Einiges über Kettenbrüche.

Bei der Beschäftigung mit den Kettenbrüchen bei Gelegenheit des Unterrichts in diesem Theile der Arithmetik habe ich die Ableitung einiger bekannten Sätze auf einem andern als dem gewöhnlichen Wege gefunden, so wie auch einige neue Formeln und Relationen zwischen einer Zahl und den Näherungswerthen ihrer Quadratwurzel, die mir der Mittheilung in einer Gelegenheitsschrift nicht unwerth schienen. Auch der kleinste Beitrag zur Theorie der Zahlen darf nicht verschmäht werden.

Der Kürze wegen habe ich die erste Periode des der Quadratwurzel einer Zahl entsprechenden Kettenbruchs gewöhnlich nicht ausgeschrieben, sondern, nach dem Vorgange Digen's in seinem Canon Pellianus, nur die Theilnenner bis zur Mitte der Periode und den mittelsten, in eine Parenthese eingeschlossen, so dass z. B.

$$\sqrt{28} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \sqrt{28}}}}} = 5;\ 3,\ (2), \text{ und } \sqrt{53} = 7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \sqrt{53}}}}}} = 7;\ 3,\ (1,\ 1)$$

gesetzt ist.

Die Buchstaben bedeuten durchweg ganze Zahlen.

§. 1.

Jeder von Anfang an periodisch-symmetrische Kettenbruch, drückt die Quadratwurzel einer ganzen oder gebrochenen Zahl aus.

Heisst die grösste in der Quadratwurzel enthaltene Zahl n (welches n auch $= o$ sein kann), der Näherungswerth bis ans Ende der ersten Periode (excl. $2\,n$) $\frac{n\,N + B}{N}$, also, da der Kettenbruch symmetrisch ist, der Nenner des dann vorhergehenden B, und der Näherungswerth selbst $\frac{nB+C}{B}$, so ist der Werth des Bruches:

$$x = \frac{(nN+B)(n+x)+nB+C}{N(n+x)+B}$$

woraus

$$x^2 = \frac{n^2N+2nB+C}{N} = n^2 + \frac{2nB+C}{N}$$

Da die erste Potenz von x fortfällt, so hat man die allgemeine Form der ganzen oder gebrochenen Zahlen, deren Quadratwurzel dem gegebenen Kettenbruche zugehört.

Nimmt man noch den Theilnenner n hinzu und setzt den Zähler dieses Näherungswerthes bis $\frac{1}{n} = M^1$, so ist:

$$M^1 = n^2N + 2nB + C,$$

folglich

$$x^2 = \frac{M^1}{N.}$$

Die Zahl ist also gleich dem Zähler des letzten Näherungswerthes der ersten Periode, diese bis $\frac{1}{n}$ genommen, dividirt durch den Nenner des vorletzten. Dieser zur Berechnung der Zahl aus den Quotienten des Kettenbruchs sehr bequeme Ausdruck entscheidet zugleich auf der Stelle, ob x^2 eine ganze oder gebrochene Zahl ist.

§. 2.

Berechnung der Kettenbrüche der Quadratwurzeln einiger Zahlen von allgemeiner Form.

1. $\sqrt{n^2+1} = n;\ (2n),$

also $m\sqrt{n^2+1} = \sqrt{m^2(n^2+1)}$

$$= mn + \cfrac{1}{\frac{2n}{m} + \frac{1}{2mn}\Big|} + \text{etc.}$$

Ist nun $n = mv$, so erhält man:

$$\sqrt{m^2(m^2v^2+1)} = m^2v;\ (2v).$$

2. $\sqrt{n^2+2} = n;\ (n)$

$$m\sqrt{n^2+2} = mn + \cfrac{1}{\frac{n}{m} + \frac{1}{2mn}\Big|} + \text{etc.}$$

und wenn $n = mv$,

$$\sqrt{m^2(m^2v^2)} = m^2v;\ (v).$$

3. $\sqrt{n^2-1} = n-1;\ (1.).$

Ist $n-1 = m^2v$, also $n^2-1 = m^2v(m^2v+2)$, dann wird:

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{m} = \sqrt{v(m^2 v + 2)} = \frac{n-1}{m} + \frac{1}{m +} \frac{1}{\frac{2(n-1)}{m}} \Big| + \text{etc.}$$

$$= mv + \frac{1}{m +} \frac{1}{2ma} \Big| + \text{etc.}$$

$$= mv;\ (m).$$

4. $\sqrt{n^2-2} = n-1 + \frac{1}{x}$.

$$x = \frac{\sqrt{n^2-2}+n-1}{2n-3} = 1 + \frac{1}{y}.$$

$$y = \frac{\sqrt{n^2-2}+n-2}{2} = \frac{2n-3+\frac{1}{x}}{2} = (n-1) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right)$$

Da $\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}$ positiv, so ist $n-1$ um einen echten Bruch zu gross, folglich:

$$y = \frac{\sqrt{n^2-2}+n-2}{2} = n-2 + \frac{1}{z}.$$

$$z = \frac{\sqrt{n^2-2}+n-2}{2n-3} = 1 + \frac{1}{u}.$$

$$u = \sqrt{n^2-2}+n-1 = 2(n-1) + \frac{1}{x}.$$

also endlich:
$$\sqrt{n^2-2} = n-1;\ 1,\ (n-2).$$

Für $n = 2$ ist oben $x = \frac{\sqrt{n^2-2}+n-1}{2n-3} = \frac{2(n-1)+\frac{1}{x}}{2n-3} = 2 + \frac{1}{x}$.
also $\sqrt{2} = 1;\ (2)$
und nach der letzten Formel: $\sqrt{2} = 1;\ 1,\ (0)$.

Dieser Kettenbruch giebt ausser den Näherungswerthen des ersten immer noch zwei; nämlich der Quotient 1 vor der Null giebt einen zu grossen, und der 0 wiederholt den vorhergehenden zu kleinen. Die Näherungswerthe sind:

nach der ersten Form $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$ etc.

und nach der zweiten $\frac{1}{1}$, $(\frac{2}{1}, \frac{1}{1})$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $(\frac{10}{7}, \frac{7}{5})$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$ etc.

Die Wurzeln aus $n^2 \pm 3$ lassen sich nicht mehr auf ähnliche Weise in allgemeiner Form darstellen.

§. 3.

Der Berechnung der allgemeinen Formen einiger Zahlen, deren Wurzeln durch allgemeine Formen von Kettenbrüchen ausgedrückt werden, möge folgende Betrachtung vorausgehen.

Nach der Bezeichnung des §. 1. ist:

$$x^2 = n^2 + \frac{2nB+C}{N} = n^2 + m$$

wo $m \overline{\overline{<}}\, 2n$ sein muss.

Heissen nun die Quotienten des Kettenbruchs ohne die Ganzen: $a, b \ldots, b, a$, so war §. 1.

$$\frac{B}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \quad \text{also ist} \quad \frac{N}{B} = a + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}.$$

folglich, wenn man $m = 2p$ setzt:

$$n = \frac{Np - \frac{C}{2}}{B} = ap + q.$$

Ebenso ist $p = bq + r,\ q = cr + s \ldots,\ u + at \pm \frac{C}{2}$.

Substituirt man immer die Werthe der folgenden Buchstaben in p, so erhält man ganz die Bildung der Näherungswerthe, mithin ist, wenn $\frac{E}{F}$ den drittletzten Näherungswerth bedeutet, das letzte $p = C\left(at \pm \frac{C}{2}\right) + Et$

$$= (aC + E)\,t \pm \frac{C^2}{2} = Bt \pm \frac{C^2}{2}$$

und $\quad m = 2Bt \pm C^2$.

Da $n = a + q$, so wird nach demselben Bildungsgesetze das letzte

$$n = B\left(at \pm \frac{C}{2}\right) + Ft = (aB + F)\,t \pm \frac{BC}{2}$$

$$= Nt \pm \frac{BC}{2}.$$

Die zweiten Glieder sind $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negattiv}\end{matrix}\right\}$ zu nehmen, je nachdem die Anzahl der Theilnenner von a bis a $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist, d. h. je nachdem die Periode $\left\{\begin{matrix}\text{kein}\\ \text{ein}\end{matrix}\right\}$ mittelstes Glied hat. Wird N eine gerade Zahl, so hat man, um keine Zahl zu überspringen, bei m und n $\frac{t}{2}$ für t und dann für t jede positive Zahl zu setzen. $t = 0$ ist nur statthaft, wenn die zweiten Glieder positiv sind, und t nur negativ, so lange n und m positiv werden, also wenn die zweiten Glieder positiv sind und $C^2 > 2B$, $\frac{BC}{2} > N$. So wird z. B. für die Theilnenner a, b, (c, c)

4, 1, (2, 2)

$$n = 221\,t + 235$$
$$m = 94\,t + 100$$

also die kleinsten Zahlen für $t = -1$, nämlich $n = 14$, $m = 6$, oder für $t = 0$, wenn man

$$n = 221\,t + 14$$
$$m = 94\,t + 6$$

schreibt. $\quad x^2 = n^2 + m = 202.$

Für $a, b, c, (d, d)$ wird $n = 73\,t + 667$ oder $n = 73\,t + 10$

1, 1, 1, (2, 2) $\quad m = 92\,t + 841 \quad m = 92\,t + 13$

also die kleinsten n und m nach den ursprünglichen Formeln für $t = -9$, nämlich

$$n = 10,\ m = 13,\ x^2 = 113.$$

§. 4.

Einige nach §. 4. berechnete Werthe für n und m aus gegebenen Theilnennern.

1. Gegeben: (a).

$$n = at, \qquad m = 2t.$$

Für ein gerades a ist $\frac{t}{2}$ für t zu setzen.

2. Gegeben: (a, a).

$$n = (a^2 + 1)\, t + \frac{a}{2}, \quad m = 2at + 1,$$

a darf also keine ungerade Zahl sein, wenn, wie hier immer vorausgesetzt wird, n ganz werden soll.

3. Gegeben: a, (b).

$$n = a\,(ab + 2)t - \frac{b\,(ab+1)}{2}, \quad m = 2(ab + 1)t - b^2$$

für a und b ungerade, sonst ist $\frac{t}{2}$ für t zu setzen. a gerade, b ungerade ist unzulässig.

4. Gegeben: a, (b, b).

$$n = \Big((ab + 1)^2 + a^2\Big)t + (ab^2 + a + b)\; \frac{b^2 + 1}{2}$$
$$m = 2\,(ab^2 + a + b) + (b^2 + 1)^2.$$

Es darf nicht zugleich a ungerade, b gerade sein.

Für $a = b$ ist: $\quad n = \Big((a^2 + 1)^2 + a^2)\Big)\, t + \frac{a(a^2+1)\,(a^2+2)}{2}$

$$m = 2a\,(a^2 + 2)\, t + (a^2 + 1)^2.$$

5. Gegeben: a, b, (c).

$$n = (ab + 1)\,\Big(c(ab + 1) + 2a\Big)\, t - \frac{b\,(bc+2)}{2}\,\Big((ab + 1)\,(bc + 1) + ab\Big)$$
$$m = 2\Big((ab + 1)\,(bc + 1) + ab\Big)\, t - b^2\,(bc + 2)^2.$$

a, b, c dürfen nicht zugleich ungerade sein, und für ein gerades c ist $\frac{t}{2}$ für t zu setzen.

Für $a = b = c$ ist $n = a\,(a^2 + 1)\,(a^2 + 3)\, t - \frac{a\,(a^2+2)}{2}\,\Big((a^2 + 1)^2 + a^2\Big)$

$$m = 2\,\Big((a^2 + 1)^2 + a^2\Big)\, t - a^2\,(a^2 + 2)^2.$$

6. Gegeben: a, b, (c, c).

$$n = \Big[\Big((abc + a + c) + a\Big)^2 + (ab + 1)^2\Big]\, t + \Big(c(ab + 1)\,(bc + 1) + a(bc + 1) + b(ab + 1)\Big)\frac{b^2 + (bc + 1)^2}{2}$$
$$m = 2\Big(c(ab + 1)\,(bc + 1) + a(bc + 1) + b\,(ab + 1)\Big)\, t + \Big({}^2 + b(bc + 1)^2\Big)^1$$

Die Verbindungen

a	b	c
gerade	gerade	ungerade
gerade	ungerade	ungerade
ungerade	gerade	gerade

sind unstatthaft.

Für $a = b = c$ ist:

$$n = \left(a^2 (a^2+2)^2 + (a^2+1)^2\right) t + a (a^2+1)(a^2+3) \frac{a^2+(a^2+1)^2}{2}$$

$$m = 2a (a^2+1)(a^2+3) t + \left(a^2 + (a^2+1)^2\right)$$

7. Gegeben: a, b, c, (d).

$$n = \left(d(abc+a+c) + 2(ab+1)\right)(abc+a+c) t$$

$$- \left((ab+1)(bc+1)(cd+1) + ab(cd+1) + bc(ab+1) + ad\right) \frac{(bc+1)\,(2b+d(bc+1))}{2}$$

$$m = 2\left((ab+1)(bc+1)(cd+1) + ab(cd+1) + bc(ab+1) + ad\right) t - (bc+1)^2 (2b+d(bc+1))^2$$

$\frac{t}{2}$ ist für t zu setzen, wenn 1) d gerade, oder 2) a und c ungerade, oder 3) b gerade, a und c ungerade.

n wird keine ganze Zahl für:

a	b	c	d
gerade	ungerade	gerade	ungerade
ungerade	gerade	ungerade	ungerade

Für $a = b = c = d$ ist

$$n = a(a^2+2)\left((a^2+2)^2 - 2\right) t - \left((a^2+1)^3 + a^2(2a^2+3)\right) \frac{a(a^2+1)(a^2+3)}{2}$$

$$m = 2\left((a^2+1)^3 + a^2(2a^2+3)\right) t - a^2 (a^2+1)^2 (a^2+3)^2$$

8. Gegeben: a, b, c, (d, d).

$$n = \left[\left((ab+1)(cd+1)+ad\right)^2 + (abc+a+c)^2\right] t$$

$$+ \left[\left((ab+1)(cd+1)+ad\right)(bcd+b+d) + (bc+1)(abc+a+c)\right] \frac{(bc+1)^2+(b+d(bc+1))^2}{2}$$

$$m = 2\left[\left((ab+1)(cd+1)+ad\right)(bcd+b+d) + (bc+1)(abc+a+c)\right] t$$

$$+ \left[(bc+1)^2 + \left(b+d(bc+1)\right)^2\right]^2$$

Unstatthaft sind die Verbindungen:

a	b	c	d
gerade	gerade	ungerade	gerade
gerade	ungerade	gerade	gerade
ungerade	gerade	gerade	gerade
ungerade	ungerade	gerade	ungerade
ungerade	ungerade	ungerade	ungerade

$\frac{t}{2}$ ist für t zu setzen, wenn:

a	b	c	d
gerade	gerade	gerade	ungerade
gerade	ungerade	ungerade.	gerade

Für $a = b = c = d$ ist:

$$n = \left[\left((a^2+1)^2 + a^2\right)^2 + a^2(a^2+2)^2\right] t + a(a^2+2)\left((a^2+2)^2 - 2\right) \frac{(a^2+1)^2 + a^2(a^2+2)^2}{2}$$

$$m = 2a(a^2+2)\left((a^2+2)^2 - 2\right) t + \left((a^2+1)^2 + a^2(a^2+2)^2\right)^2$$

§. 5.

Die Brüche $\frac{C}{B}$, $\frac{B}{N}$ des §. 3. lassen sich auch bloss mit Benutzung der ersten Hälfte der Periode finden. Heisst nämlich der echte Bruch 0; $\alpha, \beta, \ldots \mu, (\varkappa, \varkappa)$ und der letzte Näherungswerth der ersten Hälfte (bis zum ersten $\frac{1}{\varkappa}$ incl.) $\frac{m'}{N'}$, der vorletzte $\frac{m}{N}$, also in der zweiten Hälfte der Werth von $\frac{1}{\varkappa}$ bis $\frac{1}{\beta}$ incl. $\frac{m}{m'}$ und der von $\frac{1}{\varkappa}$ bis $\frac{1}{\alpha}$ incl. $\frac{N}{N'}$, so ist hier obiges

$$\frac{B}{N} = \frac{\frac{N'}{N}\, m' + m}{\frac{N'}{N}\, N' + N} = \frac{m' N' + m N}{N'^2 + N^2}$$

$$\text{und } \frac{C}{B} = \frac{\frac{m'}{m}\, m' + m}{\frac{m'}{m}\, N' + N} = \frac{m'^2 + m^2}{m' N' + mN}$$

Für n; $\alpha, \beta \ldots \mu, (2\varkappa)$ wird §. 11. den Näherungswerth bis zum zweiten $\frac{1}{\alpha}$ gefunden: $\frac{M'(N+Q) \pm 1}{N'(N+Q)}$, wenn die drei letzten bis $\frac{1}{2\varkappa}$: $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N'}$, $\frac{P}{Q}$, heissen. Unser echte Bruch wird also erhalten, wenn man n abreiht und m' für $M' - nN'$ setzt, also:

$$\frac{B}{N} = \frac{m'(N+Q) \pm 1}{N'(N+Q)}$$

($\pm$) je nachdem die Anzahl der Quotienten ohne die Ganzen, also von α bis $2\varkappa$ incl. $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Setzt man $\beta, \gamma, \ldots \varkappa = \frac{S'}{T'}$, seinen Vorgänger $\frac{S}{T}$, so ist $\varkappa$ bis $\frac{1}{\beta}$ incl. $= \frac{S'}{S'}$, und

$$\frac{C}{B} = \frac{\left(\varkappa + \frac{S'}{S}\right) m' + m}{\left(\varkappa + \frac{S'}{S}\right) N' + N} = \frac{(\varkappa S + S') m' + mS}{(\varkappa S + S') N' + NS}$$

womit in beiden Fällen B, C, N bestimmt sind.

§. 6.

Hat ein Kettenbruch, der die Quadratwurzel einer ganzen Zahl A ausdrückt, in der Mitte der Periode nur e i n e n Theilnenner $2\varkappa$, so kann man sich die ersten Quotienten bis zum ersten $\varkappa$ incl. nicht in der Periode enthalten vorstellen und diese mit dem zweiten $\varkappa$ beginnen lassen. Offenbar ist von hier ab der Kettenbruch dann auch periodisch-symmetrisch, also nach §. 1. einer Quadratwurzel gleich. Heisst diese $\sqrt{B}$, so muss 1) $B > 1$, allgemein aber $< A$ sein, da $\varkappa$, die grösste ganze Zahl in $\sqrt{B}$, $< n$ ist, und 2) B keine ganze Zahl, da das mittelste Glied der zugehörigen Periode $2n > 2\varkappa$ gleich ist, was für B gleich einer ganzen Zahl nicht der Fall sein könnte. Es ist also:

$$\sqrt{A} = n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\varkappa} + \frac{1}{\mu} + \ldots + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n} + \sqrt{A}$$

$$= n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\varkappa + \varkappa} + \frac{1}{\mu} + \ldots + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\varkappa} + \text{etc.}$$

$$= n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\varkappa} + \sqrt{B}$$

Wir suchen wieder A durch die Theilnenner, ferner B, welches auf irgend eine Weise von A abhängig sein muss.

Setzt man den Näherungswerth bis zum ersten $\frac{1}{\mu}$ incl. $\frac{M'}{N'}$, den vorhergehenden $\frac{N}{M}$, den bis $\frac{1}{\varkappa}$ incl. $\frac{M''}{N''}$, dann ist:

$$\sqrt{A} = \frac{\varkappa M' + M + M'\sqrt{B}}{\varkappa N' + N + N'\sqrt{B}}$$

und wenn man $B = \frac{A}{x^2}$ setzt:

$$\sqrt{A} = \frac{(\varkappa M' + M)\,x + M'\sqrt{A}}{(\varkappa N' + N)\,x + N'\sqrt{A}}$$

Multiplicirt man mit dem Nenner und setzt die rationalen Theile und ebenso die irrationalen einander gleich, so entstehen die beiden Gleichungen:

$$1)\quad AN' = (\varkappa M' + M)\,x$$
$$2)\quad M' = (\varkappa N' + N)\,x$$

$$\text{folglich } A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{\varkappa M' + M}{\varkappa N' + N} = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}$$

Betrachtet man also den halben mittelsten Theilnenner als letzten der ersten Hälfte der ersten Periode, dann ist das Produkt der beiden letzten Näherungswerthe dieser ersten Hälfte gleich der Zahl A.

Setzt man aber in die erste Gleichung $x\sqrt{B}$ für $\sqrt{A}$, so erhält man auf dieselbe Weise:

$$B = \frac{(\varkappa M' + M)(\varkappa N' + N)}{M'N'} = \frac{M''N''}{M'N'}$$

Eliminirt man $\varkappa$ aus den Gleichungen 1) und 2), so ensteht:

$$x = \frac{M'^2 - AN'^2}{NM' - MN'} = \pm (M'^2 - AN'^2)$$

also x eine ganze Zahl. Durch Substitution des obigen Werthes von A in diese Gleichung erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung $M'N'' - N'M'' = 1$, was auch gleich $x^2 = \frac{A}{B}$ giebt:

$$x = \frac{M'}{N''}.$$

Dass $\frac{M'}{N''}$ eine ganze Zahl werden muss, folgt schon aus $A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}$. Da nämlich M' und N', und ebenso M'' und N'' relative Primzahlen sind, so müssen $\frac{M'}{N''}$ und $\frac{M''}{N'}$ ganze Zahlen werden.

Für $\sqrt{180} = 13;\ 2,\ (2)$ sind die Näherungswerthe: $\frac{13}{1}, \frac{27}{2}, \frac{40}{3} = \frac{M''}{N''}$, also $x = \frac{27}{3} = 9$, und $B = \frac{180}{9^2} = \frac{3 \cdot 40}{2 \cdot 27} = \frac{20}{9}$.

§. 7.

Das Produkt der beiden ganzen Zahlen $\frac{M'}{N''} \cdot \frac{M''}{N'}$ soll die ganze Zahl A geben; d. h. A ist **keine Primzahl**, es sei denn, dass der kleinere dieser Faktoren $= 1$, und der grössere eine Primzahl ist. Nun ist aber:

$$M'' > M'$$
$$N' < N''$$

also

$$\frac{M''}{N'} > \frac{M'}{N''}$$

folglich müsste $\frac{M'}{N''} = 1$, oder $M' = N''$ sein, wenn A eine Primzahl sein sollte. Da aber

$$\frac{M''}{N''} = n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \cdots + \frac{1}{\varkappa} \quad \text{und desshalb} \quad \frac{M''}{M'} = \varkappa + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \cdots + \frac{1}{n}$$

so muss, wenn $M' = N''$ sein soll, $\varkappa = n$ sein, d. h. der mittelste Quotient gleich dem letzten, also auch gleich dem ersten, oder die Periode beginnt für A gleich einer Primzahl, deren Quadratwurzel in der Mitte einen geraden Quotienten hat, mit dem Quotienten $2n$. Dann ist $\frac{M'}{N'} = \frac{n}{1}$, $\frac{M''}{N''} = \frac{n^2+1}{n}$, also $\frac{M'}{N''} = 1$, $\frac{M''}{N'} = n^2 + 1 = A$. In der That ist $\sqrt{n^2+1} = n;\ (2n)$.

Wir haben also auf diesem Wege den bekannten Satz abgeleitet, dass die Quadratwurzel aus einer Primzahl, mit Ausnahme deren von der Form $n^2 + 1$, keinen Kettenbruch mit einem geraden Theilnenner in der Mitte geben kann.

Dass A keine Primzahl sein kann, folgt auch schon aus den Werthen für A und x (§. 6.) auf folgende Weise:

$$A = \frac{\varkappa M' + M}{N'} \cdot \frac{M'}{\varkappa N' + N}$$
$$= \frac{\varkappa M' + M}{N'}\, x = \frac{\varkappa M' + M}{N'} (M'^2 - AN'^2)$$

Da nun N', wenn es nicht $= 1$ ist, mit M' keinen Faktor gemein haben, also auch in $M'^2 - AN'^2$ nicht aufgehen kann, so muss es ganz in $\varkappa M' + M$ enthalten sein, folglich besteht A aus zwei Faktoren, von denen keiner $= 1$ sein kann. Es ist nämlich $\frac{\varkappa M' + M}{N'} > 1$, da $N' < M'$, also um so mehr $< \varkappa M' + M$, und $M'^2 - AN'^2$ d. i. $x > 1$, weil $B = \frac{A}{x^2}$ und $B < A$.

§. 8.

Ist $A = a \,.\, b$ und zwar $a > b$, und setzt man $B = \frac{p}{q}$, wo $p > q$ sein muss, und q nicht $= 1$ sein kann, so erhält man: $x^2 = \frac{A}{B} = \frac{a\; b \,.\, q}{p}$. Da x eine ganze Zahl, und $B > 1$ sein muss (§. 6.), so ist $p = a$ und $q = b = x$, also $B = \frac{a}{b}$

Ist also $\sqrt{A} = \sqrt{ab} = n + \frac{1}{\alpha +} \cdots + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\varkappa} + \frac{1}{\mu +} \cdots + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2n} + \sqrt{ab}$, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}} = \varkappa + \frac{1}{\mu +} \cdots + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{\alpha +} \cdots + \frac{1}{\varkappa} + \sqrt{\frac{a}{b}}$

z. B. $\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \sqrt{14}$, also $\sqrt{\frac{7}{2}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \sqrt{\frac{7}{2}}$

$$\sqrt{55} = 7;\ 2\,(2),\ \text{also}\ \sqrt{\tfrac{11}{5}} = 1;\ 2,\ (14)$$

Aber für $a \,.\, b = n^2 + 1$ wird $\sqrt{a.b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = n;\ (2n)$, also $b = 1$ z. B. für $A = 13 \,.\, 5$ ist B nicht $= \frac{13}{5}$, sondern $= 65$. Immer ist $B = A$, wenn $A = n^2 + 1$, auch wenn $n^2 + 1$ eine Primzahl ist.

Besteht A aus mehr als zwei Faktoren, so erhält man b d. i. x nach § 6. aus der Gleichung $b = M'^2 - AN'^2$, oder $b = \frac{M'}{N''}$. Ist z. B. $A = 180 = 4 \,.\, 5 \,.\, 9$, so folgt aus $\sqrt{180} = 13;\ 2,\ (2)$: $b = 9$, also $a = \frac{A}{b} = 20$, $B = \frac{20}{9}$, und $\sqrt{\frac{20}{9}} = 1;\ 2,\ (26)$.

Ueberhaupt lösen M' und N' die Gleichung $M'^2 - abN'^2 = \pm b$ in ganzen Zahlen, wenn a und b so beschaffen sind, dass der zu $\sqrt{ab}$ gehörige Kettenbruch in der Mitte der Periode einen geraden Theilnenner $2\varkappa$ hat, und dass $\sqrt{\frac{a}{b}}$ zwischen $\varkappa$ und $\varkappa + 1$ liegt. ($\pm b$) je nachdem der mittelste Quotient (die Ganzen nicht mitgerechnet) an $\left\{\begin{matrix}\text{gerader}\\ \text{ungerader}\end{matrix}\right\}$ Stelle steht.

$M'^2 - 11 \,.\, 5\, N'^2 = 5$; $\sqrt{55} = 7;\ 2,\ (2)$.

Näherungswerthe: $\frac{7}{1}$, $\frac{15}{2}$; $M' = 15$, $N' = 2$.

$M'^2 - 11 \,.\, 7\, N'^2 = -7$; $\sqrt{77} = 8;\ 1,\ 3,\ (2)$.

Näherungswerthe: $\frac{8}{1}$, $\frac{9}{1}$, $\frac{35}{4}$; $M' = 35$, $N' = 4$.

§. 9.

Die §. 6. gewonnenen Formeln für A, x, B behalten auch ihre Giltigkeit, wenn die Periode in der Mitte einen ungeraden Theilnenner $\varkappa$ hat, nur ist dann $\frac{\varkappa}{2}$ statt $\varkappa$ zu setzen, also wird:

$$A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{\frac{\varkappa}{2} M' + M}{\frac{\varkappa}{2} N' + N} = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}.$$

In diesem Falle kann B auch eine ganze Zahl werden, aber das n für $\sqrt{B}$ ist immer ein Bruch, nämlich $\frac{\varkappa}{2}$.

$\sqrt{75} = 8;\ 1,\ (1)$; Näherungswerthe: $\frac{8}{1}$, $\frac{9}{1}$, $\frac{\frac{25}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{M''}{N''}$

$9^2 - 75 . 1 = 6$, also $B = \frac{75}{36} = \frac{25}{12}$, oder $B = \frac{3 . 75}{4 . 9} = \frac{25}{12}$

und $\sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{1}{2} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{12}}}}}}$

$\sqrt{96} = 9;\ 1,\ (3)$ giebt $B = 6$, also $\sqrt{6} = \frac{3}{2} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{3}{2} + \sqrt{6}}}}}$

$\sqrt{32} = 5;\ 1,\ (1)$, $B = 2$, $\sqrt{2} = \frac{1}{2};\ 1,\ (10)$.

Es ist zu beachten, dass, wenn man $\frac{M''}{N''} = \frac{\varkappa M' + 2M}{\varkappa N' + 2N}$ setzt, das nach der Formel $B = \frac{M'' . N''}{M' . N'}$ erhaltene Resultat durch 4 zu dividiren ist.

Ist $\varkappa N' + 2N = M'$ (was nothwendig der Fall sein muss, wenn A eine Primzahl), so ist:

$$A = \frac{\varkappa M' + 2M}{N'}, \text{ und da } \varkappa = \frac{M' - 2N}{N'}, = \frac{M'^2 + 2(MN' - NM')}{N'^2} = \frac{M'^2 \pm 2}{N'^2}$$

oder $M'^2 - AN'^2 = \mp 2$.

(∓ 2) wenn $\frac{M'}{N'}$, ohne die Ganzen, an $\left\{ \begin{matrix} \text{gerader} \\ \text{ungerader} \end{matrix} \right\}$ Stelle steht.

Für solche Zahlen A wird also die Gleichung durch M' und N' in ganzen Zahlen gelöst.

A, M' und N' können nur ungerade sein. Für A gerade müsste auch M' gerade, also N' ungerade sein, was wegen $\varkappa = \frac{M' - 2N}{N'}$ nicht angeht, da $\varkappa$ gerade werden würde und doch nach der Annahme ungerade ist.

§. 10.

Der Ausdruck $A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}$ lässt sich auch ableiten ohne Einführung der $\sqrt{B}$. Bei derselben Bezeichnung ist nämlich in der **zweiten Hälfte** der Periode der Bruch von

$\frac{1}{\mu}$ bis $\frac{1}{\alpha} = \frac{N}{N'}$, und der ihm vorangehende von $\frac{1}{\mu}$ bis $\frac{1}{\beta}, = \frac{M-nN}{M'-nN'}$, d. i. gleich dem Quotienten zwischen den Zählern der echten Brüche in der ersten Hälfte von $\frac{1}{\alpha}$ bis $\frac{1}{\mu}$ und seinem Vorgänger. Dann ist der Werth vom zweiten $\frac{1}{\mu}$, also

$$\frac{1}{\mu + \text{in inf.}} = \frac{(n+\sqrt{A})\, N + (M-nN)}{(n+\sqrt{A})\, N' + (M'-nN')} = L.$$

$$\text{also } \sqrt{A} = \frac{(\varkappa + L)\, M' + M}{(\varkappa + L)\, N' + N}$$

und wenn man für L den Werth substituirt:

$$\sqrt{A} = \frac{(M'N + N'M + \varkappa M'N')\sqrt{A} + \varkappa M'^2 + 2M'M}{N'(2N + \varkappa N')\sqrt{A} + (M'N + N'M + \varkappa M'N')}$$

Multiplicirt man mit dem Nenner, so werden die irrationalen Theile identisch, die rationalen geben:

$$A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{\varkappa M' + 2M}{\varkappa N' + 2N} = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{\frac{\varkappa}{2}\, M' + M}{\frac{\varkappa}{2}\, N' + N} = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}$$

Heisst der Näherungswerth bis $\frac{1}{\varkappa}$ incl. $\frac{P}{Q}$, dann ist $\varkappa M' + M = P$, $\varkappa N' + N = Q$, also:

$$A = \frac{M'(M+P)}{N'(N+Q)} = \frac{M'(2P - \varkappa M')}{N'(2Q - \varkappa N')}$$

§. 11.

Die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ wird bekanntlich durch den Näherungswerth $\frac{x}{y}$ bis zum zweiten $\frac{1}{\alpha}$ incl., also vor dem vollständigen Quotienten $n + \sqrt{A}$, gelöst. Es ist also durch die Theilnenner der ersten Hälfte der ersten Periode.

$$\frac{x}{y} = \frac{\left(\varkappa + \frac{N'}{N}\right) M' + M}{\left(\varkappa + \frac{N'}{N}\right) N' + N} = \frac{\varkappa M'N' + M'N + MN'}{(\varkappa N' + N)\, N' + NN'}$$

$$= \frac{PN' + M'N}{N'(N+Q)}, \text{ oder da } M'N + MN' = 2MN' \pm 1,$$

$$= \frac{(\varkappa M' + M)\, N' + MN' \pm 1}{(\varkappa N' + N)\, N' + NN'} = \frac{N'(M+P) \pm 1}{N'(N+Q)}$$

Da $N'M = M'N \mp 1$

$N'P = M'Q \mp 1$

so ist: $N'(M+P) \pm 1 = M'(N+Q) \mp 1.$

Für obige Gleichung ist also, wenn sie eine Auflösung in ganzen Zahlen gestattet:

$$x = N'\,(M + P) \pm 1 = M'\,(N + Q) \pm 1\,^{*}).$$
$$y = N'\,(N + Q)$$

das $\left\{ \begin{matrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{matrix} \right\}$ Zeichen, je nachdem die Anzahl der Quotienten ohne die Ganzen, also von α bis $\varkappa$ incl. $\left\{ \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \right\}$ ist.

Da der mittelste Theilnenner eben so gut zu der einen, wie zu der andern Hälfte der Periode genommen werden kann, so steht zu erwarten, dass die Formeln noch mehr an Symmetrie gewinnen und einfacher gestaltet sein werden, wenn man ihn halbirt und die eine Hälfte zu der ersten, die andere zur zweiten Hälfte der Periode nimmt. Dann wird das obige

$$\frac{x}{y} = \frac{\varkappa M'N' + M'N + MN'}{(\varkappa N' + N)\,N' + NN'}$$
$$= \frac{\left(\frac{\varkappa}{2} M' + M\right) N' + \left(\frac{\varkappa}{2} N' + N\right) M'}{2\left(\frac{\varkappa}{2}\, N' + N\right) N'}$$
$$= \frac{N'M'' + N''M'}{2N'N''} = \frac{2N'M'' \pm 1}{2N'N''}$$

Setzt man, um bequemer mit ganzen Zahlen rechnen zu können, $\frac{\varkappa M' + 2M}{\varkappa N' + 2N} = \frac{M''}{N''}$, so wird, da $M'\left(\frac{\varkappa}{2}\, N' + N\right) - N'\left(\frac{\varkappa}{2}\, M' + M\right) = \pm 1$,

offenbar $M'\,(\varkappa N' + 2N) - N'\,(\varkappa M' + 2M) = \pm 2$,

d. h. $M'N'' - N'M'' = \pm 2$

also $M'N'' + N'M'' = 2(N'M'' \pm 1)$

$$\text{und } \frac{x}{y} = \frac{N'M'' \pm 1}{N'N''}$$

Die Zeichen wie vorhin:

$\sqrt{28} = 5;\ 3,\ (2)$; Näherungswerthe: $\frac{5}{1},\ \frac{16}{3},\ \frac{21}{4} = \frac{M''}{N''}$

$$\frac{x}{y} = \frac{6.21 + 1}{6.4} = \frac{127}{24}$$

$\sqrt{21} = 4;\ 1,\ 1,\ (2)$; Näherungswerthe: $4,\ 5,\ \frac{9}{2},\ \frac{14}{3} = \frac{M''}{N''}$

$$\frac{x}{y} = \frac{4.14 - 1}{4.3} = \frac{55}{12}$$

*) Diese Formel hat schon Tenner, doch ohne Ableitung gegeben, im Gymnasial-Programme, Merseburg 1841. Es mag hier zugleich ein Druckfehler erwähnt werden, auf den ich in der dritten Ausgabe der Théorie des nombres von Légendre, die mir allein zur Hand ist, gestossen bin. Dort steht Tome I. Table X. bei $N = 94$, $x = 2543295$ statt 2143295, wie auch der Canon Pellianus richtig hat.

$\sqrt{128} = 11;\ 3,\ (5)$; Näherungswerthe: $11,\ \frac{34}{3},\ \frac{\frac{5}{2}.34 + 11}{\frac{15}{2} + 1} = \frac{M''}{N''} = \frac{192}{17}$

$$\frac{x}{y} = \frac{6(5.17 + 11) + 1}{6(\frac{15}{2} + 1)} = \frac{577}{51} = \frac{3.192 + 1}{3.17}$$

$\sqrt{19} = 4;\ 2,\ 1,\ (3)$; Näherungswerthe: $4,\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{\frac{39}{2} + 9}{\frac{9}{2} + 2} = \frac{M''}{N''} = \frac{57}{13}$

$$\frac{x}{y} = \frac{6(\frac{39}{2} + 9) - 1}{6(\frac{9}{2} + 2)} = \frac{170}{39} = \frac{3.57 - 1}{3.13}$$

§. 12.

Da der Bruch von n bis $\frac{1}{\mu}$ mit $\frac{M'}{N'}$, sein Vorgänger mit $\frac{M}{N}$ bezeichnet ist, so ist der von $\frac{1}{\mu}$ bis $\frac{1}{n} = \frac{M}{M'}$, und der Näherungswerth bis ans Ende der ersten Periode, d. h. bis $\frac{1}{n}$:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\left(\varkappa + \frac{M}{M'}\right) M' + M}{\left(\varkappa + \frac{M}{M'}\right) N' + N} = \frac{(\varkappa M' + 2M)\, M'}{\varkappa M'N' + MN' + M'N}$$

$$= \frac{(M+P)\, M'}{QM' + MN'} = \frac{(M+P)\, M'}{PN' + NM'} = \frac{(N+Q)\, N'}{PN' + M'N} \,.\, A \ (\text{§. } 10.)$$

Durch Gleichstellung der Nenner erhält man $(P - M)\, N' = (Q - N)\, M'$.

Oben §. 11. war $\frac{x}{y} = \frac{PN' + M'N}{(N+Q)\, N'}$, daher

$$\frac{x}{y} \,.\, \frac{x'}{y'} = \frac{x'}{y} = A.$$

wie schon im §. 1. gefunden wurde.

Den Werth $\frac{x''}{y''}$ von n bis $\frac{1}{2n}$ erhält man, wenn man im §. 10. $2n$ für den Faktor $n + \sqrt{A}$ setzt, also:

$$\frac{x''}{y''} = \frac{(P + nQ)\, M' + (M' + nN')\, M}{(P + nQ)\, N' + (M' + nN')\, N} = \frac{n\,(M'Q + N'M) + (M+P)\, M'}{n\,(N+Q)\, N' + PN' + NM'}$$

$$= \frac{n\,(PN' + M'N) + (M+P)\, M'}{n\,(N+Q)\, N' + PN' + NM'} = \frac{nx + x'}{ny + y'}$$

wie sich von selbst versteht.

Wohl mit Unrecht findet man gewöhnlich $2n$ als den Schluss der Periode bezeichnet, da doch passender die zweite wieder mit $\sqrt{A}$, also mit n beginnt, so dass die erste von n bis n, die zweite wieder von n bis n geht u. s. f. Die beiden letzten Ausdrücke geben, die erste Periode bis $\frac{1}{n}$ und bis $\frac{1}{2n}$ durch die drei letzten Näherungswerthe der ersten Hälfte; der erstere, als der weit einfachere, spricht auch für diese Ansicht. Der Unterschied in der Einfachheit der Werthe für $\frac{x'}{y'}$ und $\frac{x''}{y''}$ tritt noch deutlicher hervor, wenn man die eine Hälfte des mittelsten Theilnenners $2\varkappa$ zur ersten, die zweite zur zweiten Hälfte der Periode nimmt und nun $\frac{x'}{y'}$ und $\frac{x''}{y''}$ durch die letzten Näherungswerthe der ersten Hälfte ausdrückt.

Da der Bruch von $\varkappa$ bis $\frac{1}{n} = \frac{M''}{M'}$ (§. 7.), so ist:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\left(\varkappa + \frac{M''}{M'}\right) M' + M}{\left(\varkappa + \frac{M''}{M'}\right) N' + N} = \frac{2M'N''}{M'N'' + M''N'}$$

$$= \frac{2M'M''}{2N'M' \pm 1} = \frac{2M'M''}{2M'N'' \pm 1}$$

Diesen Ausdruck, wie den für $\frac{x''}{y''}$, erhält man auch, wenn man P und Q §. 10. durch M', M'' und N', N'' ausdrückt und in vorige Werthe §. 11. substituirt. Aus dem dortigen $\frac{\varkappa}{2}\, M' + M = M''$ und $\frac{\varkappa}{2}\, N' + N = N''$ folgt aber $\varkappa M' = 2(M'' - M)$, $\varkappa N' = 2(N'' - N)$, also $P = 2M'' - M$, $Q = 2N'' - N$, $\frac{x'}{y'}$ wie vorhin, und

$$\frac{x''}{y''} = \frac{2M'(M'' + nN'') \pm n}{2N'(M'' + nN'') \pm 1}$$

oder wenn M'' und N'', für $\varkappa$ ungerade, in ganzen Zahlen ausgedrückt sind:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{M'M''}{N'M'' \pm 1} = \frac{M'M''}{M'N'' \mp 1}$$

$$\frac{x''}{y''} = \frac{M'(M'' + nN'') \mp n}{N'(M'' + nN'') \pm 1}$$

Das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, wenn $\varkappa$ ohne die Ganzen an $\left\{\begin{matrix}\text{gerader}\\ \text{ungerader}\end{matrix}\right\}$ Stelle steht.

§. 13.

Im §. 10. war $A = \frac{M'(M + P)}{N'(N + Q)} = \frac{M'M''}{N'N''}$. Da M' und N' relative Primzahlen sind, ferner $M + P = n(N + Q) + m + p$ ist, wenn man die Zähler der echten Brüche mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet, folglich $\frac{M + P}{N + Q} = n + \frac{m + p}{N + Q}$ keine ganze Zahl sein kann, so muss $\frac{M + P}{N'}$ ganz sein, $N + Q$ aber in $M'(M + P)$ oder in M' aufgehen. Ist nun:

I. $M' = N + Q = 2Q - \varkappa N' = nN' + m' = \varkappa N' + 2N$, z. B. $\sqrt{19} = 4;\ 2,\ 1,\ (3)$.

Näherungswerthe: $4,\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{48}{11};\ 13 = 2 + 11$,

so kann $\varkappa$ nur $= n$ oder $= n - 1$ sein. Wäre nämlich $\varkappa = n + x$, so müsste $nN' + m' = nN' + xN' + 2N$ sein, was nur für $x = 0$ möglich ist, da schon $N' > m'$. Die Substitution von $n - x$ für $\varkappa$ giebt $nN' + m' = nN' - xN' + 2N$ oder $xN' + m' = 2N$ d. h. in diesem Falle ist das Maximum von $x = 1$, da $N' > N$. Ist folglich A eine Primzahl, deren Quadratwurzel in der Mitte der Periode nur einen Theilnenner hat, wo also $M' = N + Q$ sein muss, so ist $\varkappa = \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix}$ je nachdem $n \begin{Bmatrix} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{Bmatrix}$ ist. Für $\varkappa = n$ ist $m' = 2N$ und für $\varkappa = n - 1$, $m' + N' = 2N$.

Aus obigen Gleichungen folgt auch

$$\varkappa = \frac{Q - N}{N'} = \frac{2Q - m'}{N'} - n \text{ (also } N' \text{ nur ungerade)}$$

$$n = \frac{2Q - m'}{N'} - \varkappa = \frac{2Q - m'}{N'} - \frac{Q - N}{N'} = \frac{Q + N - m'}{N'}$$

also

$$A = \frac{M + P}{N'} = \frac{n(N + Q) + m + p}{N'} = \frac{(N + Q - m')(N + Q) + (m + p)N'}{N'^2}$$
$$= \frac{(N + Q)^2 \pm 2}{N'^2}$$

wie schon §. 9. gefunden wurde, da $N + Q = M'$ ist.

$$AN'^2 = N^2 + Q^2 + 2NQ \pm 2$$
$$\varkappa^2 N'^2 = N^2 + Q^2 - 2NQ$$

$$\text{mithin } \frac{(A + \varkappa^2)}{2} N'^2 = N^2 + Q^2 \pm 1$$

$$\text{und } \frac{(A - \varkappa^2)}{2} N'^2 + 2NQ \pm 1$$

Da N' ungerade ist, so muss $A + \varkappa^2$ gerade sein, d. h. für ein ungerades A, also auch für A gleich einer Primzahl, kann $\varkappa$ nur ungerade sein. Ferner ist $N^2 + Q^2 \pm 1$ eine gerade Zahl, da $N + Q$ wegen $A = \frac{(N + Q)^2 + 2}{N'^2}$ ungerade, also der eine der Nenner N und Q gerade, der andere ungerade sein muss, folglich muss $A + \varkappa^2$ ein Vierfaches sein, und da $\varkappa^2$ von der Form $4t + 1$, so ist A von der Form $4t + 3$.

Für ein gerades A können N und Q beide gerade, auch beide ungerade sein. Im ersten Falle ist $N^2 + Q^2 \pm 1$ von der Form $4t \pm 1$, also muss, da N'^2 dieselbe Form hat, $A + \varkappa^2$ von der Form $8t \pm 2$ sein, d. h. $A = 8t \pm 2$ und $\varkappa = 4s$, oder $= 4s + 2$.

Im zweiten Falle ist $N^2 + Q^2 \pm 1$ von der Form $\begin{Bmatrix} 4t + 3 \\ 4t + 1 \end{Bmatrix}$, daher $A + \varkappa^2$ von der Form $\begin{Bmatrix} 8t + 6 \\ 8t + 2 \end{Bmatrix}$ d. i. wie vorhin $A + \varkappa^2 = 8t \pm 2$.

Ist also bei geraden Zahlen der mittelste Theilnenner $\varkappa = n$ oder $= n - 1$, so kann $\varkappa$ nur gerade sein, und die Zahl A muss die Form $8t + 2$ oder $8t - 2$ haben.

Die kleinste Differenz zweier Zahlen, bei denen $\varkappa = n$ oder $= n - 1$ ist, muss demnach 4 sein.

II. $N+Q$ geht in M' $(M+P)$ auf, z. B.

$\sqrt{45}=6;\ 1,\ 2,\ (2)$; Näherungswerthe: $6,\ \frac{7}{1},\ \frac{20}{3},\ \frac{47}{7}=\frac{P}{Q}$, also $A=\frac{20\,(7+47)}{3\,(1+7)}$

und $\frac{M'\,(M+P)}{N+Q}=\frac{20\,.\,54}{8}=135.$

Ist $N+Q=a\,.\,b$ und $M'=nN+m=aL$, wenn a den grössten gemeinschaftlichen Faktor zwischen $N+Q$ und M' bedeutet, so entsteht, wenn man $n=\frac{aL-m}{N'}$ substituirt:

$$A=\frac{[(aL-m)(N+Q)+(m+p)N']\,aL}{abN'^2}$$
$$=\frac{[aL(N+Q)\pm 2]\,L}{bN'^2}=\frac{a^2bL^2\pm 2L}{bN'^2}$$

Da b Faktor des ersten Summanden ist und in L nicht enthalten sein soll, denn sonst ginge $N+Q$ in M' auf, so kann b nur $=2$ sein und dann wird:

$$A=\frac{a^2L^2\pm L}{N'^2}=\frac{M'^2\pm L}{N'^2}$$
$$M'^2-AN'^2=\mp L.$$

Diese Gleichung zeigt, dass L nicht $=1$ sein kann, dass also $M'>N+Q$ sein muss, denn unmöglich können die Werthe M' und N' der Gleichung $M'^2-AN'^2=\mp 1$ Genüge leisten.

Aus $N+Q=2a$ und $Q-N=\varkappa N$ folgt

$$\varkappa^2N'^2=4a^2-4NQ \text{ und } N'^2(A-\varkappa^2)=(M'^2-4a^2)+4NQ\pm L$$
$$=4al+l^2+4NQ\pm 2\pm\frac{l}{a},$$

wenn man $M'=2a+l$ und $L=\frac{M'}{a}=2+\frac{l}{a}$ setzt.

III. Geht $N+Q$ ganz in M' auf, z. B.

$\sqrt{91}=9;\ 1,\ 1,\ 5,\ (1)$; Näherungswerthe: $9,\ 10,\ \frac{19}{2},\ \frac{105}{11},\ \frac{124}{13}$,

also $\frac{105}{2+13}=7$, dann ist $b=1$, $N+Q=a$, $\varkappa^2N'^2=a^2-4NQ$ und

$$N'^2(A-\varkappa^2)=(M'^2-a^2)+4NQ\pm 2L=a^2(L+1)(L-1)+4NQ\pm 2L.$$

In allen Fällen ist $A-\varkappa^2$ positiv, also $\varkappa^2<A$, mithin $\varkappa<\sqrt{A}$, d. h. $\varkappa\leqq n$.

§. 14.

Aus $M=N+Q$ (§. 13. I.), d. i. $nN'+m'=\varkappa N'+2N$, folgt: $(n-\varkappa)N'=2N-m'$, also für $\varkappa=n$: $2N=m'$.

Sollte nun der dem $\varkappa$ unmittelbar vorangehende Theilnenner $=1$ sein, so müsste $N'=N+N^0$, und da $N'>m'$, auch $N+N^0>m'$, also um so mehr $2N>m'$ sein, was nicht angeht. Für $\varkappa=n-1$ folgt: $N'=2N-m'$. Wäre nun der dem $\varkappa$ vorangehende Theilnenner v, so müsste $N'=vN+N^0=2N-m'$ sein, was nur für $v=1$ möglich ist. Wir haben also folgenden Satz gewonnen:

Der dem $\varkappa$ vorangehende (also auch der unmittelbar folgende) Theilnenner kann für $\varkappa=n$ nicht $=1$ sein, für $\varkappa=n-1$ dagegen muss er $=1$ sein.

§. 15.

Bezeichnet man in dem Kettenbruche

$$\sqrt{A} = n;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots \mu,\ (\varkappa,\ \varkappa)$$

die 3 letzten auf einander folgenden Näherungswerthe der ersten Hälfte der ersten Periode mit $\frac{M^0}{N^0}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N'}$, und behält sonst die Bezeichnung des §. 5. bei, so ist nach dem dort Bemerkten

$$\frac{1}{\varkappa + \text{in inf.}} = \frac{(n+\sqrt{A})\,N + m}{(n+\sqrt{A})\,N' + m'} = L,$$

folglich

$$\varkappa + L = \frac{(\varkappa N' + N)(n + \sqrt{A}) + (\varkappa M' + M)}{(n+\sqrt{A})\,N' + M'} = L'$$

und

$$\sqrt{A} = \frac{L'M + M^0}{L'N + N^0}$$

Nun ist $M^0 = M' - \varkappa M$, $N^0 = N' - \varkappa N$, also, wenn man für L', M^0, N^0 die Werthe substituirt:

$$\sqrt{A} = \frac{M^2 + M'^2 + (MN + M'N')\sqrt{A}}{(MN + M'N') + (N^2 + N'^2)\sqrt{A}}$$

Multiplicirt man mit dem Nenner, so sind die irrationalen Theile identisch, die rationalen geben:

$$A = \frac{M^2 + M'^2}{N^2 + N'^2}$$

Da weder die Zähler, noch die Nenner von zwei auf einander folgenden Näherungswerthen einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so können weder M und M', noch N und N' zugleich gerade sein, auch können, da A eine ganze Zahl ist, N und N' nicht zugleich ungerade sein, wenn das eine M gerade, das andere ungerade ist. Es entsteht also nur noch die Frage, ob zugleich beide M und beide N ungerade sein können. In diesem Falle könnte $\varkappa$ nur gerade sein, denn ein ungerades müsste Zähler und Nenner des folgenden Näherungswerthes gerade machen. Das gerade $\varkappa$ aber giebt Zähler und Nenner des folgenden Bruches ungerade und ebenso müsste, wenn M, M', N, N' ungerade werden sollten, der vorhergehende Theilnenner gerade, M^0 und N^0 aber ungerade u. s. f. alle vorhergehenden Quotienten bis zum ersten gerade, Zähler und Nenner der Näherungswerthe ungerade sein. Der erste Quotient α müsste also als solcher gerade, als Nenner N' ungerade sein. Auch sind die Zähler der beiden ersten Näherungswerthe $\frac{n}{1}$, $n + \frac{1}{\alpha} = \frac{n\alpha + 1}{\alpha}$, wäre α ungerade, $n \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$, $n\alpha + 1 \left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$. Die beiden M und die beiden N können also auch nicht zugleich ungerade sein. Von den Nennern N und N' ist also stets der eine gerade, der andere ungerade, folglich $N^2 + N'^2$ immer ungerade und für ein **gerades** A $M^2 + M'^2$ gerade, d. h. beide M ungerade, für ein **ungerades** A das eine M gerade, das andere ungerade.

Daraus, dass das eine N gerade, das andere ungerade sein muss, folgt auch, was schon §. 4. 2) gefunden wurde, dass die beiden mittelsten Quotienten, wenn die Periode gleich mit ihnen beginnt, nur gerade sein können.

§. 16.

Setzt man in $A = \frac{M^2 + M'^2}{N^2 + N'^2}$ für M und M' die Werthe $nN + m$ und $nN' + m'$, so erhält man:

$$\frac{(A-n^2)(N^2+N'^2)-(m^2+m'^2)}{2} = n(mN+m'N')$$

Ist I. $A-n^2$ gerade, so muss $m^2+m'^2$ gerade sein, und da N'^2+N^2 ungerade (von der Form $4m+1$) ist, so müssen m und m' beide ungerade sein, oder $m^2+m'^2$ von der Form $4t+2$. Sind nun

1) A und n gerade, so muss, damit auch links eine gerade Zahl herauskommt, $\frac{A-n^2}{2}$ ungerade sein, oder $A-n^2$ von der Form $4t+2$, d. h. $A=4t+2$, $n=2l$.

2) Sind A und n ungerade, dann muss $\frac{A-n^2}{2}$ gerade sein, also von der Form $4t$, d. h $A = 4t+1$, $n = 2l+1$.

Ist II. $A-n^2$ ungerade, dann muss $m^2+m'^2$ ungerade sein, also das eine m gerade, das andere ungerade, $m^2+m'^2$ von der Form $4t+1$ und $mN+m'N'$ gerade. Ist nun:

1) A gerade, n ungerade, so muss der Zähler ein Vierfaches sein, mithin $A-n^2=4t+1$ und $A = 4t+2$, $n = 2l+1$.

2) Wenn A ungerade, n gerade ist, muss wieder $A-n^2$ von der Form $4t+1$ sein, also $A = 4t+1$, $n = 2l$.

Die geraden A sind also von der Form $4t+2$, die ungeraden von der $4t+1$.

§. 17.

Heisst der vorletzte Näherungswerth der ersten Periode, also bis $\frac{1}{\alpha}$ incl., $\frac{x}{y}$, dann sind x und y die kleinsten Wurzeln der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ in ganzen Zahlen, wenn der der $\sqrt{A}$ entsprechende Kettenbruch in der Mitte zwei gleiche Theilnenner hat. Es ist dann nach voriger Bezeichnung:

$$\frac{x}{y} = \frac{\left(\varkappa + \frac{N}{N'}\right) M + M^0}{\left(\varkappa + \frac{N}{N'}\right) N + N^0}$$

und für M^0 und N^0 die Werthe $M'-\varkappa M$ und $N'-\varkappa N$ gesetzt:

$$\frac{x}{y} = \frac{MN + M'N'}{N^2 + N'^2} \text{ *)}$$

also $x = MN+M'N'$, $y = N^2+N'^2$.

*) Auch diese Formel giebt Tenner a. a. O. ohne Ableitung.

§. 18.

Da $= n + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cdot \atop \cdot + \cfrac{1}{\mu}}} = \text{n};\ \alpha,\ \beta \ldots \mu = \frac{M}{N}$ und $n;\ \alpha,\ \beta, \ldots \varkappa = \frac{M'}{N'}$,

so ist $0;\ \varkappa,\ \mu \ldots n = \frac{M}{M'}$, folglich, wenn der Näherungswerth bis $\frac{1}{n}$, d. i. bis ans Ende der ersten Periode, mit $\frac{x'}{y'}$ bezeichnet wird:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\left(\varkappa + \frac{M}{M'}\right) M + M^0}{\left(\varkappa + \frac{M}{M'}\right) N + N^0} = \frac{M^2 + M'^2}{MN + M'N'} = \frac{N^2 + N'^2}{MN + M'N'} \cdot A.$$

$$\text{und } \frac{x}{y} \cdot \frac{x'}{y'} = \frac{x'}{y} = A$$

wie schon §. 1. allgemein und §. 12. auch für den Fall gefunden wurde, dass die Periode in der Mitte nur einen Theilnenner hat.

Den Näherungswerth $\frac{x''}{y''}$ bis $\frac{1}{2u}$ findet man auch hier wie §. 12. offenbar sogleich aus den beiden $\frac{x}{y}$ und $\frac{x'}{y'}$, nämlich $\frac{x''}{y''} = \frac{nx + x'}{ny + y'}$. Ohne vorher diese Werthe berechnet zu haben, verfährt man auf ähnliche Weise wie vorhin.

$$0;\ \varkappa,\ \mu \ldots 2n = \frac{2nN' + m}{2nN + m'} = L, \text{ also}$$

$$\frac{x''}{y''} = \frac{(\varkappa + L)\, M + M^0}{(\varkappa + L)\, N + N^0}$$

Substituirt man für L obigen Werth und setzt für M^0, N^0, m, m' die resp. Werthe $M' - \varkappa M$, $N' - \varkappa N$, $M - nN$, $M' - nN'$, so erhält man wie oben:

$$\frac{x''}{y''} = \frac{n\,(MN + M'N') + M^2 + M'^2}{n\,(N^2 + N'^2) + (MN + M'N')}$$

Es mögen noch von zwei Sätzen Beweise folgen, die mir kürzer und übersichtlicher scheinen, als die gewöhnlichen.

§. 19.

Die Differenz zwischen dem ganzen Werthe x eines Kettenbruches und einem seiner Näherungswerthe $\frac{M}{N}$ ist, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen $< \frac{1}{N^2}$

Heisst der auf $\frac{M}{N}$ folgende Näherungswerth $\frac{M'}{N'}$, dann ist:

$$\frac{M}{N} = x \pm d$$
$$\frac{M'}{N'} = x \mp d'$$

also
$$\frac{M}{N} - \frac{M'}{N'} = \frac{\pm 1}{NN'} = \pm (d + d')$$

folglich d, d. i. $\frac{M}{N} - x < \frac{1}{NN'}$ und, da $N < N'$, um so mehr:
$$\frac{M}{N} - x < \frac{1}{N^2}.$$

§. 20.

Der Näherungswerth $\frac{M}{N}$ kommt dem ganzen Werthe x eines Kettenbruches näher als irgend ein anderer Bruch $\frac{m}{n}$, wenn $n < N$.

Nach §. 19. ist $\frac{M}{N} - \frac{M'}{N'} = \pm \frac{1}{NN'} = \pm (d + d')$

und wenn $\frac{m}{n} = x \pm \delta$, oder $= x \mp \delta$: $\frac{m}{n} - \frac{M'}{N'} = \frac{mN' - nM'}{nN'} = \pm (\delta + d')$

oder $= \mp (\delta - d')$

Offenbar ist aber $mN' - nM' \overline{\overline{>}} 1$ und, wegen $n < N, nN' < NN'$, also $\frac{mN' - nM'}{nN'} > \frac{1}{NN'}$ folglich, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, $\delta + d'$, so wie $\delta' - d' > d + d'$, d. h. $\delta > d$.

J. F. Koenig.

Druckfehler.

Es mus heissen:

Seite 1 Zeile 10. mittelsten oder die beiden mittelsten.
„ 3 „ 3 v. u. $(m^2 v^2 + 2)$.
„ 3 „ 2. $2mv$.
„ 4 „ 5. $u =$; Z. 11: $n = ap + q$; Z. 13: ganze Zahl.
„ 5 „ 1. §. 3; Z. 7 v. u.: $(c(ab + 1) + a)^2$ für $(abc + a + c + a)^2$.
„ — „ 6. v. u.: $(b^2 + (bc + 1)^2)^2$.
„ 6 „ 3. $(a^2 + (a^2 + 1)^2)^2$.
„ 7 „ 8. der; Z. 14: 0; α, β . . . und $\frac{8'}{8}$.
„ 9 „ 11 v. u. $\varkappa$.
„ 11 „ 9. 3 . 25.
„ 13 „ 1. $\mp$ *).
„ 15 „ 5. $2M'N'' \mp 1$; Z. 8: folgt; Z. 10: $\mp n$; Z. 11: sind für wird.