{kk} - \alpha_{ik}^2 = |a_{ik}| \asymp adj\ (a_{ii}\ a_{kk} - a_{ik}^2)$$

ist, so folgt aus dem Verschwinden von $|a_{ik}|$ und α_{ii} unbedingt $\alpha_{ik} = 0$ und $\alpha_{ki} = 0$, z. B. ist $(abcd)$ symmetrisch, d. h. $a_2 = b_1$, $a_3 = c_1$ u. s. w., so folgt aus $(abcd) = 0$ und $(abc) = 0$: $(abd) = 0$, $(bcd) = 0$ oder das Verschwinden der ihnen gleichen $(a_1\, b_2\, c_1)$, $(a_2\, b_3\, c_1)$. Es ist ja auch nach (1)

$$(ab)\ (abcd) = (abc)\ (a_1\ b_2\ d_1) - (abd)^2.$$

VI. Verschwinden ausser der Determinante zwei Diagonaladjunkten, so verschwinden überhaupt die Adjunkten aller Elemente, wenn die zwei Diagonaladjunkten unabhängig von einander verschwinden, d. h. die gemeinsamen Subdeterminanten $n-2$ten Grades nicht alle Null sind.

Denn nach V verschwinden die Adjunkten zweier Zeilen und Kolonnen und demnach in jeder Zeile zwei, also alle nach II. Beispiel: Ist $(abcd) = 0$, $(abc) = 0$, $(a_1\ b_2\ d_1) = 0$, so verschwinden alle Subdeterminanten 3ten Grades, wenn $(ab) \lesseqgtr 0$.

VII. Verschwinden zwei Subdeterminanten $n-1$ten Grades derselben Zeilen-Combination, so verschwinden alle Subdeterminanten $n-1$ten Grades derselben Zeilen- und der entsprechenden Colonnen-Combination, vorausgesetzt dass eine der den verschwindenden Determinanten gemeinsame Subdeterminante $n-2$ten Grades nicht verschwindet.

Der Beweis ergiebt sich aus II unter Berücksichtigung von $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$. Verschwinden in der symmetrischen Determinante $(abcd)$ die Subdeterminanten (abc) und (abd), so verschwinden alle Subdeterminanten 3ten Grades der drei ersten Zeilen und die der drei ersten Colonnen, also (bcd) sowohl wie $(a_1\ b_3\ c_1)$ und damit auch $(abcd)$.

VIII. Verschwindet die Determinante, eine Diagonal-Subdeterminante $n-1$ten Grades und eine Diagonal-Subdeterminante derselben $n-2$ten Grades, so verschwinden alle Subdeterminanten $n-2$ten Grades, derselben Zeilen- und derselben Colonnen-Combination der Hauptdeterminante, wenn eine der Subdeterminanten $n-2$ten Grades der verschwindenden Diagonal adjunkta von Null verschwindet.

Der Beweis ergiebt sich durch wiederholte Anwendung von V und VII resp. III. Ist $(abcd) = 0$, $(abc) = 0$, $(ab) = 0$, so ist auch $(ac) = 0$, $(ad) = 0$, $(a_1\ b_3) = 0$, $(a_1\ b_4) = 0$, wenn z. B. $(a_1\ c_3) \lesseqgtr 0$. Ist dies Null, so folgt aus VI, dass alle Subdeterminanten von (abc) verschwinden, und daher verschwinden zwar die Subdeterminanten dritten Grades der drei ersten Zeilen, aber nicht alle zweiten Grades mit Notwendigkeit.

IX. Verschwinden $\binom{n+2-m}{2}$ von einander unabhängige Subdeterminanten m. Grades eines Systems von n^2 Elementen, und ist das Verschwinden der einzelnen nicht ausschliesslich durch verschwindende Subdeterminanten $m-1$ten Grades hervorgerufen, so verschwinden alle Subdeterminanten m. Grades der Determinante.

Der Satz ergiebt sich aus IV unter Berücksichtigung von VII. Denn aus der ersten Zeilen-Combination sind $n+1-m$ erforderlich, welche gleichzeitig für die ersten m Colonnen ausreichen; aus der zweiten [cyklisch fortschreitend] $n+1-m-1$ u. s. w. Sind in $(abcd)$ die Subdeterminanten (ab), (ac), (ad), $(a_1\ c_3)$, $(a_1\ d_3)$, $(a_1\ d_4)$ gleich Null, so verschwinden alle Subdeterminanten 2ten Grades, wenn nicht mehr als ein a verschwindet.

X. Verschwindet eine symmetrische Determinante, so haben alle Diagonal-Adjunkten gleiches Vorzeichen; wie aus $\alpha_{ii}\ \alpha_{kk} - \alpha_{ik}{}^2 = 0$ folgt.

Es ist z. B. $a_1\ (abc) = (ab)\ (a_1\ c_3) - (ac)^2$.

Bei verschwindendem (abc), oder wenn (abc) mit a_1 gleiches Vorzeichen hat, müssen (ab) und $(a_1\ c_3)$ gleiches Vorzeichen haben. Entsprechend bei

$$(ab)\ (abcd) = (abc)\ a_1\ b_2\ d_4) - (abd)^2.$$

Hieraus ergiebt sich ein anderer Beweis für die Trägheit der quadratischen Form [Sylvester. Philos. Mag. 1853 S. 481], der freilich für jeden Einzelfall ausgeführt werden muss [cf. Brioschi Nouv. Ann. 1856. S. Juli], während der von Baltzer [Det. V. Aufl. S. 176] gelieferte allgemein gilt. — Die ausführlichere und allgemeine Aufstellung dieser Sätze über Subdeterminanten möge mit Rücksicht auf ihre über die Grenzen dieser Arbeit herausgehende Anwendbarkeit [cf. Caspary, Kronecker J. Bd. 96. 144] gestattet gewesen sein.

§ 2.

Zerlegung der Funktion zweiten Grades.

Die allgemeine Funktion zweiten Grades von drei Variabeln

$$u \equiv a_{11}\ xx + 2a_{12}\ xy + 2a_{13}\ xz + 2a_{14}\ x + a_{22}\ yy + 2a_{23}\ yz + 2a_{24}\ y + a_{33}\ zz + 2\ a_{34}\ z + a_{44}$$

werde in der besonderen Art geschrieben

$$u \equiv x\,(a_1\ x + a_2\ y + a_3\ z + a_4 + y\ (b_1\ x + b_2\ y + b_3\ z + b_4) + z\ (c_1\ x + c_2\ y + c_3\ z + c_4 \\ + (d_1\ x + d_2\ y + d_3\ z + d_4) \qquad (1)$$

wobei

$$a_1 = a_{11},\ a_2 = b_1 \asymp a_{12},\ a_3 = c_1 = a_{13} \text{ u. s. w.}$$

Es lässt sich dann u in Quadrate linearer Funktionen von $x \mid y \mid z$ zerlegen. Ist zunächst a_1 nicht Null so erhält man:

$$a_1\, u = [a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z + a_4]^2 + (ab)\, y^2 + 2\, (ac)\, yz + 2\, (ad)\, y + (a_1\, c_3)\, z^2 + 2 (a_1\, d_3)\, z + (a_1\, d_4), \tag{2}$$

wobei die vorkommenden Determinanten zweiten Grades folgende Bedeutung haben:

$$(ab) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \; (ac) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}; \; (a_1\, c_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Ist (ab) nicht Null, so können wir nach Multiplikation mit demselben ein weiteres Quadrat absondern:

$$a_1\, (ab)\, u = (ab)\, [a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z + a_4]^2 + [(ab)\, y + (ac)\, z + (ad)]^2 + a_1\, [(abc)\, z^2 + (abd)\, z + (a_1\, b_2\, d_4)], \tag{3}$$

wobei wiederum folgende Abkürzungen gelten:

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \; (abd) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}; \; (a_1 b_2 d_4) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}$$

Unter der weiteren Voraussetzung, dass (abc) von Null verschieden ist, darf dasselbe als Faktor hinzugefügt werden und bringt die Zerlegung zum Abschluss. Denn es ist

$$a_1\, (ab)\, (abc)\, u = (ab)\, (abc)\, [a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z + a_4]^2 + (abc)\, [(ab)\, y + ac)\, z + (ad)]^2 + a_1\, [(abc)\, z + (abd)]^2 + a_1\, (ab)\, (abcd), \tag{4}$$

wenn

$$(abcd) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Es sei auch diese Determinante von Null verschieden, dann kann man durch $a_1\, (ab)\, (abcd)$ dividieren und erhält: (5)

$$\frac{(abc)}{(abcd)}\, u = \frac{[a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z + a_4]^2}{a_1\, (abcd) : (abc)} + \frac{[(ab)\, y + (ac)\, z + (ad)]^2}{a_1\, (ab)\, (abcd) : (abc)} + \frac{[(abc)\, z + (abd)]^2}{(ab)\, (abcd)} + 1.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z + a_4 = \xi, \; (ab)\, y + (ac)\, z + (ad) = \eta, \; (abc)\, z + (abd) = \zeta,$$

so erscheint die Gleichung 4 in der Form:

$$a_1\, (ab)\, (abc)\, u = (ab)\, (abc)\, \xi^2 + (abc)\, \eta^2 + a_1\, \zeta^2 + a_1\, (ab)\, (abcd)$$

oder nach Division durch den Coeffizient von u:

$$u = \frac{\xi^2}{a_1} + \frac{\eta^2}{a_1\, (ab)} + \frac{\zeta^2}{(ab)\, (abc)} + \frac{(abcd)}{(abc)} \tag{6}$$

Es stellt $u = 0$ die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung dar, und zwar im rechtwinkligen wie im schiefwinkligen System. Unter der Voraussetzung, dass $a_1\, (ab)\, (abc)$ von Null verschieden sind, lässt sich die Gleichung allgemein verwandeln in

$$\frac{\xi^2}{a_1} + \frac{\eta^2}{a_1\, (ab)} + \frac{\zeta^2}{(ab)\, (abc)} + \frac{(abcd)}{(abc)} = 0.$$

Es sei auch $(abcd) \lesseqgtr 0$, so können folgende verschiedenen Fälle eintreten:

	$(abcd)$,	(abc),	(ab),	(a_1)
I	+	+	+	+
II	+	—	+	+
III	—	—	+	+
IV	—	+	+	+

Alle anderen Möglichkeiten führen auf dieselben Gleichungen, die wir durch Substitutionen vereinfachen. Es seien die absoluten Werte von

$$\frac{(abcd)}{(abc)} \cdot a_1\,, \quad \frac{(abcd)}{(abc)} \cdot a_1\,(ab)\,, \quad \frac{(abcd)}{(abc)}\,(ab)\,(abc)$$

der Reihe nach $\varkappa^2$, λ^2, μ^2,

so lauten die Gleichungen

$$\text{I} \quad \frac{\xi^2}{\varkappa^2} + \frac{\eta^2}{\lambda^2} + \frac{\zeta^2}{\mu^2} + 1 = 0 \qquad \text{II} \quad \frac{\xi^2}{\varkappa^2} + \frac{\eta^2}{\lambda^2} - \frac{\zeta^2}{\mu^2} - 1 = 0$$

$$\text{III} \quad \frac{\xi^2}{\varkappa^2} + \frac{\eta^2}{\lambda^2} - \frac{\zeta^2}{\mu^2} + 1 = 0 \qquad \text{IV} \quad \frac{\xi^2}{\varkappa^2} + \frac{\eta^2}{\lambda^2} + \frac{\zeta^2}{\mu^2} - 1 = 0$$

Im ersten Fall entsprechen realen Werten von ξ und η komplexe von ζ und ebenso realen von η und ζ komplexe von ξ, und endlich realen von ζ und ξ, komplexe von η. Die Fläche hat keinen realen Punkt.

Im vierten Fall sind reale Werte für ζ und η nur vorhanden, solange $|\xi| \leqq |\varkappa|$, ebenso für $|\eta| \leqq |\lambda|$ für $|\zeta| \leqq |\mu|$. Bis zu diesen Grenzen liefern die Ebenen parallel zu $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ als Schnitte Ellipsen. Die Fläche ist also ein Ellipsoid.

Im zweiten Fall sind ξ und η real, solange ζ real ist. Die Schnitte auf den zu $\zeta = 0$ parallelen Ebenen sind Ellipsen. Desgleichen gehören zu realen ξ reale ζ und η. Die Schnitte parallel $\xi = 0$ sind Hyperbeln, ebenso die Schnitte parallel $\eta = 0$. Die Fläche ist ein hyperbolisches (einschaliges, zusammenhängendes) Hyperboloid.

Im dritten Fall sind ξ und η real, sobald $\zeta^2 > \mu^2$; die realen Schnitte parallel $\zeta = 0$ sind Ellipsen, die Schnitte parallel $\xi = 0$ und $\eta = 0$ Hyperbeln. Die Fläche ist also ein elliptisches (geteiltes) Hyperboloid.

Die Bedingungen für diese 4 Flächen sind folgende. Ist a_1 positiv (wozu es immer durch Zeichenwechsel von u gemacht werden kann), so beweist die positive Determinante $(abcd)$ eine hyperbolische, die negative eine elliptische Fläche. Haben (ab) und (abc) gleiches Vorzeichen, so ist im ersten Fall die Fläche imaginär, im zweiten Fall ein Ellipsoid, haben sie verschiedenes Vorzeichen, so stellt die Gleichung ein Hyperboloid dar.

Verschwindet $(abcd)$, ohne dass eine der anderen entscheidenden Grössen (abc), (ab), a_1 Null wird, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{\xi^2}{a_1} + \frac{\eta^2}{a_1\,(ab)} + \frac{\zeta^2}{(ab)\,(abc)} = 0.$$

Da der Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ ein Doppelpunkt der Fläche ist, so ist die Fläche nicht mehr ordinär (ordentlich), sondern singulär (ausserordentlich). Haben (abc) und (ab) unter der Voraussetzung, dass a_1 positiv ist, beide positives Vorzeichen (vgl. § 1, X), so ist die Fläche imaginär, hat aber einen realen Punkt, und wird als imaginärer Kegel mit realem Centrum bezeichnet. Ist (abc) oder (ab) oder sind beide negativ, so erhält man einen realen Kegel, auf dem Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln liegen. Hat die Gleichung die Form:

$$\frac{\xi^2}{\varkappa^2} + \frac{\eta^2}{\lambda^2} - \frac{\zeta^2}{\mu^2} = 0,$$

so sind die Schnitte parallel der Ebene $\zeta = 0$ Ellipsen, für $\zeta = 0$ selbst zwei imaginäre Gerade. Die Schnitte parallel $\xi = 0$ und $\eta = 0$ sind Hyperbeln, für diese Ebenen selbst entarten die Hyperbeln in 2 Gerade.

Es sei nun $(abc) = 0$, a_1 und (ab) nicht Null, so dürfen wir in der Zerlegung nur bis zu der Gleichung (3) gehen

$$a_1\,(ab)\,u = (ab)\,[a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z + a_4]^2 + [(ab)\,y + (ac)\,z + (ad)]^2 + a_1\,[(abd)\,z + (a_1\,b_2\,d_4)].$$

Unter Benutzung von ξ und η erhalten wir die Gleichung $u = 0$ in der Form:

$$(ab)\ \xi^2 + \eta^2 + a_1\ [(abd)\ z + (a_1\ b_2\ d_4)] = 0.$$

Ist hier (abd) von Null verschieden und setzt man

$$(abd)\ z + (a_1\ b_2\ d_4) = \zeta',$$

so zeigt die Form

$$(ab)\ \xi^2 + \eta^2 + a_1\ \zeta' = 0,$$

dass die Gleichung ein Paraboloid darstellt. Die Fläche hat, wenn (ab) positiv ist, nur für negative ζ' reale Werte, da (a) positiv ist. Die Schnitte parallel $\zeta' = 0$ sind Ellipsen, auf dieser Ebene selbst liegt nur der Punkt $\xi^2 = 0$, $\eta^2 = 0$. Die Fläche ist also ein elliptisches Paraboloid. Für negative (ab) sind alle Schnitte parallel $\zeta = 0$ reale Hyperbeln, die Fläche ist also ein hyperbolisches Paraboloid.

Es ist hier unentschieden gelassen, ob $(abcd)$ verschwindet, aber es lässt sich beweisen, dass dann auch (abd) mit verschwinden müsste. Denn nach § 1, (1) ist

$$\begin{vmatrix} (a_1\ b_2\ d_4) & (abd) \\ (a_1\ b_2\ c_4) & (abc) \end{vmatrix} = (abcd)\ (ab)$$

d. h. wenn (abc) und $(abcd)$ verschwinden, muss auch (abd) oder $(a_1\ b_2\ c_4)$ verschwinden, diese sind aber bei einer symmetrischen Determinante identisch.

Die Bedingungen für das Paraboloid würden also lauten: $(abc) = o$, $(abcd)$, (ab), a_1 von Null verschieden.

Ist dagegen neben (abc) auch $(abcd)$ oder, was nach § 1, V dasselbe bedeutet (abd) gleich Null, so geht die obige Gleichung in die Form über:

$$(ab)\ \xi^2 + \eta^2 + a_1\ (a_1\ b_2\ d_4) = 0.$$

Die Fläche, welche durch diese Gleichung dargestellt wird, ist dadurch gekennzeichnet, dass die zu $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ parallelen Ebenen die Fläche in Geraden schneiden, die der Kante $\xi = 0 \mid \eta = 0$ parallel sind. Die Fläche ist ein Cylinder, wenn $(a_1\ b_2\ d_4)$ nicht Null ist, und zwar ein elliptischer bei positivem (ab), ein hyperbolischer bei negativem (ab).

Verschwindet auch $(a_1\ b_2\ d_4)$, so reduziert sich die Gleichung auf

$$(ab)\ \xi^2 + \eta^2 = 0,$$

d. i. eine Fläche, welche die Gerade $\xi = 0 \mid \eta = 0$ enthält, im übrigen aber bei positivem (ab) imaginär ist. Bei negativem (ab) zerfällt sie in zwei Ebenen.

Ist (ab) Null, so wird die Gleichung nach (2) die Form haben:

$$a_1\ u = [a_1\ x + a_2\ y + a_3\ z + a_4]^2 + 2\ (ac)\ yz + 2\ (ad)\ y + (a_1\ c_3)\ z^2 + 2\ (a_1\ d_3) z + (a_1\ d_4)$$

und die weitere Zerlegung würde mit dem Glied $(a_1\ c_3)\ z^2$ zu beginnen haben. Vorteilhafter wäre es dann, gleich von Anfang an x und z die Rollen wechseln zu lassen, so dass:

$$c_3\ u = [c_1\ x + c_2\ y + c_3\ z + c_4]^2 + 2\ (cb)\ y^2 + 2\ (ca)\ x\ y + 2\ (cd)\ y + (c_1 a_3)\ x^2 + 2\ (c_1\ d_3)\ x + (c_1\ d_4).$$

Hier können alle früheren Spezialfälle wieder eintreten.

Auch wenn

$$(ab) = 0 \text{ und } (bc) = 0$$

kommen wir nur auf einen früheren Fall, da mit $(ab) = 0$ und $(cd) = 0$, weil $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$ auch (ac) und (abc) verschwindet. Es ist dann

$$a_1\ u = [a_1\ x + a_2\ y + a_3\ z + a_4]^2 + (a_1\ c_3)\ z^2 + 2\ (a_1\ d_3)\ z + 2\ (ad)\ y + (a_1\ d_4)$$

oder

$$c_3\ u = [c_1\ x + c_2\ y + c_3\ z + c_4]^2 + (c_1\ a_3)\ x^2 + 2\ (c_1\ d_3)\ x + 2\ (cd)\ y + (c_1\ d_4) = 0$$

das sind i. a. elliptische oder hyperbolische Cylinder je nach dem Vorzeichen von $(a_1\ c_3)$.

Verschwindet auch dieses, so bleibt allerdings nur

$$\xi^2 + 2\ (ad)\ y + 2\ (a_1\ d_3)\ z + (a_1\ d_4) = 0.$$

Dieser Cylinder trägt auf seiner Fläche nur Gerade und Parabeln und ist ein **parabolischer Cylinder**, eine ausserordentliche, aber nicht eine uneigentliche Fläche zweiter Ordnung, denn $(abcd)$ verschwindet nicht, solange (ad) oder $(a_1\ d_3)$ von Null verschieden sind.

Sind aber auch diese Null, so ist auch $(abcd) = 0$ nach § III, IV, VII und die Gleichung

$$\xi^2 + (a_1\ d_4) = 0$$

stellt ein Paar **paralleler Ebenen** dar.

Ist auch $(a_1\ d_4) = 0$, so zerfällt die Fläche in die **Doppelebene**:

$$[a_1\ x + a_2\ y + a_3\ z + a_4]^2 = 0.$$

Endlich ist der Fall zu beachten, dass $a_1 = 0$ ist. Dann wird leicht durch Vertauschung von x mit y oder z geholfen werden können. Neu scheint der Fall, dass gleichzeitig a_1, b_2 und c_3 verschwinden. Es erscheint dann u in der Form:

$$u = 2\ b_1\ x\ y + 2\ c_1\ x\ z + 2\ c_2\ y\ z + 2\ d_1\ x + 2\ d_2\ y + d_3\ z + d_4.$$

Ist b_1 von Null verschieden, so erhält man:

$$2\ b_1\ u = [b_1\ (x + y) + (c_2 + c_1)\ z + d_2 + d_1]^2 - [b_1\ (x - y) + (c_2 - c_1)\ z + d_2 - d_1]^2 \\ - 4\ \{c_1\ c_2\ z^2 + [c_1\ d_2 + c_2\ d_1 - b_1\ d_3]\ z + d_1\ d_2\} + 2\ b_1\ d_4.$$

Ist auch c_1 und c_2 von Null verschieden, so erhalten wir:

$$2\ b_1\ c_1\ c_2\ u = c_1\ c_2\ [b_1\ (x + y) + (c_2 + c_1)\ z + d_2 + d_1]^2 - c_1\ c_2\ [b_1\ (x - y) + \\ (c_2 - c_1)\ z + d_2 - d_1]^2 - [2\ c_1\ c_2\ z + c_1\ d_2 + c_2\ d_1 - b_1\ d_3]^2 + (abcd).$$

Um diese Zerlegung mit der früheren zu vergleichen, bilden wir die Determinanten:

$$(abcd) = [c_1\ d_2 + c_2\ d_1 - b_1\ d_3]^2 - 4\ c_1\ c_2\ d_1\ d_2 + 2\ b_1\ c_1\ c_2\ d_4$$
$$(abc) = 2\ b_1\ c_1\ c_2$$
$$(ab) = -\ b_1^2 \qquad (a_1\ c_3) = -\ c_1^2 \qquad (b_2\ c_3) = -\ c_2^2.$$

Die Gleichung $u = 0$ stellt, wenn $(abcd)$ positiv, ein **hyperbolisches**, wenn $(abcd)$ negativ, ein **elliptisches Hyperboloid** dar. Es soll vorausgesetzt werden, dass (abc) positiv ist, was man stets bewirken kann, so sind, was wir auch früher gesehen, in der That (abc) und (ab) verschiedenen Zeichens.

Ist $(abcd) = 0$, so stellt $u = 0$ einen **Kegel** dar.

Die frühere Bedingung $(abc) = 0$, $(ab) \lesseqgtr 0$ macht c_1 oder c_2 verschwinden und die Gleichung hat die Form (wenn $c_1 = 0$):

$$[b_1\ (x + y) + c_2\ z + d_2 + d_1]^2 - [b_1\ (x - y) + c_2\ z + d_2 - d_1]^2 \\ - 4\ (c_2\ d_1 - b_1\ d_3]\ z - 4\ d_1\ d_2 + 2\ b_1\ d_4 = 0$$

d. i. die Gleichung eines **hyperbolischen Paraboloids**. Die Determinante ist auch wirklich positiv, da sie ein volles Quadrat wird

$$(abcd) = [c_2\ d_1 - b_1\ d_3]^2.$$

Verschwindet diese, so reduziert sich die Gleichung auf

$$[b_1\ (x + y) + c_2\ z + d_2 + d_1]^2 - [b_1\ (x - y) + c_2\ z + d_2 - d_1]^2 - 4\ d_1\ d_2 + 2\ b_1\ d_4 = 0$$

d. i. ein **hyperbolischer Cylinder**. (Ein parabolischer Cylinder ist ausgeschlossen, weil hier die verschwindenden Diagonal-Subdeterminanten gleichzeitig die sämmtlichen Coeffizienten der Glieder zweier Dimensionen verschwinden lassen. § 1, VI.)

Ein **Ebnenpaar**, das sich im endlichen schneidet, verlangt das Verschwinden aller Subdeterminanten 3. Grades. Dann ist i. a. ausser dem Verschwinden der Determinanten das Verschwinden zweier Diagonal-Subdeterminanten nötig (vgl. § 1, VI). Nun ist

$$(abc) = 2\ b_1\ c_1\ c_2 \qquad (b_2\ c_3\ d_1) = 2\ c_2\ d_2\ d_3 - c_2^2\ d_1$$
$$(c_3\ d_4\ a_1) = 2\ b_1\ d_1\ d_2 - b_1^2\ d_4 \qquad (d_4\ a_1\ b_2) = 2\ c_1\ d_1\ d_2 - c_1^2\ d_4$$

Wählt man neben $(abc) = 0$ diejenige der drei andern aus, in welcher nicht beide Glieder Null sind, die also unabhängig verschwinden kann, z. B. bei $c = 0 : (c_3\ d_4\ a_1) = 0$, so ist da $b_1 \gtreqless 0 : 2\ d_1\ d_2 - b_1\ d_4 = 0$ und die Gleichung stellt in der Form

$$[b_1\ (x + y) + c_2\ z + d_2 + d_1]^2 - [b_1\ (x - y) + c_2\ z + d_2 - d_1]^2 = 0$$

zwei reale Ebenen dar, nämlich:

$$b_1\ x + c_2\ z + d_2 = 0 \qquad b_1\ y + d_1 = 0.$$

Unter der Bedingung $(ab) = 0$, $(a_1\ c_3) = 0$ und $(b_2\ c_3) = 0$, welche $b_1 = c_1 = c_2 = 0$ machen, erhalten wir eine Ebene

$$2\ d_1\ x + 2\ d_2\ y + 2\ d_3\ z + d_4 = 0$$

als parallele Ebene ist die unendliche Ferne aufzustellen. Diese allein kann auch als Doppelebene auftreten. Ihre Bedingungen lauten

$$b_1 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = d_3 = 0.$$

§ 3.
Zusammenstellung der Kennzeichen.

Aus der vorhergehenden Zerlegung haben wir die Kennzeichen für die Arten der Flächen zweiter Ordnung gewonnen. Dass die Bedingungen nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende sind, hat sich aus den in § 1 gefundenen Subdeterminanten-Relationen ergeben.

Ehe die Bedingungen zusammengestellt werden, sei es gestattet, hier eine Erörterung über die geometrische Bedeutung der Determinanten $(abcd)$ und (abc) zu wiederholen, die ich in Schlömilchs Zsch. XXIX, S. 375 gegeben habe.

„$(abcd)$ ist die Hesse'sche Determinante von u, welche für die Krümmung der Fläche entscheidend ist. Da dieselbe constant ist, so ist auch die Krümmung der Fläche constant, und zwar enthält die Fläche nur elliptische Punkte bei negativer Determinante, da die Krümmung dann positiv ist; nur hyperbolische Punkte bei positiver Determinante; $(abcd) = 0$ macht die Krümmung unendlich, die Fläche geradlinig zu einem Kegel, Cylinder, Ebenenpaar oder Doppelebene [vergl. Baltzer Anal. Geom. § 59).

Die Determinante (abc) ist die Determinante der quadratischen Form von $x|y|z$. Es sei

$$v = v_1\ x + v_2\ y + v_3\ z,$$

wobei

$$v_1 = a_1\ x + a_2\ y + a_3\ z, \quad v_2 = b_1\ x + b_2\ y + b_3\ z, \quad v_2 = c_1\ x + c_2\ y + c_3\ z;$$

dann ist $v = 0$ die Gleichung eines Kegels mit dem Centrum $0|0|0$ und der unendlich fernen Geraden der Fläche $u = 0$. Dieser Entscheidungskegel, dessen Kanten denen des Asymtotenkegels parallel sind, gestattet nun, die unendlich ferne Linie der Fläche zu bestimmen und daraus auf die Art derselben zu schliessen.

Wir wenden die entsprechende Zerlegung wie oben an und erhalten unter den Voraussetzungen: a_1 positiv und (ab) nicht null:

1) $\quad a_1\ v = [a_1\ x + a_2\ y + a_3\ z + a_4]^2 + (ab)\ y^2 + 2\ (ac)\ y\ z + (a_1\ c_3)\ z^2,$

2) $\ a_1\ (ab)\ v = (ab)\ [a_1\ x + a_2\ y + a_3\ z + a_4]^2 + [(ab)\ y + (ac)\ z]^2 + a_1\ (abc)\ z^2.$

Sind nun (ab) und (abc) beide positiv, so ist der Kegel und die unendlich ferne Linie imaginär. Die Fläche ist dann imaginär, oder ein Ellipsoid oder ein imaginärer Kegel mit realem Centrum.

Sind (ab) und (abc) von Null verschieden, aber nicht beide positiv, so ist der Entscheidungskegel ein realer Kegel, die unendlich ferne Linie ein realer Kegelschnitt und die Fläche kann demnach ein Hyperboloid oder ein realer Kegel sein.

Ist $(abc) = 0$, so ist der Kegel reducibel und besteht aus zwei Ebenen, die unendlich ferne Linie also aus zwei Geraden. Ist (ab) positiv, so sind diese Geraden imaginär, ihr Durchschnittspunkt real und die Fläche ist ein elliptisches Paraboloid oder ein elliptischer Cylinder, oder sie besteht aus zwei imaginären Ebenen einer realen Geraden.

Ist neben $(abc) = 0$, (ab) negativ, so sind die unendlich fernen Geraden real und die Fläche ist ein hyperbolisches Paraboloid oder ein hyperbolischer Cylinder, oder besteht aus zwei realen Ebenen.

Ist $(ab) = 0$, so kann die Gleichung 1) benutzt werden und liefert nur Besonderheiten, wenn daneben $(ac) = 0$, $(a_1\ c_3) = 0$; dann muss sie aber an Stelle von 2) treten. Der Kegel ist dann höchst reducibel und besteht aus einer Doppelebene, die unendlich ferne Gerade aus einer Doppelgeraden und die Fläche zweiter Ordnung ist ein parabolischer Cylinder oder besteht aus zwei parallelen Ebenen, welche endlich auch zusammenfallen können."

Die Bedingungen für die einzelnen Arten der Flächen zweiter Ordnung lassen sich nun folgendermassen in Worte kleiden, wenn man unter Determinante die Hesse'sche $(abcd)$, unter Diskriminante die Determinante der Glieder zweier Dimensionen (abc) versteht.

Die Fläche zweiter Ordnung ist

A. ordentlich, wenn ihre Determinante nicht verschwindet.
  a) hyperbolisch bei positiver,
  b) elliptisch bei negativer Determinante
    1) imaginär oder ein Ellipsoid, wenn die Diskrimante und ein Diagonalglied gleiches, eine Diagonaladjunkta der Diskriminante positives Zeichen hat (§ 1, X),
    2) ein Paraboloid, wenn die Diskriminante Null ist,
    3) ein Hyperboloid in allen übrigen Fällen bei nicht verschwindender Determinante.

B. ausserordentlich, wenn die Determinante verschwindet und eine Subdeterminante 3. Grades nicht verschwindet;
    4) ein Kegel bei nicht verschwindender Diskriminante,
    5) ein Cylinder bei verschwindender Diskriminante (§ 1, V).

    Bei negativer Diagonaladjunkta (vgl. § 1, X) ist der Kegel real, der Cylinder hyperbolisch, bei positiver besteht der Kegel im Realen aus einem Punkt, der Cylinder ist elliptisch, bei verschwindenden Diagonaladjunkten (2 genügen, § 1, VI und VII) ist der Cylinder parabolisch.

C. eben (entartet), wenn alle Subdeterminanten 3. Grades verschwinden. Notwendig und hinreichend hierzu ist i. a. das Verschwinden dreier von einander unabhängigen (vgl. § 1, III) Subdeterminanten. Die Fläche zweiter Ordnung besteht dann aus
    6) einem Ebnenpaar einer endlichen Geraden, wenn eine Subdeterminante 2. Grades der drei ersten Zeilen nicht verschwindet (§ 1, VI), die Ebnen selbst sind real bei negativen Diagonaladjunkten der Diskrimante, imaginär bei positiven (vgl. § 1, X).
    7) einem Paar paralleler Ebenen, wenn alle Subdeterminanten der ersten drei Zeilen verschwinden (5 Bedingungen), eine Subdeterminante 2. Grades (Elemente der vierten Zeile enthaltend) nicht verschwindet (§ 1, IV, VII).
    8) eine Doppel-Ebene, wenn alle Subdeterminanten 2. Grades verschwinden. Notwendig und hinreichend ist (nach § 1 IX) das Verschwinden von 6 unabhängigen (§ 1, III) Subdeterminanten.

---

punkt real und die Fläche elliptischer Cylinder, oder sie be-
steht aus zwei imaginären

Ist neben $(abc) =$ fernen Geraden real und die Fläche
ist ein hyperbolisches Parab der besteht aus zwei realen Ebenen.

Ist $(ab) = 0$, so len und liefert nur Besonderheiten,
wenn daneben $(ac) = 0$, Stelle von 2) treten. Der Kegel
ist dann höchst reducibel unendlich ferne Gerade aus einer
Doppelgeraden und die Flä her Cylinder oder besteht aus zwei
parallelen Ebenen, welche

Die Bedingungen zweiter Ordnung lassen sich nun
folgendermassen in Worte nte die Hesse'sche $(abcd)$, unter
Diskriminante die Deter n (abc) versteht.

Die Fläche zweiter

A. ordentlich, wenn
a) hyperbolisch
b) elliptisch bei
1) imaginär od nte und ein Diagonalglied gleiches,
eine Diagona Zeichen hat (§ 1, X),
2) ein Parabo
3) ein Hyperb ht verschwindender Determinante.

B. ausserordentli und eine Subdeterminante 3. Grades
nicht verschwindet
4) ein Kegel nte,
5) ein Cylind (§ 1, V).

Bei negati der Kegel real, der Cylinder hyper-
bolisch, bei aus einem Punkt, der Cylinder ist
elliptisch, b n (2 genügen, § 1, VI und VII) ist
der Cylinder

C. eben (entartet), verschwinden. Notwendig und hin-
reichend hierzu ist nander unabhängigen (vgl. § 1, III)
Subdeterminanten. dann aus
6) einem Ebne nn eine Subdeterminante 2. Grades
der drei erst VI), die Ebnen selbst sind real bei
negativen D ginär bei positiven (vgl. § 1, X).
7) einem Paar determinanten der ersten drei Zeilen
verschwinde nte 2. Grades (Elemente der vierten
Zeile enthal I).
8) eine Doppe ten 2. Grades verschwinden. Not-
wendig und Verschwinden von 6 unabhängigen
(§ 1, III) Su