I.

Discussion der Gleichung vom vierten Grade in Bezug auf den Sturmschen Satz.

Unter den Trennungs-Methoden der reellen Wurzeln reeller numerischer Gleichungen haben in der neusten Zeit die, welche die Wissenschaft den Herren Fourier und Sturm zu danken hat, mit Recht besondere Wichtigkeit erlangt. Der Fouriersche Satz, welcher den Cartesischen (Harriotschen) nur als einen besondern Fall in sich schliesst, lehrt, neben den Kennzeichen über das Vorhandensein imaginärer Wurzeln, aus der Anzahl der in den nöthigen Functionenreihen durch Substitution bestimmter Grenzwerthe verloren gegangenen Zeichenwechsel kennen, ob zwischen diesen Grenzen reelle Wurzeln liegen können, und wenn welche vorhanden sind entscheidet er, wie gross ihre Anzahl möglicher Weise sein kann. Der Sturmsche Satz dagegen zeigt, wie viele reelle Wurzeln die Gleichung zwischen beliebigen Werthen von x nothwendig haben muss, und hat daher bei der Rechnung vor jenem überwiegende Vortheile, wenngleich die Ableitung der Hilfsfunctionen, welche die Fouriersche Methode erfordert, da sie in blosser Differenziation besteht, weit einfacher vollzogen werden kann, als die Bildung der nach dem Sturmschen Satze nöthigen Hilfsfunctionen, von denen nur die erste durch Differenziation entsteht, die andern durch Division erhalten werden. Dieser berühmte Satz mag hier, so wie ihn sein Erfinder zum ersten Male öffentlich ausgesprochen hat *), vollständig seinen Platz finden.

*) Bulletin des sciences math., phys. et chem. par Ferussac Bd. 11. S. 419. ff. Der Beweis ist hier nicht mitgetheilt.

Soit $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0$ une équation numérique d'un degré quelconque dont on se propose de trouver toutes les racines réelles. On effectuera sur cette équation le calcul qui sert à trouver si elle a des racines égales, en ayant soin d'opérer de la manière que nous allons indiquer. La fonction entière $Ax^n + Bx^{n-1} +$ & étant désignée par V et sa dérivée $nAx^{n-1} + (n-1)\,Bx^{n-2} +$ & par V_1, il faut chercher le plus grand commun diviseur entre V et V_1. On divisera d'abord V par V_1 jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste d'un degré inférieur au degré du diviseur V_1. On pourra, si l'on veut, multiplier tous les termes de ce reste par le dénominateur commun de leurs coefficiens, s'ils sont fractionnaires, ou par un nombre positif quelconque. Ensuite il faudra changer à-la-fois tous les signes de ces mêmes termes, les signes $+$ en $-$ et les $-$ en $+$. Ce changement est nécessaire dans notre méthode. Après l'avoir fait, on aura une fonction d'un degré inférieur au degré de V_1. En la désignant par V_2 on divisera de la même manière V_1 par V_2, et l'on obtiendra un nouveau reste qu'on pourra multiplier par un nombre positif quelconque. Il faudra changer aussi les signes de tous ses termes. Ce reste ainsi modifié étant désigné par V_3 on divisera V_2 par V_3 et l'on aura un nouveau reste dont on devera changer encore tous les signes. La division de V_3 par cette nouvelle fonction V_4 donnera de même une fonction V_5 qui sera le reste de cette division pris en signe contraire et ainsi de suite. En continuant cette série de divisions et changeant toujours dans le reste de chaque division les signes de tous ses termes, on finira par arriver, si l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales, à une fonction du degré 0, c'est-à-dire à une constante numérique indépendante de x. Cette constante sera désignée par V_r l'indice r étant égal ou inférieur à n. En admettant donc que l'équation proposée $V = 0$ n'ait pas de racines égales, on aura cette suite de fonctions $V\ V_1\ V_2\ V_3\ V_4 \ldots V_{r-1}\ V_r$, dont la dernière sera un nombre tout connu positif ou négatif.

Cela posé, si l'on veut connaître combien l'équation $V = 0$ a de racines réelles comprises entre deux nombres quelconques A et B positifs ou négatifs, on substituera le premier nombre A dans toutes ces fonctions $V\ V_1\ V_2 \ldots V_{r-1}\ V_r$, on écrira par ordre sur une même ligne les signes de tous les resultats, puis on comptera le nombre des variations contenues dans la suite de ces signes. On marquera de même la suite des signes de ces mêmes fonctions pour $x = B$ et l'on comptera le nombre des variations qui se trouveront dans cette seconde suite. Si B est plus grand que A, autant l'équation $V = 0$ aura de racines réelles comprises entre A et B, autant la suite des signes des fonctions $V\ V_1\ V_2 \ldots V_r$, pour $x = B$ contiendra de variations de moins que la suite de leurs signes pour $x = A$. En d'autres termes, la différence entre le nombre des variations contenues dans la suite des signes des fonctions $V\ V_1\ V_2 \ldots V_r$ pour $x = A$, et le nombre des variations contenues dans la suite de leurs signes pour $x = B$, sera précisément égale au nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$, comprises entre A et B. Donc en particulier, si la suite des signes pour $x = A$ et celle pour $x = B$ contiennent le même nombre de variations, l'équation $V = 0$ n'aura aucune racine entre A et B.

Ce théorème sera toujours vrai lors même que pour $x = A$ ou pour $x = B$ une ou plusieurs des fonctions $V_1\ V_2 \ldots$ se réduiront à zéro; dans ce cas, il suffira de ne point avoir égard aux fonctions qui s'évanouiront, ou de les omettre dans la suite des signes.

Lorsque le nombre des fonctions auxiliaires $V_1\ V_2$ & est égal au degré n de l'équation $V = 0$, ce qui arrive ordinairement, on déduit du théorème qui vient d'être énoncé le suivant: autant la suite des signes des coefficiens des plus hautes puissances de x dans les fonctions $V_1\ V_2 \ldots V_r$ contient de variations, autant l'équation $V = 0$ a de couples de racines imaginaires. Il s'ensuit que l'équation $V = 0$ a toutes ses racines réelles lorsque les coefficiens des premiers termes de ces fonctions sont tous de même signe.

Quand le nombre des fonctions auxiliaires $V_1\ V_2$ & est plus petit que n, on trouve aisément le nombre total de ses racines réelles par l'application du théorème général.

H. Crelle hat den Satz in seinem Journale für reine und angewandte Math. Bd. 13. S. 133 ff. bewiesen und seine Anwendung auf die Gleichungen des zweiten und dritten Grades gegeben. Bezeichnet man mit ihm die Gleichung vom vierten Grade, Kürze halber ohne zweites Glied *), mit Fx, die abgeleiteten Functionen mit F_1x, F_2x, F_3x, F_4 und die Reihe derjenigen Glieder allein, die in den Grössen Fx, F_1x & die höchste Potenz von x enthalten mit [x], so ist die Anzahl der negativen Wurzeln gleich dem Unterschiede der Anzahl der Zeichenwechsel in den Reihen $[-\infty]$ und (0) und die Anzahl der positiven Wurzeln gleich dem Unterschiede der Anzahl der Zeichenwechsel in den Reihen (0) und $[+\infty]$.

---

*) Heisst die vollständige Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, so ist:

$$
\begin{aligned}
Fx &= x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \\
F_1x &= 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \\
F_2x &= (3a^2 - 8b)\,x^2 + 2\,(ab - 6c)\,x + (ac - 16d) \\
F_3x &= -\,2\,[(ab - 6c)^2 - (3a^2 - 8b)\,(b^2 - 2ac - 4d)]\,x \\
&\quad - [(3a^2 - 8b)\,(6ad - bc) + (ac - 16d)\,(ab - 6c)] \\
&= -\,2Mx - N \\
F_4 &= 4\,(ab - 6c)\,MN + (3a^2 - 8b)\,N^2 - 4\,(ac - 16d)\,M^2
\end{aligned}
$$

Man sieht leicht wie weitläufig und doch wenig lohnend eine vollständige Untersuchung sämmtlicher Fälle sein würde, daher es genügen mag $x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ zu betrachten, welche Gleichung man sogleich aus jener erhält, wenn man $\alpha = -\frac{3}{8}a^2$, $\beta = \frac{a^3}{8} + c - \frac{ab}{2}$, $\gamma = \frac{a^2 b}{16} - \frac{3a^4}{16^2} - \frac{ac}{4} + d$ setzt.

Die Functionenreihe ist nun für die Gleichung $x^2 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ folgende: *)

$$Fx = x^4 + \alpha x^2 \pm \beta x + \gamma$$
$$F_1 x = 4x^3 \pm 2\alpha x + \beta$$
$$F_2 x = -(2\alpha x^2 + 3\beta x + 4\gamma)$$
$$F_3 x = -[9\beta^2 \pm 2\alpha(\alpha^2 - 4\gamma)]\, x - \beta(\alpha^2 + 12\gamma) = -Px - \beta(\alpha^2 + 12\gamma)$$
$$F_4 = 16\gamma(\alpha^2 - 4\gamma)^2 - \beta^2\,[27\beta^2 + 4\alpha(\alpha^2 - 36\gamma)] = Q.$$

also

	Fx,	F_1x,	F_2x,	F_3x,	F_4,
$[-\infty] =$	$+$	$-$	$-\alpha$	$+P$	$+Q$
$(0) =$	$+\gamma$	$+\beta$	$-\gamma$	$-\beta(\alpha^2 + 12\gamma)$	$+Q$
$[\ \infty] =$	$+$	$+$	$-\alpha$	$-P$	$+Q$

Da das ganze Verfahren kein anderes ist, als das, die gleichen Wurzeln zu finden, so mag über dieselben hier kurz Folgendes angeführt werden. Die Gleichung hat für $Q = 0$ zwei gleiche Wurzeln, die sich aus $F_3 x = 0$ ergeben; heisst die zweimal vorkommende a, so ist

$$1)\quad a = -\frac{\beta(\alpha^2 + 12\gamma)}{9\beta^2 + 2\alpha(\alpha^2 - 4\gamma)},$$

also, wenn man die ungleichen mit b bezeichnet

$$2)\quad b = -a \pm i\sqrt{2a^2 + \alpha}, \text{**)}$$

welche für α negativ und $> 2a^2$ reell werden. Da allgemein, wenn die reellen c und d, die imaginären $-\frac{c+d}{2} \pm e\,i$ heissen, $e = \sqrt{\frac{\gamma}{c\,d} - \left(\frac{c+d}{2}\right)^2}$ ist, so können in unserm Falle die ungleichen auch geschrieben werden:

$$3)\quad b = -a \pm i\sqrt{\frac{\gamma}{a^2} - a^2}.$$

Aus beiden Werthen für b erhält man

$$4)\quad a^2 = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 12\gamma}}{6}$$

woraus sogleich erhellet, dass gleiche Wurzeln nicht existiren können, wenn α positiv und γ negativ, auch nicht wenn α und γ negativ und zugleich $12\gamma > \alpha^2$, ferner dass für ein positives γ der Wurzelgrösse nur das positive

*) Diese Ausdrücke sind von H. Crelle a. a. O. S. 143. schon mitgetheilt, jedoch steht dort beide Male $(a + 12\gamma)$ statt $(a^2 + 12\gamma)$, und F_3x ist $= P$ gesetzt, was nicht sein darf, wenn in den Reihen $[-\infty]$ und $[+\infty]$ P stehen bleiben soll.

**) $i = \sqrt{-1}$.

Zeichen zu geben ist. Für ein negatives γ, in welchem Falle für ein mögliches a auch α negativ sein muss und zugleich $\alpha^2 > 12\gamma$ ($\alpha^2 = 12\gamma$ giebt drei gleiche Wurzeln), ist die Wurzelgrösse ($\pm$) je nachdem a, d. i. $\frac{\beta(\alpha^2 - 12\gamma)}{2\alpha(\alpha^2 + 4\gamma) - 9\beta^2} \gtrless \sqrt{\frac{\alpha}{6}}$, wo α und γ positiv sind. Z. B.

$$x^4 - 17x^2 + 36x - 20 = 0;\ x = 2, = 2, = 1, = -5,\ x = +\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 12\gamma}}{6}}$$

$$x^4 - 11x^2 + 18x - 8 = 0;\ x = 1, = 1, = 2, = -4,\ x = +\sqrt{\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 12\gamma}}{6}}$$

Noch mag bemerkt werden, dass für $a^2 \gtrless \frac{\alpha}{6}$, d. i. für $\pm$ der Wurzelgrösse, die gleiche Wurzel $\binom{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ ist, als die ungleiche mit demselben Zeichen. Denn für die gleiche a heisst die ungleiche mit demselben Zeichen nach 3), da γ negativ, $b = -a + \sqrt{\frac{\gamma}{a^2} + a^2} = -a + \sqrt{\alpha - 2a^2}$, wenn man für γ den Werth aus 4) substituirt. Aber wegen $\alpha \lessgtr 6a^2$ ist $\alpha = 6a^2 \mp \delta$, wo δ eine positive Grösse bedeutet, also $b = -a + \sqrt{4a^2 \mp \delta}$, d. i. $\lessgtr$ a.

Das Zeichen von a selbst, nach 4) berechnet, ergiebt sich erst später.

Hat Fx zwei gleiche Wurzeln, so müssen, da die erste Derivation allgemein den Factor $(x-a)^{m-1}$ enthalten muss, wenn die Gleichung den $(x-a)^m$ enthält, Fx und F_1x eine reelle Wurzel gemein haben, die man, wenn α positiv ist, oder negativ und zugleich $27\beta^2 > 8\alpha^3$, auch aus $F_1x = 0$ nach der Cardanischen Formel erhält, nämlich:

$$a = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{8} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{8}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{6}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{\beta}{8} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{8}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{6}\right)^3}}$$

Ist auch $F_3x = 0$, was nur möglich ist, wenn 1) $\beta = 0$ und $\alpha^2 - 4\gamma = 0$, oder 2) $\alpha^2 + 12\gamma = 0$ und $27\beta^2 = 8\alpha^3$, so ist im ersten Falle aus $F_2x = 0$,

$$a = \pm\sqrt{-\frac{2\gamma}{\alpha}} \text{ (nur möglich für ein negatives } \alpha\text{, da } \gamma \text{ positiv),}$$

$$= \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt[4]{+\gamma} \text{ für } \alpha \text{ negativ,}$$

$$= \pm\sqrt[4]{-\gamma} \text{ für } \alpha \text{ positiv,}$$

und da dieses Wurzeln für F_1x sind, so hat Fx zwei Paar gleiche Wurzeln $\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}$. Im zweiten Falle ist aus $F_2x = \left(x + \frac{3\beta}{4\alpha}\right)^2 = 0$

$$a = -\frac{3\beta}{4\alpha} = +\sqrt{-\frac{\alpha}{6}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\beta} = +\sqrt[4]{-\frac{\gamma}{3}}$$

(nur möglich für α und γ negativ). Diese Wurzel enthält F_1x zweimal, also Fx dreimal; die ungleiche ist $b = -3a$.

In der folgenden Betrachtung konnte, da die Aenderung des Zeichens von β nur das Zeichen der Wurzeln ändert, β immer positiv gelassen werden, so dass nur 4 Fälle zu unterscheiden blieben, nämlich I. α und γ sind $+$; II. α ist $+$, γ $-$; III. α ist $-$, γ $+$; IV. α und γ sind $-$. Die Relationen selbst zwischen den Coefficienten enthalten nur die positiven Werthe.

I. α und γ sind positiv.

A. P. und Q sind positiv.

In diesem Falle sind die Zeichen obiger Reihen folgende: *)

	Fx,	F_1x,	F_2x,	F_3x,	F_4,
$[-\infty] =$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(0) =$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$[-\infty] =$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

also hat die Gleichung, da jede Reihe zwei Zeichenwechsel enthält, keine reelle Wurzel. Es ist aber

Q positiv, wenn: $\beta^2(27\beta^2 + 4\alpha^3) < 16\gamma\,[9\,\alpha\beta^2 + (\alpha^2 - 4\gamma)^2]$,

d. i. $27\beta^2 < 32\alpha^3$ für $\alpha^2 = 4\gamma$; $27\beta^4 < 16^2\gamma^3$ für $\alpha = 0$;

endlich $Q = 16\gamma\,(\alpha^2 - 4\gamma)^2$ wenn $\beta = 0$,

P positiv, wenn:

1) $\alpha = 0$: $x^4 + 480x + 1924 = 0$; $x = 5 \pm 7i, = -5 \pm i$

2) $\alpha^2 = 4\gamma$: $x^4 + 30x^2 + 32x + 225 = 0$; $x = 1 \pm \sqrt{-24}, = -1 \pm \sqrt{-8}$

3) $\alpha^2 > 4\gamma$: $x^4 + 10x^2 + 20x + 24 = 0$; $x = 1 \pm \sqrt{-11}, = -1 \pm i$

Hier kann auch $\beta = 0$ sein: $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$; $x = \pm i, = \pm 2i$

4) $\alpha^2 < 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 > 2\,\alpha\,(4\gamma - \alpha^2)$:

$x^4 + x^2 + 30x + 336 = 0$; $x = 3 \pm \sqrt{-12}, = -3 \pm \sqrt{-7}$

B. P ist positiv, Q negativ.

Die Reihe $[-\infty]$ hat drei, die Reihen (0) und $[+\infty]$ haben jede einen Zeichenwechsel, also sind zwei Wurzeln negativ, zwei imaginär.

---

*) Um unnöthige Weitläufigkeit zu vermeiden, sind in der Folge diese Zeichenreihen nicht weiter hingesetzt.

Q ist negativ, wenn: $\beta^2 (27\beta^2 + 4\alpha^3) > 16\gamma [9\alpha\beta^2 + (\alpha^2 - 4\gamma)^2]$
d. i. $27\beta^2 > 32\alpha^2$ wenn $\alpha^2 = 4\gamma$; $27\beta^4 > 16^2\gamma^3$ wenn $\alpha = 0$;
endlich $Q = -4\gamma$ für $\alpha = \beta = 0$,

P ist positiv wie bei A, wenn:

1) $\alpha = 0$: $x^4 + 40x + 39 = 0$; $x = -1, = -3, = 2 \pm 3i$

2) $\alpha^2 = 4\gamma$: $x^4 + 28x^2 + 225x + 196 = 0$; $x = -1, = -4, = \frac{5 \pm \sqrt{-171}}{2}$

3) $\alpha^2 > 4\gamma$: $x^4 + 38x^2 + 384x + 345 = 0$; $x = -1, = -5, = 3 \pm \sqrt{-60}$

4) $\alpha^2 < 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 > 2\alpha(4\gamma - \alpha^2)$

$$x^4 + x^2 + 44x + 42 = 0, x = -1, = -3, = 2 \pm \sqrt{-10}$$

Für $\alpha^2 < 4\gamma$ und $9\beta^2 = 2\alpha(4\gamma - \alpha^2)$ d. h. $P = 0$ ist F_3x das von x unabhängige Glied, also $Q = -\beta(\alpha^2 + 12\gamma)$. Jede der drei Reihen hat dann einen Zeichenwechsel, folglich die Gleichung keine reelle Wurzel.

$$x^4 + 6x^2 + 8x + 21 = 0;\ x = 1 \pm \sqrt{-6}, = -1 \pm \sqrt{-2}$$

Dasselbe Resultat giebt $\alpha = \beta = 0$, wodurch schon $F_2x = -4\gamma = Q$ wird.

$$x^4 + 16 = 0;\ x = (\pm 1 \pm i)\sqrt{2}$$

C. P ist negativ, Q positiv.

Jede der drei Reihen hat zwei Zeichenwechsel, also die Gleichung keine reelle Wurzel.

P ist negativ wenn $\alpha^2 < 4\gamma$ und $9\beta^2 < 2\alpha(4\gamma - \alpha^2)$,
Q ist positiv wie bei A.

$$x^4 + 6x^2 + 4x + 24 = 0;\ x = 1 \pm \sqrt{-5}, = -1 \pm \sqrt{-3}$$

für $\beta = 0$: $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$; $x = \pm 1 \pm 2i$.

D. P und Q sind negativ.

Dieser Fall kann nicht eintreten. Denn P ist nur negativ, wenn $4\gamma > \alpha^2$ und zugleich $9\beta^2 < 2\alpha(4\gamma - \alpha^2)$. Aus dem zweiten Ausdrucke folgt aber, wenn man quadrirt und $36\alpha^3\beta^2$ addirt:

$$3\beta^2 (27\beta^2 + 12\alpha^3) < 4\alpha^2 [9\alpha\beta^2 + (4\gamma - \alpha^2)^2]$$

also auch, da $16\gamma > 4\alpha^2$,

$$3\beta^2 (27\beta^2 + 12\alpha^3) < 16\gamma [9\alpha\beta^2 + (4\gamma - \alpha^2)^2]$$

folglich um so mehr

$$\beta^2 (27\beta^2 + 12\alpha^3) < 16\gamma [9\alpha\beta^2 + (4\gamma - \alpha^2)^2]$$

wofür Q **positiv** ist.

E P ist positiv, Q = 0.

Für $Q = 0$, d. h. $\beta^2(27\beta^2 + 4\alpha^3) = 16\gamma [9\alpha\beta^2 + (4\gamma - \alpha^2)^2]$ müssen zwei, oder zwei Paar Wurzeln gleich sein (S. 4 bis 6.). Sind zwei gleich, so können diese nach B. nur negativ und die andern beiden imaginär sein; die paarweise gleichen, die nach S. 5., wo die Ausdrücke für die gleichen Wurzeln gegeben sind, $\beta = 0$ erfordern und den Werth $\pm \sqrt{-\frac{\alpha}{2}}$ haben, sind für $+\alpha$ imaginär.

P ist positiv, wenn:

1) $\alpha = 0$, also, wegen $Q = 0$, $27\beta^4 = 16^2\gamma^3$

$$x^4 + 4x + 3 = 0;\ x = -1, = -1, = 1 \pm \sqrt{-2}$$

$$\text{allgemein } a = -\frac{4\gamma}{3\beta} = -\sqrt[3]{\frac{\beta}{4}} = -\sqrt[4]{\frac{\gamma}{3}}$$

$$b = -a \pm a\sqrt{-2}$$

2) $\alpha^2 = 4\gamma$, also wegen $Q = 0$, $27\beta^4 = 32\alpha^3\beta^2$,

d. h. a) $\beta = 0$: $x^4 + 8x^2 + 16 = 0$; $x = \pm 2i$, $= \pm 2i$

$$\text{allgemein } a = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt[4]{-\gamma}$$

oder b) $27\beta^2 = 32\alpha^3$: $x^4 + 6x^2 + 16x + 9 = 0$; $x = -1, = -1, = 1 \pm \sqrt{-8}$

$$\text{allgemein } a = -\frac{4\alpha^2}{9\beta} = -\frac{16\gamma}{9\beta} = -\sqrt{\frac{\alpha}{6}}$$

$$b = -a \pm i\sqrt{2a^2 + \alpha} = -a \pm i\sqrt{\frac{\gamma}{a^2} - a^2}$$

3) $\alpha^2 > 4\gamma$: $x^4 + 7x^2 + 18x + 10 = 0$; $x = -1, = -1, = 1 \pm 3i$

4) $\alpha^2 < 4\gamma$ und $9\beta^2 > 2\alpha(4\gamma - \alpha^2)$

$$x^4 + 2x^2 + 8x + 5 = 0;\ x = -1, = -1, = 1 \pm 2i$$

Der Fall $P = 0$ d. h. $9\beta^2 = 2\alpha(4\gamma - \alpha^2)$ kann hier nicht eintreten. Denn dann wäre $Q = -\beta(\alpha^2 + 12\gamma)$ nur $= 0$ für $\beta = 0$, also wegen $P = 0$ entweder auch $\alpha = 0$, und das geht nicht an, da für $\alpha = \beta = 0$ nach B. alle Wurzeln ungleich imaginär sind, indem $Q = -4\gamma$; oder $\alpha^2 = 4\gamma$, was wieder gegen $\alpha^2 < 4\gamma$ streitet.

F. P ist negativ, $Q = 0$.

Nach D. muss Q für ein negatives P positiv sein; es lässt sich aber auch leicht zeigen, dass die Ausdrücke, welche hier stattfinden müssten, unvereinbar sind. Nämlich wie bei D. müsste wegen des negativen P

$$3\beta^2(27\beta^2 + 12\alpha^3) < 16\gamma[9\alpha\beta^2 + (4\gamma - \alpha^2)^2] \text{ sein}$$

und wegen $Q = 0$: $16\gamma[9\alpha\beta^2 + (4\gamma - \alpha^2)^2] = \beta^2(27\beta^2 + 4\alpha^3)$

$$\text{also } 3\beta^2(27\beta^2 + 12\alpha^3) < \beta^2(27\beta^2 + 4\alpha^3)$$

was nicht angeht.

Die Wurzeln sind also bei positiven Werthen von α und γ

𝔄. **sämmtlich imaginär**

1) wenn: $\beta^2(27\beta^2 + 4\alpha^3) < 16\gamma\,[9\alpha\beta^2 + (\alpha^2 - 4\gamma)^2]$ d. h.
in speciellen Fällen wenn $\beta = 0$; $\alpha = \beta = 0$;
$27\beta^2 < 32\alpha^3$ für $\alpha^2 = 4\gamma$; $27\beta^4 < 16^2\gamma^3$ für $\alpha = 0$.

2) wenn $\alpha^2 < 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 = 2\alpha\,(4\gamma - \alpha^2)$

𝔅. **Zwei sind negativ, zwei imaginär,** wenn:

$$\beta^2(27\beta^2 + 4\alpha^3) \geqq 16\gamma\,[9\alpha\beta^2 + (\alpha^2 - 4\gamma)^2] \text{ d. h.}$$

$$27\beta^2 \geqq 32\alpha^3 \text{ für } \alpha^2 = 4\gamma;\ 27\beta^4 \geqq 16^2\gamma^3 \text{ für } \alpha = 0.$$

II. α ist positiv, γ negativ.

Hier ist immer, auch für α oder $\beta = 0$, P positiv, Q negativ. Noch ist der Factor $(\alpha^2 - 12\gamma)$ in der Reihe (0) zu berücksichtigen, der sein Zeichen ändert je nachdem $\alpha^2 \gtrless 12\gamma$, und verschwindet für $\alpha^2 = 12\gamma$. In diesem letzten Falle kann das fortfallende Glied ± 0 genommen, oder nach dem Satze ganz fortgelassen werden, die Anzahl der Zeichenwechsel in den drei Reihen $[-\infty]$, (0), $[+\infty]$ bleibt immer ungeändert resp. 3, 2, 1, so dass für $+\alpha$ und $-\gamma$ die Gleichung stets eine positive und eine negative reelle Wurzel hat. *)

1) $\alpha = 0$: $x^4 + 20x - 21 = 0$; $x = 1, = -3, = 1 \pm \sqrt{-6}$
2) $\alpha^2 = 12\gamma$: $x^4 + 42x^2 + 104x - 147 = 0$; $x = 1, = -3, = 1 \pm \sqrt{-48}$
3) $\alpha^2 > 12\gamma$: $x^4 + 43x^2 + 106x - 150 = 0$; $x = 1, = -3, = 1 \pm 7i$
4) $\alpha^2 < 12\gamma$: $x^4 + x^2 + 22x - 24 = 0$; $x = 1, = -3, = 1 \pm \sqrt{-7}$
5) $\beta = 0$: $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 1, = \pm 2i$

Für $\alpha = \beta = 0$, also $F_2x = +4\gamma = Q$, sind die Zahlen für die Zeichenwechsel jener Reihen 2, 1, 0, folglich wieder eine positive und eine negative reelle Wurzel

$$x^4 - 16 = 0;\ x = \pm 2, = \pm 2i.$$

III. α ist negativ, γ positiv.

A. P und Q sind positiv.

Jede der drei Reihen giebt zwei Zeichenwechsel, also hat die Gleichung keine reelle Wurzel. Es ist aber

---

*) Sind zwei Wurzeln imag. und von den reellen eine +, die andere −, so muss bei $+\beta$ die negative grösser sein als die positive.

Q positiv, wenn: $4\,[\alpha^3\beta^2 + 4\gamma\,(\alpha^2 - 4\gamma)^2] > 9\beta^2\,(3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$
d. i. $16^2\gamma^3 > 27\beta^4$, für $\alpha = 0$,
und $Q = 16\gamma\,(\alpha^2 - 4\gamma)^2$, für $\beta = 0$.
P′ positiv, wenn:
1) $\alpha = 0$: wie I. A. 1)
2) $\alpha^2 < 4\gamma$: $x^4 - 5x^2 + 4x + 30 = 0$; $x = 2 \pm \sqrt{-2}, = -2 \pm i$
Hier kann auch $\beta = 0$ sein: $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$; $x = \pm 2 \pm i$

B. P ist positiv, Q negativ.

Es hat $[-\infty]$ drei, (0) einen, $[+\infty]$ auch einen Zeichenwechsel, also die Gleichung zwei negative reelle Wurzeln.

Q ist negativ, wenn: $4\,[\alpha^3\beta^2 + 4\gamma\,(\alpha^2 - 4\gamma)^2] < 9\beta^2\,(3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$
d. i. $16^2\gamma^3 < 27\beta^4$, für $\alpha = 0$
und $Q = -\beta^2\,(27\beta^2 + 32\alpha^3)$, für $\alpha^2 = 4\gamma$,
$= -4\gamma$, für $\alpha = \beta = 0$,
P ist positiv, wenn:
1) $\alpha = 0$: wie I. B. 1)
2) $\alpha^2 = 4\gamma$: $x^4 - 12x^2 + 25x + 36 = 0$; $x = -1 = -4, = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2}$
3) $\alpha^2 < 4\gamma$: $x^4 - 5x^2 + 20x + 24 = 0$; $x = -1 = -3, = 2 \pm 2i$
$\beta = 0$ würde hier zwar P + geben, aber Q auch +, da dieses doch — sein soll.
4) $\alpha^2 > 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 > 2\alpha\,(\alpha^2 - 4\gamma)$
$x^4 - 8x^2 + 8x + 15 = 0$; $x = -1, = -3, = 2 \pm i$

In diesem letzten Falle kann Q nicht positiv sein, da die drei Ausdrücke P und Q positiv und $\alpha^2 > 4\gamma$ nicht zugleich bestehen können; es konnte also bei A. $\alpha^2 > 4\gamma$ aber zugleich $9\beta^2 > 2\alpha\,(\alpha^2 - 4\gamma)$ eben so wenig wie $\alpha^2 = 4\gamma$ vorkommen, indem zwar beide P +, aber Q — geben. Setzt man nämlich $\alpha^2 = 4\gamma + \delta$, also $4(\alpha^2 - \delta)$ für 16γ, δ für $\alpha^2 - 4\gamma$, $9\delta - 8\alpha^2$ für $\alpha^2 - 36\gamma$
in $P = 9\beta^2 - 2\alpha\,(\alpha^2 - 4\gamma)$
und in $Q = 16\gamma\,(\alpha^2 - 4\gamma)^2 - 27\beta^4 + 4\alpha\beta^2\,(\alpha^2 - 36\gamma)$,
so erhält man:

$$Q = -\frac{1}{3}P^2 - \frac{4}{3}(4\alpha^2 - 3\delta)\,(6\alpha\beta^2 - \delta^2)$$

$$= -\frac{1}{3}P^2 - \frac{4}{3}(\alpha^2 + 12\gamma)\,(6\alpha\beta^2 - \delta^2)$$

Da aber P positiv sein soll ist $\beta^2 > \frac{2\alpha\delta}{9}$,

$$\text{also } 6\alpha\beta^2 > \frac{4}{3}\,\alpha^2\,\delta$$
$$> \frac{4}{3}\,\delta\,(4\gamma + \delta)$$
$$\text{und } 6\alpha\beta^2 - \delta^2 > \frac{\delta}{3}\,(16\gamma + \delta),$$

folglich, da δ eine positive Grösse, der Factor $(6\alpha\beta^2 - \delta^2)$ positiv und Q nur negativ. Für $\delta = 0$, d. h. $\alpha^2 = 4\gamma$, ist hiernach Q auch negativ, übereinstimmend mit obigem Werthe $Q = -\beta^2\,(27\beta^2 + 32\alpha^3)$ für $\alpha^2 = 4\gamma$.

Q wird noch negativ, nämlich $= -\beta\,(\alpha^2 + 12\gamma)$, wenn $P = 0$, d. h. $\alpha^2 > 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 = 2\alpha\,(\alpha^2 - 4\gamma)$. Die Zahlen für die Zeichenwechsel in den drei Reihen sind hier 3, 1, 1, also ebenfalls zwei Wurzeln reell und negativ.

$$x^4 - 6x^2 + 4x + 6 = 0;\ x = -0,7448..,\ = -2,5784..$$
$$= 1,6616.. \pm i\,0,6026..$$

Der Fall endlich $\alpha = \beta = 0$ ist schon bei I. B. vorgekommen.

C. P ist negativ, Q positiv.

$[-\infty]$ hat vier, (0) zwei, $[-\infty]$ keinen Zeichenwechsel, also enthält die Gleichung zwei positive und zwei negative reelle Wurzeln.

P ist negativ wenn: $\alpha^2 > 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 < 2\alpha\,(\alpha^2 - 4\gamma)$

Q positiv wie bei A.

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0;\ x = 2,\ = 3,\ = -1,\ = -4$$
$$\text{für } \beta = 0:\ x^4 - 5x^2 + 4 = 0;\ x = \pm 1,\ = \pm 2$$

D. P und Q sind negativ.

In diesem Falle sind zwei Wurzeln reell und negativ, denn $[-\infty]$ hat drei Zeichenwechsel, (0) und $[+\infty]$ jede einen.

P ist negativ wie bei C.

Q negativ wie bei B.

$$x^4 - 64x^2 + 180x + 243 = 0;\ x = -1,\ = -9,\ = 5 \pm \sqrt{-2}$$

$\beta = 0$ würde Q+ machen. S. A.

E. P ist positiv, $Q = 0$.

Die gleichen Wurzeln sind nach B. negativ.

$Q = 0$, wenn: $4\,[\alpha^3\beta^2 + 4\gamma\,(\alpha^2 - 4\gamma)^2] = 9\beta^2\,(3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$

P ist positiv, wenn:

1) $\alpha = 0$: wie I. E. 1)

2) $\alpha^2 = 4\gamma$, also, wegen $Q = 0$, $\beta^2\,(27\beta^2 + 32\alpha^3) = 0$. Da dieser Gleichung nur durch $\beta = 0$ genügt werden kann, so hat man nach S. 5. und 6. zwei Paar gleiche Wurzeln, nämlich:

$$a = \pm\sqrt{-\frac{2\gamma}{\alpha}} = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt[4]{\gamma}$$

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0;\ x = \pm 2,\ = \pm 2.$$

3) $\alpha^2 < 4\gamma$: $x^4 - x^2 + 2x + 2 = 0$; $x = -1,\ = -1,\ = 1 \pm i$

4) $\alpha^2 > 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 > 2\alpha\ (\alpha^2 - 4\gamma)$, welcher Fall aber hier nicht eintreten kann, da er nach B. immer ein negatives Q giebt. Eben so wenig kann $9\beta^2 = 2\alpha\ (\alpha^2 - 4\gamma)$ d. h. $P = 0$ sein, weil dann $Q = -\beta\ (\alpha^2 + 12\gamma)$ nur $= 0$ wird für $\beta = 0$, also, wegen $P = 0$, entweder $\alpha = 0$, was nicht angeht, da für $a = \beta = 0$ $F_2 x = -4\gamma = Q$, oder $\alpha^2 - 4\gamma = 0$, gegen $\alpha^2 > 4\gamma$.

F. P ist negativ, Q = 0.

Nach dem Sturmschen Satze fehlt hier die Entscheidung, ob die gleichen Wurzeln positiv oder negativ sind, aber da für zwei positive gleiche Wurzeln $+a$, $+a$ und zwei negative $-b$, $-(2a - b)$ die Gleichung $x^4 - [2a^2 + (a - b)^2]\ x^2 + 2a\ (a - b)^2 x + (2a - b)\ a^2 b = 0$ entsteht, so haben die gleichen Wurzeln mit β dasselbe Zeichen, d. h. hier das positive. Sind wiederum nach D. zwei gleiche Wurzeln negativ $-a$, $-a$, zwei imaginär $a \pm ci$, so heisst die Gleichung $x^4 - (2a^2 - c^2)\ x^2 + 2ac^2 x + a^2\ (a^2 + c^2) = 0$. Wegen $\alpha^2 > 4\gamma$ müsste dann $c^2 > 8a^2$ sein, wodurch α positiv würde, was nicht sein soll. Die gleichen Wurzeln sind also nicht, wie man gerade nach der Vergleichung von C. mit D. erwarten sollte, negativ, sondern positiv.

$$x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0;\ x = 2,\ = 2,\ = -1,\ = -3.$$

Bei $-\alpha$ und $+\gamma$ sind also

𝔄. alle Wurzeln imaginär, wenn
$\alpha^2 < 4\gamma$ und zugleich $4\ [\alpha^3\beta^2 + 4\ (\alpha^2 - 4\gamma)^2] > 9\beta^2\ (3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$ d. h. statt dieses Letzteren in den besondern Fällen, wenn $\beta = 0$; $\alpha = \beta = 0$; $16^2\gamma^3 > 27\beta^4$, für $\alpha = 0$;

𝔅. zwei imaginär, zwei reell negativ, wenn
$4\ [\alpha^3\beta^2 + 4\ (\alpha^2 - 4\gamma)^2] \leqq 9\beta^2\ (3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$, und zwar muss die Ungleichheit schon stattfinden in den speciellen Fällen 1) $\alpha^2 = 4\gamma$, 2) $\alpha^2 > 4\gamma$ aber $9\beta^2 \geqq 2\alpha\ (\alpha^2 - 4\gamma)$; für die Gleichheit ist $\alpha = 0$, oder $\alpha^2 < 4\gamma$.

ℭ. zwei positiv, zwei negativ reell, wenn
$4\,[\alpha^3\beta^2 + 4\ (\alpha^2 - 4\gamma)^2] \geqq 9\beta^2\ (3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$ und zugleich $\alpha^2 > 4\gamma$ aber $9\beta^2 < 2\alpha\ (\alpha^2 - 4\gamma)$, oder im Falle der Gleichheit $\alpha^2 = 4\gamma$ und $\beta = 0$.

IV. α und γ sind negativ.

A. P und Q sind positiv.

P ist positiv für $9\beta^2 > 2\alpha\ (\alpha^2 + 4\gamma)$

Q ist positiv für $4\alpha\beta^2\ (\alpha^2 + 36\gamma) > 27\beta^4 + 16\gamma\ (\alpha^2 + 4\gamma)^2$

Aus diesen positiven Werthen für P und Q folgt

$$1)\ \beta^2 = \frac{2\alpha\,(\alpha^2 + 12\gamma)}{9} + \delta$$

$$2)\ 4\alpha\beta^2\,(\alpha^2 + 36\gamma) = 27\beta^4 + 16\gamma\,(\alpha^2 + 4\gamma)^2 + \Delta,$$

wo δ und Δ nur positiv sein können. Setzt man den Werth für β^2 aus 1) in 2), so erhält man die Gleichung:

$$\delta^2 - \frac{8\,(12\gamma - \alpha^2)\,\alpha}{27.}\,\delta = -\frac{4\,(\alpha^2 + 4\gamma)\,(12\gamma - \alpha^2)^2}{9.\,27.} - \Delta$$

also δ nur möglich wenn

$$\frac{16\,(12\gamma - \alpha^2)^2\,\alpha^2}{27^2} \geqq \frac{4\,(\alpha^2 + 4\gamma)\,(12\gamma - \alpha^2)^2}{9.\,27.} + \Delta$$

d. h. wenn $\alpha^2 > 12\gamma$ *)

Aus P positiv ergiebt sich aber ferner

$$81\beta^4 + 4\alpha^2\,(\alpha^2 + 4\gamma)^2 > 36\alpha\beta^2\,(\alpha^2 + 4\gamma),$$

also wenn man hier für den Fall, dass $\alpha^2 > 12\gamma$ sein sollte, links $12\gamma + \delta'$ für den Factor α^2 setzt, rechts $8.\,36.\,\alpha\beta^2 - 8.\,36.\,\alpha\beta^2$ hinzufügt und nach einigen Umformungen durch 3 dividirt:

$$27\beta^4 + 16\gamma\,(\alpha^2 + 4\gamma)^2 > 4\alpha\beta^2\,(\alpha^2 + 36\gamma) + \frac{4}{3}\,\delta'\,[6\alpha\beta^2 - (\alpha^2 + 4\gamma)^2]$$

Nun folgt aus $9\beta^2 > 2\alpha\,(\alpha^2 + 4\gamma)$:

$$6\alpha\beta^2 > \frac{4\alpha^2}{3}\,(\alpha^2 + 4\gamma)$$

und aus $\alpha^2 > 12\gamma$:

$$\frac{4\alpha^2}{3}\,(\alpha^2 + 4\gamma) > (\alpha^2 + 4\gamma)^2$$

also um so mehr $6\alpha\beta^2 > (\alpha^2 + 4\gamma)^2$ folglich der Factor $[6\alpha\beta^2 - (\alpha^2 + 4\gamma)^2]$ positiv und

$$27\beta^4 + 16\gamma\,(\alpha^2 + 4\gamma)^2 > 4\alpha\beta^2\,(\alpha^2 + 36\gamma)$$

wofür Q negativ ist. P und Q können also nicht zugleich positiv sein.

Ist $P = 0$, d. h. $9\beta^2 = 2\alpha\,(\alpha^2 + 4\gamma)$, so wird $Q = -\beta\,(\alpha^2 - 12\gamma)$ positiv für $\alpha^2 < 12\gamma$. Die Anzahl der Zeichenwechsel in den drei Reihen 2, 1, 0, zeigt dann, dass die Gleichung eine positive und eine negative reelle Wurzel hat.

$$x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0;\ x = 1{,}6118..,\ = -2{,}2942..$$
$$= 0{,}3412..\ \pm i\ 1{,}4308..$$

*) Für $\alpha^2 = 12\gamma$ ist $Q = -\frac{1}{3}P^2$, woraus sogleich folgt, dass nicht $\alpha^2 = 12\gamma$ sein kann.

B. P ist positiv, Q negativ.

Auch hier mag, wie bei II., der Factor $(\alpha^2 - 12\gamma)$ in der Reihe (0) positiv oder negativ (also auch $\pm$ 0) sein, d. h. $\alpha^2 \gtreqless 12\gamma$, oder auch $\alpha = 0$, die Anzahl der Zeichenwechsel bleibt in $[-\infty]$ drei, in (0) zwei, in $(+\infty)$ eins, also hat die Gleichung eine positive und eine negative reelle Wurzel.

P ist positiv wie bei A.

Q negativ, wenn: $4\alpha\beta^2 (\alpha^2 + 36\gamma) < 27\beta^4 + 16\gamma (\alpha^2 + 4\gamma)^2$

1) $\alpha = 0$: wie II. 1)

2) $\alpha^2 = 12\gamma$: $x^4 - 84x^2 + 671x - 588 = 0$; $x = 1, = -12, = \frac{11 \pm \sqrt{-7^5}}{2}$

3) $\alpha^2 > 12\gamma$: $x^4 - 33x^2 + 102x - 70 = 0$; $x = 1, = -7, = 3 \pm i$

4) $\alpha^2 < 12\gamma$: $x^4 - 5x^2 + 10x - 6 = 0$; $x = 1, = -3, = 1 \pm i$

Für $P = 0$, also $9\beta^2 = 2\alpha (\alpha^2 + 4\gamma)$ wird $Q = -\beta (\alpha^2 - 12\gamma)$ negativ wenn $\alpha^2 > 12\gamma$. Die Zahlen 3, 2, 1, für die Zeichenwechsel in den drei Reihen deuten ebenfalls auf eine positive und eine negative reelle Wurzel.

$$x^4 - 16x^2 + 32x - 8 = 0;\ x = 0,2924.. = -4,7980..$$
$$= 2,2528.. \pm i\ 0,7899..$$

C. P ist negativ, Q positiv.

Wie bei A. erhält man, wenn dort δ negativ gesetzt wird, dass $\alpha^2 > 12\gamma$ sein muss. Dasselbe lässt sich aber auch so zeigen. Sollte $\alpha^2 < 12\gamma$ sein, so setze man, wenn $12\gamma = \alpha^2 + \delta$, in $P = 9\beta^2 - 2\alpha (\alpha^2 + 4\gamma)$ und in

$$Q = 4\alpha\beta^2 (\alpha + 36\gamma) - 27\beta^4 - 16\gamma (\alpha^2 + 4\gamma)^2$$

$$4\alpha^2 + 3\delta \text{ für } (\alpha^2 + 36\gamma),\ \frac{4}{3} (\alpha^2 + \delta) \text{ für } 16\gamma,\ \frac{4\alpha^2 + \delta}{3}$$

für $(\alpha^2 + 4\gamma)$ und erhält:

$$Q = -\frac{1}{3} P^2 - \frac{4\delta}{27} [(4\alpha^2 + \delta)^2 - 54\alpha\beta^2]$$

Da aber P negativ, so ist $2\alpha (\alpha^2 + 4\gamma) > 9\beta^2$

$$\text{d. i. } \frac{2\alpha}{3} (4\alpha^2 + \delta) > 9\beta^2, \text{ oder } 4\alpha^2 (4\alpha^2 + \delta) > 54\alpha\beta^2$$

also um so mehr $(4\alpha^2 + \delta)^2 > 54\alpha\beta^2$ d. h. der Factor $[(4\alpha^2 + \delta)^2 - 54\alpha\beta^2]$ ist positiv, mithin Q negativ. Für $\delta = 0$, d. i. $\alpha^2 = 12\gamma$, ist hieraus wie schon bei A. bemerkt wurde $Q = -\frac{1}{3} P^2$.

Die drei Reihen enthalten resp. 4, 3, 0 Zeichenwechsel, also die Gleichung eine negative und drei positive reelle Wurzeln.

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0;\ x = 1, = 2, = 3, = -6$$

P ist negativ, wenn: $9\beta^2 < 2\alpha (\alpha^2 + 4\gamma)$

Q positiv wie bei A.

D. P und Q sind negativ.

Die Grösse $\beta\,(\alpha^2 - 12\gamma)$ in der Reihe (0) mag $= 0$, positiv, oder negativ sein, d. h. $\beta = 0$, oder $\alpha^2 \gtreqless 12\gamma$, die Anzahl der Zeichenwechsel bleibt ungeändert 3, 2, 1, so dass eine positive und eine negative Wurzel in der Gleichung enthalten sind.

1) $\alpha^2 = 12\gamma$: $x^4 - 12x^2 + 13x - 12 = 0$; $x = 3, = -4, = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

2) $\alpha^2 > 12\gamma$: $x^4 - 36x^2 + 76x - 105 = 0$; $x = 5, = -7, = 1 \pm \sqrt{-2}$

3) $\alpha^2 < 12\gamma$: $x^4 - 35x^2 + 78x - 140 = 0$; $x = 5, = -7, = 1 \pm \sqrt{-3}$

4) $\beta = 0$: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2, = \pm i$

P ist negativ wie bei C.

Q negativ wie bei B.

E. P ist positiv, $Q = 0$.

Aus A. folgt, wenn man $\triangle = 0$ setzt, dass Q **negativ** sein muss, also nicht $= 0$.

F. P ist negativ, $Q = 0$.

P ist negativ wie bei C.

$Q = 0$, wenn $4\alpha\beta^2\,(\alpha^2 + 36\gamma) = 27\beta^4 + 16\gamma\,(\alpha^2 + 4\gamma)^2$

Nach C. hat die Gleichung drei positive Wurzeln, von denen zwei gleich sind

$$x^4 - 11x^2 + 18x - 8 = 0;\ x = 1, = 1, = 2, = -4$$ vergl. S. 5.

Ist $P = 0$ und $\alpha^2 = 12\gamma$, also $27\beta^2 = 8\alpha^3$, so ist $F_3x = 0$ und $F_2x = \left(x + \frac{3\beta}{4\alpha}\right)^2$, woraus die S. 6. angegebenen drei gleichen Wurzeln folgen:

$$x^4 - 6x + 8x - 3 = 0;\ x = 1, = 1, = 1, = -3$$

Es sind also bei negativen Werthen von α und β:

𝔄. **zwei Wurzeln imaginär, eine positiv, eine negativ reell** wenn $27\beta^4 + 16\gamma\,(\alpha^2 + 4\gamma)^2 > 4\alpha\beta^2\,(\alpha^2 + 36\gamma)$, wohin als besondere Fälle gehören $\alpha = 0$; $\beta = 0$; $9\beta^2 = 2\alpha\,(\alpha^2 + 4\gamma)$ aber $\alpha^2 \gtrless 12\gamma$; $\alpha^2 = 12\gamma$ aber $27\beta^2 \gtrless 8\alpha^3$.

𝔅. **alle Wurzeln reell und zwar drei positiv, eine negativ** wenn

1) $27\beta^4 + 16\gamma\,(\alpha^2 + 4\gamma)^2 \leqq 4\alpha\beta^2\,(\alpha^2 + 36\gamma)$

2) $\alpha^2 = 12\gamma$ und zugleich $27\beta^2 = 8\alpha^3$.

Lässt man die Fälle $\beta = 0$ und $\alpha = \beta = 0$, welche der Vollständigkeit wegen und um zu zeigen, dass der Sturmsche Satz auch für sie das Richtige giebt, mit aufgenommen wurden, als bekannt fort, so giebt die Zusammenstellung der gewonnenen Resultate folgendes Täfelchen, welches aus den Coefficienten auf die Beschaffenheit der Wurzeln schliessen lässt:

		Anzahl der Wurzeln			Bedingungs-Ausdrücke.
α	γ	pos.	neg.	imag.	(α, β, γ sind immer positiv zu nehmen.)
+	+	,,	,,	4	1) $\beta^2 (27\beta^2 + 4\alpha^3) < 16\gamma\,[9\alpha\beta^2 + (\alpha^2 - 4\gamma)^2]$
					d. i. $27\beta^2 < 32\alpha^3$ für $\alpha^2 = 4\gamma$; $27\beta^4 < 16^2\gamma^3$ für $\alpha = 0$
					2) $\alpha^2 < 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 = 2\alpha\,(4\gamma - \alpha^2)$
		,,	2	2	$\beta^2 (27\beta^2 + 4\alpha^3) \geqq 16\gamma\,[9\alpha\beta^2 + (\alpha^2 + 4\gamma)^2]$ . . . . (die reellen sind gleich)
					d. i. $27\beta^2 \geqq 32\alpha^3$ für $\alpha^2 = 4\gamma$; $27\beta^4 \geqq 16^2\gamma^3$ für $\alpha = 0$.
+	—	1	1	2	immer
—	+	,,	,,	4	$4\,[\alpha^3\beta^2 + 4\gamma\,(\alpha^2 - 4\gamma)^2] > 9\beta^2\,(3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$ d. i. $16^2\gamma^3 > 27\beta^4$ für $\alpha = 0$
					und zugleich $\alpha^2 < 4\gamma$
		2	2	,,	$4\,[\alpha^3\beta^2 + 4\gamma\,(\alpha^2 - 4\gamma)^2] \geqq 9\beta^2\,(3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$ . . . . (die positiven sind gleich)
					und zugleich $\alpha^2 > 4\gamma$ aber $9\beta^2 < 2\alpha\,(\alpha^2 - 4\gamma)$
		,,	2	2	1) $4\,[\alpha^3\beta^2 + 4\gamma\,(\alpha^2 - 4\gamma)^2] \leqq 9\beta^2\,(3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$ . . . . (die reellen sind gleich)
					2) $\alpha^2 = 4\gamma$
					3) $\alpha^2 > 4\gamma$ aber $9\beta^2 \geqq 2\alpha\,(\alpha^2 - 4\gamma)$
—	—	1	1	2	1) $27\beta^4 + 16\gamma\,(\alpha^2 + 4\gamma)^2 > 4\alpha\beta^2\,(\alpha^2 + 36\gamma)$
					2) $\alpha = 0$
					3) $9\beta^2 = 2\alpha\,(\alpha^2 + 4\gamma)$ aber $\alpha^2 \gtrless 12\gamma$
					4) $\alpha^2 = 12\gamma$ aber $27\beta^2 \gtrless 8\alpha^3$
		3	1	,,	1) $27\beta^4 + 16\gamma\,(\alpha^2 + 4\gamma)^2 \leqq 4\alpha\beta^2\,(\alpha^2 + 36)$ . . . . (zwei sind gleich)
					(Hier ist immer $\alpha^2 > 12\gamma$)
					2) $\alpha^2 = 12\gamma$ und zugleich $27\beta^2 = 8\alpha^3$ (drei sind gleich)

Man sieht sogleich, dass alle Wurzeln nur reell sein können, wenn α negativ, und alle imäginär, wenn γ positiv ist.