Die Auflösung
der algebraischen Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades mit Hülfe der Theorie der symmetrischen Funktionen*).

Eine Funktion zweier oder mehrerer Grössen heisst symmetrisch, wenn sie aus ähnlichen Kombinationen dieser Grössen besteht, mögen letztere nun unter einander oder auch mit anderen Grössen verbunden sein. Man erkennt im allgemeinen eine symmetrische Funktion daran, dass sie ihren Werth nicht ändert, welche Vertauschungen man auch mit den Grössen vornimmt, von welchen sie abhängt. Die einfachsten symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung sind die Koefficienten der Gleichung, da in denselben jede Wurzel nur im 1. Grade vorkommt. Um mit Hülfe symmetrischer Funktionen der Wurzeln eine Gleichung zu lösen, hat man die Wurzeln auf passende Weise zu kombinieren und Ausdrücke herzustellen, welche, durch die Koefficienten der Gleichung ausgedrückt, den Wert der einzelnen Wurzeln bestimmen.

„Jede rationale symmetrische Funktion der Wurzeln einer Gleichung lässt sich rational mittelst der Koefficienten der Gleichung ausdrücken".

Die Gleichung sei allgemein:

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

so hat dieselbe im allgemeinen m verschiedene Wurzeln: $a, b, c, \dots k, l$. Es ist nun

$$(1) \quad \begin{cases} a+b+c+\dots+k+l = -p_1, \\ ab+ac+\dots+bc+bd+\dots+kl = p_2, \\ abc+abd+\dots \qquad +ikl = -p_3, \\ \vdots \\ abcd\dots kl = \pm p_m, \end{cases}$$

je nachdem m gerade oder ungerade ist. Setzt man allgemein

$$(2) \quad V = f(a, b, c, \dots k, l),$$

wo V eine rationale symmetrische Funktion der m Wurzeln bedeutet, und eliminiert man aus den Gleichungen (1) und (2) die Grössen $a, b, c, \dots k, l$, so erhält man schliesslich eine Gleichung für V in den Koefficienten. Da aber V nur einen Wert hat, so kann dieselbe auch nur vom 1. Grade sein, woraus folgt, dass V sich rational durch die Koefficienten ausdrücken lässt. Die reduzierte Gleichung vom 3. Grade z. B. hat die Form

$$x^3 + Px + Q = 0;$$

*) Siehe Jacobi „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes", Crelle's Journal Bd. XIII, p. 340.

ihre Wurzeln seien a, b, c, so ist

$$a+b+c=-p_1=0,$$
$$ab+ac+bc=p_2=P,$$
$$abc=-p_3=-Q;$$

Es sei $V=(2a-b-c)\,(2b-a-c)\,(2c-a-b)$;

Die erste der Gleichungen (3) ergiebt $a=-b-c$, also

$$V=(-3b-3c)\,(3b)\,(3c)=-27\,bc\,(b+c)=27\,abc.$$

Da $abc=-Q$, so ist $V=-27\,Q$.

Um die allgemeinste Form einer symmetrischen rationalen Funktion zu finden, ist Folgendes zu beachten.

1. Jede rationale gebrochene Funktion ist der Quotient zweier ganzer Funktionen, also auch jede rationale gebrochene symmetrische Funktion der Quotient zweier ganzen rationalen symmetrischen Funktionen; z. B. $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}$ lässt sich darstellen unter der Form

$$\frac{\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}.$$

2. Jede ganze, nicht homogene symmetrische Funktion lässt sich darstellen als die Summe zweier oder mehrerer symmetrischer homogener Funktionen.

Durch Entwicklung von $(2a-b-c)\,(2b-a-c)\,(2c-a-b)$ erhält man die nicht homogene symmetrische Funktion

$$12abc-3a^2c-3ac^2-3bc^2-3b^2c-3a^2b-3ab^2+2a^3+2b^3+2c^3,$$

welche wieder in drei homogene symmetrische Funktionen zerfällt:

$$2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2b+ab^2+a^2c+ac_2+b^2c+bc^2)+12\,abc.$$

Man kann sich also für die Berechnung der allgemeinsten rationalen symmetrischen Funktion beschränken auf die Bestimmung symmetrischer rationaler ganzer und homogener Funktionen, in welchen die Exponenten der Buchstaben in zwei beliebigen Ausdrücken dieselben sind. Nach der Anzahl der in jedem einzelnen Gliede vorkommenden Buchstaben kann man symmetrische Funktionen der 1^{ten}, $2^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Ordnung unterscheiden, und man bezeichnet dieselben durch Angabe eines Gliedes und der sämtlichen die Funktion zusammensetzenden Buchstaben; z. B.

$$a^p+b^p+c^p+d^p=\sum_{abcd}a^p;$$
$$a^pb^q+a^pc^q+a^pd^q+b^pa^q+b^pc^q+b^pd^q+c^pa^q+c^pb^q+c^pd^q+d^pa^q+d^pb^p+d^pc^q=\sum_{abcd}a^pb^q.$$

Es bleibt somit die Aufgabe, die Summen aller gleichen Potenzen der Wurzeln, sowie die Summen der Produkte dieser Potenzen mittelst der Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken.

Um zunächst die Summen der gleichen Potenzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, kann man verfahren wie folgt *). Die Gleichung sei

1) $x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots\ldots+p_{m-1}x+p_m=0$ oder $X=0$, ihre m Wurzeln seien $a, b, c, d, \ldots k, l$. Dieselbe kann unter der Form geschrieben werden

2) $(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots(x-k)\,(x-l)=0.$

*) Serret, cours d'algèbre sup.; vergl. auch Lacroix, complément des élémens d'algèbre.

Man differentiire die linke Seite unter beiden Formen, so liefert zunächst die Gleichung (2), wenn man $\frac{dX}{dx}=X^1$ setzt:

$$\begin{aligned} X^1 = & (x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-k)(x-l) \\ & +(x-a)(x-c)(x-d)\ldots(x-k)(x-l) \\ & +(x-a)(x-b)(x-d)\ldots(x-k)(x-l) \\ & \vdots \\ & +(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-i)(x-k). \end{aligned}$$

Nun ist

$$(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-k)(x-l)=\frac{X}{x-a},$$
$$\vdots$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-i)(x-k)=\frac{X}{x-l},$$

also $X^1=\frac{X}{x-a}+\frac{X}{x-b}+\ldots+\frac{X}{x-l}$.

Um $\frac{X}{x-a}$ zu bestimmen, setzt man in der gegebenen Gleichung $x=a$, so ist

$$a^m+p_1a^{m-1}+p_2a^{m-2}+\ldots+p_{m-1}a+p_m=0,$$

also $p_m=-a^m-p_1a^{m-1}-p_2a^{m-2}\ldots-p_{m-1}a$.

Dieser Wert in die ursprüngliche Gleichung gesetzt giebt

$$\begin{aligned} & x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots+p_{m-1}x \\ & -a^m-p_1a^{m-1}-p_2a^{m-2}-\ldots-p_{m-1}a=0; \end{aligned}$$

oder $(x^m-a^m)+p_1(x^{m-1}-a^{m-1})+p_2(x^{m-2}-a^{m-2})+\ldots$
$\ldots+p_{m-1}(x-a)=0$.

Die Division der einzelnen Glieder dieser Gleichung durch $x-a$ ergiebt:

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1},$$
$$\frac{x^{m-1}-a^{m-1}}{x-a}=x^{m-2}+ax^{m-3}+a^2x^{m-4}+\ldots+a^{m-2},$$
$$\frac{x^{m-2}-a^{m-2}}{x-a}=x^{m-3}+ax^{m-4}+a^2x^{m-5}+\ldots+a^{m-3},$$
$$\vdots$$
$$\frac{x-a}{x-a}=1.$$

Durch Addition erhält man

$$\begin{aligned} \frac{X}{x-a}= & x^{m-1}+(a+p_1)x^{m-2}+(a^2+p_1a+p_2)x^{m-3}+\ldots \\ & +a^{m-1}+p_1a^{m-2}+p_2a^{m-3}+\ldots+p_{m-1}. \end{aligned}$$

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{X}{x-b}=x^{m-1}+(b+p_1)x^{m-2}+(b^2+p_1b+p_2)x^{m-3}+\ldots.$$
$$+b^{m-1}+p_1b^{m-2}+p_3b^{m-3}+\ldots+p_{m-1};$$
$$\vdots$$
$$\frac{X}{x-l}=x^{m-1}+(l+p_1)x^{m-2}+\ldots+p_{m-1}.$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$\begin{aligned}X^1=mx^{m-1}&+[(a+b+c+\ldots+l)+mp_1]x^{m-2}+[(a^2+b^2+c^2+.+l^2)+\\&(a+b+c+..+l)p_1+mp_2]x^{m-3}+\ldots.\\&+[(a^{m-1}+b^{m-1}+\ldots l^{m-1})+(a^{m-2}+b^{m-2}+..l^{m-2})p_1+\ldots mp_{m-2}]x\\&+(a^{m-1}+b^{m-1}+\ldots l^{m-1})+(a^{m-2}+b^{m-2}+..l^{m-2})p_1+\ldots mp_{m-1}.\end{aligned}$$

Setzt man $a+b+c+.+l=s_1$, und allgemein $a^m+b^m+c^m+.+l^m=s_m$, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$X_1=mx^{m-1}\begin{array}{l|l|l|l}+s_1 & x^{m-2}+s_2 & x^{m-3}+s_3 & x^{m-4}+\ldots.s_{m-1}+mp_{m-1}.\\ +mp_1 & \quad +s_1p_1 & \quad +s_2p_1 & \quad +s_{m-2}p_1\\ & \quad +mp_2 & \quad +s_1p_2 & \quad +\\ & & \quad +mp_3 & \quad \vdots\\ & & & \quad s_1p_{m-2}\end{array}$$

Differentiirt man die gegebene Gleichung nun auch noch in ihrer ursprünglichen Form, so erhält man

$$X_1=mx^{m-1}+(m-1)p_1x^{m-2}+(m-2)p_2x^{m-3}+\ldots+p_{m-1};$$

Demnach ist

$$\begin{aligned}&s_1+mp_1=(m-1)p_1,\\&s_2+s_1p_1+mp_2=(m-2)p_2,\\&s_3+s_2p_1+s_1p_2+mp_3=(m-)p_3,\\&\vdots\\&s_{m-1}+s_{m-2}p_1+s_{m-3}p_2+..s_1p_{m-2}+mp_{m-1}=p_{m-1},\end{aligned}$$

also durch successive Auflösung nach s:

$$\begin{aligned}&s_1=-p_1,\\&s_2=p_1^2-2p_2,\\&s_3=-p_1^3+3p_1p_2-3p_3,\\&s_4=p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+2p_2^2-4p_4;\ \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Auf diese Weise lassen sich die Summen gleicher Potenzen der Wurzeln darstellen, so lange der Exponent nicht höher ist, als $m-1$ und zugleich positiv.

Um die Summen zu erhalten, in welchen der Exponent der einzelnen Glieder höher ist als $m-1$, multipliziere man die gegebene Gleichung mit x^n, wo n eine ganze Zahl bedeutet, so ist

$$x^{m+n}+p_1x^{m+n-1}+p_2x^{m+n-2}+\ldots.+p_mx^n=0.$$

Setzt man für x der Reihe nach die m Wurzelwerte $a, b, c, \ldots k, l$, so erhält man durch Summierung aller m Gleichungen:

$$s_{m+n}+p_1 s_{m+n-1}+p_2 s_{m+n-2}+\ldots . p_{m-1}s_{n+1}+p_m s_n=0.$$

Setzt man für n der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man, da $s_0=a^0+b^0+\ldots+l^0=m$,

$$\text{für } n=0:\ s_m+p_1 s_{m-1}+p_2 s_{m-2}+\ldots .+p_{m-1}s_1+mp_m=0;$$

$$\text{für } n=1:\ s_{m+1}+p_1 s_m+p_2 s_{m-1}+\ldots+p_{m-1}s_2+p_m s_1=0, \text{ u. s. w.}$$

Da $s_1, s_2, s_3, \ldots s_{m-1}$ aus dem Vorhergehenden bekannt sind, so lässt sich also auch s_m, $s_{m+1}\ldots$ ermitteln. Um die Summen gleicher Potenzen mit negativen Exponenten zu berechnen, kann man in vorstehenden Formeln dem n successive die Werte $-1, -2, \ldots$ beilegen, oder auch in der gegebenen Gleichung x durch $\frac{1}{y}$ ersetzen. Die Summen der gleichen Potenzen mit positiven Exponenten sind dann Wurzeln dieser transformierten Gleichung. Wenn nun $p_1, p_2, p_3\ldots$ ganze Zahlen sind, so sind dies auch $s_1, s_2, s_3, \ldots$

Um die symmetrischen Funktionen höherer Ordnung der Wurzeln einer Gleichung mittelst der Koefficienten auszudrücken, multipliziert man zwei oder mehrere Summen gleicher Potenzen miteinander. Es bezeichne wie vorher $\Sigma a^p b^q$ die Summe aller Kombinationen der sämtlichen Wurzeln zu je zweien mit den resp. Exponenten p und q. Es ist

$$s_p=a^p+b^p+c^p+\ldots+l^p,$$

$$s_q=a^q+b^q+c^q+\ldots+l^q, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} s_p . s_q = & a^{p+q}+a^p b^q+a^p c^q+\ldots+a^p k^q+a^p l^q \\ & +b^{p+q}+b^p a^q+b^p c^q+\ldots+b^p k^q+b^p l^q \\ & +c^{p+q}+c^p a^q+c^p b^q+\ldots+c^p k^q+c^p l^q \\ & + \\ & \vdots \\ & +l^{p+q}+l^p a^q+l^p b^q+\ldots+l^p k^q \\ = & s_{p+q}+\Sigma a^p b^q, \text{ also } \Sigma a^p b^q=s_p . s_q - s_{p+q}. \end{aligned}$$

Da nun s_p und s_q jede für sich nach dem Vorhergehenden sich unter ganzer und rationaler Form durch die Coefficienten ausdrücken lassen, so ist dies auch mit ihrem Produkte $s_p . s_q$ der Fall, also auch mit s_{p+q} und $\Sigma a^p b^q$. Sind die Koefficienten ganze Zahlen, so ist auch $\Sigma a^p b^q$ eine ganze Zahl.

Obige Gleichung gilt nicht mehr, wenn $p=q$; in diesem Falle wird $a^p b^q=a^q . b^p$, wodurch die Ausdrücke zu je zweien einander gleich werden; man erhält dann $s_p . s_p=s_{p+p}+2\Sigma a^p b^p$, also $\Sigma a^p b^p=\frac{1}{2}\left(s_p^2-s_{2p}\right)$; dies ergiebt sich auch direkt:

$$\begin{aligned} \Sigma a^p b^p = & a^p b^p+a^p c^p+\ldots+a^p l^p+b^p c^p+b^p d^p+\ldots+b^p l^p+\ldots . \\ & \vdots \\ & +k^p l^p \\ = & a^p(b^p+c^p+d^p+\ldots+l^p)+b^p(c^p+d^p+\ldots+l^p)+\ldots k^p l^p \\ = & a^p(s_p-a^p)+b^p(s_p-a^p-b^p)+c^p(s_p-a^p-b^p c^p)+\ldots . \\ = & s_p . s_p-(s_{2p}+\Sigma a^p b^p), \text{ woraus } 2\Sigma a^p b^p=s_p^2-s_{2p}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise erhält man die symmetrischen Funktionen dritter Ordnung. Man multipliziere $\Sigma a^p b^q$ mit s_r, so ist

$$s_r \Sigma a^p b^q = \Sigma a^p b^q c^r + \Sigma a^{p+r} b^q + \Sigma a^p b^{q+r}$$

$$\text{also } \Sigma a^p b^q c^r = s_r \Sigma a^p b^q - \Sigma a^{p+r} b^q - \Sigma a^p b^{q+r};$$

nach dem Vorigen ist

$$\Sigma a^p b^q = s_p s_q - s_{p+q}, \quad \Sigma a^{p+r} b^q = s_{p+r} s_q - s_{p+q+r},$$

$$\Sigma a^p b^{q+r} = s_p \,.\, s_{q+r} - s_{p+q+r}, \text{ also}$$

$$\Sigma a^p b^q c^r = s_p s_q s_r - s_{p+q} s_r - s_{p+r} s_q - s_p \,.\, s_{q+r} + 2 s_{p+q+r}.$$

Werden zwei oder alle drei Exponenten einander gleich, so ist die Gleichung abzuändern. Wird zunächst $q=p$, so ist $\Sigma a^p b^q c^r = 2 \Sigma a^p b^p c^r$, also $\Sigma a^p b^q c^r = \frac{1}{2}(s_p^2 s_r - s_{2p} s_r - 2 s_{p+r} s_p + 2 s_{2p+r})$.

Ferner ist für $r=p=q$:

$$\Sigma a^p b^q c^r = 2\,.\,3 \Sigma a^p b^p c^p, \text{ also}$$

$$\Sigma a^p b^p c^p = \frac{1}{6}(s_p^3 - 3 s_{2p} s_p + 2 s_{3p}). -$$

Ebenso lassen sich die symmetrischen Funktionen der höheren Ordnungen berechnen. Hat man den allgemeinen Ausdruck einer ganzen und homogenen symmetrischen Funktion der n^{ten} Ordnung gefunden und werden μ Exponenten einander gleich, so hat man den gefundenen Wert durch $1.2.3 \ldots \mu$ zu dividieren. Das Vorstehende genügt für unsern Zweck.

Man kann also jede ganze und homogene symmetrische Funktion der Wurzeln einer Gleichung rationell durch die Koefficienten der Gleichung ausdrücken, also auch jede beliebige rationale symmetrische Funktion im allgemeinen.

Mit Hülfe des Gesagten lassen sich nun die Gleichungen vom 2., 3. und 4. Grade auflösen, indem man die Wurzeln derselben zunächst durch symmetrische Funktionen ausdrückt und dann die letzteren mittelst der Coefficienten bestimmt.

Gleichung des zweiten Grades.

Sie hat die Form

$$x^2 + p_1 x + p_2 = 0.$$

Ihre Wurzeln seien a und b, so ist $a+b=-p_1$, $ab=p_2$. Um a und b einzeln durch symmetrische Funktionen darzustellen, gebe man der gesuchten Funktion die allgemeine Form $u=l.a+m.b$. Da $l.a+m.b$ nur noch eine Kombination zulässt, $l.b+m.a$, so kann man $la+mb$ abhängig machen von einer Gleichung zweiten Grades in Bezug auf u, deren Wurzeln $la+mb$ und $lb+ma$ sind, l und m als verschieden vorausgesetzt. Um der Gleichung die einfachste Form zu geben, stellt man sie als reduzierte dar, welche nur das Quadrat von u enthält; ihre Wurzeln dürfen sich also nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden, $la+mb=-(lb+ma)$ oder $l(a+b)=-m(a+b)$, also $l=-m$. Setzt man noch $l=-m=1$, so sind die Wurzeln der aufzustellenden Gleichung

$$la+mb=a-b \text{ und } lb+ma=b-a;$$

die Gleichung hat also die Form

$$[u-(a-b)][u-(b-a)]=0 \text{ oder}$$
$$[u-(a-b)][u+(a-b)]=0 \text{ oder}$$
$$u^2-(a-b)^2=0, \text{ woraus}$$
$$u=\pm\sqrt{(a-b)^2}=\begin{cases}a-b\\ b-a\end{cases}.$$

Verbindet man jetzt die Gleichung $u_I=+(a-b)$ mit der bekannten Relation $u_{III}=a+b$, so ergiebt sich

$$a=\frac{u_{III}+u_I}{2},\quad b=\frac{u_{III}-u_I}{2}, \text{ oder}$$
$$a=\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}},$$
$$b=\frac{a+b}{2}-\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}},$$

womit die Wurzeln durch ihre symmetrischen Funktionen ausgedrückt sind. Dabei musste für $a-b$ der Ausdruck $\sqrt{(a-b)^2}$ gesetzt werden, da nur auf diese Weise eine symmetrische Funktion erhalten wird.

Um noch die Wurzeln durch die Coefficienten auszudrücken, hat man

$$a+b=-p_1,\ ab=p_2, \text{ also}$$
$$(a-b)^2=p_1^2-4p_2, \text{ und}$$
$$a=-\frac{p_1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p_1^2-4p_2},\ b=-\frac{p_1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{p_1^2-4p_2}.$$

Gleichung vom dritten Grade.

Zunächst möge hier an eine bekannte Eigenschaft der Wurzeln der Einheit, namentlich der Kubikwurzeln erinnert werden. Die Gleichung $y^n-1=0$ hat, wie im allgemeinen jede Gleichung vom n^{ten} Grade, n unter sich verschiedene Wurzeln. Zunächst ist $y=\sqrt[n]{1}=1$, also die Einheit selbst die erste Wurzel. Dividiert man die Gleichung $y^n-1=0$ durch $y-1$, so kommt $y^{n-1}+y^{n-2}+y^{n-3}+\ldots+y^2+y+1=0$, welche Gleichung noch $n-1$ Werte liefert, die von der Einheit verschieden sein müssen, aber sämtlich in der n^{ten} Potenz die Einheit liefern. So hat die Gleichung $y^5-1=0$ als erste Wurzel die Einheit selbst. Bezeichnet man die übrigen Wurzeln mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und vergleicht die gegebene Gleichung mit der allgemeinen Gleichung vom 5^{ten} Grade $y^5+p_1y^4+p_2y^3+p_3y^2+p_4y+p_5=0$, so ist für die aufgestellte Gleichung

$$p_1=p_2=p_3=p_4=0;\ p_5=-1.$$

Demnach erhält man für die Summen gleicher Potenzen nach den früher ermittelten Beziehungen

$$s_1=1+\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\,;$$
$$s_2=1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=0\,;$$
$$s_3=1+\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=0\,;$$
$$s_4=1+\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4=0\,;$$
$$s_5=1+\alpha^5+\beta^5+\gamma^5+\delta^5=-5p_5=5.$$

Für die Summen der höheren Potenzen erhält man

$$s_6=0,\ s_7=0,\ s_8=0,\ s_9=0,\ s_{10}=5, \text{ u. s. w.}$$

Demnach ist also allgemein $s_m=0$, wenn m kein Vielfaches von n ist, im anderen Falle $s_m=n$. Dass die Gleichung vom n^{ten} Grade nicht mehr als n Wurzeln haben kann, ergiebt sich aus Folgendem: Ist α eine Wurzel derselben, so ist $\alpha^n=1$, also auch $(\alpha^n)^2=\alpha^{2n}=1$, $\alpha^n\,.\,\alpha^{2n}=\alpha^{3n}=1$, u. s. w. oder $(\alpha^2)^n=1$; $(\alpha^3)^n=1$ u. s. f. Demnach sind auch α^2, $\alpha^3\ldots$ Wurzeln der Gleichung $y^n=1$, welche also die Werte haben $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots{}^{n-1}$. Die höheren Potenzen von α genügen auch, geben aber keine von den vorigen verschiedene Werte; denn

$$\alpha^n=1;\ \alpha^{n+1}=\alpha^n\,.\,\alpha=\alpha;\ \alpha^{n+2}=\alpha^n\,.\,\alpha^2=\alpha^2;$$
$$\alpha^{2n}=\alpha^n\,.\,\alpha^n=1;\ \alpha^{2n+1}=\alpha^{2n}\,.\,\alpha=\alpha \text{ u. s. f.}$$

Dasselbe Resultat giebt die bekannte Substitution

$y=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; man hat
$\varrho^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=1$ oder
$\varrho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=1$; also muss gleichzeitig
$\varrho^n\cos n\varphi=1$, $\sin n\varphi=0$ sein, woraus folgt
$\varrho=1$, $\cos n\varphi=1$, also $n\varphi=2k\pi$,

wo k eine ganze Zahl einschliesslich der 0 bedeutet; folglich $\varphi=\dfrac{2k\pi}{n}$ und

$$y=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Für $k=0$ wird $y_1=\cos 0+i\sin 0=1$; dies ist die erste, reelle Wurzel; für $k=1, 2, 3$. bis $n-1$ findet man noch $n-1$ verschiedene Wurzeln, welche sämtlich der Gleichung genügen:

$$y_2=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\ y_3=\cos 2\frac{2\pi}{n}+i\sin 2\frac{2\pi}{n}, \text{ u. s. w.}$$

$k=n$ giebt $y_{n+1}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1=y_1$; wenn n eine gerade Zahl ist, so erhält man für $k=\dfrac{n}{2}$: $y_{\frac{n}{2}+1}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$, die zweite reelle Wurzel. Demnach kann man die n Wurzeln der Einheit auf folgende Weise darstellen:

$$y_1=\cos\frac{0\pi}{n}+i\sin\frac{0\pi}{n}=1,$$

$$y_2=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=\alpha,$$

$$y_3=\cos 2\frac{2\pi}{n}+i\sin 2\frac{2\pi}{n}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2=\alpha^2,$$

$$y_4=\cos 3\frac{2\pi}{n}+i\sin 3\frac{2\pi}{n}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^3=\alpha^3,$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$y_n=\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}+i\sin(n-1)\frac{2\pi}{n}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{n-1}=\alpha^{n-1}.$$

Die Gleichung $y^3=1$ liefert $y_1=1$; $y_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}=\alpha$, $y_3=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}=\alpha^2$.

Zwischen diesen Wurzeln finden also nach dem Gesagten folgende Beziehungen statt:

$$s_1=1+\alpha+\alpha^2=0,$$
$$s_2=1+\alpha^2+\alpha^4=0,$$
$$s_3=1+\alpha^3+\alpha^6=3,$$
$$s_4=s_5=0;\ s_6=3,\ \text{u. s. w.}$$

und es ist $\alpha^3=1$, $\alpha^4=\alpha$, $\alpha^5=\alpha^2$, $\alpha^6=1$, u. s. w.

Diese Bemerkungen reichen für die Auflösung der Gleichung vom dritten und vom vierten Grade aus. Die Gleichung vom 3^{ten} Grade hat die Form:

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0.$$

Ihre Wurzeln seien a, b, c. Man suche eine Funktion der Wurzeln, welche nur von einer Gleichung zweiten Grades abhängig ist, und stelle zunächst die Funktion auf $la+mb+nc$. Durch Vertauschung der Wurzeln unter einander erhält man folgende 6 Funktionen:

[illegible] Funktionen [illegible] Gleichung [illegible] Grade abhängig [illegible]

$$la+mb+nc,\ lb+ma+nc,\ lc+ma+nb,$$
$$la+mc+nb,\ lb+mc+na,\ lc+mb+na.$$

Die Gleichung, welche diese Funktionen zu Wurzeln hat, ist offenbar vom 6. Grade. Soll dieselbe als quadratische Gleichung lösbar sein, so muss sie die Form haben: $u^6+Au^3+B=0$, so dass

$$u^3=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-B},\ \text{also}$$

$$u_I^3=-\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B},\ u_{II}^3=-\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}.$$

Bezeichnet man wieder mit α, α^2 die imaginären kubischen Wurzeln der Einheit, so erhält man also für u folgende 6 Werte:

$$u_I,\ \alpha u_I,\ \alpha^2u_I,\ u_{II},\ \alpha u_{II},\ \alpha^2u_{II}.$$

Man setze etwa

$$la+mb+nc=u_I,$$
$$la+mc+nb=u_{II},$$

so erhält man für die vier anderen Kombinationen:

$$lb+mc+na=\alpha u_I=\alpha(la+mb+nc),$$
$$lc+ma+nb=\alpha^2u_I=\alpha^2(la+mb+nc),$$
$$lb+ma+nc=\alpha u_{II}=\alpha(la+mc+nb),$$
$$lc+mb+na=\alpha^2u_{II}=\alpha^2(la+mc+nb).$$

Aus diesen letzteren Gleichungen folgt:

$$(n-\alpha l)a+(l-\alpha m)b+(m-\alpha n)c=0,$$
$$(m-\alpha^2 l)a+(n-\alpha^2 m)b+(l-\alpha^2 n)c=0,$$
$$(m-\alpha l)a+(l-\alpha n)b+(n-\alpha m)c=0,$$
$$(n-\alpha^2 l)a+(m-\alpha^2 n)b+(l-\alpha^2 m)c=0.$$

Da diese Gleichungen für jeden Wert von a, b, c bestehen müssen, so müssen alle Coefficienten einzeln gleich Null werden, also zunächst

$$n=\alpha l,\ l=\alpha m,\ m=\alpha n, \text{ und}$$
$$m=\alpha^2 l,\ n=\alpha^2 m,\ l=\alpha^2 n;$$

die sechs anderen Coefficienten werden alsdann ebenfalls Null, wenn man berücksichtigt, dass $\alpha\,.\,\alpha^2=\alpha^3=1$.

Bestimmt man aus den 3 Gleichungen der ersten Reihe die Coefficienten l, m, n, so erhält man

$$l=\alpha m=\alpha^2 n=\alpha^3 l;$$ ebenso ergiebt die zweite Reihe:
$$l=\alpha^2 n=\alpha^4 m=\alpha^6 l.$$

Da $\alpha^4=\alpha$, $\alpha^6=\alpha^3=1$, so genügen die Werte aus der einen Reihe der Gleichungen der andern Reihe, und es bleibt also ein Coefficient unbestimmt. Setzt man $l=1$, so hat man

$$l=1,\ m=\frac{\alpha^3 l}{\alpha}=\alpha^2,\ n=\frac{\alpha^3 l}{\alpha^2}=\alpha.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen für u_I und u_{II} ein, so erhält man

$$u_I=la+mb+nc=a+\alpha^2 b+\alpha c,$$
$$u_{II}=la+mc+nb=a+\alpha b+\alpha^2 c,$$

oder mit Vertauschung des Indices

$$u_I=a+\alpha b+\alpha^2 c;\ u_{II}=a+\alpha^2 b+\alpha c.$$

Nach dem Vorigen ist

$$u_I=\sqrt[3]{-\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}},\ u_{II}=\sqrt[3]{-\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}},$$

oder, wenn man $-\frac{A}{2}=v$, $\frac{A^2}{4}-B=w$ setzt,

$$u_I=\sqrt[3]{v+\sqrt{w}},\ u_{II}=\sqrt[3]{v-\sqrt{w}}.$$

Um v und w mittelst a, b, c auszudrücken, hat man zunächst $u_I^3=v+\sqrt{w}$, $u_{II}^3=v-\sqrt{w}$, also $v=\frac{u_I^3+u_{II}^3}{2}$, $\sqrt{w}=\frac{u_I^3-u_{II}^3}{2}$.

Um $u_I^3+u_{II}^3$ und $u_I^3-u_{II}^3$ in Produkte umzuformen, setze man

$$u_I^3+u_{II}^3=0,\ u_I^3=-u_{II}^3,$$

woraus für u_I die Werte folgen $-u_{II}$, $-\alpha u_{II}$, $-\alpha^2 u_{II}$, so dass also

$$u_I^3+u_{II}^3=(u_I+u_{II})(u_I+\alpha u_{II}),\ (u_I+\alpha^2 u_{II});$$

ebenso findet man $u_I^3-u_{II}^3=(u_I-u_{II})(u_I-\alpha u_{II})(u_I-\alpha^2 u_{II})$; folglich

$$v = \frac{(u_I + u_{II})(u_I + \alpha u_{II})(u_I + \alpha^2 u_{II})}{2}, \quad \sqrt{w} = \frac{(u_I - u_{II})(u_I - \alpha u_{II})(u_I - \alpha^2 u_{II})}{2}.$$

Nach dem Vorigen ist

$$u_I + u_{II} = 2a + (\alpha + \alpha^2)b + (\alpha + \alpha^2)c,$$
$$u_I + \alpha u_{II} = (1+\alpha)a + (\alpha + \alpha^3)b + 2\alpha^2 c,$$
$$u_I + \alpha^2 u_{II} = (1+\alpha^2)a + (\alpha + \alpha^4)b + (\alpha^2 + \alpha^3)c.$$

Da 1, α, α^2 die Wurzeln der Gleichung $y^3 = 1$ sind, so ist nach dem früher Gesagten

$$s_1 = 1 + \alpha + \alpha^2 = -p_1 = 0,$$
$$s_2 = 1 + \alpha^2 + \alpha^4 = -p_1 s_1 - 2p_2 = 0,$$
$$s_3 = 1 + \alpha^3 + \alpha^6 = -p_1 s_1 - p_2 s_2 - 3p_3 = 3,$$

also $\alpha + \alpha^2 = -1$, $1 + \alpha = -\alpha^2$, $\alpha + \alpha^3 = \alpha + 1 = -\alpha^2$,
$1 + \alpha^2 = -\alpha$, $\alpha + \alpha^4 = \alpha(1 + \alpha^3) = 2\alpha$, $\alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^2(1 + \alpha) = -\alpha$;

demnach ist

$u_I + u_{II} = 2a - b - c$; $u_I + \alpha u_{II} = (2c - a - b)\alpha^2$;
$u_I + \alpha^2 u_{III} = (2b - a - c)\alpha$, also endlich

$$v = \frac{(2a - b - c)(2b - a - c)(2c - a - b)}{2}, \text{ da } \alpha \, . \, \alpha^2 = 1.$$

In gleicher Weise ist $\sqrt{w}$ auszudrücken; es ist

$$u_I - u_{II} = (\alpha - \alpha^2)(b - c),$$
$$u_I - \alpha u_{II} = (1 - \alpha)a - (1 - \alpha)b = (1 - \alpha)(a - b),$$
$$u_I - \alpha^2 u_{II} = (1 - \alpha^2)a - (\alpha^3 - \alpha^2)c = (1 - \alpha^2)(a - c).$$

Nun ist $\alpha - \alpha^2 = \sqrt{-3}$, $1 - \alpha = \alpha^3 - \alpha^4 = \alpha^2(\alpha - \alpha^2) = \alpha^2\sqrt{-3}$,
$1 - \alpha^2 = \alpha^3 - \alpha^2 = -\alpha^2(1 - \alpha) = -\alpha\sqrt{-3}$,

ausserdem wieder $\alpha \, . \, \alpha^2 = 1$; also

$$\sqrt{w} = \frac{3\sqrt{-3}}{2}(a - b)(a - c)(b - c).$$

Setzt man noch statt $(a-b)(a-c)(b-c)$ den Ausdruck $\sqrt{[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}$, so sind v und $\sqrt{w}$ offenbar symmetrische Funktionen von a, b, c, also auch u_I und u_{II}.

Um jetzt die einzelnen Wurzeln durch symmetrische Funktionen auszudrücken, verbinde man die Gleichungen

$$u_I = a + \alpha b + \alpha^2 c,$$
$$u_{II} = a + \alpha^2 b + \alpha c$$

mit der Gleichung $u_{III} = a + b + c$, in welcher u_{III} bekannt ist.

Zunächst erhält man durch einfache Addition, da $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$,

$$u_I + u_{II} + u_{III} = 3a.$$

Multipliziert man ferner u_I mit α, u_{II} mit α^2, so ergiebt sich

$$\alpha u_I + \alpha^2 u_{II} + u_{III} = 3c,$$

und wenn man u_{I} mit α^2, u_{II} mit α multipliziert:

$$\alpha^2 u_{I} + \alpha u_{II} + u_{III} = 3b, \text{ also}$$

$$a = \frac{u_{III} + u_{I} + u_{II}}{3},\quad b = \frac{u_{III} + \alpha^2 u_{I} + \alpha u_{II}}{3},\quad c = \frac{u_{III} + \alpha u_{I} + \alpha^2 u_{II}}{3},$$

$$\text{wo } u_{III} = a+b+c,\quad u_{I} = \sqrt[3]{v+\sqrt{w}},\quad u_{II} = \sqrt[3]{v-\sqrt{w}}.$$

Setzt man nun die für v und $\sqrt{w}$ gefundenen Ausdrücke ein, so erhält man die einzelnen Wurzeln ausgedrückt durch symmetrische Funktionen sämmtlicher Wurzeln:

$$a = \frac{a+b+c}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)+3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}$$
$$+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)-3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}$$

$$b = \frac{a+b+c}{3} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-a-c)(c2-a-b)+3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}$$
$$+\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)-3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}$$

$$c = \frac{a+b+c}{3} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)+3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}$$
$$+\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)-3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}.$$

Es wurde schon bemerkt, dass man, um den zweiten Teil des Radikanden als symmetrische Funktion zu erhalten, ihn unter der Form schreiben musste: $\frac{3}{2}\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}$, da das Produkt aus den Differenzen der Wurzeln durch Vertauschung der Elemente zwei entgegengesetzte Werte annimmt, während das Quadrat eine symmetrische Funktion ist.

Um mit Hülfe dieser symmetrischen Funktionen die Werte von a, b, c in den Koefficienten p_1, p_2, p_3 der gegebenen Gleichung zu erhalten, sind die einzelnen symmetrischen Ausdrücke durch die Koefficienten darzustellen.

Da $a+b+c = -p_1$, so bleibt noch der Ausdruck

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)\pm 3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}}$$

$$\text{oder } \sqrt[3]{\frac{(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)\pm 3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{54}}$$

zu bestimmen. Der Radikand geht auf die beiden Ausdrücke zurück:

$$\frac{(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)}{54}=Q \text{ und } \frac{-[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}{108}=\mathrm{T}.$$

Die Entwicklung des ersteren Ausdrucks giebt aber:

$$Q=\frac{1}{54}[12abc-3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+2(a^3+b^3+c^3)]$$

oder mit Benutzung der früher eingeführten Bezeichnungen:

$$Q=\frac{1}{54}\Big[12abc-3\sum_{abc}a^2b+2s_3\Big].$$ Da $abc=-p_3$, so ist

$$Q=\frac{1}{27}s_3-\frac{1}{18}\Sigma a^2b-\frac{2}{9}p_3.$$

Entwickelt man noch den andern Ausdruck, so erhält man

$$T=\frac{1}{54}\Sigma a^4bc-\frac{1}{54}\Sigma a^3b^2c-\frac{1}{108}\Sigma a^4b^2+\frac{1}{54}\Sigma a^3b^3+\frac{1}{18}a^2b^2c^2.$$

Berücksichtigt man, dass

$$\Sigma a^4bc=abc\Sigma a^3,\ \Sigma a^3b^2c=abc\Sigma a^2b,\ abc=-p_3,$$ so ist

$$T=-\frac{1}{54}p_3s_3+\frac{1}{54}p_3\Sigma a^2b-\frac{1}{108}\Sigma a^4b^2+\frac{1}{54}\Sigma a^3b^3+\frac{1}{18}p_3^2.$$

Nun ist $\Sigma a^2b=s_1s_2-s_3$, $\Sigma a^4b^2=s_4s_2-s_6$, $\Sigma a^3b^3=\frac{1}{2}(s_3^2-s_6)$, folglich

$$Q=\frac{5}{54}s_3-\frac{1}{18}s_2s_1-\frac{2}{9}p_3,$$

$$T=-\frac{1}{27}p_3s_3-\frac{1}{108}s_2s_4+\frac{1}{54}p_3s_1s_2+\frac{1}{108}s_3^2+\frac{1}{18}p_3^2.$$

Nun ist (S. 4): $s_1=-p_1$; $s_2=p_1^2-2p_2$. Es bleiben also noch s_3 und s_4 durch die Koefficienten auszudrücken.

Nach Seite 5 ist

$$s_m+p_1s_{m-1}+p_2s_{m-2}+\ldots+p_{m-1}s_1+mp_m=0,$$
$$s_{m+1}+p_1s_m+p_2s_{m-1}+\ldots+p_{m-1}s_2+p_ms_1=0,$$

wenn m der Exponent der höchsten Potenz der Unbekannten in der Gleichung ist; also ist für $m=3$, wenn man für s_1 und s_2 die bekannten Werte einsetzt:

$$s_3=-p_1^3+3p_1p_2-3p_3,$$

und mit Hilfe dieser Gleichung: $s_4=p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+2p_2^2$. Setzt man die gefundenen Werte in die Ausdrücke Q und T ein, so findet man

$$Q=-\frac{1}{27}p_1^3+\frac{1}{6}p_1p_2-\frac{1}{2}p_3;$$

$$T=\frac{1}{27}p_1^3p_3-\frac{1}{108}p_1^2p_2^2-\frac{1}{6}p_1p_2p_3+\frac{1}{27}p_2^3+\frac{1}{4}p_3^2.$$

Dies in die Gleichungen für a, b, c eingesetzt, giebt die Wurzeln der kubischen Gleichung ausgedrückt in den Koefficienten der letzteren, wie folgt:

$$a=-\frac{p_1}{3}+\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p_1^3+\frac{1}{6}p_1p_2-\frac{1}{2}p_3+\sqrt{\frac{1}{27}p_2^3-\frac{1}{108}p_1^2p_2^2+\frac{1}{4}p_3^2-\frac{1}{6}p_1p_2p_3+\frac{1}{27}p_1^3p_3}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p_1^3+\frac{1}{6}p_1p_2-\frac{1}{2}p_3-\sqrt{\frac{1}{27}p_2^3-\frac{1}{108}p_1^2p_2^2+\frac{1}{4}p_3^2-\frac{1}{6}p_1p_2p_3+\frac{1}{27}p_1^3p_3}},$$

$$b=-\frac{p_1}{3}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p_1^3+\frac{1}{6}p_1p_2-\frac{1}{2}p_3+\sqrt{\frac{1}{27}p_2^3-\frac{1}{108}p_1^2p_2^2+\frac{1}{4}p_3^2-\frac{1}{6}p_1p_2p_3+\frac{1}{27}p_1^3p_3}}$$

$$+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p_1^3+\frac{1}{6}p_1p_2-\frac{1}{2}p_3-\sqrt{\frac{1}{27}p_2^3-\frac{1}{108}p_1^2p_2^2+\frac{1}{4}p_3^2-\frac{1}{6}p_1p_2p_3+\frac{1}{27}p_1^3p_3}},$$

$$c=-\frac{p_1}{3}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p_1^3+\frac{1}{6}p_1p_2-\frac{1}{2}p_3+\sqrt{\frac{1}{27}p_2^3-\frac{1}{108}p_1^2p_2^2-\frac{1}{4}p_3^2-\frac{1}{6}p_1p_2p_3+\frac{1}{27}p_1^3p_3}}$$

$$+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p_1^3+\frac{1}{6}p_1p_2-\frac{1}{2}p_3-\sqrt{\frac{1}{27}p_2^3-\frac{1}{108}p_1^2p_2^2-\frac{1}{4}p_3^2-\frac{1}{6}p_1p_2p_3+\frac{1}{27}p_1^3p_3}}.$$

Setzt man hier noch $p_1=0$, so erhält man die Cardanische Formel.

Gleichung vom vierten Grade.

Die algebraische Gleichung vom vierten Grade hat die Form:

$$x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0.$$

Bezeichnet man ihre Wurzeln mit a, b, c, d, so ist

$$(1)\quad\begin{cases} a+b+c+d=-p_1, \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=p_2, \\ abc+abd+acd+bcd=-p_3, \\ abcd=p_4. \end{cases}$$

Analog dem früheren Verfahren sucht man diese Wurzeln abhängig zu machen von einer Gleichung dritten Grades. Die drei Kombinationen der vier Wurzeln, welche letztere Gleichung liefert, stellt man dann zusammen mit einer der vorhergehenden Gleichungen (1), um aus den so gewonnenen vier Gleichungen die Wurzeln zu bestimmen.

Um wieder eine Funktion der Wurzeln von möglichst einfacher Form zu erhalten, nehme man den Ausdruck

$$ka+lb+mc+nd.$$

Wollte man eine Gleichung aufstellen, welche die sämtlichen aus dieser Funktion herzustellen-den Kombinationen zu Wurzeln hätte, so würde dies eine Gleichung vom 24^{ten} Grade werden, da die Anzahl der möglichen Permutationen 4! beträgt. Man setze also, da die Wahl der Koefficienten beliebig ist, $k = l$, $m = n$, so lassen sich aus der Funktion $l(a+b)+m(c+d)$ nur noch $C_2(4) = 6$ verschiedene bilden:

$$\begin{gathered} l(a+b)+m(c+d),\ l(a+c)+m(b+d), \\ l(a+d)+m(b+c),\ l(b+c)+m(a+d), \\ l(b+d)+m(a+c),\ l(c+d)+m(a+b). \end{gathered}$$

Wollte man noch $l = m$ setzen, so würden alle Funktionen identisch werden. Setzt man aber $l = -m$, so gehen die vorstehenden Ausdrücke in folgende über:

$$\begin{gathered} l(a+b-c-d),\ l(a+c-b-d), \\ l(a+d-b-c),\ l(b+c-a-d), \\ l(b+d-a-c),\ l(c+d-a-b). \end{gathered}$$ Nun ist

$$\begin{aligned} l(a+b-c-d) &= -l(c+d-a-b), \\ l(a+c-b-d) &= -l(b+d-a-c), \\ l(a+d-b-c) &= -l(b+c-a-d). \end{aligned}$$

Stellt man nun eine Gleichung auf, welche diese Funktionen zu Wurzeln hat, so erhält man eine Gleichung vom 6^{ten} Grade, welche drei positive und drei negative Wurzeln hat der Art, dass je zwei derselben sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

In einem solchen Falle aber enthält die Gleichung nur gerade Potenzen der Unbekannten. Denn da jedem Wert der Unbekannten $z = \alpha$, $z = \beta$, $z = \gamma$, ..., auch ein Wert mit entgegengesetztem Vorzeichen entspricht: $z = -\alpha$, $z = -\beta$, $z = \gamma$, ..., so erhält man, wenn man die Gleichung unter der Form eines Produktes schreibt:

$$[(z-\alpha)(z+\alpha)][(z-\beta)(z+\beta)][(z-\gamma)(z+\gamma)] \ldots . = 0,$$

oder $(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)(z^2-\gamma^2) \ldots . = 0.$

Führt man diese Multiplikationen aus, so können die einzelnen Glieder nur Potenzen enthalten, deren Basis z^2 ist; die Gleichung hat also die Form

$$(z^2)^n + P(z^2)^{n-1} + Q(z^2)^{n-2} + \ldots + T = 0, \text{ oder auch}$$
$$z^{2n} + Pz^{2(n-1)} + Qz^{2(n-2)} + \ldots + T = 0;$$

demnach hat auch die gesuchte Gleichung, welche die genannten sechs Funktionen zu Wurzeln hat, die Form:

$$u^6 + Au^4 + Bu^2 + C = 0.$$

Setzt man noch $u^2 = v$, so erhält man eine Gleichung vom $\overset{3}{2}{}^{\text{ten}}$ Grade:

$$v^3 + Av^2 + Bv + C = 0,$$

welche drei verschiedene Werte für u^2 ergiebt. Bezeichnet man diese mit u_I^2, u_{II}^2, u_{III}^3, und nimmt

$$\begin{aligned} u_I &= l(a+b-c-d), \\ u_{II} &= l(a+c-b-d), \\ u_{III} &= l(a+d-b-c), \end{aligned}$$

so ist u_I^2 nicht blos gleich $[l(a+b-c-d)]^2$, sondern auch $[-l(a+b-c-d)]^2$ oder $[l(c+d-a-b)]^2$;

also
$$u_I^2 = l^2(a+b-c-d)^2 = l^2(c+d-a-b)^2,$$
$$u_{II}^2 = l^2(a+c-b-d)^2 = l^2(b+d-a-c)^2,$$
$$u_{III}^2 = l^2(a+d-b-c)^2 = l^2(b+c-a-d)^2;$$
man kann also die oben aufgestellten sechs Funktionen in vorliegende drei zusammenfassen. Setzt man nun noch $l=1$, so erhält man als Wurzeln der für v aufgestellten Gleichung die Werte:
$$u_I^2 = (a+b-c-d)^2,$$
$$u_{II}^2 = (a+c-b-d)^2,$$
$$u_{III}^2 = (a+d-b-c)^2.$$
Um jetzt die Grössen u_I^2, u_{II}^2, u_{III}^2 durch symmetrische Funktionen auszudrücken, hat man nur in den im vorigen Abschnitt dargestellten Gleichungen
$$u_I = a+\alpha b+\alpha^2 c = \sqrt[3]{v+\sqrt{w}},$$
$$u_{II} = a+\alpha^2 b+\alpha c = \sqrt[3]{v-\sqrt{w}}$$
die Wurzeln a, b, c bzw. durch u_I^2, u_{II}^2, u_{III}^2 zu ersetzen, und man erhält:
$$u_I^2+\alpha u_{II}^2+\alpha^2 u_{III}^2 = \sqrt[3]{z+\sqrt{w}},$$
$$u_I^2+\alpha^2 u_{II}^2+\alpha u_{III}^2 = \sqrt[3]{z-\sqrt{w}}, \text{ wo}$$
$$z = \frac{(2u_I^2-u_{II}^2-u_{III}^2)(2u_{II}^2-u_I^2-u_{III}^2)(2u_{III}^2-u_I^2-u_{II}^2)}{2},$$
$$\sqrt{w} = \frac{3}{2}\sqrt{-3[(u_I^2-u_{II}^2)(u_I^2-u_{III}^2)(u_{II}^2-u_{III}^2)]^2}.$$
Drückt man diese Funktionen durch die Wurzeln a, b, c, d der biquadratischen Gleichung aus, so erhält man z und $\sqrt{w}$ als symmetrische Funktionen von a, b, c, d, weil u_I^2, u_{II}^2, u_{III}^2 alle möglichen Kombinationen darstellen, welche aus einer bestimmten Funktion $l(a+b-c-d)$ der Wurzeln sich herleiten lassen.

Nun ist
$$2u_I^2-u_{II}^2-u_{III}^2 = 2(a+b-c-d)^2-(a+c-b-d)^2-(a+d-b-c)^2$$
$$= 8(ab+cd)-4(ac+bd)-4(ad+bc);$$
$$2u_{II}^2-u_I^2-u_{III}^2 = 2(a+c-b-d)^2-(a+b-c-d)^2-(a+d-b-c)^2$$
$$= 8(ac+bd)-4(ad+bc)-4(ab+cd);$$
$$2u_{III}^2-u_I^2-u_{II}^2 = 2(a+d-b-c)^2-(a+b-c-d)^2-(a+c-b-d)^2$$
$$= 8(ad+bc)-4(ab+cd)-4(ac+bd);$$
ferner
$$u_I^2-u_{II}^2 = (u_I+u_{II})(u_I-u_{II}) = 4(a-d)(b-c),$$
$$u_I^2-u_{III}^2 = (u_I+u_{III})(u_I-u_{III}) = 4(a-c))b-d),$$
$$u_{II}^2-u_{III}^2 = (u_{II}+u_{III})(u_{II}-u_{III}) = 4(a-b)(c-d).$$
Um nun a, b, c, d einzeln mittelst symmetrischer Funktionen auszudrücken, muss man zunächst u_I^2, u_{II}^2, u_{III}^2 einzeln mittelst dieser Funktionen bestimmen. Man stelle also die beiden oben gefundenen Gleichungen
$$u_I^2+\alpha u_{II}^2+\alpha^2 u_{III}^2 = \sqrt[3]{z+\sqrt{w}},$$

$$u_I^2+\alpha^2 u_{II}^2+\alpha u_{III}^2=\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}$$

mit der folgenden zusammen: $u_I^2+u_{II}^2+u_{III}^2=S$, so erhält man (vergl. Seite 12)

$$u_I^2=\frac{S+\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3},$$

$$u_{II}^2=\frac{S+\alpha^2\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\alpha\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3},$$

$$u_{III}^2=\frac{S+\alpha\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\alpha^2\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3};$$

hier ist also $S=u_I^2+u_{II}^2+u_{III}^2=(a+b-c-d)^2+(a-b+c-d)^2+(a-b-c+d)^2$

$$=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2,$$

$$z=\frac{(2u_I^2-u_{II}^2-u_{III}^2)(2u_{II}^2-u_I^2-u_{III}^2)(2u_{III}^2-u_I^2-u_{II}^2)}{2}$$

$$=32[2(ab+cd)-(ac+bd)-(ad+bc)]\,.\,[2(ac+bd)-(ad+bc)-(ab+cd)]\,.$$
$$.\,[2(ad+bc)-(ab+cd)-(ac+bd)],$$

$$\sqrt{w}=\frac{3\sqrt{-3}}{2}(u_I^2-u_{II}^2)(u_I^2-u_{III}^2)(u_{II}^2-u_{III}^2), \text{ also}$$

$$w=\frac{-3.9.16^3}{4}[(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2$$

$$=-3[96(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2.$$

Um nun noch a, b, c, d mittelst dieser symmetrischen Funktionen auszudrücken, verbinde man die eingangs aufgestellten Gleichungen für u_I, u_{II}, u_{III} mit der vierten Gleichung $u_{IV}=a+b+c+d$, so hat man

$$u_I=a+b-c-d,$$
$$u_{II}=a-b+c-d,$$
$$u_{III}=a-b-c+d,$$
$$u_{IV}=a+b+c+d, \text{ woraus folgt:}$$
$$4a=u_{IV}+u_I+u_{II}+u_{III},$$
$$4b=u_{IV}+u_I-u_{II}-u_{III},$$
$$4c=u_{IV}-u_I+u_{II}-u_{III},$$
$$4d=u_{IV}-u_I-u_{II}-u_{III}.$$

Setzt man für u_I, u_{II}, u_{III}, u_{IV} ihre Werte in z und w, so erhält man a, b, c, d ausgedrückt in symmetrischen Funktionen, wie folgt:

$$4a=a+b+c+d+\sqrt{\frac{S+\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}}+\sqrt{\frac{S+\alpha^2\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\alpha\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}}$$
$$+\sqrt{\frac{S+\alpha\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\alpha^2\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}},$$

$$4b = a+b+c+d+\sqrt{\frac{S+\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}}-\sqrt{\frac{S+\alpha^2\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\alpha\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}}$$
$$-\sqrt{\frac{S+\alpha\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\alpha^2\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}},$$

$$4c = a+b+c+d-\sqrt{\frac{S+\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}}+\sqrt{\frac{S+\alpha^2\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\alpha\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}}$$
$$-\sqrt{\frac{S+\alpha\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\alpha^2\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}},$$

$$4d = a+b+c+d-\sqrt{\frac{S+\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}}-\sqrt{\frac{S+\alpha^2\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\alpha\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}}$$
$$+\sqrt{\frac{S+\alpha\sqrt[3]{z+\sqrt{w}}+\alpha^2\sqrt[3]{z-\sqrt{w}}}{3}},$$

wo S, z, w die oben dargestellten symmetrischen Ausdrücke bedeuten. Es erübrigt noch, aus diesen symmetrischen Funktionen die Worte von a, b, c, d mittelst der Koefficienten p_1, p_2, p_3, p_4 der gegebenen Gleichung darzustellen.

Zunächst ist $a+b+c+d=-p_1$. Ferner ist

$$S=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$$
$$=3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd),$$

also unter Anwendung der früher eingeführten Bezeichnung:

$$S=3s_2-2p_2=3p_1^2-8p_2.$$

Entwickelt man ferner den Ausdruck für z, so erhält man zunächst

$$z=32[12\sum_{abcd}a^2bc^{22}+12\sum_{abcd}a^3bcd-3\sum_{abcd}a^3b^2c-6\sum_{abcd}a^2b^2cd+2\sum_{abcd}a^3b^3]$$
$$=32[12\sum a^2b^2c^2+12p_4\sum a^2-3\sum a^3b^2c-6p_4\sum ab+2\sum a^3b^3]$$
$$=32[12\sum a^2b^2c^2+12p_4s_2-3\sum a^3b^2c-6p_2p_4+2\sum a^3b^3].$$

Nun ist $$\sum a^2b^2c^2=\frac{1}{6}(s_2^3-3s_2s_4+2s_6);$$

$$\sum a^3b^2c=s_1s_2s_3-s_1s_5-s_2s_4-s_3^2+2s_6;\ \sum a^3b^3=\frac{1}{2}(s_3^2-s_6),$$

also nach Reduktion des sich ergebenden Ausdrucks:

$$z=32[2s_2^3+4s_3^2-3s_1s_2s_3+3s_1s_5-3s_2s_4-3s_6+12p_4s_2-6p_2p_4].$$

Es ist aber
$$s_1=-p_1,$$
$$s_2=p_1^2-2p_2,$$
$$s_3=-p_1^3+3p_1p_2-3p_3,$$
$$s_4=p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+2p_2^2-4p_4,$$

$$s_5 = -p_1^5 + 5p_1^3p_2 - 5p_1^2p_3 + 5p_1p_4 - 5p_1p_2^2 + 5p_2p_3,$$
$$s_6 = p_1^6 - 6p_1^4p_2 + 6p_1^3p_3 - 6p_1^2p_4 + 9p_1^2p_2^2 - 12p_1p_2p_3 - 2p_2^3 + 3p_3^2 + 6p_2p_4\ ^{*}).$$

Setzt man nun noch vorstehende Werte ein, so erhält man schliesslich den Ausdruck:

$$z = 32[27p_1^2p_4 - 9p_1p_2p_3 - 72p_2p_4 + 2p_2^3 + 27p_3^2].$$

Um nun auch noch w mittelst der Koefficienten der Gleichung auszudrücken, entwickele man den Ausdruck

$$w = -3[96(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} w = -3.96^2 \Big| \; & \Sigma a^6b^4c^2 - 2\Sigma a^6b^3c^3 - 2abcd\Sigma a^5b^3 + 2abcd\Sigma a^5b^2c - 6a^2b^2c^2d^2\Sigma a^4 - 2\Sigma a^5b^5c^2 + 2\Sigma a^5b^4c^3 \\ & + 4abcd\Sigma a^4b^4 - 2abcd\Sigma a^4b^3c - 4abcd\Sigma a^4b^2c^2 + 4a^2b^2c^2d^2\Sigma a^3b - 6\Sigma a^4b^4c^4 + 4a^2b^2c^2d^2\Sigma a^2b^2 \\ & + 4abcd\Sigma a^3b^3c^2 - 6a^2b^2c^2d^2\Sigma a^2bc + 24a^3b^3c^3d^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = -3.96^2 \Big| \; & \Sigma a^6b^4c^2 - 2\Sigma a^6b^3c^3 - 2p_4\Sigma a^5b^3 + 2p_4\Sigma a^5b^2c - 6p_4^2s_4 - 2\Sigma a^5b^5c^2 + 2\Sigma a^5b^4c^3 + 4p_4\Sigma a^4b^4 \\ & - 2p_4\Sigma a^4b^3c - 4p_4\Sigma a^4b^2c^2 + 4p_4^2\Sigma a^3b - 6\Sigma a^4b^4c^4 + 4p_4^2\Sigma a^2b^2 + 4p_4\Sigma a^3b^3c^2 - 6p_4^2\Sigma a^2bc \\ & + 24p_4^3. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \Sigma a^6b^4c^2 &= s_2s_4s_6 - s_2s_{10} - s_4s_8 - s_6^2 + 2s_{12}; \\ \Sigma a^6b^3c^3 &= \frac{1}{2}(s_3^2s_6 - s_6^2 - 2s_9s_3 + 2s_{12}); \\ \Sigma a^5b^3 &= s_5s_3 - s_8; \\ \Sigma a^5b^2c &= s_1s_2s_5 - s_1s_7 - s_2s_6 - s_3s_5 + 2s_8; \\ \Sigma a^5b^5c^2 &= \frac{1}{2}(s_2s_5^2 - s_2s_{10} - 2s_7s_5 + 2s_{12}); \\ \Sigma a^5b^4c^3 &= s_3s_4s_5 - s_3s_9 - s_4s_8 - s_5s_7 + 2s_{12}; \\ \Sigma a^4b^4 &= \frac{1}{2}(s_4^2 - s_8); \\ \Sigma a^4b^3c &= s_1s_3s_4 - s_1s_7 - s_3s_5 - s_4^2 + 2s_8; \\ \Sigma a^4b^2c^2 &= \frac{1}{2}(s_2^2s_4 - s_4^2 - 2s_2s_6 + 2s_8); \\ \Sigma a^3b &= s_1s_3 - s_4; \\ \Sigma a^4b^4c^4 &= \frac{1}{6}(s_4^3 - 3s_4s_8 + 2s_{12}); \\ \Sigma a^2b^2 &= \frac{1}{2}(s_2^2 - s_4); \\ \Sigma a^3b^3c^2 &= \frac{1}{2}(s_3^2s_2 - s_6s_2 - 2s_5s_3 + 2s_8); \\ \Sigma a^2bc &= \frac{1}{2}(s_1^2s_2 - s_2^2 - 2s_1s_3 + 2s_4). \end{aligned}$$

---

*) Die einzelnen Glieder dieser Summen sowie auch der Summen der höheren Potenzen folgen der Regel: Jedes Glied mit gerader Anzahl Faktoren ist positiv, mit ungerader negativ; in jedem Glied $p_1^n p_2^q p_3^r p^t$ der Summe s_m ist stets $n.1 + q.2 + r.3 + t.4 = m$; u. s. w.

Setzt man diese Werte in die Gleichung für w ein, so erhält man

$$w = -3.96^2 \left| \begin{array}{l} s_6 s_4 s_2 - s_3^2 s_6 - 6p_4 s_5 s_3 + 2p_4 s_5 s_2 s_1 - 18p_4^2 s_4 - s_5^2 s_2 + 2s_5 s_4 s_3 + 6p_4 s_4^2 - 2p_4 s_4 s_3 s_1 - 2p_4 s_2^2 s_4 \\ + 10p_4^2 s_3 s_1 - s_4^3 + 5p_4^2 s_2^2 + 2p_4 s_3^2 s_2 - 3p_4^2 s_1^2 s_2 + 24p_4^3. \end{array} \right.$$

Drückt man nun noch die einzelnen Summen $s_1, s_2, \ldots s_6$ in der oben angegebenen Weise durch die Koefficienten aus, so findet man

$$w = -3.96^2 \left| \begin{array}{l} 70p_1^4 p_2^2 p_4 - 27p_1^4 p_4^2 + 18p_1^3 p_2 p_3 p_4 - 4p_1^3 p_3^3 - 4p_1^2 p_2^3 p_4 + p_1^2 p_2^2 p_3^2 - 6p_1^2 p_3^2 p_4 + 144p_1^2 p_2 p_4^2 \\ -150p_1 p_2^2 p_3 p_4 + 18p_1 p_2 p_3^3 - 192p_1 p_3 p_4^2 + 16p_2^4 p_4 + 144p_2 p_3^2 p_4 - 128p_2^2 p_4^2 - 27p_3^4 + 256p_4^3. \end{array} \right.$$

Für $p_1 = 0$ wird

$$z = 32[-72p_2 p_4 + 2p_2^3 + 27p_3^2];$$

$$w = -3.96^2[16p_2^4 p_4 + 144p_2 p_3^2 p_4 - 128p_2^2 p_4^2 - 27p_3^4 + 256p_4^3].$$