II.

Beweis zweier Sätze aus dem Journale für reine und angewandte Mathematik von Crelle.

In dem genannten Journale Bd. 16. S. 95. sind folgende Sätze zum Beweise vorgelegt.

I. Der n^{te} Näherungswerth des Kettenbruches $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ddots}}}}$ ist, wenn n eine gerade Zahl, =

$$\frac{a^{\frac{n-2}{2}}b^{\frac{n}{2}}+(n-2)\,a^{\frac{n-4}{2}}b^{\frac{n-2}{2}}+\frac{n-3.\ n-4}{1.\ 2}a^{\frac{n-6}{2}}b^{\frac{n-4}{2}}+\frac{n-4.\ n-5.\ n-6}{1.\ 2.\ 3}a^{\frac{n-8}{2}}b^{\frac{n-6}{2}}+\ \ldots}{a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}+(n-1)\,a^{\frac{n-2}{2}}b^{\frac{n-2}{2}}+\frac{n-2.\ n-3}{1.\ 2}a^{\frac{n-4}{2}}b^{\frac{n-4}{2}}+\frac{n-3.\ n-4.\ n-5}{1.\ 2.\ 3}a^{\frac{n-6}{2}}b^{\frac{n-6}{2}}+\ \ldots}$$

II. Der n^{te} Näherungswerth des Kettenbruches $\cfrac{1}{2\cos.\alpha-\cfrac{1}{2\cos.\alpha-\cfrac{1}{2\cos.\alpha-\ddots}}}$ ist $=\frac{\sin.\ n\alpha}{\sin.\ (n+1)\alpha}$

Beweis des ersten Satzes.

Berechnet man die auf einander folgenden Näherungswerthe, doch so, dass $(ab+1)=A$ vorläufig unaufgelöst bleibt, so ergiebt sich leicht aus der Entstehung der Coefficienten der $(n-1)^{te}$ Näherungswerth $=$

$$\begin{array}{l}
A^{\frac{n}{2}-1}+\left(\frac{n}{2}-2\right)ab\,A^{\frac{n}{2}-3}+\frac{\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3}{1.\,2}ab\,A^{\frac{n}{2}-4}+\frac{\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4\cdot\frac{n}{2}-5}{1.\,2.\,3}a^2b^2A^{\frac{n}{2}-6}+\frac{\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4\cdot\frac{n}{2}-5\cdot\frac{n}{2}-6}{1.\,2.\,3.\,4}a^2b^2A^{\frac{n}{2}-7}+\dots \\
\hline
a\,A^{\frac{n}{2}-1}+\left(\frac{n}{2}-1\right)a\,A^{\frac{n}{2}-2}+\frac{\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3}{1.\,2}a^2b\,A^{\frac{n}{2}-4}+\frac{\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4}{1.\,2.\,3}a^2b\,A^{\frac{n}{2}-5}+\frac{\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4\cdot\frac{n}{2}-5\cdot\frac{n}{6}-6}{1.\,2.\,3.\,4}a^3b^2A^{\frac{n}{2}-7}+\dots \\
\dots+\frac{\left(\frac{n}{2}-2m-1\right)\left(\frac{n}{2}-2m-2\right)\dots\left(\frac{n}{2}-6m+1\right)}{1.\,2\dots(4m-1)}a^{m+1}b^{m+1}A^{\frac{n}{2}-6m}+\frac{\left(\frac{n}{2}-2m-1\right)\left(\frac{n}{2}-2m-2\right)\dots\left(\frac{n}{2}-6m\right)}{1.\,2\dots\dots4m}a^{m+1}b^{m+1}A^{\frac{n}{2}-6m-1}+\dots \\
\hline
\dots+\frac{\left(\frac{n}{2}-2m-1\right)\left(\frac{n}{2}-2m-2\right)\dots\left(\frac{n}{2}-6m\right)}{1.\,2.\,3\dots4m}a^{m+2}b^{m+1}A^{\frac{n}{2}-6m-1}+\dots
\end{array}$$

der n^{te} $=$

$$\begin{array}{l}
b\,A^{\frac{n}{2}-1}+\left(\frac{n}{2}-1\right)b\,A^{\frac{n}{2}-2}+\frac{\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3}{1.\,2}ab^2A^{\frac{n}{2}-4}+\frac{\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4}{1.\,2.\,3}ab^2A^{\frac{n}{2}-5}+\frac{\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4\cdot\frac{n}{2}-5\cdot\frac{n}{2}-6}{1.\,2.\,3.\,4}a^2b^3A^{\frac{n}{2}-7}+\dots \\
\hline
A^{\frac{n}{2}}+\left(\frac{n}{2}-1\right)ab\,A^{\frac{n}{2}-2}+\frac{\frac{n}{2}-1\cdot\frac{n}{2}-2}{1.\,2}ab\,A^{\frac{n}{2}-3}+\frac{\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4}{1.\,2.\,3}a^2b^2A^{\frac{n}{2}-5}+\frac{\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4\cdot\frac{n}{2}-5}{1.\,2.\,3.\,4}a^2b^2A^{\frac{n}{2}-6}+\dots \\
\dots+\frac{\left(\frac{n}{2}-2m-1\right)\left(\frac{n}{2}-2m-2\right)\dots\left(\frac{n}{2}-6m\right)}{1.\,2\dots4m}a^{m+1}b^{m+2}A^{\frac{n}{2}-6m-1}+\dots \\
\hline
\dots+\frac{\left(\frac{n}{2}-2m\right)\left(\frac{n}{2}-2m-1\right)\dots\left(\frac{n}{2}-6m+2\right)}{1.\,2\dots(4m-1)}a^{m+1}b^{m+1}A^{\frac{n}{2}-6m+2}+\frac{\left(\frac{n}{2}-2m\right)\left(\frac{n}{2}-2m-1\right)\dots\left(\frac{n}{2}-6m+1\right)}{1.\,2\dots4m}a^{m+1}b^{m+1}A^{\frac{n}{2}-6m}+\dots
\end{array}$$

Hieraus erhält man mit Hilfe der folgenden Quotienten a und b den $(n+1)^{sten}$ $=$

$$\begin{array}{l}
A^{\frac{n}{2}}+\left(\frac{n}{2}-1\right)ab\,A^{\frac{n}{2}-2}+\frac{\frac{n}{2}-1\cdot\frac{n}{2}-2}{1.\,2}ab\,A^{\frac{n}{2}-3}+\frac{\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4}{1.\,2.\,3}a^2b^2A^{\frac{n}{2}-5}+\frac{\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4\cdot\frac{n}{2}-5}{1.\,2.\,3.\,4}a^2b^2A^{\frac{n}{2}-6}+\dots \\
\hline
a\,A^{\frac{n}{2}}+\frac{n}{2}\,a\,A^{\frac{n}{2}-1}+\frac{\frac{n}{2}-1\cdot\frac{n}{2}-2}{1.\,2}a^2b\,A^{\frac{n}{2}-3}+\frac{\frac{n}{2}-1\cdot\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3}{1.\,2.\,3}a^2b\,A^{\frac{n}{2}-4}+\frac{\frac{n}{2}-2\cdot\frac{n}{2}-3\cdot\frac{n}{2}-4\cdot\frac{n}{2}-5}{1.\,2.\,3.\,4}a^3b^2A^{\frac{n}{2}-6}+\dots \\
\dots+\frac{\left(\frac{n}{2}-2m\right)\left(\frac{n}{2}-2m-1\right)\dots\left(\frac{n}{2}-6m+1\right)}{1.\,2j.\dots4m}a^{m+1}b^{m+1}A^{\frac{n}{2}-6m}+\dots \\
\hline
\dots+\frac{\left(\frac{n}{2}-2m\right)\left(\frac{n}{2}-2m-1\right)\dots\left(\frac{n}{2}-6m+1\right)}{1.\,2\dots4m}a^{m+2}b^{m+1}A^{\frac{n}{2}-6m}+\dots
\end{array}$$

den $(n+2)^{\text{ten}} =$

$$\frac{bA^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2}\,bA^{\frac{n}{2}-2} + \frac{\frac{n}{2}-1.\,\frac{n}{2}-2}{1.\;2}\,ab^2A^{\frac{n}{2}-3} + \frac{\frac{n}{2}-1.\,\frac{n}{2}-2.\,\frac{n}{2}-3}{1.\;2.\;3}\,ab^2A^{\frac{n}{2}-5} + \frac{\frac{n}{2}-2.\,\frac{n}{2}-3.\,\frac{n}{2}-4.\,\frac{n}{2}-5}{1.\;2.\;3.\;4}\,a^2b^3A^{\frac{n}{2}-6} + \ldots}{A^{\frac{n}{2}+1} + \frac{n}{2}\,abA^{\frac{n}{2}-1} + \frac{\frac{n}{2}.\,\frac{n}{2}-1}{1.\;2}\,abA^{\frac{n}{2}-2} + \frac{\frac{n}{2}-1.\,\frac{n}{2}-2.\,\frac{n}{2}-3}{1.\;2.\;3}\,a^2b^2A^{\frac{n}{2}-4} + \frac{\frac{n}{2}-1.\,\frac{n}{2}-2.\,\frac{n}{2}-3.\,\frac{n}{2}-4}{1.\;2.\;3.\;4}\,a^2b^2A^{\frac{n}{2}-5} + \ldots}$$

$$\frac{\ldots + \frac{\left(\frac{n}{2}-2m\right)\left(\frac{n}{2}-2m-1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}-6m+1\right)}{1.\;2\ldots\ldots 4m}\,a^{m+1}b^{m+2}A^{\frac{n}{2}-6m} + \ldots}{\ldots + \frac{\left(\frac{n}{2}-2m+1\right)\left(\frac{n}{2}-2m\right)\ldots\left(\frac{n}{2}-6m+2\right)}{1.\;2\ldots\ldots 4m}\,a^{m+1}b^{m+1}A^{\frac{n}{2}-6m+1} + \ldots}$$

also dieselben Werthe, welche auch entstehen, wenn man in die beiden vorigen durchweg $n+2$ statt n setzt, womit die allgemeine Giltigkeit dieser Ausdrücke, welche für die ersten Näherungswerthe richtig sind, erwiesen ist. Die Entwickelung von A nach den absteigenden Potenzen von ab giebt den n^{ten} Näherungswerth, wie er im Satze angegeben ist.

Der $(n+1)^{\text{te}}$ wird $=$

$$\frac{a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} + (n-1)\,a^{\frac{n-2}{2}}b^{\frac{n-2}{2}} + \frac{n-2.\;n-3}{1.\;2}\,a^{\frac{n-4}{2}}b^{\frac{n-4}{2}} + \frac{n-3.\;n-4.\;n-5}{1.\;2.\;3}\,a^{\frac{n-6}{2}}b^{\frac{n-6}{2}} + \ldots}{a^{\frac{n+2}{2}}b^{\frac{n}{2}} + n\,a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n-2}{2}} + \frac{n-1.\;n-2}{1.\;2}\,a^{\frac{n-2}{2}}b^{\frac{n-4}{2}} + \frac{n-2.\;n-3.\;n-4}{1.\;2.\;3}\,a^{\frac{n-4}{2}}b^{\frac{n-6}{2}} + \ldots}$$

Dieses findet man leichter aus dem n^{ten} Näherungswerthe, wenn man in demselben a und b vertauscht, dann die entstandene Grösse, d. i. den n^{ten} Näherungswerth vom Quotienten b an gerechnet, zum Nenner a des ersten Näherungswerthes $\frac{1}{a}$ addirt und das Resultat auf einen Bruch bringt. Da hier n eine gerade Zahl ist, so hat man, wenn n ungerade sein soll, $n-1$ statt n zu setzen und erhält den n^{ten} Näherungswerth für ein ungerades n: $=$

$$\frac{a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} + (n-2)\,a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n-3}{2}} + \frac{n-3.\;n-4}{1.\;2}\,a^{\frac{n-5}{2}}b^{\frac{n-5}{2}} + \frac{n-4.\;n-5.\;n-6}{1.\;2.\;3}\,a^{\frac{n-7}{2}}b^{\frac{n-7}{2}} + \ldots}{a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} + (n-1)\,a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}} + \frac{n-2.\;n-3}{1.\;2}\,a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n-5}{2}} + \frac{n-3.\;n-4.\;n-5}{1.\;2.\;3}\,a^{\frac{n-5}{2}}b^{\frac{n-7}{2}} + \ldots}$$

In beiden Ausdrücken sind die Glieder bis zum ersten verschwindenden zu nehmen, und da der für einen geraden Näherungswerth von $n = 2$ ab gilt, so wird der für einen ungeraden von $n = 3$ an gelten.

Die oben angegebenen 4 auf einander folgenden Näherungswerthe zeigen, (was auch schon aus dem bekannten Satze folgt, dass, wenn zwei benachbarte Näherungswerthe $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ und $\frac{Z_n}{N_n}$ heissen, $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{N_{n-1}}{N_n}$ dieselben Quotienten, aber in umgekehrter Ordnung, erzeugen), dass der Zähler eines ungeraden Näherungswerthes mit dem Nenner des vorhergehenden geraden identisch, der Zähler eines geraden aber dem Nenner seines Vorgängers gleich ist, wenn a und b vertauscht werden. Daraus folgt, dass, wenn zwei Kettenbrüche von der Form

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cdots}}}} \quad \text{und} \quad \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cdots}}}}$$

gegeben sind, nicht nur die Zähler der gleichvielsten ungeraden, und die Nenner der gleichvielsten geraden Näherungswerthe gleich sind, sondern auch, dass der Zähler irgend eines Näherungswerthes des einen Kettenbruches gleich ist dem Nenner des vorhergehenden im andern Bruche, so dass mit den Näherungswerthen des einen auch die des andern bestimmt sind.

Heissen nämlich die einen:

$$\frac{1}{N_1}, \quad \frac{Z_2}{N_2}, \quad \frac{Z_3}{N_3}, \quad \frac{Z_4}{N_4}, \quad \cdots\cdots \quad \frac{Z_{2n-1}}{N_{2n-1}}, \quad \frac{Z_{2n}}{N_{2n}}$$

so sind die des andern:

$$\frac{1}{Z_2}, \quad \frac{N_1}{N_2}, \quad \frac{Z_3}{Z_4}, \quad \frac{N_3}{N_4}, \quad \cdots\cdots \quad \frac{Z_{2n-1}}{Z_{2n}}, \quad \frac{N_{2n-1}}{Z_{2n+1}}$$

oder:

$$\frac{1}{Z_2}, \quad \frac{N_1}{N_2}, \quad \frac{N_2}{Z_4}, \quad \frac{N_3}{N_4}, \quad \cdots\cdots \quad \frac{N_{2n-2}}{Z_{2n}}, \quad \frac{N_{2n-1}}{N_{2n}}$$

oder:

$$\frac{1}{Z_2}, \quad \frac{N_1}{Z_3}, \quad \frac{N_2}{Z_4}, \quad \frac{N_3}{Z_5}, \quad \cdots\cdots \quad \frac{N_{2n-2}}{Z_{2n}}, \quad \frac{N_{2n-1}}{Z_{2n+1}}$$

Das Produkt von den 2 n ersten Näherungswerthen des einen in das des andern ist $= \frac{1}{N_{2n} \cdot Z_{2n+1}} = \frac{1}{(N_{2n})^2}$, das von den $(2n-1)$ ersten beider $= \frac{1}{Z_{2n} \cdot N_{2n-1}}$

Beweis des zweiten Satzes.

Setzt man $2\cos.\alpha = a$ und $(-1 + a^2) = A$, so erhält man, wenn n gerade ist, für den n^{ten} und $(n+1)^{\text{sten}}$ Näherungswerth offenbar dieselben Ausdrücke, welche oben (S. 18.) für den Kettenbruch $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + .}}}}$ gegeben sind,

nur a statt b gesetzt und die Zeichen der geraden Glieder geändert. Also ist der n^{te} Näherungswerth: $=$

$$\frac{a A^{\frac{n}{2}-1} - \left(\frac{n}{2}-1\right) a A^{\frac{n}{2}-2} + \frac{\frac{n}{2}-2.\frac{n}{2}-3}{1.\ 2} a^3 A^{\frac{n}{2}-4} - \frac{\frac{n}{2}-2.\frac{n}{2}-3.\frac{n}{2}-4}{1.\ 2.\ 3} a^3 A^{\frac{n}{2}-5} + \frac{\frac{n}{2}-2.\frac{n}{2}-3.\frac{n}{2}-4.\frac{n}{2}-5.\frac{n}{2}-6}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^5 A^{\frac{n}{2}-7} - \ldots}{A^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{n}{2}-1\right) a^2 A^{\frac{n}{2}-2} + \frac{\frac{n}{2}-1.\frac{n}{2}-2}{1.\ 2} a^2 A^{\frac{n}{2}-3} - \frac{\frac{n}{2}-2.\frac{n}{2}-3.\frac{n}{2}-4}{1.\ 2.\ 3} a^4 A^{\frac{n}{2}-5} + \frac{\frac{n}{2}-2.\frac{n}{2}-3.\frac{n}{2}-4.\frac{n}{2}-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^4 A^{\frac{n}{2}-6} + \ldots}$$

der $(n+1)^{\text{ste}} =$

$$\frac{A^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{n}{2}-1\right) a^2 A^{\frac{n}{2}-2} + \frac{\frac{n}{2}-1.\frac{n}{2}-2}{1.\ 2} a^2 A^{\frac{n}{2}-3} - \frac{\frac{n}{2}-2.\frac{n}{2}-3.\frac{n}{2}-4}{1.\ 2.\ 3} a^4 A^{\frac{n}{2}-5} + \frac{\frac{n}{2}-2.\frac{n}{2}-3.\frac{n}{2}-4.\frac{n}{2}-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^4 A^{\frac{n}{2}-6} + \ldots}{a A^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} a A^{\frac{n}{2}-1} + \frac{\frac{n}{2}-1.\frac{n}{2}-2}{1.\ 2} a^3 A^{\frac{n}{2}-3} - \frac{\frac{n}{2}-1.\frac{n}{2}-2.\frac{n}{2}-3}{1.\ 2.\ 3} a^3 A^{\frac{n}{2}-4} + \frac{\frac{n}{2}-2.\frac{n}{2}-3.\frac{n}{2}-4.\frac{n}{2}-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^5 A^{\frac{n}{2}-6} - \ldots}$$

Entwickelt man A nach den aufsteigenden Potenzen von a und setzt für a den Werth $2\cos.\alpha$, so wird der n^{te} $=$

$$\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}\left\{n\cos.\alpha - \frac{n+2.\ n.\ n-2}{1.\ 2.\ 3}\cos.\alpha^3 + \frac{n+4.\ n+2.\ n.\ n-2.\ n-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\cos.\alpha^5 - \ldots\right\} = \frac{\sin.\ n\alpha}{\sin.\ \alpha}}{(-1)^{\frac{n}{2}}\left\{1 - \frac{n+2.\ n}{1.\ 2}\cos.\alpha^2 + \frac{n+4.\ n+2.\ n.\ n-2}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\cos.\alpha^4 - \ldots\right\} = \frac{\sin.\ (n+1)\,\alpha}{\sin.\ \alpha}}$$

$$= \frac{\sin.\ n\alpha}{\sin.\ (n+1)\,\alpha}$$

der $(n+1)^{\text{ste}} =$

$$\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left\{1-\frac{n+2.\,n}{1.\,2}\cos.\alpha^2+\frac{n+4.\,n+2.\,n.\,n-2}{1.\,2.\,3.\,4}\cos.\alpha^4-\ldots\right\}=\frac{\sin.\,(n+1)\,\alpha}{\sin.\,\alpha}}{(-1)^{\frac{n}{2}+2}\left\{(n+2)\cos.\alpha-\frac{n+4.\,n+2.\,n}{1.\,2.\,3}\cos.\alpha^3+\frac{n+6.\,n+4.\,n+2\;\,n.\,n-2}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\cos.\alpha^5-\ldots\right\}=\frac{\sin.\,(n+2)\,\alpha}{\sin.\,\alpha}}$$

$$=\frac{\sin.\,(n+1)\,\alpha}{\sin.\,(n+2)\,\alpha}$$

Für ein ungerades n ist in dem letzten Resultate $n-1$ statt n zu substituiren, wodurch, wie für ein gerades n, der n^{te} Näherungswerth $=\frac{\sin.\,n\alpha}{\sin.\,(n+1)\,\alpha}$ wird.

J. F. Koenig.