I.

Zerlegung der Gleichung $x^2 - fgy^2 = \pm 1$ in Faktoren.

§. 1.

Herr Prof. Jacobi theilte mir einmal gelegentlich mit, dass, wenn a, b, c, d noch zu bestimmende Zahlen bedeuten, die Gleichung $\mathbf{x^2 - fgy^2 = 1}$ sich in die Faktoren:

$$\begin{aligned}
a + b\sqrt{f} + c\sqrt{g} + d\sqrt{fg} &= A \\
a - b\sqrt{f} - c\sqrt{g} + d\sqrt{fg} &= B \\
a + b\sqrt{f} - c\sqrt{g} - d\sqrt{fg} &= C \\
a - b\sqrt{f} + c\sqrt{g} - d\sqrt{fg} &= D
\end{aligned}$$

zerlegen lasse. Es ist alsdann:

$$\text{I.}\begin{cases} A.B = (a^2 - fb^2 - gc^2 + fgd^2) + 2(ad - bc)\sqrt{fg} \\ C.D = (a^2 - fb^2 - gc^2 + fgd^2) - 2(ad - bc)\sqrt{fg} \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} A.C = (a^2 + fb^2 - gc^2 - fgd^2) + 2(ab - gcd)\sqrt{f} \\ B.D = (a^2 + fb^2 - gc^2 - fgd^2) - 2(ab - gcd)\sqrt{f} \end{cases}$$

$$\text{III.}\begin{cases} A.D = (a^2 - fb^2 + gc^2 - fgd^2) + 2(ac - fbd)\sqrt{g} \\ B.C = (a^2 - fb^2 + gc^2 - fgd^2) - 2(ac - fbd)\sqrt{g} \end{cases}$$

und wenn man

$$\begin{aligned}
&1)\quad a^2 - fb^2 - gc^2 + fgd^2 = \pm m, &\quad 2(ad - bc) &= \pm n \\
&2)\quad a^2 + fb^2 - gc^2 - fgd^2 = \pm m', &\quad 2(ab - gcd) &= \pm n' \\
&3)\quad a^2 - fb^2 + gc^2 - fgd^2 = \pm m'', &\quad 2(ac - fbd) &= \pm n''
\end{aligned}$$

setzt:

$$
\begin{array}{llcl}
\text{aus I.} & A.B.C.D = m^2 - fgn^2 = 1 & & \\
\text{„ II.} & A.C.B.D = m'^2 - fn'^2 = 1 & & (A) \\
\text{„ III.} & A.D.B.C = m''^2 - gn''^2 = 1 & &
\end{array}
$$

Sucht man hieraus m, m′, m″, so hat man zur Bestimmung der Unbekannten a, b, c, d

$$\text{aus } 1)+2) \quad a^2 - gc^2 = \pm \frac{m+m'}{2}$$

$$\text{„ } 2)+3) \quad a^2 - fb^2 = \pm \frac{m+m''}{2}$$

$$\text{„ } 2)+3) \quad a^2 - fgd^2 = \pm \frac{m'+m''}{2}$$

Aus diesen Gleichungen wünschte Herr Prof. Jacobi für a, b, c, d, wofür er damals allgemeine Formeln nicht kannte *), einige Werthe durch Versuchen berechnet zu erhalten. Wenn man auch sieht, dass die n nur gerade, die m also nur ungerade Zahlen sein können, so ist doch dem Rathen, besonders wegen der verschiedenen Zeichen, welche die m annehmen können, zu grosser Spielraum gelassen, und da die Aufgabe auch an sich nicht ohne Interesse schien, so versuchte ich für die unbekannten Grössen allgemeine Ausdrücke aufzustellen und fand folgende Lösungen.

§. 2.

Erste Auflösung.

Setzt man

$$4) \quad a^2 + fb^2 + gc^2 + fgd^2 = z$$

und nimmt die m der Einfachheit wegen vorläufig positiv an, so erhält man durch Vevbindung der Gleichungen 1) bis 4)

$$
\begin{array}{lll}
4a^2 & = m + m' + m'' + z & \\
4fb^2 & = -m + m' - m'' + z = 4a^2 - 2(m+m'') & \\
4gc^2 & = -m - m' + m'' + z = 4a^2 - 2(m+m') & \quad (B) \\
4fgd^2 & = m - m' - m'' + z = 4a^2 - 2(m'+m''), &
\end{array}
$$

hat also nur z zu suchen, da die m aus den obigen drei Pellschen Gleichungen (A) gefunden werden können. Nun ist:

*) Später, nachdem ich Herrn Jacobi meine Formeln mitgetheilt hatte, muss er sich eigene entwickelt haben, denn er schrieb mir: „Meine Formeln unterscheiden sich von den Ihrigen dadurch, dass a, b, c, d auch Halbe und bisweilen Viertel werden.“ Nach den meinigen findet man für a, b, c, d immer ganze Zahlen.

$$\begin{array}{rl}
A.B.C.D = 1 = & a^4 + f^2b^4 + g^2c^4 + f^2g^2d^4 - 2fa^2b^2 - 2ga^2c^2 - 2fga^2d^2 - 2fgb^2c^2 - 2f^2gb^2d^2 - 2g^2fc^2d^2 + 8fgabcd \\
z^2 = & a^4 + \;.\; + \;.\; + \;.\; + \;.\; + \;.\; + \;.\; + \;.\; + \;.\; + 2g^2fc^2d^2 \\
m^2 = & a^4 + \;.\; + \;.\; + \;.\; - \;.\; - \;.\; + \;.\; + \;.\; - \;.\; - 2g^2fc^2d^2 \\
m'^2 = & a^4 + \;.\; + \;.\; + \;.\; + \;.\; - \;.\; - \;.\; - \;.\; - \;.\; + 2g^2fc^2d^2 \\
m''^2 = & a^4 + \;.\; + \;.\; + \;.\; - \;.\; + \;.\; - \;.\; - \;.\; + \;.\; - 2g^2fc^2d^2
\end{array}$$

oder wenn man

$$\begin{aligned}
a^4 + fb^4 + g^2c^4 + f^2g^2d^4 &= \alpha \\
ga^2c^2 + gf^2b^2d^2 &= \beta \\
fa^2b^2 + fg^2c^2d^2 &= \gamma \\
fga^2d^2 + fgb^2c^2 &= \delta
\end{aligned}$$

setzt:

$$\begin{aligned}
A.B.C.D = 1 &= \alpha - 2(\beta + \gamma + \delta) + 8fgabcd \\
z^2 &= \alpha + 2(\beta + \gamma + \delta) \\
m^2 &= \alpha + 2(-\beta - \gamma + \delta) \\
m'^2 &= \alpha + 2(-\beta + \gamma - \delta) \\
m''^2 &= \alpha + 2(\beta - \gamma - \delta)
\end{aligned}$$

also $\quad 2.A.B.C.D + z^2 - (m^2 + m'^2 + m''^2) = 16fgabcd$

d. h. $\quad z^2 - (m^2 + m'^2 + m''^2) + 2 = \mathbf{16fg\,.\,abcd}$

Es ist aber auch:

$$\begin{aligned}
mz &= a^4 - f^2b^4 - g^2c^4 + f^2g^2d^4 + 2fg(a^2d^2 - b^2c^2) \\
&= \alpha \; - 2(f^2b^4 + g^2c^4) + 2fg(a^2d^2 - b^2c^2) \\
m'm'' &= \alpha \; - 2(f^2b^4 + g^2c^4) - 2fg(a^2d^2 - b^2c^2)
\end{aligned}$$

also $\quad mm'm''z = \left\{\alpha - 2(f^2b^4 + g^2c^4)\right\}^2 - 4f^2g^2(a^2d^2 - b^2c^2)^2$

und $\quad 2mm'm''z = 2\alpha^2 - 8(f^2b^4 + g^2c^4)\alpha + 8(f^2b^4 + g^2c^4)^2 - 8f^2g^2(a^2d^2 - b^2c^2)^2$

ferner $\quad (A.B.C.D)^2 = 1 = \left\{\alpha - 2(\beta + \gamma + \delta) + 8fgabcd\right\}^2$

$$= \alpha^2 - 4(\beta+\gamma+\delta)\alpha + 4(\beta^2+\gamma^2+\delta^2) + 8(\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta) + 64f^2g^2a^2b^2c^2d^2 + 16fgabcd\left\{\alpha - 2(\beta+\gamma+\delta)\right\}$$

$$\begin{aligned}
m^2m'^2 &= (\alpha - 2\beta)^2 - 4(\gamma - \delta)^2 \\
m^2m''^2 &= (\alpha - 2\gamma)^2 - 4(\beta - \delta)^2 \\
m'^2m''^2 &= (\alpha - 2\delta)^2 - 4(\beta - \gamma)^2
\end{aligned}$$

d. h. $\quad m^2m'^2 + m^2m''^2 + m'^2m''^2 = 3\alpha^2 - 4(\beta + \gamma + \delta)\,\alpha - 4(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 8(\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)$

folglich:

$$\begin{aligned}
2mm'm''z + 1 - (m^2m'^2 + m^2m''^2 + m'^2m''^2) = \; & 8(\beta^2+\gamma^2+\delta^2) - 8(f^2b^4+g^2c^4)\alpha + 8(f^2b^4+g^2c^4)^2 \\
& - 8f^2g^2(a^2d^2 - b^2c^2)^2 + 64f^2g^2a^2b^2c^2d^2 \\
& + 16fgabcd\left\{\alpha - 2(\beta + \gamma + \delta)\right\}
\end{aligned}$$

Lässt man $\left\{\alpha - 2(\beta + \gamma + \delta)\right\}$ ungeändert, löst die andern Parenthesen auf und setzt für $\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ und für α die Werthe, so erhält man:

$$2mm'm''z + 1 - (m^2m'^2 + m^2m''^2 + m'^2m''^2) = 16fg\,.\,abcd\left\{\alpha - 2(\beta + \gamma + \delta) + 8fgabcd\right\}$$
$$= \mathbf{16fg\,.\,abcd}$$

Die beiden gefundenen Ausdrücke für 16fgabcd gleich gesetzt geben:

$$z^2 - (m^2 + m'^2 + m''^2) + 2 = 2mm'm''z - (m^2m'^2 + m^2m''^2 + m'^2m''^2) + 1$$

woraus $z = mm'm'' \pm \sqrt{(m^2 - 1)(m'^2 - 1)(m''^2 - 1)}$

$= mm'm'' \pm fgnn'n''$

also $4a^2 = m + m' + m'' + mm'm'' \pm \sqrt{(m^2 - 1)(m'^2 - 1)(m''^2 - 1)}$.

§. 3.

Zweite Auflösung.

Dasselbe Resultat erhält man weit einfacher auf folgende Weise. Es ist:

$$4a = A + B + C + D$$

also $16a^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2(A.B + A.C + A.D + B.C + B.D + C.D)$,

oder da $A^2 = A.C \times A.D \times A.B$, $B^2 = B.D \times B.C \times A.B$, $C^2 = A.C \times B.C \times C.D$

$D^2 = A.D \times B.D \times C.D$:

$$16a^2 = A.C(A.B \times A.D + C.D \times B.C) + B.D(A.B \times B.C + A.D \times C.D)$$
$$+ 2(A.B + A.C + A.D + B.C + B.D + C.D).$$

Nun ist aber $A.B + C.D = 2m$

$A.B - C.D = \pm 2n\sqrt{fg} = \pm 2\sqrt{m^2 - 1}$

also $A.B = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$, $C.D = m \mp \sqrt{m^2 - 1}$

eben so $A.C = m' \pm \sqrt{m'^2 - 1}$, $B.D = m' \mp \sqrt{m'^2 - 1}$

$A.D = m'' \pm \sqrt{m''^2 - 1}$, $B.C = m'' \mp \sqrt{m''^2 - 1}$

welche Werthe in $16a^2$ substituirt obigen Ausdruck für $4a^2$ geben. Durch dieselbe Rechnung kann man b, c, d finden, da $4b\sqrt{f} = A + C - B - D$, $4c\sqrt{g} = A + D - B - C$, $4d\sqrt{fg} = A + B - C - D$, aber, nachdem man a gefunden, bequemer aus den Gleichungen (B) des §. 2.

§. 4.

Die gefundenen Ausdrücke für $4a^2$ u. s. w. lassen sich unter eine bequemere Form bringen. Da nämlich:

$$m+m'+m''+mm'm''=\frac{(m+1)(m'+1)(m''+1)}{2}+\frac{m-1.m'-1.m''-1}{2}$$

$$-m+m'-m''+mm'm''=\frac{m+1.m'-1.m''+1}{2}+\frac{m-1.m'+1.m''-1}{2}$$

$$-m-m'+m''+mm'm''=\frac{m+1.m'+1.m''-1}{2}+\frac{m-1.m'-1.m''+1}{2}$$

$$m-m'-m''+mm'm''=\frac{m-1.m'+1.m''+1}{2}+\frac{m+1.m'-1.m''-1}{2}$$

so erhält man:

$$a^2=\frac{m+1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m''+1}{2}+\frac{m-1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''-1}{2}\pm 2\sqrt{\frac{m+1}{2}.\frac{m-1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''+1}{2}.\frac{m''-1}{2}}$$

$$fb^2=\frac{m+1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''+1}{2}+\frac{m-1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m''-1}{2}\pm 2\sqrt{\frac{m+1}{2}.\frac{m-1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''+1}{2}.\frac{m''-1}{2}}$$

$$gc^2=\frac{m+1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m''-1}{2}+\frac{m-1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''+1}{2}\pm 2\sqrt{\frac{m+1}{2}.\frac{m-1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''+1}{2}.\frac{m''-1}{2}}$$

$$fgd^2=\frac{m-1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m''+1}{2}+\frac{m+1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''-1}{2}\pm 2\sqrt{\frac{m+1}{2}.\frac{m-1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''+1}{2}.\frac{m''-1}{2}}$$

also

$$a=\pm\sqrt{\frac{m+1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m''+1}{2}}\pm\sqrt{\frac{m-1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''-1}{2}}$$

$$b=\pm\sqrt{\frac{1}{f}.\frac{m+1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''+1}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{f}.\frac{m-1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m''-1}{2}}$$

$$c=\pm\sqrt{\frac{1}{g}.\frac{m+1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m''-1}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{g}.\frac{m-1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''+1}{2}}$$

$$d=\pm\sqrt{\frac{1}{fg}.\frac{m-1}{2}.\frac{m'+1}{2}.\frac{m''+1}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{fg}.\frac{m+1}{2}.\frac{m'-1}{2}.\frac{m''-1}{2}}$$

Jeder Werth von m, m', m'' gibt also für jede der Grössen a, b, c, d 4 Werthe und zwar zwei positive und zwei negative, welche letztere, da sie nur die Zeichen von sämmtlichen 4 Faktoren A, B, C, D ändern, fortbleiben können; d. h. man kann die negativen Zeichen vor den erstern oder zweiten Gliedern weglassen. Zwei positive und zwei negative würden die Faktoren nicht ändern, sondern entweder nur vertauschen, oder, wenn a unter den negativen, vertauschen und zugleich die Zeichen ändern. Drei positive Grössen und eine negative, oder drei negative und eine positive können nicht zusammengehören, indem dadurch die absoluten Werthe der n, also auch der n^2, geändert werden, während die der m^2 für jede willkürliche Verbindung der Zeichen von a, b, c, d sich gleich bleiben, was gegen die drei Pellschen Gleichungen (A) streitet. Will man also bloss die kleinern Werthe von a, b, c, d haben (wahrscheinlich auch die kleinsten vergl. §. 5.), so kann man auch vor einem der Glieder das positive Zeichen fortlassen, wo dann die sich etwa ergebenden negativen Zahlen positiv zu nehmen sind. Setzt man noch der Kürze wegen $m+1 = 2v$, $m'+1 = 2v'$, $m''+1 = 2v''$, also $m-1 = 2(v-1)$, $m'-1 = 2(v'-1)$, $m''-1 = 2(v''-1)$, so erhalten die letzten Ausdrücke folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
a &= \sqrt{v.v'.v''} - \sqrt{(v-1)(v'-1)(v''-1)} \\
b &= \sqrt{\frac{v.(v'-1)v''}{f}} - \sqrt{\frac{(v-1)\,v'\,(v''-1)}{f}} \\
c &= \sqrt{\frac{v.v'.(v''-1)}{g}} - \sqrt{\frac{(v-1)\,(v'-1)v''}{g}} \\
d &= \sqrt{\frac{(v-1)\,v'.v''}{fg}} - \sqrt{\frac{v.(v'-1)\,(v''-1)}{fg}}
\end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Da $f = \frac{m'^2-1}{n'^2} = \frac{4v'(v'-1)}{n'^2}$, $g = \frac{m''^2-1}{n''^2} = \frac{4v''(v''-1)}{n''^2}$, $fg = \frac{m^2-1}{n^2} = \frac{4v.(v-1)}{n^2}$,

so ist auch:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{vv'v''} - \sqrt{(v-1)(v'-1)(v''-1)} \\
b &= \frac{n'}{2}\left\{\sqrt{\frac{v.v''}{v'}} - \sqrt{\frac{(v-1)\,(v''-1)}{v'-1}}\right\} \\
c &= \frac{n''}{2}\left\{\sqrt{\frac{v.v'}{v''}} - \sqrt{\frac{(v-1)\,(v'-1)}{v''-1}}\right\} \\
d &= \frac{n}{2}\left\{\sqrt{\frac{v'.v''}{v}} - \sqrt{\frac{(v'-1)\,(v''-1)}{v-1}}\right\}
\end{aligned}$$

Anm. 1. Der Ausdruck für a gibt auch die Lösung folgender Aufgabe:

Drei Zahlen zu suchen, so dass sowohl ihr Produkt, wie auch das der um 1 kleinern (oder grössern) Zahlen vollständige Quadrate werden, z. B.

$$2.5.10 = 10^2,\quad 2.8.64 = 23^2,\quad 4.-11.-99 = 66^2$$
$$1.4.\;9 = 6^2,\quad 1.7.63 = 21^2,\quad 3.-12.-100 = 60^2$$

Diese drei Zahlen und die um 1 kleinern (oder grössern) haben auch, wie die letzten Ausdrücke für b, c, d zeigen, die Eigenschaft, dass das Produkt je zweier durch die dritte ein vollständiges Quadrat ist.

2. Die Ausdrücke für b, c, d der Gleichungen (C) lösen die Aufgabe:

Drei Zahlen zu suchen, die so beschaffen sind, dass ihr Produkt und auch das der Zahlen, die man erhält, wenn man die eine derselben um 1 verkleinert (oder vergrössert), die beiden andern um 1 vergrössert (oder verkleinert) gleich (und zwar gegebene) Vielfache von Quadraten werden, z. B.

$$2.4.\;9 = 2.6^2,\quad 1.5.\;9 = 5.3^2,\quad 4.-12.-99 = 33.12^2$$
$$1.5.10 = 2.5^2\quad 2.4.10 = 5.4^2\quad 3.-11.-100 = 33.10^2$$

§. 5.

Dass für einen rationalen oder irrationalen Werth einer der Grössen a, b, c, d auch die übrigen resp. rational oder irrational sein müssen, ergibt sich aus den Ausdrücken für die n (§. 1.); welche aber von den acht möglichen Zeichenverbindungen der m rationale Werthe gibt, ja ob überhaupt immer rationale möglich sein werden, ist noch unentschieden. Die Zeichen der m anlangend sieht man, dass, da $z = a^2 + fb^2 + gc^2 + fgd^2$ positiv sein muss und in $z = mm'm'' \pm \sqrt{(m^2-1)(m'^2-1)(m''^2-1)}$ die Wurzelgrösse kleiner als $mm'm''$ ist, $mm'm''$ nur positiv sein kann, d. h. die m müssen alle positiv sein, oder das eine positiv die beiden andern negativ.

Da es allgemein schwer zu entscheiden sein dürfte, welche der vier allein statthaften Zeichenverbindungen der m die rationalen a, b, c, d geben werde, so beginne man, um die kleinsten Werthe zu erhalten, die Rechnung nach den Formeln (C) am bequemsten mit den positiven m und sehe zu, falls a irrational wird, ob $\frac{vv'v''}{f}$, oder $\frac{vv'v''}{g}$, oder $\frac{vv'v''}{fg}$ ein vollständiges Quadrat ist, wo dann im ersten Falle b, im zweiten c, im dritten d rational gefunden wird, und im ersten Falle m und m'', im zweiten m und m', im dritten m' und m'' negativ zu nehmen sind. Der blosse Anblick der Ausdrücke (B) überzeugt von der Richtigkeit dieses Verfahrens. So geben z. B. für $f = 3$, $g = 5$ die positiven m, nämlich $m = 31$, $m' = 7$, $m'' = 9$, $v.v'.v'' = 16.4.5$, also $\frac{v.v'.v''}{g} = 16.4$ und $c = \sqrt{16.4} - \sqrt{\frac{15.3.4}{5}} = 2$, folglich geben $m = -31$, $m' = -7$, $m'' = 9$ die rationalen Werthe. Dass aber solche immer vorhanden sind zeigt entschieden die rationale Form, welche die allgemeinen Ausdrücke annehmen, wenn man im Kettenbruche bis ans Ende der zweiten Periode geht, d. h. wenn man $2m^2-1$, $2m'^2-1$, $2m''^2-1$ statt m, m', m'', also m^2, m'^2, m''^2 statt v, v', v'' setzt und noch fgn^2, fn'^2, gn''^2 für m^2-1, m'^2-1, m''^2-1 schreibt. Dadurch wird, wenn man die entsprechenden Buchstaben mit Accenten versieht:

$$\left.\begin{aligned} a' &= mm'm'' - fgnn'n'' \\ b' &= mm''n' - gm'nn'' \\ c' &= mm'n'' - fm''nn' \\ d' &= m'm''n - mn'n'' \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

Da hier alle nur statthaften Zeichenverbindungen dasselbe Produkt $mm'm''$, also auch dasselbe a', und eben so dieselben absoluten Werthe (und auf die kommt es, wie schon erwähnt, allein an) von b', c', d' geben, so hört alles Probiren auf; die positiven Werthe der m und n aus den drei Pellschen Gleichungen (A) geben also, ohne dass die n gerade, folglich die m ungerade zu sein brauchen, für unsere Aufgabe nach diesen Formeln immer eine Auflösung in rationalen Zahlen und, da die m und n ganz sind, auch in **ganzen** Zahlen. So ist für $f = 2$, $g = 3$, wenn $m = 5$, $m' = 3$, $m'' = 2$, $n = 2$, $n' = 2$, $n'' = 1$,

$$a' = 6,\ b' = 2,\ c' = 1,\ d' = 2,$$

und wenn $m = 5$, $m' = 3$, $m'' = 7$, $n = 2$, $n' = 2$, $n'' = 4$,

$$a' = 9,\ b' = 2,\ c' = 4,\ d' = 2,$$

für jede der vier zulässigen Zeichenverbindungen der m, während die ersten Formeln nur für $m = 5$, $m' = -3$, $m'' = -7$ rationale Werthe geben, nämlich:

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 0,\ d = 1,$$
$$\text{oder}\quad a = 7,\ b = 5,\ c = 4,\ d = 3,$$

wenn man beide Wurzeln positiv nimmt.

§. 6.

Nach den Formeln (C) und (D) ist Tafel I. berechnet. Bei zusammengesetzten f und g ergeben sich die a, b, c, d öfters sehr einfach aus denen für die einfachen. Ist z. B. $g = f \cdot g'$ und man setzt

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \beta\sqrt{f} + \gamma\sqrt{fg'} + \delta\sqrt{f^2g'} \\ &= \alpha + \beta\sqrt{f} + \delta f\sqrt{g'} + \gamma\sqrt{fg'} \end{aligned}$$

so wird man, da für f und g'

$$A = a + b\sqrt{f} + c\sqrt{g'} + d\sqrt{fg'}$$

ist, genügende Werthe für α, β, γ, δ erhalten, wenn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = d$, $\delta = \frac{c}{f}$, und wenn $f > g'$: $\alpha = a$, $\beta = c$, $\gamma = d$, $\delta = \frac{b}{f}$.

Wenn $g = q^2g'$ ist, so wird

$$A = \alpha + \beta\sqrt{f} + \gamma q\sqrt{g'} + \delta q\sqrt{fg'}$$

also $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = \frac{c}{q}$, $\delta = \frac{d}{q}$, und wenn $f > g'$, auch b und c vertauscht.

Für $f = p^2f'$, $g = q^2g'$ wird: $\alpha = a$, $\beta = \frac{b}{p}$, $\gamma = \frac{c}{q}$, $\delta = \frac{d}{pq}$, wo wieder b und c zu vertauschen sind, wenn $f' > g'$.

In diesen Fällen enthält die Tafel nur dann die Zahlen, wenn die Division Brüche geben würde.

Dass übrigens für dieselben m immer $a' > a$, $b' > b$, $c' > c$, $d' > d$ sein muss, wenn man a, b, c, d nach den Formeln (C) berechnet, in denen nur eine Wurzel positiv, die andere negativ ist, ergibt sich leicht auf folgende Weise. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} a' &= mm'm'' - fgnn'n'' \\ &= z = a^2 + fb^2 + gc^2 + fgd^2 > a \quad (\text{§. 2.}). \end{aligned}$$

Quadrirt man den Ausdruck für b' und setzt für die n^2 die Werthe durch die m aus den drei Pellschen Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} fb'^2 &= 2mm'm''(mm'm'' - fgnn'n'') + m'^2(m^2-1)(m''^2-1) - m^2m'^2m''^2 - m^2m''^2 \\ &= 2mm'm''.z - (m^2m'^2 + m^2m''^2 + m'^2m''^2) + m'^2 \\ &= 16fgabcd - 1 + m'^2 \quad (\S.\ 2.) \\ &= 16fgabcd + fn'^2 \end{aligned}$$

also $b'^2 = 16gabcd + n'^2$

und danach §. 1. $n' = 2(ab - gcd)$, so ist:

$$\begin{aligned} b'^2 &= 8gabcd + 4a^2b^2 + 4g^2c^2d^2 \\ &= 4(ab + gcd)^2 \end{aligned}$$

endlich $b' = 2(ab + gcd) > b$.

Durch dieselbe Rechnung findet man aus den beiden letzten Ausdrücken für c' und d':

$$c' = 2\,(ac + fbd) > c$$
$$d' = 2\,(ad + bc) > d$$

Aus dieser Relation zwischen den aus denselben m erhaltenen gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben folgt auch sehr einfach, dass, wenn man die sich aus a', b', c', d' ergebenden, den Faktoren A, B, C, D entsprechenden Faktoren mit A', B', C', D' bezeichnet, $A' = A^2$, $B' = B^2$, $C' = C^2$, $D' = D^2$ ist; nämlich:

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{f} + c\sqrt{g} + d\sqrt{fg})^2 &= (a^2 + fb^2 + gc^2 + fgd^2) + 2(ab + cdg)\sqrt{f} \\ &\quad + 2(ac + bdf)\sqrt{g} + 2(ad + bc)\sqrt{fg} \\ &= a' + b'\sqrt{f} + c'\sqrt{g} + d'\sqrt{fg}. \end{aligned}$$

d. h. $A^2 = A'$.

Für $f = 2$, $g = 3$ hatten wir eben, wenn $m = 5$, $m' = -3$, $m'' = -7$:

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 0,\ d = 1;\quad a' = 9,\ b' = 2,\ c' = 4,\ d' = 2$$

und in der That ist:

$$9 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6} = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{6})^2.$$

§. 7.

Die letzten Formeln sind besonders dann bequem, wenn die kleinsten Werthe der m die drei Gleichungen $m^2 - fgn^2 = -1$ u. s. w. lösen. In diesem Falle nämlich muss man bekanntlich $2m^2 + 1$ für m und $2mn$ für n setzen, um die Gleichung $m^2 - fgn^2 = +1$ zu lösen und dann noch untersuchen, welche Zeichen den m zu geben sind, um nach den Formeln (C) rationale a, b, c, d zu erhalten, während die den Gleichungen $m^2 - fgn^2 = -1$ u. s. w. genügenden Werthe geradezu in die letzten Formeln gesetzt $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, $d' = d$ rational geben. Denn hat man

$$M^2 - fgN^2 = -1$$

so ist

$$(2M^2 + 1)^2 - fg(2MN)^2 = +1$$

d. h. $$m^2 - fg\,n^2 = 1$$

folglich $$M = \sqrt{\frac{m-1}{2}}, \quad N = \frac{n}{M} = \sqrt{\frac{m+1}{2fg}}$$

eben so $$M' = \sqrt{\frac{m'-1}{2}}, \quad N' = \sqrt{\frac{m'+1}{2f}}$$

$$M'' = \sqrt{\frac{m''-1}{2}}, \quad N'' = \sqrt{\frac{m''+1}{2g}}$$

endlich
$$\begin{aligned} a' &= M\,.\,M'\,.\,M'' - fg\,N\,.\,N'\,.\,N'' \\ &= \sqrt{\frac{m-1}{2}\,.\,\frac{m'-1}{2}\,.\,\frac{m''-1}{2}} - \sqrt{\frac{m+1}{2}\,.\,\frac{m'+1}{2}\,.\,\frac{m''+1}{2}} \\ &= a. \end{aligned}$$

Ist z. B. 1) $f = u^2 + 1$, $g = (u+x)^2 + 1$, so wird
$$\begin{aligned} fg &= (u^2 + ux + 1)^2 + x^2, \\ &= u^2(u+x)^2 + 2u\,(u+x) + x^2 + 1 \end{aligned}$$
und aus jedem dieser Ausdrücke für fg folgt, dass, wenn fg von derselben Form $u'^2 + 1$ werden soll, $x = 1$ sein muss. Nun hat man für $f = u^2 + 1$, $g = (u+1)^2 + 1$, $f.g = \{u\,(u+1) + 1\}^2 + 1$: $m = u(u+1) + 1$, $m' = u$, $m'' = u + 1$, $n = n' = n'' = 1$, mithin, diese Werthe in (D) substituirt:
$$a' = u(u+1) + 2 = m + 1 = 1 + \sqrt{fg - 1}$$
$$b' = 1, \quad c' = 1, \quad d' = 1.$$
Für $f = 2$, $g = 5$ ist hier $u = 1$, oder $m = 3$ zu setzen; oder in die Formeln (D) $m = 3$, $m' = 1$, $m'' = 2$, $n = n' = n'' = 1$; in die (C) $m = 2.3^2 + 1 = 19$, $m' = 2.1^2 + 1 = 3$, $m'' = 2.2^2 + 1 = 9$; alle geben:
$$a' = 4, \quad b' = 1, \quad c' = 1, \quad d' = 1.$$

Ist 2) $f = u^2 + 1$, $g = (xu)^2 + 1$, so hat man $fg = u^2(x^2u^2 + x^2 + 1) + 1$, folglich muss, damit $(x^2u^2 + x^2 + 1) = (xu + 1)^2$ werde, $x = 2u$ sein, also ist für $f = u^2 + 1$, $g = (2u^2)^2 + 1$, $f.g = \{u\,(2u^2 + 1)\}^2 + 1$: $m = u(2u^2 + 1)$, $m' = u$, $m'' = 2u^2$, $n = n' = n'' = 1$, und wenn man diese Werthe in (D) setzt und gleich wie vorhin die positiven Grössen nimmt:
$$\begin{aligned} a' &= mu + 1 &&= mm' + 1 = 1 + m'\sqrt{fg - 1} \\ b' &= m - 2u &&= m - 2m' = -2m' + \sqrt{fg - 1} \\ c' &= u^2 &&= m'^2 \\ d' &= u &&= m' \end{aligned}$$
$u = 1$ gibt das vorige Zahlenbeispiel und dieselben Resultate.

$u = 2$ gibt $f = 5$, $g = 65$, $fg = 325 = 18^2 + 1$, also $m = 18$ und
$$a' = 37, \quad b' = 14, \quad c' = 4, \quad d' = 2.$$

§. 8.

Wenn im §. 5. gezeigt ist, dass nach den letzten Formeln (D) jede der vier hier allein möglichen Zeichenverbindungen der m dieselben a', b', c', d' und zwar rational gibt, so entsteht die Frage, ob dasselbe auch nach den Ausdrücken der §. 4. der Fall sein werde. Ist etwa

$$4a^2 = m - m' - m'' + p + w$$

ein vollständiges Quadrat, und man ändert die Zeichen von zwei m, (von einem m darf man das Zeichen nicht ändern, da ein m nicht negativ sein kann) etwa von m und m', so ist, wenn man die zugehörigen Werthe mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet:

$$4\alpha^2 = -m + m' - m'' + p + w,$$
$$4g\gamma^2 = 4\alpha^2 - 2(-m + m') \qquad (\S.\ 2.)$$
$$= m - m' - m'' + p + w = 4a^2$$

folglich
$$\gamma = \frac{a}{\sqrt{g}}$$

d. h. γ nur rational für g gleich einem vollständigen Quadrate $= k^2$.

Für diesen Fall also, von dem hier eigentlich nicht die Rede sein kann, geben unsere Ausdrücke zwei rationale Lösungen; z. B.

für $f = 2$, $g = 9$ gibt $m = 17$, $m' = -3$, $m'' = -1$: $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$

$$m = -17,\ m' = 3,\ m'' = -1:\ \alpha = 3,\ \beta = 3,\ \gamma = \frac{4}{3} = \frac{a}{\sqrt{g}},\ \delta = \frac{2}{3}$$

Eben so zeigt man, was sich schon von selbst versteht, dass, wenn man die Zeichen von m und m'' ändert, $f = l^2$, und wenn man die von m' und m'' ändert, $fg = h^2$ sein muss; z. B.

für $f = 9$, $g = 2$ gibt $m = 17$, $m' = -1$, $m'' = -3$: $a = 4$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$

$$m = -17,\ m' = -1,\ m'' = 3:\ \alpha = 3,\ \beta = \frac{4}{3} = \frac{a}{\sqrt{f}},\ \gamma = 3,\ \delta = \frac{2}{3}$$

für $f = 2$, $g = 8$ gibt $m = -1$, $m' = 3$, $m'' = -17$: $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 1$

$$m = -1,\ m' = -3,\ m'' = 17:\ \alpha = 4,\ \beta = 2,\ \gamma = \frac{3}{2},\ \delta = \frac{3}{4} = \frac{a}{\sqrt{fg}}$$

Die Formeln (C) des §. 4. geben also allgemein nur für eine der vier statthaften Zeichenverbindungen der m rationale Werthe für a, b, c, d.

§. 9.

Die Zahlenfaktoren A, B, C, D lassen sich noch in Faktoren zerlegen, welche Rechnung aber nur mit A zu machen ist, indem sich die andern durch gehörige Aenderung der Zeichen von $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$ und $\sqrt{fg}$ ergeben. Es sei

I. $f = 2$, $g = 3$, dann ist: 1) $a = b = d = 1$, $c = 0$, also

$$A = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$$
$$C = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{6}$$
$$A.C = -3 + 2\sqrt{2} = -(-1 + \sqrt{2})^2.$$

Setzt man nun $1 + \sqrt{2} + \sqrt{6} = (-1 + \sqrt{6})P$ und multiplicirt auf beiden Seiten mit $1 + \sqrt{6}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} P &= (2+\sqrt{3})\sqrt{2}+(2+\sqrt{3})\sqrt{3} \\ &= (2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{2}+\sqrt{6} &= (2+\sqrt{3})(-1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\ &= 2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2(-1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{6}) \end{aligned}$$

2) $a=7,\ b=5,\ c=4,\ d=3,$

$$\left.\begin{aligned} &(7+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}) \\ \times\ &(7+5\sqrt{2}-4\sqrt{3}-3\sqrt{6}) \end{aligned}\right\} = -(1+\sqrt{2})^2$$

also $7+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6} = -(1+\sqrt{2})P$ gesetzt und mit $-1+\sqrt{2}$ auf beiden Seiten multiplicirt, gibt $-P=(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, folglich:

$$\begin{aligned} 7+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6} &= (2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2(2+\sqrt{6})(2+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Der Quotient beider Resultate ist:

$$\frac{7+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (1+\sqrt{2})^2$$

und $$\sqrt{\frac{7+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{6}}} = 1+\sqrt{2}.$$

3) $a=9,\ b=2,\ c=4,\ d=2$

$$\left.\begin{aligned} &(9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}) \\ \times\ &(9+2\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2\sqrt{6}) \end{aligned}\right\} = 17-12\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^2$$

$9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6} = (3-2\sqrt{2})P$ mit $3+2\sqrt{2}$ auf beiden Seiten multiplicirt gibt:

$$P = (5+2\sqrt{6})(7+4\sqrt{3}),\quad \text{also}$$

$$\begin{aligned} 9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6} &= (3-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{6})(7+4\sqrt{3}) \\ &= (-1+\sqrt{2})^2\frac{(2+\sqrt{6})^2}{2}(2+\sqrt{3})^2 \\ \sqrt{9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}} &= (-1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) \\ &= 1+\sqrt{2}+\sqrt{6} \qquad \text{(vergl. §. 6.)} \\ \frac{\sqrt{9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}}{7+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2 \end{aligned}$$

4) $a=6,\ b=2,\ c=1,\ d=2$

$$\left.\begin{aligned} &(6+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}) \\ \times\ &(6+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6}) \end{aligned}\right\} = 17+12\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^2$$

Aus $6+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}=(3+2\sqrt{6})P$ folgt $P=(2-\sqrt{3})(5+2\sqrt{6})$, also

$$6+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}=(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})(5+2\sqrt{6})$$
$$=(1+\sqrt{2})^2\cdot\frac{(-1+\sqrt{3})^2}{2}\cdot\frac{(2+\sqrt{6})^2}{2}$$
$$\sqrt{6+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}}=\frac{(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{3})(2+\sqrt{6})}{2}$$
$$=2+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

5) $a=54,\ b=38,\ c=31,\ d=22.$

Durch dieselbe Rechnung erhält man:

$$\sqrt{54+38\sqrt{2}+31\sqrt{3}+22\sqrt{6}}=\frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{6})}{2}$$
$$=4+2\sqrt{3}+\frac{5\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}$$

also auch $\sqrt{\dfrac{54+38\sqrt{2}+31\sqrt{3}+22\sqrt{6}}{6+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}.$

II. $f=2,\ g=5.$ Dann ist **1)** $a=4,\ b=c=d=1$ und, wenn man auf dieselbe Weise verfährt,

$$4+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}=(-1+\sqrt{2})(2+\sqrt{5})(3+\sqrt{10}),$$

oder da $(2+\sqrt{5})=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ $\qquad =\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{-1+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$$\sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}=1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$$

2) $a=16,\ b=11,\ c=7,\ d=5$ gibt ebenso:

$$16+11\sqrt{2}+7\sqrt{5}+5\sqrt{10}=(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{10})$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2}\right)^2$$
$$\sqrt{16+11\sqrt{2}+7\sqrt{5}+5\sqrt{10}}=2+\sqrt{5}+\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$$

3) $a=33,\ b=18,\ c=12,\ d=10.$

$$33+18\sqrt{2}+12\sqrt{5}+10\sqrt{10}=(-1+\sqrt{2})^2(2+\sqrt{5})^2(3+\sqrt{10})^2$$
$$=(4+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10})^2 \quad \text{(vergl. §. 6.)}$$
$$\sqrt{33+18\sqrt{2}+12\sqrt{5}+10\sqrt{10}}=4+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}.$$

III. $f=3,\ g=5.$ **1)** $a=1,\ b=c=2,\ d=0.$

$$1+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{5})(4+\sqrt{15})$$
$$=\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{5+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

2) $a = 12$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 2$.

$$12 + 4\sqrt{3} + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{15} = (2 - \sqrt{3})(9 + 4\sqrt{5})(4 + \sqrt{15})$$
$$= \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 (2 + \sqrt{5})^2 (8 + 2\sqrt{15})$$
$$= \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 (8 + 2\sqrt{15})$$
$$= \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 \left(\frac{5+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}\right)^2$$
$$\sqrt{12 + 4\sqrt{3} + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{15}} = \frac{1 + 3\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{15}}{2}$$

§. 10.

Bei der Zerlegung der Gleichung $\mathbf{x^2 - fgy^2 = -1}$ in Faktoren von derselben Form erhält man nach der ersten Auflösung durch dieselbe Rechnung, da $A.B.C.D = -1$, $(A.B.C.D)^2 = +1$ ist:

$$z^2 - (m^2 + m'^2 + m''^2) - 2 = 16fgabcd$$
und $$2zmm'm'' + 1 - (m^2m'^2 + m^2m''^2 + m'^2m''^2) = -16fgabcd$$
folglich
$$z^2 - (m^2 + m'^2 + m''^2) - 2 = m^2m'^2 + m^2m''^2 + m'^2m''^2 - 2mm'm''z - 1$$
woraus
$$z = -mm'm'' + \sqrt{(m^2+1)(m'^2+1)(m''^2+1)}$$
$$= -mm'm'' + fgnn'n''$$
also, wenn diese Wurzelgrösse mit W, das Produkt $mm'm''$ wieder mit p bezeichnet wird,
$$4a^2 = m + m' + m'' - p + W$$
$$4fb^2 = -m + m' - m'' - p + W = 4a^2 - 2(m + m'')$$
$$4gc^2 = -m - m' + m'' - p + W = 4a^2 - 2(m + m')$$
$$4fgd^2 = m - m' - m'' - p + W = 4a^2 - 2(m' + m'').$$

Da z positiv sein muss und $W > mm'm''$ ist, so kann W nicht negativ genommen werden, denn $-W$ würde auch für $+mm'm''$, d. h. für alle m negativ, oder für ein m negativ und zwei positiv, ein negatives z geben, wesshalb das negative Zeichen gleich fortgelassen ist.

Nach der zweiten Auflösung ist:
$$A.B + C.D = 2m$$
$$A.B - C.D = 2n\sqrt{fg} = 2\sqrt{m^2+1}$$
wenn man gleich das negative Zeichen vor der Wurzelgrösse fortlässt,

also $A.B = m + \sqrt{m^2+1}$, $C.D = m - \sqrt{m^2+1}$

eben so $A.C = m' + \sqrt{m'^2+1}$, $B.D = m' - \sqrt{m'^2+1}$

$A.D = m'' + \sqrt{m''^2+1}$, $B.C = m'' - \sqrt{m''^2+1}$

ferner $A^2 = -A.B \times A.C \times A.D$, $B^2 = -B.C \times B.D \times B.A$,

$C^2 = -C.D \times C.A \times C.B$, $D^2 = -D.A \times D.B \times D.C$

welche Werthe in $16a^2 = (A + B + C + D)^2$ substituirt das obige $4a^2$ geben. Nach dieser letztern Auflösung ist es weniger einleuchtend, dass W nicht negativ genommen werden darf.

§. 11.

Die den Werthen für a, b, c, d des §. 4. analogen Ausdrücke erscheinen hier unter imaginärer Gestalt. Es ist nämlich, wenn $\sqrt{-1} = i$ gesetzt wird:

$$m + m' + m'' - mm'm'' = -\frac{(m+i)(m'+i)(m''+i)}{2} - \frac{(m-i)(m'-i)(m''-i)}{2}$$

$$-m + m' - m'' - mm'm'' = -\frac{(m+i)(m'-i)(m''+i)}{2} - \frac{(m-i)(m'+i)(m''-i)}{2}$$

$$-m - m' + m'' - mm'm'' = -\frac{(m+i)(m'+i)(m''-i)}{2} - \frac{(m-i)(m'-i)(m''+i)}{2}$$

$$m - m' - m'' - mm'm'' = -\frac{(m-i)(m'+i)(m''+i)}{2} - \frac{(m+i)(m'-i)(m''-i)}{2}$$

also:

$$a^2 = -\frac{m+i}{2} \cdot \frac{m'+i}{2} \cdot \frac{m''+i}{2} - \frac{m-i}{2} \cdot \frac{m'-i}{2} \cdot \frac{m''-i}{2} + 2\sqrt{\frac{m+i}{2} \cdot \frac{m-i}{2} \cdot \frac{m'+i}{2} \cdot \frac{m'-i}{2} \cdot \frac{m''+i}{2} \cdot \frac{m''-i}{2}}$$

und
$$a = \left\{\sqrt{\frac{m+i}{2} \cdot \frac{m'+i}{2} \cdot \frac{m''+i}{2}} - \sqrt{\frac{m-i}{2} \cdot \frac{m'-i}{2} \cdot \frac{m''-i}{2}}\right\} i$$

$$b = \left\{\sqrt{\frac{1}{f} \cdot \frac{m+i}{2} \cdot \frac{m'-i}{2} \cdot \frac{m''+i}{2}} - \sqrt{\frac{1}{f} \cdot \frac{m-i}{2} \cdot \frac{m'+i}{2} \cdot \frac{m''-i}{2}}\right\} i$$

$$c = \left\{\sqrt{\frac{1}{g} \cdot \frac{m+i}{2} \cdot \frac{m'+i}{2} \cdot \frac{m''-i}{2}} - \sqrt{\frac{1}{g} \cdot \frac{m-i}{2} \cdot \frac{m'-i}{2} \cdot \frac{m''+i}{2}}\right\} i$$

$$d = \left\{\sqrt{\frac{1}{fg} \cdot \frac{m-i}{2} \cdot \frac{m'+i}{2} \cdot \frac{m''+i}{2}} - \sqrt{\frac{1}{fg} \cdot \frac{m+i}{2} \cdot \frac{m'-i}{2} \cdot \frac{m''-i}{2}}\right\} i$$

oder, wenn $m + i = 2v$, $m' + i = 2v'$, $m'' + i = 2v''$:

$$a = \left\{\sqrt{v \cdot v' \cdot v''} - \sqrt{(v-i)(v'-i)(v''-i)}\right\} i$$

$$b = \left\{\sqrt{\frac{1}{f} \cdot v(v'-i)v''} - \sqrt{\frac{1}{f} \cdot (v-i)v' \cdot (v''-i)}\right\} i$$

$$c = \left\{\sqrt{\frac{1}{g} \cdot v \cdot v'(v''-i)} - \sqrt{\frac{1}{g} \cdot (v-i)(v'-i)v''}\right\} i$$

$$d = \left\{\sqrt{\frac{1}{fg} \cdot (v-i)v' \cdot v''} - \sqrt{\frac{1}{fg} \cdot v(v'-i)(v''-i)}\right\} i$$

oder für f, g und fg die Werthe durch die n gesetzt:

$$a = \left\{\sqrt{v\,.\,v'\,.\,v''} - \sqrt{(v-i)(v'-i)(v''-i)}\right\}i$$

$$b = \frac{n'}{2}\left\{\sqrt{\frac{v\,.\,v''}{v'}} - \sqrt{\frac{(v-i)(v''-i)}{v'-i}}\right\}i$$

$$c = \frac{n''}{2}\left\{\sqrt{\frac{v\,.\,v'}{v''}} - \sqrt{\frac{(v-i)(v'-i)}{v''-i}}\right\}i$$

$$d = \frac{n}{2}\left\{\sqrt{\frac{v'.\,v''}{v}} - \sqrt{\frac{(v'-i)(v''-i)}{v-i}}\right\}i$$

Da a^2 rational ist, so versteht sich von selbst, dass $\sqrt{v\,.\,v'\,.\,v''}$ und $\sqrt{(v-i)(v'-i)(v''-i)}$, also auch $v\,.\,v'\,.\,v''$ und $(v-i)(v'-i)(v''-i)$ conjugirte imaginäre Ausdrücke sein müssen, und wirklich ist:

$$v\,.\,v'\,.\,v'' = \frac{mm'm''-m-m'-m''}{8} + \frac{mm'+mm''+m'm''-1}{8}i$$

$$(v-i)(v'-i)(v''-i) = \frac{mm'm''-m-m'-m''}{8} - \frac{mm'+mm''+m'm''-1}{8}i$$

Setzt man nun $\sqrt{v\,.\,v'\,.\,v''} = \alpha + \beta i$ und bezeichnet hier die den a, b, c, d entsprechenden Werthe für die entgegengesetzten m mit a′, b′, c′, d′, so erhält man:

$$16\alpha^2 = mm'm''-m-m'-m''+W = 4a'^2$$

$$16\beta^2 = -mm'm''+m+m'+m''+W = 4a^2$$

so dass:

$$\sqrt{v\,.\,v'.\,v''} = \frac{a'+ai}{2}, \quad \sqrt{(v-i)(v'-i)(v''-i)} = \frac{a'-ai}{2}$$

Eben so ist:

$$\sqrt{\frac{1}{f}v\,.\,(v'-i)v''} = \frac{b'+bi}{2}, \quad \sqrt{\frac{1}{f}(v-i)v'(v''-i)} = \frac{b'-bi}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{g}v\,.\,v'(v''-i)} = \frac{c'+ci}{2}, \quad \sqrt{\frac{1}{g}(v-i)(v'-i)v''} = \frac{c'-ci}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{fg}(v-i)v'\,.\,v''} = \frac{d'+di}{2}, \quad \sqrt{\frac{1}{fg}v.(v'-i)(v''-i)} = \frac{d'-di}{2}$$

§. 12.

Hier sind die Zeichen der m nicht dadurch bedingt, dass $mm'm''$ positiv werden muss, wie das bei der ersten Gleichung $x^2 - fgy^2 = 1$ der Fall war; es können vielmehr nach den allgemeinen Formeln (§. 10.) sämmtliche Zeichenverbindungen stattfinden. So ist z. B., wenn $f = 2$, $g = 5$,

$$\text{für}\left\{\begin{array}{llll} m = 3, & m' = 1, & m'' = 2: & a = \frac{\sqrt{10}}{2},\ b = 0,\ c = \frac{\sqrt{10}}{10},\ d = \frac{\sqrt{10}}{10} \\ = -3, & = -1, & = -2: & a' = \frac{\sqrt{10}}{2},\ b' = \frac{\sqrt{10}}{2},\ c' = \frac{3\sqrt{10}}{10},\ d' = \frac{\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$$

$$\text{für}\begin{cases} m = 3,\ m' = 1,\ m'' = -2:\ a = \frac{3\sqrt{2}}{2},\ b = \sqrt{2},\ c = \frac{\sqrt{2}}{2},\ d = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ = -3,\ = -1,\ = 2:\ a' = \frac{\sqrt{2}}{2},\ b' = \frac{\sqrt{2}}{2},\ c' = \frac{\sqrt{2}}{2},\ d' = 0. \end{cases}$$

$$\text{für}\begin{cases} m = 3,\ m' = -1,\ m'' = 2:\ a = \sqrt{5},\ b = \frac{\sqrt{5}}{2},\ c = \frac{2\sqrt{5}}{2},\ d = \frac{3\sqrt{5}}{10} \\ = -3,\ = 1,\ = -2:\ a' = 0,\ b' = \frac{\sqrt{5}}{2},\ c' = \frac{\sqrt{5}}{5},\ d' = \frac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

$$\text{für}\begin{cases} m = -3,\ m' = 1,\ m'' = 2:\ a = 2,\ b = \frac{3}{2},\ c = 1,\ d = \frac{1}{2} \\ = 3,\ = -1,\ = -2:\ a' = 1,\ b' = \frac{1}{2},\ c' = 0,\ d' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aber welche der acht möglichen Verbindungen a, also auch (wegen der Ausdrücke für n §. 1.) b, c, d rational gibt, lässt sich eben so wenig entscheiden, wie bei den vier erlaubten Verbindungen der ersten Gleichung; selbst dann nicht, wenn f, g und fg von derselben Form sind. So erhält man die rationalen Werthe

für $f = 2$, $g = 5$, wenn $m = -3$, $m' = 1$, $m'' = 2$, nämlich $a = 2$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 1$, $d = \frac{1}{2}$

„ $f = 5$, $g = 10$, wenn $m = 7$, $m' = -2$, $m'' = 3$, nämlich $a = 5$, $b = 2$, $c = \frac{3}{2}$, $d = \frac{7}{10}$

und doch sind in beiden Fällen f, g und fg von derselben Form, nämlich $f = u^2 + 1$ und $g = (u+1)^2 + 1$, also $fg = \left\{u(u+1)+1\right\}^2 + 1$.

Dass übrigens für a, b, c, d nicht lauter ganze Zahlen herauskommen können, folgt aus den Gleichungen $2(ad - bc) = n$ u. s. w. (§. 1.), da in diesem Falle nur ungerade n die Pellschen Gleichungen lösen.

Zwischen den beiden a u. s. w. für entgegengesetzte Zeichenverbindungen der m hat man, ausser der schon im vorigen §. angegebenen Relation, immer:

$$a^2 + a'^2 = \frac{f.g.n.n'.n''}{2},\quad b^2 + b'^2 = \frac{g.n.n'.n''}{2}$$

$$c^2 + c'^2 = \frac{f.n.n'.n''}{2},\quad d^2 + d'^2 = \frac{n.n'.n''}{2}$$

also auch:

$$(a^2 + a'^2)(d^2 + d'^2) = (b^2 + b'^2)(c^2 + c'^2) = f.g\left(\frac{n.n'.n''}{2}\right)^2,$$

$$\frac{a^2 + a'^2}{d^2 + d'^2} = fg,\quad \frac{b^2 + b'^2}{d^2 + d'^2} = g,\quad \frac{c^2 + c'^2}{d^2 + d'^2} = f$$

u. s. w.

Doch wichtiger als diese ist folgende Relation. Ist für irgend eine Zeichenverbindung der m z. B. wenn alle positiv sind,

$$4a^2 = fg.n.n'.n'' + (m + m' + m'' - mm'm''),$$

o ist für die entgegengesetzten m

$$4a'^2 = fg.n.n'.n'' - (m + m' + m'' - mm'm''),$$

folglich

$$16a^2a'^2 = (fgnn'n'')^2 - (m + m' + m'' - mm'm'')^2$$
$$= (mm' + mm'' + m'm'' - 1)^2$$

$$\text{und} \quad 4aa' = mm' + mm'' + m'm'' - 1$$

Eben so hat man für positive m:

$$4fbb' = - mm' + mm'' - m'm'' - 1$$
$$4gcc' = mm' - mm'' - m'm'' - 1$$
$$4fgdd' = - mm' - mm'' + m'm'' - 1$$

Aus diesen Ausdrücken nun folgt, dass a und a′ u. s. w. zugleich rational oder irrational sind und zwar im letzten Falle denselben irrationalen Faktor haben, wenn nicht etwa a oder a′ u. s. w. $= 0$ ist. Denn dass 2a und 2a′ nicht von der Form $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ sein können, zeigen die imaginären Ausdrücke, denen α und β gleich sein müssten. Nämlich aus $2a = \alpha + \sqrt{\beta}$ würde folgen:

$$4a^2 = \alpha^2 + \beta + \sqrt{4\alpha^2\beta} = m + m' + m'' - mm'm'' + W$$

woraus

$$\alpha^2 = \frac{m + m' + m'' - mm'm''}{2} \pm \frac{mm' + mm'' + m'm'' - 1}{2}\,i$$

$$\beta^2 = \frac{m + m' + m'' - mm'm''}{2} \mp \frac{mm' + mm'' + m'm'' - 1}{2}\,i.$$

Wenn die positiven m kein vollständiges Quadrat für $4a^2$ geben, so kann man, statt zwei der m oder eins negativ zu nehmen und die Rechnung damit zu wiederholen, um zu sehen ob sie ein rationales a geben, ähnlich verfahren wie §. 5. bei der ersten Gleichung gezeigt ist. Man berechnet $4a^2 = m + m' + m'' - p + W$ für positive m und sieht zu, wenn keine Quadratzahl, z. B. r, herauskommt, ob $\frac{r}{f}$, oder $\frac{r}{g}$, oder $\frac{r}{fg}$ ein vollständiges Quadrat ist, wo dann beziehlich $- m + m' - m''$, $- m + m' - m''$, $m - m' - m''$ die rationalen Werthe geben.

§. 13.

Wir wollen nun untersuchen, wie viele Zeichenverbindungen der m rationale Werthe für a, b, c, d erzeugen. — Es gebe etwa $- m + m' + m''$ ein vollständiges Quadrat für $4a^2$ (also auch $m - m' - m''$ ein vollständiges Quadrat für $4a'^2$), so ist z. B. für $- m + m' - m''$ d. h. wenn nur ein m, hier m″, das Zeichen ändert, und wieder die entsprechenden Werthe mit α, β, γ, δ bezeichnet werden,

$$4\alpha^2 = -m + m' - m'' - p + W$$
$$4g\gamma^2 = 4\alpha^2 - 2(-m + m')$$
$$= m - m' - m'' - p + W = 4a'^2$$

folglich $\gamma = \frac{a'}{\sqrt{g}}$,

d. h. da a' rational, weil a der Annahme nach rational ist, γ nur rational, wenn $g = k^2$. In diesem Falle folgt aus:

$$4a^2 = -m + m' + m'' + p + W$$
$$4gc'^2 = -m + m' - m'' - p + W$$
$$4\alpha^2 = -m + m' - m'' - p + W$$

da $m'' = 0$, also auch $p = 0$ ist:

$$kc' = \alpha = a \quad \text{und} \quad c' = \frac{a}{k}.$$

Ferner ist:

$$4fb^2 = m + m' - m'' + p + W$$
$$4fgd'^2 = m + m' + m'' - p + W$$

also, da $m'' = p = 0$, $4fb^2 = 4fgd'^2$, d. h. $d' = \frac{b}{k}$.

Natürlich ist auch, da a', b', c', d' die ursprünglichen Werthe sein konnten, von denen der Uebergang zu a, b, c, d gemacht wurde, $c = \frac{a'}{k}$ und $d = \frac{b'}{k}$, d. h. $a' = c.k$, $b' = d.k$. Z. B. gibt für $f = 2$, $g = 25$, $m = 1$, $m' = 1$, $m'' = 0$: $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{10}$

$$m = -1,\ m' = -1,\ m'' = 0:\ a' = 0 = c.k,\ b' = \frac{1}{2} = d.k,\ c' = \frac{1}{5} = \frac{a}{k},\ d = \frac{1}{10} = \frac{b}{k}$$

Die Werthe für α, β, γ, δ fallen mit denen von a, b, c, d zusammen, da die Zeichenänderung von $m'' = 0$ nichts Neues gibt. Aendert man bloss das Zeichen vor m', so muss f ein vollständiges Quadrat sein. $f = 25$, $g = 2$ gibt dieselben Werthe, nur b und c vertauscht. Das Zeichen von m geändert gibt nur rationale Werthe, wenn $f.g = h^2$ ist. Es folgt dann aus:

$$4h^2d'^2 = m + m' + m'' - p + W$$
$$\text{und} \quad 4a^2 = -m + m' + m'' + p + W$$

da $m = p = o$: $d' = \frac{a}{h}$, also auch $d = \frac{a'}{h}$ und

$a' = d.h$; aus: $4fb'^2 = -m - m' + m'' - p + W$

und $4gc^2 = +m - m' + m'' + p + W$

$b' = c\sqrt{\frac{f}{g}}$; und aus:

$$4fb^2 = m + m' - m'' + p + W$$
$$4gc'^2 = -m + m' - m'' - p + W$$

$c' = b\sqrt{\frac{f}{g}}$.

Für $f = 2$, $g = 50$ gibt $m = 0$, $m' = \quad 1$, $m'' = -7$: $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{1}{10}$, $d = \frac{1}{5}$

$m = 0$, $m' = -1$, $m'' = -7$: $a' = 2$, $b' = \frac{1}{2}$, $c' = \frac{3}{10}$, $d' = \frac{1}{10}$

Aendern zwei m die Zeichen, so ergibt sich eben so, dass f, g, fg vollständige Quadrate sein müssen, wenn resp. die Zeichen von m und m'', von m und m', von m' und m'' geändert werden. Auch hier fallen die Werthe von α, β, γ, δ mit denen von a, b, c, d zusammen.

Wir haben also den Satz bewiesen:

Wenn überhaupt rationale Werthe für a, b, c, d vorhanden sind, so können nur zwei von den acht Zeichenverbindungen der m solche geben.

§. 14.

Ob hier immer rationale Zahlen für a, b, c, d möglich sind, wie das in §. 5. für die Gleichung $x^2 - fgy^2 = 1$ gezeigt ist, erscheint zweifelhaft, da man z. B. bei $f = 10$, $g = 17$ weder für die kleinsten m, noch wenn man für irgend eins oder für zwei derselben oder für alle drei die nächst grössern Werthe setzt, also für keine der acht möglichen Verbindungen der beiden kleinsten Wurzeln der drei Gleichungen $m^2 - fgn^2 = -1$ u. s. w. rationale Zahlen erhält. Der allgemeine Beweis dürfte nicht ohne Schwierigkeit sein; wenigstens führt die Substitution von $m\,(m^2 + 3n^2fg)$ für m und von $n\,(3m^2 + n^2fg)$ für n u. s. w., d. h. wenn man im Kettenbruche bis ans Ende der dritten Periode geht, nicht zum gewünschten Resultate. Dass aber nicht für alle f und g die kleinsten m und n rationale a, b, c, d geben, zeigen nicht bloss Zahlenbeispiele, sondern es lassen sich auch für einige Formen von f, g und fg die Bedingungen nachweisen, unter welchen nur rationale Werthe herauskommen können. So hat man z. B. nach §. 7. I) wenn $f = u^2 + 1$ und $g = (u+1)^2 + 1$ ist, $fg = \left\{u(u+1)+1\right\}^2 + 1$, also $m = u(u+1)+1$, $m' = u$, $m'' = u+1$, $n = n' = n'' = 1$, und diese Werthe in

$$4a^2 = m + m' + m'' - mm'm'' + fgnn'n''$$

gesetzt geben:

$$4a^2 = 2\left\{(u+1)^2 + 1\right\} = 2g.$$

Sollen nun die a, b, c, d rational werden, so muss sein entweder:

1) $2g = 4a^2$, also $2g$ $\left(\text{oder } \frac{g}{2}\right)$ ein vollständiges Quadrat,

oder 2) $\quad = 4fb^2$, also $\frac{2g}{f}$ $\left(\text{oder } \frac{g}{2f}\right)$ ein vollständiges Quadrat,

„ 3) $\quad = 4gc^2$, d. h. $2 = 4c^2$,

„ 4) $\quad = 4fgd^2$, d. h. $2fd^2 = 1$, also $2f$ $\left(\text{oder } \frac{f}{2}\right)$ ein vollständiges Quadrat.

Da die dritte Bedingung nicht erfüllt werden kann, und der zweiten

$$\frac{2g}{f} = \frac{2\left\{(u+1)^2 + 1\right\}}{u^2 + 1} = 2 + \frac{2(2u+1)}{u^2+1} = \text{einem vollständigen Quadrate}$$

nur durch $u = 2$ genügt wird, so erhält man bei den angenommenen Formen von f und g, mit Ausnahme von $f = 5$, $g = 10$ für $u = 2$, nur dann rationale a, b, c, d, wenn entweder $\frac{f}{2}$ oder $\frac{g}{2}$ ein vollständiges Quadrat ist.

$$f = 2,\ g = 5 \text{ gibt } a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ c = 0,\ d = \frac{1}{2}$$

$$\text{und } a = 2,\ b = \frac{3}{2},\ c = 1,\ d = \frac{1}{2}$$

$$f = 37,\ g = 50 \text{ gibt } a = 5,\ b = 0,\ c = d = \frac{1}{2}$$

$$\text{und } a = 30,\ b = 5,\ c = \frac{43}{10},\ d = \frac{7}{10}$$

Irrationale Zahlen erhält man, wenn $f = 10$, $g = 17$, $fg = 13^2 + 1$; $f = 17$, $g = 26$, $fg = 442 = 21^2 + 1$; $f = 26$, $g = 37$, $fg = 962 = 31^2 + 1$.

Setzt man die in §. 7. 2) gefundenen Werthe $fg = \{u(2u^2 + 1)\}^2 + 1$, $m = u(2u^2 + 1)$, $m' = u$, $m'' = 2u^2$, $n = n' = n'' = 1$ in den Ausdruck für $4a^2$, so erhält man:

$$\begin{array}{lll} \text{entweder} & 1) & (u^2 + 1)\{u^2 + (u + 1)^2\} = 4a^2 \\ \text{oder} & 2) & \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad = 4fb^2 \\ \text{„} & 3) & \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad = 4gc^2 \\ \text{„} & 4) & \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad = 4fgd^2 \end{array}$$

Um nun rationale a, b, c, d zu erhalten, muss man haben:

$$\begin{array}{lll} \text{entweder} & 1) & (u^2 + 1)\{u^2 + (u + 1)^2\} = 4a^2 \\ \text{oder wegen} & 2) & u^2 + (u + 1)^2 = 4b^2 \\ \text{„} & 3) & \dfrac{(u^2 + 1)\{u^2 + (u + 1)^2\}}{4u^4 + 1} = 4c^2 \\ \text{„} & 4) & \dfrac{u^2 + (u + 1)^2}{4u^4 + 1} = 4d^2. \end{array}$$

Wird keiner dieser vier Ausdrücke ein vollständiges Quadrat, so sind a, b, c, d irrational. $u = 1$, $= 2$, $= 3$, $= 4$ gibt rationale Werthe, $u = 5$ aber nicht.

Mit ähnlichen Bedingungen steht es gewiss im Zusammenhange, wenn z. B. $f = 5$, $g = 74 = 2.37$ irrationale, $f = 5$, $g = 85 = 5.17$ rationale Zahlen gibt, obgleich die vorkommenden Faktoren 2, 5, 17, 37 sämmtlich von der Form $u^2 + 1$ sind.

Tafel II. enthält für die kleinsten m die rationalen a, b, c, d für die möglichen Zahlenverbindungen der f und g bis 100, so lange f.g 1000 nicht überschreitet.

Tafel L

$$x^2 - fgy^2 = 1.$$

f	g	a	b	c	d	f	g	a	b	c	d
2	3	1	1	0	1	5	10	8	1	1	1
		7	5	4	3		11	18	6	5	2
		9	2	4	2		13	37	14	10	4
		6	2	1	2		14	285	60	36	34
		54	38	31	22		15	17	14	8	2
	5	4	1	1	1		17	461	118	64	50
		16	11	7	5		18	2	1	1	0
	7	11	5	4	2			38	17	9	4
		53	37	20	14		19	218	61	50	14
	10	13	7	3	3	6	7	9	2	4	1
	11	41	29	12	9		8	9	2	1	1
	13	40	25	11	7		10	65	22	18	8
	15	12	2	1	2		11	19	7	6	2
	17	7	5	2	1		12	1	1	1	0
	19	279	231	64	53			17	7	5	2
	20	33	18	6	5		13	30	11	9	3
3	5	1	2	2	0		14	93	30	20	10
		31	18	14	8		15	20	2	1	2
	6	1	2	1	0		17	11	3	2	1
		17	10	7	4		18	31	7	4	3
	7	12	6	5	2		19	1229	497	282	114
	10	23	4	6	2	7	8	1	0	3	1
	11	6	7	2	2			24	7	6	3
	13	22	7	6	2		10	276	141	118	33
	14	2	1	1	0		11	6	4	5	0
		26	15	7	4			360	30	24	41
	15	377	196	88	56		12	12	5	3	1
	17	43	38	16	6		13	1431	804	590	150
	18	7	10	4	1		14	120	25	18	12
	19	414	218	95	50		15	52	12	8	5
5	6	15	4	2	2		17	87	56	36	8
	7	9	6	4	2		18	24	7	4	2
	8	6	9	7	1		19	12108	4797	2790	1050

Tafel II.

$$x^2 - fgy^2 = -1.$$

f	g	a	b	c	d	f	g	a	b	c	d
2	5	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5	53	$\frac{505}{2}$	$\frac{231}{2}$	$\frac{71}{2}$	$\frac{31}{2}$
		2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		58	11	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
	13	4	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		65	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$
	29	26	$\frac{39}{2}$	5	$\frac{7}{2}$		73	$\frac{935}{2}$	$\frac{417}{2}$	$\frac{109}{2}$	$\frac{49}{2}$
	37	4	$\frac{9}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		85	$\frac{155}{2}$	$\frac{69}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{37}{10}$
	41	6	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		89	$\frac{739}{2}$	$\frac{333}{2}$	$\frac{79}{2}$	$\frac{35}{2}$
	53	273	$\frac{391}{2}$	38	$\frac{53}{2}$	10	13	5	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
	61	164	$\frac{289}{2}$	21	$\frac{37}{2}$		29	6	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
	65	6	$\frac{11}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		53	15	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{1}{2}$
5	10	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	13	26	13	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{19}{26}$
		5	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{10}$		37	$\frac{1601}{2}$	$\frac{221}{2}$	$\frac{131}{2}$	$\frac{73}{2}$
	13	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		41	$\frac{115}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
	17	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$		65	$\frac{65}{2}$	$\frac{47}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{29}{26}$
	26	6	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		73	$\frac{23133371}{2}$	$\frac{6203195}{2}$	$\frac{2617735}{2}$	$\frac{750941}{2}$
	29	$\frac{17}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	17	29	$\frac{2287}{2}$	$\frac{623}{2}$	$\frac{477}{2}$	$\frac{103}{2}$
	37	$\frac{13}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		37	$\frac{25}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{1}{2}$
	50	30	25	$\frac{79}{10}$	$\frac{19}{10}$		41	$\frac{25}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

Die folgenden noch möglichen Verbindungen geben irrationale Zahlen:

f	2	5	10	10	10	10	10	13	13	17	17	26	26
g	85	74	17	37	61	73	97	58	74	26	58	29	37