II.

Beweis einiger Sätze aus dem Journale für reine und angewandte Mathematik von Crelle.

Herr Prof. J. Steiner hat in dem genannten Journale Bd. 30 S. 275 folgende Sätze aufgestellt:

In eine gegebene Ellipse E lassen sich eine Schaar grösste Dreiecke ACB einschreiben; nemlich jeder Punct der Ellipse ist Ecke eines solchen Dreiecks; dieselben haben gleichen Inhalt und ihre Schwerpuncte liegen im Mittelpuncte M der Ellipse E.

Sind a, b die Halb-Axen und c die Excentrität der Ellipse E, und ist H der Schnittpunct der drei Höhen des Dreiecks ABC und N der Mittelpunct des ihm umgeschriebenen Kreises, so finden unter andern folgende Eigenschaften Statt:

1) Der Ort des Mittelpuncts N ist eine andere Ellipse E_1, ähnlich der gegebenen E; die Axen beider fallen verwechselt aufeinander, d. h. die grosse $2a_1$ und kleine $2b_1$ Axe von E_1 fallen beziehlich auf die kleine 2b und grosse 2a Axe von E, und es ist

$$a_1 = \frac{c^2}{4b}; \quad b_1 = \frac{c^2}{4a}; \quad c_1 = \frac{c^3}{4ab}.$$

2) Ebenso ist der Ort des Höhenschnittpuncts H eine dritte Ellipse E_2, ähnlich den beiden ersten und mit ihnen concentrisch, und zwar fallen ihre Axen $2a_2$, $2b_2$ auf die gleichnamigen Axen der zweiten E_1 und in Rücksicht ihrer Grösse ist $a_2 = 2a_1$, $b_2 = 2b_1$, oder:

$$a_2 = \frac{c^2}{2b}; \quad b_2 = \frac{c^2}{2a}; \quad c_2 = \frac{c^3}{2ab}$$

3) Wird im Kreise N (der dem Dreieck ABC umgeschrieben) derjenige Durchmesser PQ gezogen, welcher durch den Mittelpunct M der Ellipse E geht, so wird derselbe von diesem Punct M in zwei solche Abschnitte MP, MQ getheilt, deren Rechteck constant ist, nemlich es ist allemal

$$PM.MQ = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

4) Der Radius r des Kreises N wird ein Maximum oder Minimum, wenn eine Ecke des Dreiecks ABC beziehlich in einem Scheitel der kleinen oder grossen Axe der Ellipse E liegt. Unter derselben Bedingung wird zugleich das Product der drei Seiten α, β, γ des Dreiecks ABC beziehlich ein Maximum oder Minimum. Diese Maxima und Minima haben folgende Werthe:

$$\text{Max.} \quad r = \frac{a^2 + 3b^2}{4b}; \qquad \text{Minim.} \quad r = \frac{3a^2 + b^2}{4a};$$

$$\text{„} \quad \alpha\beta\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{4}.a(a^2 + 3b^2); \qquad \text{„} \quad \alpha\beta\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{4}.b(3a^2 + b^2).$$

Zieht man die beliebige Sehne AB *), durch ihre Mitte D den Durchmesser EC, setzt MD $= x$, DA $= y$, $< ADC = v$, nennt die conjugirten Durchmesser $2a'$ und $2b'$, und bezeichnet Dreieck ABC mit $\triangle$; so ist, da bekanntlich $\sin v = \frac{ab}{a'b'}$,

$$\triangle = (a' + x) y \,.\, \sin v$$

und, da $y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - x^2)$,

$$\frac{a'^4 \triangle^2}{a^2 b^2} = (a' + x)^3 (a' - x) = m.$$

$$\frac{dm}{dx} = -4(x + a')^2 (x - \frac{a'}{2}) = 0$$

gibt $x = \frac{a'}{2}$ und $= -a'$.

Für $x = \frac{a'}{2}$ ist $\frac{d^2 m}{dx^2} = -9a'^2$, also ist für $x = \frac{a'}{2}$ das Dreieck ABC ein Maximum und M sein Schwerpunkt.

Für $x = -a'$ wird $\frac{d^2 m}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3 m}{dx^3} = 36a'$, also weder ein Maximum noch ein Minimum.

Dann folgt aus der Gleichung der Ellipse $y = \frac{b'}{2}\sqrt{3}$, und $\triangle = \frac{3}{4} ab \sqrt{3}$, also haben alle Dreiecke dieselbe Fläche.

Ad 1) Heissen die auf die Axen bezogenen Coordinaten von C 2ξ und 2η, so ist die Gleichung der Tangente in C:

$$y - 2\eta = -\frac{b^2 \xi}{a^2 \eta}(x - 2\xi)$$

also die von AB, da sie der Tangente durch C parallel ist und durch D geht, dessen Coordinaten $-\xi$ und $-\eta$ sind:

$$y + \eta = -\frac{b^2 \xi}{a^2 \eta}(x + \xi)$$

welche Gleichung mit der der Ellipse verbunden, mit Berücksichtigung der Gleichung $a^2 b^2 = 4(a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2)$, die Coordinaten von A und B gibt:

$$x = -\xi \pm \frac{a\eta}{b}\sqrt{3}, \quad y = -\eta \mp \frac{b\xi}{a}\sqrt{3}.$$

Die Coordinaten der Mitte von BC heissen nun $\frac{\xi + \frac{a\eta\sqrt{3}}{b}}{2}$ und $\frac{\eta - \frac{b\xi\sqrt{3}}{a}}{2}$, also die Gleichung der auf BC in der Mitte Senkrechten:

$$y - \frac{a\eta - b\xi\sqrt{3}}{2a} = -\frac{3ab\xi - a^2\eta\sqrt{3}}{3ab\eta + b^2\xi\sqrt{3}}\left(x - \frac{b\xi + a\eta\sqrt{3}}{2b}\right)$$

*) Die Figur ist leicht zu entwerfen.

und da die Gleichung des Perpendikels in D auf AB

$$y + \eta = \frac{a^2\eta}{b^2\xi}(x + \xi)$$

so erhält man aus beiden für N die Coordinaten:

$$x = \frac{2c^2\xi(b^2\xi^2 - 3a^2\eta^2)}{a^4 b^2} = \frac{c^2\xi(16\xi^2 - 3a^2)}{2a^4} = \frac{c^2\xi(b^2 - 16\eta^2)}{2a^2b^2}$$

$$y = \frac{2c^2\eta(3b^2\xi^2 - a^2\eta^2)}{a^2b^4} = \frac{c^2\eta(16\xi^2 - a^2)}{2a^2b^2}$$

folglich

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{c^4\xi^2(b^2 - 16\eta^2)^2a^2 + c^4\eta^2(16\xi^2 - a^2)^2b^2}{4a^4b^4}$$

Lösst man auf und setzt für $a^2\eta^2 + b^2\xi^2$ den Werth $\frac{a^2b^2}{4}$, so erhält man:

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{c^4}{16}$$

worin der zu beweisende Satz liegt.

Ad 2) Da der Schwerpunkt bei jedem Dreiecke auf der Verbindungslinie des Mittelpunktes des umbeschriebenen Kreises N mit dem Schnittpunkte der Höhen H von diesem doppelt so weit entfernt liegt als von jenem, und in unserem Falle der Schwerpunkt Anfangspunkt ist, so müssen die Coordinaten des Punktes H das Doppelte sein von den Coordinaten des Punktes N und entgegengesetzt, also

$$x = \frac{4c^2\xi(3a^2\eta^2 - b^2\xi^2)}{a^4b^2}, \quad y = \frac{4c^2\eta(a^2\eta^2 - 3b^2\xi^2)}{a^2b^4}$$

Dieselbe Rechnung wie bei 1), wenn sie noch nöthig ist, gibt

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{c^4}{4}$$

woraus der Satz und die in demselben angegebenen Werthe folgen.

Ad 3) Aus den bei 1) gefundenen Coordinaten für A und B folgt:

$$BC^2 = \alpha^2 = \left(3\xi - \frac{a\eta}{b}\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\eta + \frac{b\xi}{a}\sqrt{3}\right)^2$$

$$AC^2 = \beta^2 = \left(3\xi + \frac{a\eta}{b}\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\eta - \frac{b\xi}{a}\sqrt{3}\right)^2$$

$$AB^2 = \gamma^2 = \left(\frac{2a\eta\sqrt{3}}{b}\right)^2 + \left(\frac{2b\xi\sqrt{3}}{a}\right)^2$$

oder wenn man auflöst und $4\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - 4\xi^2)$ und $a^2 - b^2 = c^2$ berücksichtigt:

$$\alpha^2 = \frac{3a^2 + 9b^2}{4} + \frac{6\xi^2c^2}{a^2} - \frac{3c^2\xi\sqrt{3}}{a^2}\sqrt{a^2 - 4\xi^2}$$

$$\beta^2 = \frac{3a^2 + 9b^2}{4} + \frac{6\xi^2c^2}{a^2} + \frac{3c^2\xi\sqrt{3}}{a^2}\sqrt{a^2 - 4\xi^2}$$

$$\gamma^2 = \frac{3a^4 - 12c^2\xi^2}{a^2}.$$

Nun ist $r^2 = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{16\triangle^2} = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{27a^2b^2}$

und wenn man die gefundenen Werthe substituirt:

$$r^2 = \frac{a^8(a^2+3b^2)^2 - 36a^4c^6\xi^2 + 384a^2c^6\xi^4 - 1024c^6\xi^6}{16a^8b^2}$$

ferner $MN^2 = x^2 + y^2 = \frac{c^4\xi^2(16\xi^2 - 3a^2)^2}{4a^8} + \frac{c^4\eta^2(16\xi^2 - a^2)^2}{4a^4b^4}$

$$= \frac{a^8c^4 - 36a^4c^6\xi^2 + 384a^2c^6\xi^4 - 1024c^6\xi^6}{16a^8b^2}$$

folglich

$$PM \, . \, MQ = (r + MN)(r - MN) = r^2 - MN^2 = \frac{a^8(a^2+3b^2)^2 - a^8c^4}{16a^8b^2} = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)$$

wie es der Satz aussagt.

Ad 4) Multiplicirt man die Ausdrücke für α^2, β^2, γ^2 in 3), so erhält man:

$$\frac{16a^6\alpha^2\beta^2\gamma^2}{27} = a^8(a^2+3b^2)^2 - 36a^4c^6\xi^2 + 384a^2c^6\xi^4 - 1024c^6\xi^6 = m$$

$$\frac{dm}{d\xi} = 0 \text{ gibt } 2\xi = 0, \; = \pm\frac{a}{2}, \; = \pm\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{d^2m}{d\xi^2} = -72a^4c^6 \text{ für } 2\xi = 0$$

$$= +96a^4c^6 \; \ldots = \pm\frac{a}{2}$$

$$= -288a^4c^6 \ldots = \pm\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Die Abscissen 0 und $\pm\frac{a}{2}\sqrt{3}$ geben für $\alpha . \beta . \gamma$ dasselbe Maximum, indem sie zu den Winkelpunkten desselben Dreiecks gehören; die $\pm\frac{a}{2}$ dasselbe Minimum, uud da $r = \frac{\alpha . \beta . \gamma}{4\triangle}$, so gibt das Maxim. und Minim. für $\alpha . \beta . \gamma$ resp. auch das Maxim. und Minim. für r. Die Werthe sind die im Satze angegebenen.

Hieran schliessen sich noch folgende Sätze:

1) Die 12 Winkelpunkte der gleichschenkligen Dreiecke (deren Spitzen in den Endpunkten der Axen liegen), sind Endpunkte von 3 Paaren conjugirter Durchmesser. Heissen nämlich in dem einen Dreiecke die Coordinaten des Winkelpunktes A an der Grundlinie $\frac{a}{2}$ und $-\frac{b}{2}\sqrt{3}$, so sind die des Winkelpunktes A′ an der Grundlinie des andern Dreiecks $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $\frac{b}{2}$, folglich $MA^2 + MA'^2 = a^2 + b^2$.

2) Die Summe der Quadrate über den drei Seiten der Dreiecke ist constant. Nach 3) ist:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{9}{2}(a^2 + b^2) = 9\,PM.MQ$$

3) Setzt man $\frac{2a}{\sqrt{3}}(\alpha + \beta + \gamma) = m$ (vgl. Ad 3.), so genügen der Gleichung $\frac{dm}{d\xi} = 0$ die Werthe:

$$2\xi = 0, \; = \pm a, \; = \pm \frac{a}{2}, \; = \pm \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

das sind die Coordinaten der **12** Winkelpunkte der **4** gleichschenkligen Dreiecke; die Umfänge dieser Dreiecke sind also Maxima oder Minima. Nun ist

$$\text{für } 2\xi = 0: \quad \alpha + \beta + \gamma = (a + \sqrt{a^2 + 3b^2})\sqrt{3}$$

$$2\xi = a: \quad \alpha + \beta + \gamma = (b + \sqrt{b^2 + 3a^2})\sqrt{3}$$

und wie eine leichte Rechnung zeigt:

$$a + \sqrt{a^2 + 3b^2} > b + \sqrt{b^2 + 3a^2}$$

folglich ist der Umfang der Dreiecke, deren ein Winkel im Scheitel der kleinen Axe liegt, ein Max., der Umfang der Dreiecke, deren ein Winkel im Scheitel der grossen Axe liegt, ein Min. mit obigen Werthen.

Heisst der Radius des einbeschriebenen Kreises ϱ, so ist $\varrho = \frac{2\triangle}{\alpha + \beta + \gamma}$, also im ersten Falle:

$$\varrho = \frac{3ab\sqrt{3}}{2(a + \sqrt{a^2 + 3b^2})\sqrt{3}} = \frac{a}{2b}(-a + \sqrt{a^2 + 3b^2}) \text{ ein Minimum,}$$

und im zweiten

$$\varrho = \frac{3ab\sqrt{3}}{2(b + \sqrt{b^2 + 3a^2})\sqrt{3}} = \frac{b}{2a}(-b + \sqrt{b^2 + 3a^2}) \text{ ein Maximum.}$$

J. F. Koenig.