

Das Ohm'sche Gesetz als Grundgesetz des Elektromagnetismus.

Von Professor Robert Lang.

§ 1.

Einleitung.

Jede Spekulation über das Gesetz des Elektromagnetismus setzt eine Hypothese voraus. Je nach der Art derselben erscheinen aber die Bestimmungsstücke in verschiedener Bedeutung, d. h. es bildet sich ein anderes System von Begriffen aus, mit deren Hilfe die Erscheinungen beschrieben werden. So gipfelte bei uns in Deutschland bisher unter der Herrschaft des Fernwirkungsgesetzes fast jede magnetische Untersuchung in der Aufstellung des magnetischen Moments. Den Engländern dagegen ist seit Faraday und Maxwell eine andere Anschauungsweise geläufig geworden, deren charakteristisches Merkmal gerade die Verneinung der unvermittelten Fernwirkung und der Ersatz derselben durch die Wirkung des umgebenden Mediums ist; ihr wichtigster Begriff ist der der Induktion. Nach der einen Theorie besitzt ein Magnet dieses Mittel, welches seine Wirkung nach außen bestimmt. Beide Theorien vermögen die magnetischen Erscheinungen bis zu einem gewissen Grade in gleich vollständiger Weise darzustellen. Aber nachdem kürzlich die Faraday-Maxwell'schen Vorstellungen von der Rolle des umgebenden Mediums im Gebiete der Elektrizität durch die Versuche von H. Hertz fast zur Gewissheit erhoben worden sind, ist es jedenfalls nicht unberechtigt, auch auf dem Gebiete des Magnetismus von ihnen Aufschlüsse zu erwarten, welche die bisher auf dem Festlande üblichen nicht geben können. In England sind derartige Bestrebungen schon seit längerer Zeit (Bosanquet 1883) in Fluß gekommen, mit einem vereinzelt Vorläufer (Rowland 1873); aber erst die schönen Erfolge, welche die Theorien der magnetischen Kreise (magnetic circuits) von Gisbert Kapp und der Gebrüder Hopkinson seit 1886 in der Vorausberechnung der Dynamomaschine erzielt haben, haben ihnen allgemeine Beachtung verschafft.

Angeregt durch das vortreffliche Buch von Silvanus P. Thompson „Lectures on the Electro-magnet“ habe ich mir im folgenden die Aufgabe gestellt, die Grundlagen der neuen magnetischen Theorie im Zusammenhang darzustellen und ihre Prinzipien auf einige magnetische Probleme (gerade Elektromagnete) anzuwenden, um zu erkennen in wie weit sich daraus eine wenigstens genäherte Lösung derselben, vielleicht auch eine Begründung bezw. Vermittlung der zahlreich aufgestellten, aber teilweise mit einander scheinbar unverträglichen empirischen Sätze (vergl. besonders Dub, Elektromagnetismus, 1861) schöpfen ließe. Der vorliegende Aufsatz zerfällt demnach in 2 Hauptteile, denen ein gedrängter Ueberblick über die geschichtliche Entwicklung des Begriffs des magnetischen Kreises vorangeht.

Im II. Abschnitt wird aus dem magnetischen Luftwiderstand unter Annahme sehr einfacher Verhältnisse eine Formel konstruiert, welche für eine beliebige Stromstärke, die jedoch einen gewissen kleinen, kritischen Wert übersteigen muß, mit befriedigender Genauigkeit den Verlauf der Magnetisierung von weichen Eisenstäben darstellt, falls die Länge derselben ihre Dicke 2,2 bis 31 mal übertrifft. Soweit ist die Prüfung unmittelbar an der Erfahrung vorgenommen; wahrscheinlich liegt die obere Grenze aber noch erheblich ferner. Die gewonnene Formel wird dann benützt, die wahre Natur zweier vielumstrittenen Dub'schen Erfahrungssätze klarzulegen und ihren Gültigkeitsbereich abzugrenzen. Den Schluß bildet eine Anwendung

der gefundenen Formel auf die Lösung zweier praktisch wichtigen Aufgaben, welche von Waltenhofen 1886 (Wiedemann's Annalen 27.) mittelst der von ihm umgeformten Müller'schen empirischen Formel behandelt und als bis damals nur mit seiner Formel lösbar bezeichnet hat.

§ 2.

Die Entwicklung des Begriffs des magnetischen Kreises.

Daß man einen Magnet durch Anhängen einer Last stets beschäftigen müsse, wenn er nicht schwächer werden soll mit der Zeit, ist eine alte Regel. Bei Hufeisenmagneten verlangt dieselbe also die Herstellung eines geschlossenen Kreises. Nach Lamont (Handbuch des Magnetismus) wurden zuerst als besondere und beachtenswerte magnetische Systeme erkannt magnetische Ringe von De La Borne 1822. Er hatte halbkreisförmige Eisendrähte zu Kreisen zusammengelegt und gefunden, daß der Magnetismus in solchen geschlossenen Kreisen viel länger anhält als in offenen. Auch bemerkte er, daß die Außenwirkung eines derartigen Kreises Null ist. Eine gewisse Ahnung der besonderen Eigenschaften des geschlossenen Kreises hatte auch der Erfinder des Elektromagnets, William Sturgeon. Am 23. Mai 1825 hatte Sturgeon (S. P. Thompson, Lect. p. 7) seine Erfindung veröffentlicht und ein Jahr darauf beschrieb er Versuche an einem Hufeisenmagnet, der während des Stromflusses 75 \mathcal{A} , nachher aber immer noch 20 \mathcal{A} trug. (Wied. Electr. III. p. 619.) Doch gerieten diese Beobachtungen wieder in Vergessenheit und wurden erst 1833 in den Lond. Phil. Transactions neu beschrieben durch Watkins. Seine Entdeckung bezog sich auf die Tragkraft eines Hufeisenmagneten, der am Anker 120 \mathcal{A} und nach Unterbrechung des Stromes, selbst 15 Wochen nachher, immer noch fast die Hälfte (56 \mathcal{A}) trug, wogegen das Abreißen des Ankers jede Tragkraft zum Verschwinden brachte, selbst wenn man den Anker sofort wieder anlegte. Erhalten blieb dagegen die Tragkraft, wenn man den Anker seitlich langsam abzog, gleichzeitig aber durch Vorschieben eines andern Eisenstückes dafür sorgte, daß keinen Augenblick das magnetische System ungeschlossen war. Ritchie zog nach Dub (Elektromagnetismus p. 401) sogar schon die Länge des magnetischen Kreises in Betracht, indem er mit annähernd gleich starken hufeisenförmigen Elektromagneten experimentierte, die aus demselben Eisen gefertigt waren, und im Bogen 6, 12 und 48 Zoll maßen. Jedoch war die Absicht dieser Versuche nur auf die Retentionsfähigkeit der Tragkraft gerichtet, die beim letzten Magnet am größten ausfiel. Ähnliche Versuche haben Dove und Magnus gemacht (s. Wied. El. III. p. 616 f. f.). G. Magnus (Pogg. Ann. 38. p. 434) giebt an, daß ein geschlossener Hufeisenmagnet 140 kg trug, ein einzelner Pol aber nur 2 kg. Dove findet, daß der Hufeisenelektromagnet auch dann noch, wenn auch in geringerem Maße, seine Tragfähigkeit behält, wenn das System nicht durchaus metallisch geschlossen, sondern durch Papierstreifen oder dünne Glimmerblätter unterbrochen ist. Noch wichtiger aber ist eine Bemerkung Dove's über Ringspiralen ohne Eisenkern (Rep. d. Phys. I. p. 263, zitiert nach Dub, Electrolog. p. 291): „Die bei einer geradlinigen cylindrischen Spirale schwache Wirkung nach außen verschwindet vollkommen, wenn sie in einen Ring zusammengebogen wird. . . . Er ist ein ringförmiger Magnet ganz ohne Wirkung.“ Das magnetische System einer luftgefüllten Ringspirale wird hier also in Parallele gebracht mit dem eines Eisenringmagnets und ganz dasselbe Verhalten festgestellt. Dove thut also zwei ganz hervorragend wichtige Schritte; er zeigt zuerst, daß ein geschlossenes ferromagnetisches System nicht wesentlich gestört wird, wenn man eine dünne, nichtmagnetische Schicht in dasselbe einschaltet; dann aber zieht er sozusagen die letzte Konsequenz aus dieser Thatsache und ersetzt in einem Ringmagnet das Metall durch Luft. Freilich wird der Luftkern von Dove ganz übersehen, für ihn ist nur die Spirale vorhanden.

Alle seine Vorgänger überragt an Bedeutung in der uns beschäftigenden Frage Michael Faraday (1791—1867). Die Ergebnisse seiner magnetischen Arbeiten sind niedergelegt im III. Bande seiner Experimental

Researches in Electricity. Während vor ihm geschlossene magnetische Systeme nur als Besonderheiten galten, suchte Faraday als eine Grundthatfache nachzuweisen, daß jedes magnetische System geschlossen ist, wenn man es nur in seiner Vollständigkeit erfäßt, gerade so wie auch der elektrische Verschiebungsstrom, nicht nur der elektrische Leitungsstrom immer geschlossen ist durch Vermittlung der Dielektrika. Dazu ist notwendig, daß die Magnetisierung vom Magnet aus durch die Umgebung (Luft, benachbarte Eisenmassen, u. s. w.) hindurchgeht und zum Magnet zurückkehrt. Der experimentelle Beweis dieser Auffassung findet sich in art. 3091—3122, nachdem schon vorher (XXI. Ser.) der Magnetismus als allgemeine Eigenschaft aller Körper nachgewiesen ist. Zur Darstellung seiner Gedanken führt Faraday die magnetischen Kraftlinien (lines of magnetic force) ein, die ihm nicht nur zur Angabe der Richtung, sondern auch der Größe der magnetischen Kraft an einem Punkte dienen. Für Faraday's Geist sind diese Kraftlinien aber mehr als mathematische Linien, sie haben ihm physikalische Existenz (art. 3261: The curvature of these lines appears to me to indicate their physical existence). Jedenfalls ist Thatsache, daß längs dieser Linien eine Spannung, senkrecht dazu ein gleich großer Druck herrscht (Research. art. 3266—3268 und Maxwell Electr. II. art. 641—646). Was längs dieser Linien bei ihrer Ausbildung geschieht oder auch nachher, wenn sie fertig vorliegen, ob der Zustand ein statischer ist oder ob eine Art magnetischer Strom hindurchfließt, darüber hat sich Faraday nicht ausgesprochen. Die Frage ist heute noch eine offene. Thatsächlich hat die Ähnlichkeit der magnetischen Kraft- und elektrischen Stromlinien Faraday's Geist mächtig gereizt. In den art. 2797—2835 führt er unter großer Vorsicht den Begriff der magnetischen Leitungsfähigkeit (conducting power of a magnetic medium for lines of force) ein, denselben, auf den später Sir William Thomson vom rein mathematischen Standpunkt aus stößt (Papers etc. p. 489) und welcher als „Permeabilität“ in unsere moderne Sprache übergegangen ist. In art. 3274 wird darauf hingewiesen, daß die Winkel, unter denen die Kraftlinien ihre Quelle, den Magnet, verlassen von der Form, ebenso aber auch vom Unterschied der magnetischen Eigenschaften des Magnets und des ihn umgebenden Mittels abhängen. Art. 3276 endlich wird ein Magnet geradezu mit einer in Wasser getauchten galvanischen Batterie verglichen. Wir werden sehen, daß dieser Vergleich den Anstoß gegeben hat zu der neuen Theorie der magnetischen Kreise. Quantitative Messungen zum Belege dieses Vergleichs hat Faraday nicht gegeben, wenigstens nicht an der betreffenden Stelle der Researches. Doch wird in art. 3232, wo auch schon „die vollkommene Harmonie mit einer Voltabatterie“ hervorgehoben wird, angeführt, daß die Zahl der Kraftlinien im Aequator jedes der Bruchstücke eines harten Stahlmagnets nahe dieselbe ist wie die im Aequator des unzerbrochenen Magnets.

Faraday wurde lange nicht verstanden. Lamont (l. c. p. 64) erwähnt 1867, daß seine Vorstellungen bei den Physikern keinen Eingang gefunden haben; die Unzulänglichkeit derselben habe van Rees (Pogg. Ann. 70. p. 13) umständlich nachgewiesen. Es ist interessant damit v. Helmholtz's Geständnis (Vorträge und Reden II. 1884. pag. 277.) und Sir W. Thomson's Worte (Papers p. 489) 1871 zu vergleichen.

Auch Dub, welcher in seinem jetzt vergessenen Buch „Der Elektromagnetismus“, 1861, das ganze damalige Wissen über den Gegenstand zusammenfaßte, geht an Faraday's Arbeiten fast stillschweigend vorüber. Dub selbst hat zur Weiterentwicklung des Begriffs des magnetischen Kreises nichts beigetragen, so verdienstvoll sonst seine Arbeiten sind.

Die Frucht der Faraday'schen Gedanken konnte erst reifen, nachdem Maxwell durch seinen 1873 erschienenen Treatise on Electricity and Magnetism den Widerwillen der Physiker gegen dieselben dadurch gebrochen hatte, daß er nachwies, daß die aus den Faraday'schen Vorstellungen fließenden Ergebnisse sich mit denen der Anhänger der Fernwirkung decken. Aber indem Maxwell die großen Gedanken der in den Experimental Researches niedergelegten neuen Naturanschauung mathematisch ausgestaltete, hatte er keine Zeit den vergleichsweise untergeordneten oder spezielleren Anregungen des großen Physikers zu folgen.

So begegnen wir der Verwertung der Faraday'schen Kraftlinienlehre und des geistreichen Vergleichs eines Magnets mit einer in Wasser getauchten Batterie zum ersten Male in der berühmten Abhandlung von Henry A. Rowland „On magnetic permeability“ (Philos. Mag. 46. 1873). Rowland erinnert daran, daß schon W. Thomson verschiedene Analogien (Wärmebewegung, statische Influenz, Durchgang reibungsloser Flüssigkeiten durch poröse Wände) als zur Berechnung der Verteilung und Richtung der magnetischen Kraftlinien geeignet bezeichnet hat. Dann aber, fügt er hinzu, haben wir in der Leitung der Elektrizität nach Ohm's Gesetz eine weitere Analogie. Die Wichtigkeit dieser Bemerkung beruht darin, daß, während die Thomson'schen Analogien zur Berechnung und Darstellung der Kraftlinien wesentlich Differentialgesetze sind, deren Gleichungen für nur wenige Fälle sich lösen lassen, die neue Analogie, obgleich auch zunächst in Form einer Differentialgleichung sich darbietend, doch einige allgemeine Integrale besitzt, die als Gesetze der Schaltung und Kirchhoff'sche Sätze sich auf den ganzen Kreis beziehen und eine leichtere Anwendung zulassen. Rowland hoffte in einem folgenden Aufsatz das Ohm'sche Gesetz auf die Verteilung des Magnetismus anzuwenden. Meines Wissens ist diese Schrift aber nicht erschienen. In der angegebenen Abhandlung giebt Rowland nur die Resultate seiner Rechnung über die Verteilung des Magnetismus in einem dünnen cylindrischen Stabe, der von einer Spirale umgeben ist. Sie stimmen vollkommen überein mit Green's Formel (Wied. El. III. p. 372). Die Spezialisierung führt sofort auf Kirchhoff's Ergebnis für den Eisenring. „Ob diese Lehre also richtig ist oder nicht, jedenfalls giebt sie richtige Resultate“ (Rowl. l. c.) Längere Zeit blieb aber dieser Versuch der einzige. Erst Bosanquet hat in einer Reihe von Aufsätzen, die seit 1883 im Philos. Magazine erschienen sind, den Gedanken von neuem aufgegriffen und namentlich den Einfluß des Luftwiderstands experimentell klargelegt. Von ihm stammt auch der Name „magnetomotorische Kraft“ (magnetomotive force) als Analogie der elektromotorischen Kraft, die aber dem Wesen nach bereits von Rowland 1873 klar erkannt ist (s. Prioritätsanspruch Phil. Mag. 17. p. 421) und dem Sinne nach schon in Faraday's Researches häufig vorkommt. Gleichzeitig mit Bosanquet beschäftigten sich Ayrton und Perry mit dem magnetischen Widerstand, für welchen die Engländer das Wort „reluctance“ schufen. In Wiedemann's Annalen der Physik ist, soviel ich sehe, die erste Abhandlung über Magnetismus vom neuen Standpunkt aus die von W. Siemens (1885, Bd. 24. p. 93) „Beiträge zur Theorie des Magnetismus“. Seit dem Erfolg, den die Theorie „of magnetic circuits“ durch die Arbeiten von Gisbert Kapp (1885—1886) und J. und E. Hopkinson (1886) auf technischem Gebiet errungen hat, mehrten sich naturgemäß die Abhandlungen über diesen Gegenstand, jedoch sind sie meist technischer Natur.

I. Abschnitt.

Die Grundlagen des magnetischen Ohm'schen Gesetzes.

§ 3.

Einige Vorbemerkungen.

Unsere Aufstellungen lassen das Wesen des Magnetismus ganz unberührt. Die Poisson'sche Frage (Mém. sur la théorie du Magnétisme 1824) ob der Magnetismus aller Körper von gleicher Art sei, ist durch das jetzt allgemein angenommene Hertz'sche Princip von der Einheit der magnetischen Kraft (Wied. Ann. 23. 1884) bejahend entschieden. Berechtigt wäre nur noch die Frage, ist der Magnetismus

statischer oder dynamischer Natur. Die hier vorzutragende Theorie könnte leicht als die letztere Auffassung unterstützend oder sogar verteidigend angesehen werden. Der Schluß wäre aber voreilig, denn es handelt sich lediglich um eine Analogie der mathematischen Behandlung, welcher gar nicht notwendig eine physikalische entsprechen muß. Dies ist auf elektrischem Gebiet sehr gut zu erkennen an einer Arbeit von F. C. Webb (Phil. Mag. 35. 1868) mit der Ueberschrift: „On inductive circuits or the application of Ohm's Law to problems of Electrostatics“. Wir operieren also mit den Begriffen: magnetischer Strom, magnetomotorische Kraft, Leitungsfähigkeit und Widerstand genau so wie wenn ein magnetischer Strom vorhanden wäre, ohne damit dessen wirkliches Vorhandensein zu behaupten (vergl. Hertz, Wied. Ann. 23. 1884). In Wahrheit weiß man ja über die Natur des elektrischen Stromes auch nicht mehr.

Wir sehen im Folgenden ferner vollständig ab von den molekularen Vorgängen, deren Betrachtung allgemein auf die Drehung von Molekularmagneten führt (Weber, Maxwell, Ewing, Hughes); ebenso bleiben die Erscheinungen der Hysteresis und Retentionsfähigkeit außer Betracht. Die letzte Beschränkung bringt mit sich, daß permanente Magnete als sekundäre Erscheinungen des Elektromagnetismus von der Betrachtung ausgeschlossen sind. Allen Angaben liegt das CGS System zu Grunde. Wenn es nicht ausdrücklich anders bemerkt ist, sind die auftretenden Größen elektromagnetisch gemessen. Die Bezeichnung ist die Maxwell's. Vektoren sind nach S. P. Thompson durch fette, lateinische Buchstaben gekennzeichnet. Zur besseren Uebersicht stelle ich hier die Bezeichnungen mit ihren Dimensionen zusammen.

- H** Zahl der magnetischen Kraftlinien pro qcm Querschnitt im Vakuum oder Luft, auch magnetische Kraft genannt. $[L^{-1}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$.
- B** Zahl der magnetischen Kraftlinien pro qcm Querschnitt des magnetischen Leiters, Induktion, magnetische Stromdichte. $[L^{-1}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$.
- N** Magnetischer Fluß, magnetische Stromstärke, Gesamtzahl der magnetischen Kraftlinien im Querschnitt des Leiters. $[L^2M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$.
- Ω magnetisches Potential oder magnetomotorische Kraft. $[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$.
- μ Permeabilität = Quotient aus **B** und **H**. $[L^0M^0T^0]$.
- $\frac{1}{\mu}$ Widerstandskoeffizient. $[L^0M^0T^0]$.
- w** magnetischer Widerstand = Quotient aus Ω und **N**. $[L^{-1}]$.
- i** Stärke des elektrischen Stromes. $[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$.
- n** Windungszahl.
- Q** Querschnitt. $[L^2]$.
- l** Länge des magnetischen Leiters $[L^1]$.

§ 4.

Ähnlichkeit zwischen elektrischem Strom und magnetischem Strom im Allgemeinen. Beispiele.

Wie beim elektrischen Strom haben wir beim magnetischen lineare und körperliche Leiter zu unterscheiden. Aber während es bei der Elektrizität leicht ist, sie in lineare Bahnen zu zwingen und zu verhindern, daß sie seitlich entweicht, gelingt dies beim Magnetismus nur ausnahmsweise. Der Grund ist einfach. Die elektrische Leitungsfähigkeit der Luft ist millionenmal schlechter als die der Metalle, besonders des Kupfers. Für Magnetismus dagegen giebt es keinen Isolator. Die Luft z. B. leitet den magnetischen Strom verhältnismäßig gut; das Verhältnis zur Leitungsfähigkeit des Eisens schwankt etwa zwischen 1

und 5000 je nach der Stärke der Magnetisierung. So kommt es, daß die Stromlinien des Magnetismus in vergleichsweise großer Zahl aus der ferromagnetischen Leitung austreten und durch das umgebende Mittel verlaufen, wenn jene Leitung nicht von Haus aus so geformt ist, daß sie dem natürlichen Lauf der Kraftlinien folgt.

Am vollkommensten geschieht dies beim Kreis. Wie bereits in § 2 erwähnt, zeigt ein durch eine Spirale gleichmäßig tangential magnetisierter geschlossener Eisenring nach außen keine Wirkung oder anders ausgedrückt, keine magnetische Linie verläßt den Ring. Anders schon verhält es sich, wenn die magnetisierende Spirale nur einen Teil des Rings überdeckt. Dem aus der kurzen Spirale austretenden magnetischen Strom bietet sich jetzt außer der eisernen Leitung noch ein Nebenschluß durch die Luft dar, der Ring zeigt Außenwirkung. Zur Untersuchung dieses Falls magnetisierte Oberbeck (Wied. El. III. p. 628) einen 2 cm dicken Eisenring von 19 cm mittlerem Durchmesser durch eine 4 cm breite Spule von 145 Windungen. Eine auf dem Ring verschiebbare Spule von 1—2 Windungen ergab als größten Unterschied der Induktion an den einzelnen Stellen 7%. Dieser Prozentsatz ging also durch die Luft. Die relative Stärke der 2 parallel geschalteten magnetischen Zweigströme hängt ab von dem Verhältnis der Widerstände.

Besonders interessant ist der Fall eines ganz mit Draht umwickelten, an einer Stelle aber radial zerschnittenen Eisenringes. Die in die magnetische Leitung eingeschaltete dünne Luftschicht hat 2 Wirkungen: 1.) wird der Gesamt Widerstand bedeutend vergrößert und dadurch die Induktion entsprechend herabgedrückt; 2.) bildet sich um den Schnitt herum ein Luftnebenschlus aus, der die Stärke der Induktion wieder etwas hebt. Der Vorgang läßt sich vergleichen mit der Selbstregulierung des elektrischen Stromes in der Siemens'schen Differentialbogenlampe.

Eine magnetische Stromleitung mit 2 mit dem Eisen in Reihe geschalteten Luftwiderständen bietet jeder Hufeisenmagnet mit nicht ganz anliegendem Anker. Versuche hierüber giebt S. P. Thompson (Lectures p. 141) an. Der Magnet hatte Schenkel von 13 mm Dicke und 178 Windungen. Bei einem Strom von 0,7 Amp. ergab sich:

Abstand von Anker u. Pol.	Joch	Pol	Anker
Berührung.	14190	13870	12506
1 mm Abstand . .	3786	2163	1552
2 mm " . .	2839	1487	1149
5 mm " . .	2028	1081	1014
10 mm " . .	1690	1014	676
∞	1352	675	—

Die Zahlen geben die Werte der Gesamt-Induktion an den angegebenen Stellen bei den betreffenden Abständen. Man erkennt die schwächende Wirkung der eingeschalteten Luftwiderstände; insbesondere ist der Vergleich der 2 ersten Zeilen lehrreich. Das Einschalten von 2 je 1 mm weiten Luftschichten hat das Herabsinken der Induktion am Joch, Pol und Anker um $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ des ursprünglichen Betrags zur Folge. Wären keine Luftnebenschlüsse vorhanden, so müßten die Zahlen für alle 3 Stellen des magnetischen Kreises dieselben sein. Da die Induktion am Pol kleiner ist als am Joch, so folgt daß zwischen Joch und Pol Luftleitung zwischen den 2 Magnetschenkeln vorhanden ist. Gleiches gilt für die Gegend zwischen Pol und Anker. Das entsprechende elektrische Bild wären 2 hinter einander geschaltete galvanische Elemente, bei denen sowohl die Schaltungsdrähte als die äußere Leitung mehrfach parallel verzweigt sind. Der hier besprochene Fall entspricht dem praktisch wichtigen der Dynamomaschinen.

Die Wirkung eines metallischen Nebenschlusses zeigen u. a. gut die Versuche von Nickles über die Tragkraft eines Dreizackmagnets, dessen beide äußere Schenkel entgegengesetzte Polarität hatten wie der mittlere (Wied. El. III. p. 617). Für eine gewisse Stromstärke trug der mittlere Pol allein 3 kgr,

ein äußerer und der mittlere metallisch verbunden 80 kgr, alle drei durch den Anker verbunden 130 kgr. Im ersten Fall macht sich der große Luftwiderstand geltend; im zweiten ist eine vollkommene eiserne Leitung vorhanden, der Gesamtwiderstand also bedeutend verringert; im dritten wird der Querschnitt der äußeren eiserne Leitung verdoppelt und daher der Widerstand nochmals bedeutend verkleinert. Dieses Beispiel leitet über zu den durch eiserne Umhüllung geschlossenen Elektromagneten, von denen der bekannteste der Romershausen'sche ist. Solche Magnete zeigen sich nach außen wirkungslos. Ebenso beobachtete Dove (Wied. El. III. p. 613), daß ein Stabmagnet in einen hohlen eisernen Flintenlauf gesteckt nach außen fast ohne Wirkung ist. In diesen Fällen nimmt der gut leitende eiserne Mantel die magnetischen Linien alle in sich auf. Entfernt man den Mantel, so ziehen sich die Stromlinien in mehr oder weniger weit-schweifigen Bögen durch die Luft; gleichzeitig aber vermindert sich auch ihre Zahl nach Maßgabe der Vergrößerung des Widerstands.

Bringt man in den Luftschluß eines Magnets ein Stück weiches Eisen, so wird dadurch der magnetische Widerstand ebenfalls vermindert und also der magnetische Fluß vergrößert. Zu gleicher Zeit wird auch der Lauf der magnetischen Linien geändert, indem jetzt mehr derselben durch den Raumteil gehen, der nun vom gut leitenden Eisen erfüllt ist. Die alte Theorie nannte diesen Vorgang „magnetische Induktion oder Influxion.“ Die dabei auftretende Polarität des Eisensstücks löst sich bei der neuen Betrachtungsweise auf in den Gegensatz der 2 in jeder Linie enthaltenen Richtungen. Als besonders interessant ist hier der Spezialfall hervorzuheben, wo das Eisenstück als Polstück auf dem Magnet aufsitzt.

Electromagnete, bei denen die ganze magnetische Leitung aus Luft besteht zeigen natürlicherweise nur geringe Stärke. Jeder stromdurchflossene Draht ist ein solcher Magnet. Stromlinienverlauf s. Maxwell II. Taf. XIX u. XX. In sich geschlossene derartige magnetische Systeme sind schon § 2 erwähnt. Hufeisenmagnete mit Luft- u. Messingkernen hat W. Siemens (Wied. Ann. 1885. 24) untersucht; eine dort beigegebene Tabelle zeigt, daß alles sich verhält wie bei Eisenkernen, nur ist die Wirkung schwächer.

Das Gesetz der parallelen magnetischen Widerstände ist von Ayrton und Perry durch besondere Versuche bestätigt worden. Als magnetische Batterie, so zu sagen, diente ein Hufeisenmagnet mit würfelförmigen Polstücken, auf welche als Anker 1, 2 oder 3 halbkreisförmige Eisenstücke mit Messingunterlagen aufgesetzt werden konnten. Die Intensität der Magnetisierung, gemessen durch die Induktion am Joch, wuchs mit Vermehrung der Zahl der Anker und erfüllte sehr befriedigend das Gesetz der Parallelschaltung, wie es vom elektrischen Strom her bekannt ist (conf. Ledeboer, Sur la prédétermination de la caractéristique d'une Dynamo in La Lum. él. 24. 1887).

Die Absicht dieser Beispiele ist die Ähnlichkeit zwischen elektrischem und magnetischem Strom hervortreten zu lassen. Die magnetische Induktion ist wie die elektrische Stromstärke abhängig vom Widerstande des ganzen Kreises. Vergrößert man den Widerstand an irgend einer Stelle durch Einschalten eines schlechten Leiters oder durch Verringerung des Leitungsquerschnitts, so wird im ganzen Kreis die Induktion herabgedrückt. Umgekehrt, vergrößert man den Querschnitt direkt oder durch parallele Zweige, so nimmt auch die Stärke des magnetischen Stromes zu. Dualitativ scheint also jedenfalls die Anwendbarkeit des Ohm'schen Gesetzes auf magnetische Erscheinungen erwiesen.

§ 5.

Zur mathematischen Behandlung gehen wir aus von der Induktionsgleichung (Maxwell II art. 428.)

$$(1) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Da, wie wir bald sehen werden, für Luft $\mu = 1$ ist, so drückt diese Gleichung aus, daß die Induktion im Mittel von der Permeabilität μ μ mal so groß ist als wenn dieses Mittel durch Luft ersetzt wäre. Wir vergleichen (1) mit dem Ohm'schen Gesetz

$$(2) \quad \mathbf{K} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$$

wo K die Stromdichte, E die elektromotorische Kraft oder das elektrische Potential, C der Leitungscoefficient ist. Diese 3 Größen, die wir in elektrischem Maße zu messen haben, sind von den Dimensionen $[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$, $[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$, $[L^{-1}T^{-1}]$.

Der Vergleich von (1) und (2) und die im vorigen § gemachte Erfahrung, daß die Beschaffenheit des ganzen magnetischen Kreises in Betracht kommt, legen es nahe an Stelle der lokalen magnetischen Kraft H das Linienintegral derselben oder die magnetomotorische Kraft Ω einzuführen. Wir haben dann

$$(1^a) \quad \mathbf{B} = \mu' \Omega$$

$$\text{wo } \mu' = \frac{\mu}{l} \quad \text{Dimension } [L^{-1}]$$

und l die Länge der Leitung ist.

Nun ist die Analogie zwischen (1^a) und (2) vollständig. Der elektrischen Stromdichte K entspricht die Induktion B , der elektromotorischen Kraft E die magnetomotorische Kraft Ω , der elektrischen Leitungsfähigkeit C die magnetische μ' , beide bezogen auf die Einheit des Querschnitts. Während aber die Dimensionen der Kräfte in ihren bezüglichen Systemen gleich sind, sind die von B und μ' $[T^{-1}]$ mal größer als die der entsprechenden elektrischen Größen. Daß dies so sein muß ist einleuchtend, weil der elektrische Strom allgemein als etwas dynamisches aufgefaßt wird, während der Magnetismus in der Maxwell'schen Theorie, der wir unsere Ausgangsformel entlehnten, als statische Erscheinung gilt und wir zunächst keinen Anlaß haben von dieser Auffassung abzugehen.

Diesen Gründen die Gleichung (1) umzuformen in (1^a) fügt Bosanquet (Phil. Mag. 25. 1888) einen weiteren hinzu. Die magnetisierende Kraft H , als deren Maß die Kraftlinienzahl pro qcm im Vakuum gilt, ruft die Induktion B hervor, H ist also Ursache, B Wirkung. Beide sind aber von derselben Art, ihre Dimensionen sind gleich. Dies erscheint ungereimt, da man nicht einseht, warum die Wirkung nicht gleich wieder als Ursache weiter wirkt, so daß die kleinste ursprüngliche magnetisierende Kraft zur Sättigung treibt. Der Widerspruch hat seine Wurzel in der Zweideutigkeit von H und verschwindet, wenn man (1) durch (1^a) ersetzt.

§ 6.

Die magnetomotorische Kraft.

Die Methode der Messung der Gesamtinduktion N und der Induktion B pro qcm wird als bekannt vorausgesetzt. Wir wenden uns daher gleich der magnetomotorischen Kraft Ω zu. Dieselbe ist eine Potentialdifferenz und von der Dimension $[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$.

Haben wir einen geschlossenen elektrischen Strom von der Stärke i , eine einzige Drahtwindung durchlaufend, so ist das Linienintegral der magnetischen Kraft oder die magnetomotorische Kraft nach Maxwell II art. 480 $4\pi i$. Dimension $[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$.

Sind n Windungen vorhanden, so ist dieselbe $4\pi ni$. Dimension $[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$.

Die Einheit der magnetomotorischen Kraft wird also hervorgebracht durch einen elektrischen Strom von der Intensität $\frac{1}{4\pi}$ C. G. S. oder $\frac{10}{4\pi} = 0,7958$ Amp., der in einem einfachen Drahte fließt.

Häufig werden die „Ampèrewindungen“ = Windungszahl \times Stromstärke in Amp. angegeben. Man erhält daraus die magnetomotorische Kraft in C.G.S. Einheiten durch Multiplikation mit $\frac{4\pi}{10} = 1,2566$.

Allgemein wird der Zusammenhang zwischen Ω und H vermittelt durch die Gleichung

$$(3) \quad \Omega = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

Wie die elektromotorische Kraft durch das Quadrantenelektrometer, so kann auch die magneto- motorische Kraft direkt gemessen werden. Der englische Physiker A. Chattock hat in Phil. Mag. 24. 1887 die Prinzipien dieser Messung und eine hierzu geeignete Einrichtung angegeben. Die Methode ist folgende:

Ist Ω die magnetische Potentialdifferenz zwischen zwei beliebigen Punkten A und B eines magnetischen Kreises, so ist nach (3)

$$\Omega = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

wo l die Länge des beliebig gewählten Integrationswegs zwischen A und B ist, gemessen von einem beliebigen festen Punkt an. Ist \mathbf{B} fest, so ist Ω nur Funktion von \mathbf{A} . Wir denken uns nun in den Punkten A und B 2 gleiche Flächen a , senkrecht auf l und deren Ränder durch eine cylindrische, überall gleich weite Röhre mit der Axe l verbunden. Nennen wir ein Volumenelement dieser Röhre dv und den Mittelwert von Ω auf a in A $\bar{\Omega}$, so ist

$$a \cdot \bar{\Omega} = \int \Omega \cdot da = \iint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cdot da = \int \mathbf{H} \cdot dv$$

Auf die Röhre werde jetzt eine Drahtspirale gewunden, n Windungen auf den cm. Ist nun \mathbf{H} veränderlich mit der Zeit, so wird in der Spirale ein elektrischer Strom induziert, dessen elektromotorische Kraft ist

$$\begin{aligned} E &= \frac{d}{dt} \int n \cdot d\mathbf{l} \int \mathbf{H} \cdot da \\ &= n \cdot \frac{d}{dt} \iint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cdot da \\ &= n \cdot \frac{d}{dt} (a \bar{\Omega}) \\ &= na \cdot \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \end{aligned}$$

Ändert sich also $\bar{\Omega}$ plötzlich von Ω_1 zu Ω_2 und verbindet man die Spirale mit einem ballistischen Galvanometer, so gilt die Gleichung (Wied. El. III. p. 317).

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \text{Const.} \sin. \frac{\theta}{2}$$

wenn θ der Ausschlag des Galvanometers ist.

Die beschriebene Einrichtung läßt sich verwirklichen durch Aufwinden eines Drahtes auf einen starken Gummischlauch, dessen Querschnitt sich durch Verbiegen nicht merklich ändert. Das eine Ende desselben wird festgeklemmt (Punkt B), das andere zunächst ebenfalls nach B, dann aber rasch nach dem zu untersuchenden Punkt (A) des magnetischen Feldes gebracht. Die Constante der Schlußgleichung läßt sich leicht ermitteln, indem man durch die Spirale einen Strom von bekannter Intensität schickt und unterbricht.

Chattock hat diese Einrichtung „magnetisches Potentiometer“ genannt.

§ 7.

Der magnetische Widerstand.

Schreibt man Gleichg. (1^a) in der Form

$$(1^b) \quad \mathbf{B} = \frac{\Omega}{\frac{1}{\mu}} = \frac{\Omega}{\frac{1}{\mu}}$$

so nennt man $\frac{1}{\mu}$ nach Analogie der Elektrizitätslehre „magnetischen Widerstand.“

Derselbe bezieht sich auf 1 qcm Leitungsquerschnitt und die Leitungslänge 1 und ist von der Dimension $[L^{-1}]$. Die dimensionslose Zahl $\frac{1}{\mu}$ wollen wir Widerstandskoeffizient heißen.

Haben wir eine magnetische Leitung von der Länge 1 und dem Querschnitt Q, so geht (1^b) über in

$$(1^c) \quad N = \frac{Q}{\mu \cdot Q}$$

$\frac{1}{\mu Q}$ heißt der Gesamtwiderstand der in Rede stehenden Leitung. Dimension $[L^{-1}]$.

Der reciproke Wert $\frac{\mu Q}{1}$ heißt die Gesamtleitungsfähigkeit.

Ganz wie in der Elektrizitätslehre ergibt sich weiter aus diesen Formeln (Maxwell, I. act. 275 u. 276).

„Der Widerstand einer Anzahl hintereinander geschalteter Leiter ist gleich der Summe der Widerstände der einzelnen Leiter.“ Und

„Die Leitungsfähigkeit eines vielfachen Leiters ist gleich der Summe der Leitungsfähigkeiten seiner einzelnen Zweige.“

Die genauere Feststellung des Widerstands in einem gegebenen Falle gliedert sich von selbst in 2 Teile: 1.) die physikalische Untersuchung des Widerstandskoeffizienten, 2.) die mathematische Ermittlung des Quotienten $\frac{1}{Q}$. Für Luftleitung hängt die Schwierigkeit ausschließlich am zweiten Teil und ist also wesentlich mathematischer Natur; für Eisenleitung ist umgekehrt die Ermittlung von $\frac{1}{Q}$, wenigstens näherungsweise, meist leicht, die des Widerstandskoeffizienten $\frac{1}{\mu}$ Sache des Versuchs.

Für die Zwecke der Praxis hat Forbes 3 Formeln zur näherungsweise Berechnung des Luftwiderstands bei Dynamomaschinen aufgestellt. Ihrer Wichtigkeit wegen mögen sie hier angeführt werden:

1.) (Fig. 1) Stehen sich 2 parallele Flächen Q und Q' im Abstand 1 gegenüber und nimmt man an, daß die magnetischen Linien die Projektionslinien sind, die von der Spitze des Kegels mit den Grundflächen Q und Q' ausgehen, so ist der Luftwiderstand

$$\frac{1}{Q+Q'}$$

2.) (Fig. 2) liegen 2 gleiche, ebene, rechteckige Polflächen von der Tiefe a in einer Ebene nahe beifammen, die innern Ränder um $2r_1$, die äußeren um $2r_2$ von einander entfernt, und nimmt man an, daß die magnetischen Linien concentrische Halbkreise sind, die auf den Polflächen senkrecht stehen, so ist der Luftwiderstand

$$\frac{1}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{a dr}{\pi r}} = \frac{\pi}{a \log \frac{r_2}{r_1}}$$

3.) Fig. 3.) Liegen 2 gleiche ebene rechteckige Polflächen von der Tiefe a und der Breite c in einer Ebene weit von einander, die inneren Ränder um b von einander entfernt, und nimmt an, daß die Kraftlinien sich aus Geraden = und Viertelskreisen um die innern Ranten als Axen zusammensetzen, so ist der Luftwiderstand

$$\frac{1}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{a dr}{b + \pi r}} = \frac{\pi}{a \log \frac{b + \pi r}{b}}$$

S. P. Thompson (Lect. p. 146) giebt eine Formel für den Luftwiderstand zwischen 2 parallelen

cylindrischen Magnetschenkeln, indem er die magnetischen Kraftlinien identifiziert mit den elektrischen Strömungslinien in einer Metallplatte, auf welcher 2 cylindrische Poldrähte aufgesetzt sind. Nach Kirchhoff (Gesammelte Abhandlungen p. 6) sind diese Strömungslinien Kreise, welche die Peripherien der Poldrähte senkrecht schneiden. Unter Benützung dieser Resultate findet sich für den Widerstand in einer Luftschicht von der Dicke 1 cm

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \log \frac{2\rho}{d + \sqrt{d^2 - 4\rho^2}}$$

wo ρ den Radius der Magnetschenkel, d die Entfernung ihrer Mittelpunkte bedeutet. Man erkennt, daß dieser Widerstand nur vom Verhältnis $\frac{\rho}{d}$ abhängt, ein Umstand, welcher die Rechnung bedeutend vereinfacht und die Aufstellung von Tafeln gestattet.

Haben die Magnetschenkel die Länge 1 und darf man näherungsweise annehmen, daß die Kraftlinien längs der ganzen Schenkel in der angegebenen Weise verlaufen, so ist der Gesamtluftwiderstand zwischen den Schenkeln (abgesehen von den Endflächen)

$$\frac{1}{\pi} \cdot \log \frac{2\rho}{d + \sqrt{d^2 - 4\rho^2}}$$

Wir fügen diesen Formeln im II. Abschnitt eine Näherungsformel für den Luftwiderstand eines cylindrischen Stabes hinzu.

§ 8.

Fortsetzung. Die Permeabilität μ .

Die Zahl μ hängt lediglich von der Natur des Stoffes ab, aus dem die Leitung des magnetischen Stromes besteht. Da sie als Permeabilität in der alten Theorie eine große Rolle spielt, so liegen zahlreiche Bestimmungen derselben vor. Den Zusammenhang mit der Neumann'schen sogenannten Magnetisierungskonstanten κ vermittelt die Gleichung (Maxwell II. art. 428)

(3)

Für das Vakuum setzt man $\kappa = 0$, $\mu = 1$. Dann ist für diamagnetische Körper κ negativ, also $\mu < 1$, für paramagnetische κ positiv, $\mu > 1$. Für alle Stoffe mit Ausnahme der 3 Metalle Eisen, Nickel, Kobalt ist κ sehr wenig von Null, also μ äußerst wenig von 1 verschieden. Zugleich kann für alle diese Stoffe μ als Konstante betrachtet werden. Wenigstens ist F. Stenger (Wied. Ann. 35. 1888) mit Berücksichtigung der gesammten Literatur über die Gesetze der Magnetisierung dieser Stoffe zu dem Ergebnis gelangt, daß wir vorläufig keinen unzweideutigen Beweis dafür haben, daß die „Magnetisierungskonstante,“ also auch die Permeabilität μ als Funktion der Feldstärke anzusehen ist. In diesem Aufsatz wird daher für alle Stoffe, mit Ausnahme der 3 magnetischen Metalle, μ konstant nämlich gleich 1 genommen; es ist also auch der Widerstandskoeffizient = 1. Am wichtigsten ist diese Bemerkung für die Luft.

Ganz anders verhält es sich mit der Zahl μ für die 3 magnetischen Metalle. Für sie ist μ und also auch der Widerstandskoeffizient nicht konstant, sondern variiert mit der Größe der magnetomotorischen Kraft, ein Umstand, der, wie ohne weiteres ersichtlich ist, die Anwendung des Ohm'schen Gesetzes auf den Magnetismus erheblich erschwert.

Bei der folgenden Darstellung beschränken wir uns auf das Eisen als das wichtigste und best untersuchte der 3 genannten Metalle, dessen Verhalten typisch ist.

Schon Joule (1839) hatte aus Versuchen über die Tragkraft von Elektromagneten geschlossen, daß die Magnetisierung des weichen Eisens einer Sättigung zustrebt. Jedoch erst die nochmalige Entdeckung dieser Thatsache durch J. Müller (Pogg. Ann. 1850) durch Messungen an stabförmigen Elektromagneten machte sie zum dauernden Besitz der Wissenschaft. Vielleicht hat die für die damalige Theorie notwendige

Voraussetzung der Konstanz der Magnetisierungszahl Mitschuld an der Verschleppung; die „Magnetisierungskonstante“ hat sich bis heute erhalten. Die Versuche, die Magnetisierungszahl des Eisens zu ermitteln, finden sich übersichtlich zusammengestellt im 2. Band von Mascart und Joubert's Lehrbuch der Elektrizität art. 1204. ff. Die älteren derselben sind nicht einwandfrei, da sie an verhältnismäßig kurzen Eisenstäben angestellt wurden, bei denen der demagnetisierende Einfluß der Endflächen sehr stark ist. Die langgestreckten Stäbe und Ellipsoide von Thalen, Weber, Riecke, Quintus Icilius waren in keinem Fall 200mal länger als dick, während die neueren Untersuchungen von Ewing (Phil. Trans. 1885. part 2) zeigen, daß erst bei Stäben mit einem Verhältnis von Länge:Breite über 300 die entmagnetisierende Kraft der Enden nicht mehr fühlbar ist. Immerhin zeigen diese Versuche deutlich den allgemeinen Verlauf der Magnetisierungszahl in ihrer Abhängigkeit von der magnetisierenden Kraft: zuerst rasches Ansteigen zu einem Maximum, dann langsames Absinken.

Den Gedanken, die Endflächen dadurch unschädlich zu machen, daß man den Eisenstab zu einem Ring zusammenschweißt, hatten fast gleichzeitig Stoletow und H. A. Rowland (1872—73). Zwar war das Ringproblem schon 1854 von Kirchhoff mittelst der Poisson'schen Theorie mathematisch bearbeitet worden, aber die experimentelle Behandlung ließ fast 20 Jahre auf sich warten. Die Abhandlung Rowland's (Phil. Mag. 46. 1873) ist für die Kenntnis der Permeabilität μ von Eisen, Stahl und Nickel grundlegend; es ist dieselbe, die in § 2 als zweiter Ausgangspunkt der hier vertretenen Auffassung des magnetischen Grundgesetzes hervorgehoben wurde. Später haben Bosanquet, Ewing und Hopkinson sich ebenfalls der Ringmethode bedient.

Die Ueberlegenheit der Ringmethode über die vorher angewendeten Methoden läßt sich unmittelbar durch die Betrachtung des magnetischen Widerstands erkennen. Beim Stab und Ellipsoid setzt sich der Widerstand zusammen aus dem des Eisens und dem der Luft; beim geschlossenen tangential magnetisierten Ring aus homogenem Material von überall gleichem Querschnitt hat man es nur mit dem an allen Stellen gleichen Widerstand des betreffenden Materials zu thun. J. Hopkinson (Phil. Trans. 1885) hat in anderer Weise für den Ausschluß des störenden Luftwiderstands bei Bestimmung von μ gesorgt. Seine „divided bar method“ (nach S. P. Thompson) besteht darin, daß der zu untersuchende zweiteilige Stabelektromagnet möglichst dicht anschließend in einen ausgehöhlten Block von weichem Schmiedeeisen gesteckt wird. Die aus dem Stabe austretenden magnetischen Linien schließen sich durch den eisernen Block hindurch. Die Zweiteilung des Elektromagnets ermöglicht die Messung der Induktion ohne Unterbrechung des Stromes, während beim Ring die der Stromumkehrung entsprechende doppelte Induktion gemessen wird.

Was nun diese Versuche liefern, das ist zunächst eine Tafel über die Zusammengehörigkeit der Werte \mathbf{B} und \mathbf{Q} , bzw. \mathbf{H} . Beim Ring ist $\mathbf{Q} = 1 \cdot \mathbf{H}$, wenn 1 die Länge seiner kreisförmigen Axe ist; bei der divided bar method ist unter 1 die reduzierte (Hopkinson l. c.) Länge des Stabes zu verstehen. Fig. 4 zeigt \mathbf{B} als Funktion von \mathbf{H} für norwegisches Eisen nach Rowland. Die Curve, anfangs konvex, dann durchaus konkav gegen die \mathbf{H} -Axe, steigt sehr rasch an, biegt dann in einem Knie um und verläuft von da an flach ansteigend. Die bisher vermutete Grenze, welcher \mathbf{B} zustreben sollte, ist nach Ewing's Versuchen (s. Kenelly, La Lum. é. T. 42. 1891.) nicht vorhanden. Ewing erhielt $\mathbf{B} = 45350$, also mehr als das Doppelte des angenommenen Dichtemaximums.

Die Permeabilität $\mu = \mathbf{B} : \mathbf{H}$ läßt sich nun auf 2 Arten darstellen, nämlich als Funktion von \mathbf{H} (Fig. 5) oder als Funktion von \mathbf{B} (Fig. 6). Die erste Darstellungsweise ist die ältere; sie zeigt, daß μ von einem bestimmten Anfangswert aus sehr rasch steigt, dann fast in einer Spitze umkehrt und der Exponentialfunktion ähnlich gegen die \mathbf{H} -Axe verläuft. Die andere Art ist von Rowland (Phil. Mag. 46. 1883) eingeführt worden. Die Curve hat auffallende Ähnlichkeit mit einer schiefen Parabel; es fehlt nur an den Enden. Besser noch stimmt Rowland's Formel.

$$4\pi\mu = 31,100 \cdot \sin \frac{10B + 0,87 \cdot 4\pi\mu + 5000}{1000}$$

Der nicht erreichte Schnittpunkt der Curve mit der B -Axe würde bei geometrischer Fortsetzung etwa bei $B = 17000$ zu liegen kommen; $B = 17000$ gäbe demnach das Maximum der Induktion an. Allein dieser Wert ist neuerdings oft überschritten worden (siehe S. P. Thompson, Lect. p. 72). Ewing erreichte bei Lowmoor-Eisen 31500, später sogar 45350 Kraftlinien pro qcm. Es folgt hieraus, daß die Curve in der fraglichen Gegend einen Wendepunkt besitzen muß, jenseits dessen sie sich wahrscheinlich asymptotisch der B -Axe nähert. Auf diesen Wendepunkt hat zuerst Fromme (Dissertation 1874) aufmerksam gemacht und aus der von ihm vermuteten Lage des Schnittpunkts mit der A -xe auf eine größte Magnetisierungsintensität (= Moment:Volum) von 1700 C.G.S.-Einheiten geschlossen, welche etwa einem Induktionswert $B = 21000$ entspricht. Von Waltenhofen nimmt in seinen Arbeiten als größte Magnetisierungsstärke 212,5 C.G.S.-Einheiten auf die Gewichtseinheit bezogen; auf das Volum umgerechnet giebt dies $212,5 \cdot 7,8 = 1657$, also nahe 1700, wie Fromme annimmt. Ewing und Low geben für Lowmooreisen 1680, für schwedisches Eisen 1700 an. In Uebereinstimmung damit bezeichnet S. P. Thompson als praktische Grenze $B = \text{ca. } 20000$ für gutes Schmiedeeisen.

§ 9.

Fortsetzung. Der Widerstandskoeffizient $\frac{1}{\mu}$.

Aus den Angaben des vorigen § läßt sich nun leicht der Widerstandskoeffizient $\frac{1}{\mu}$ ableiten. Fig. 7 zeigt die Abhängigkeit desselben von H beim norwegischen Eisen nach Rowland (s. Kenelly l. c.). Es zeigt sich, daß ein großer Anfangswiderstand vorhanden ist, der aber mit wachsendem H rasch abnimmt bis auf etwa 0,0002 für $H = 4,5$, dann in scharfem Knie umbiegt und geradlinig ansteigt. Der absteigende Curventeil, der in der Figur gerade erscheint, hat bei großem Maßstab mehr die Form der Exponentialfunktion, ist also nach der H -Axe konver. Das Knie bildet für den Widerstand die kritische Region. Jenseits derselben scheinen die Abweichungen von der Geraden innerhalb der unvermeidlichen Beobachtungsfehler zu liegen. Bis $H = 150$ liegen zahlreiche bestätigende Beobachtungen vor; für größere H fehlen sie fast ganz. Nur Ewing und Low haben Messungen angestellt für die sehr hohen Werte $H = 3630$ bis $H = 11200$ und eine Einzelbeobachtung für $H = 24500$ an Schmiedeeisen. Ihre wichtigen Versuche bestätigen den geradlinigen Verlauf auch bis zu diesen hohen Werten von H , bei welchen $\frac{1}{\mu}$ bis zu 1,2, also 20% über den Luftwiderstand anwächst. Kenelly giebt als Gleichung der Geraden $\frac{1}{\mu}$ jenseits des kritischen Punktes für norwegisches Eisen

$$(4) \quad \frac{1}{\mu} = 0,0001 + 0,000058 \cdot H.$$

Aus Bosanquet's Zahlen (S. P. Thompson, Lect. p. 67) für Schmiedeeisen erhielt ich

$$(4^a) \quad \frac{1}{\mu} = 0,0003 + 0,000054 \cdot H.$$

Für gewöhnliches Schmiedeeisen, das man im absterbenden Holzkohlenfeuer kalt werden ließ, erhielt ich aus Ringversuchen

$$(4^b) \quad \frac{1}{\mu} = 0,00017 + 0,000058 \cdot H.$$

Wir schreiben allgemein

$$(5) \quad \frac{1}{\mu} = a + b \cdot H$$

wo a einige Einheiten der Ordnung 10^{-4} , b einige Einheiten der Ordnung 10^{-5} bedeutet. Die An-

wendbarkeit dieser Formel beschränkt sich aber auf die Werte H , die größer sind als der kritische Wert von H , welcher, wie oben bemerkt wurde, etwa 4, 5, also klein ist.

Für Feldstärken, die unter dem kritischen Wert von H bleiben, kann man nach Kenelly näherungsweise setzen

$$(6) \quad \frac{1}{\mu} = 0,0029 - 0,0035 H.$$

Praktisch wird man hievon wohl selten Gebrauch machen.

Die künstliche Zerlegung der Widerstandskurve, welche überdies die kritische Region selbst ausschließt, zeigt deutlich, daß wir weit entfernt sind, das wahre Gesetz des magnetischen Widerstands zu kennen. Auch die Einfachheit der in (5) ausgesprochenen, in so weiten Grenzen gültigen Beziehung zwischen dem Widerstand und der magnetisierenden Kraft darf uns nicht verleiten sie als Naturgesetz aufzufassen.

Vorstehende Angaben beziehen sich durchweg auf weiches Eisen; bei hartem rückt die kritische Region weiter hinaus und das Knie fällt weniger spitz aus. Also nicht nur die chemische, sondern auch die physikalische Beschaffenheit beeinflusst den magnetischen Widerstand stark; naturgemäß also auch die Wärme. Diese Einflüsse bleiben jedoch hier unberücksichtigt.

§ 10.

Die allgemeine Form des magnetischen Ohm'schen Gesetzes.

Zwei Umstände sind es, die nach dem Vorhergehenden die Anwendung des Ohm'schen Gesetzes auf die magnetischen Erscheinungen wesentlich erschweren: 1.) die Veränderlichkeit des Widerstands mit der Feldstärke, 2.) Die Ausbildung von Luftnebenschlüssen. Das sind, nur anders ausgedrückt, auch die Schwierigkeiten in der alten Theorie; sie sind für die Hilfsmittel der heutigen analytischen Methoden mit wenig Ausnahmen unüberwindlich. Auf die erste stieß bekanntlich Kirchhoff 1853, als er die Magnetisierungsfunktion $F(n)$ an Stelle des Constanten μ einführte (Ges. Abhandl. p. 217.); ihm und seinen Nachfolgern gelang die Lösung nur in vereinzelten Fällen. Die 2te Schwierigkeit erschien von Anfang an als Oberflächenbedingung; aber die Notwendigkeit μ veränderlich zu nehmen hat sie noch vergrößert.

Die Anwendung des Ohm'schen Gesetzes bietet nun eine neue Art dar den genannten Schwierigkeiten in erster Näherung beizukommen und den Einfluß einer Anzahl von magnetischen Bestimmungsstücken mit verhältnismäßiger Leichtigkeit abzuschätzen, die sich bis jetzt der Untersuchung fast ganz entzogen haben.

Dabei machen wir folgende 4 vereinfachende Annahmen:

- 1.) Der magnetische Kreis besteht nur aus weichem Eisen und nichtmagnetischen Stoffen.
- 2.) H bewegt sich ausschließlich oberhalb des kritischen Wertes. Für den Widerstandskoeffizienten $\frac{1}{\mu}$ gilt somit Gleichung (5), welche als natürliche Erweiterung des elektrischen Widerstandsgesetzes erscheint.
- 3.) In einer durchaus geschlossenen eisernen Leitung, in welcher an beliebigen Stellen tangential wirkende magnetomotorische Kräfte vorhanden sind, wird von Luftnebenschlüssen abgesehen (s. Oberbeck's Ring § 4).
- 4.) Luftnebenschlüsse, die sich in Folge Unterbrechung der ferromagnetischen Leitung ausbilden, werden als mit dem Luftwiderstand innerhalb der einfachen Leitung parallel geschaltet angenommen.

Aus 3.) und 4.) folgt, daß Luft- und Eisenwiderstände nur in Reihe geschaltet vorkommen und daher der ganze Luftwiderstand als additive Constante zum Eisenwiderstand auftritt.

Für irgend einen magnetischen Kreis gilt darnach

$$N = \frac{\Omega}{a' + b'H + w}$$

wo w für den Gesamtluftwiderstand steht und $a' + b'H$ den Gesamteisenwiderstand bedeutet. Oder, mit Zusammenfassung der Constanten und Rücksicht darauf, daß Ω und H in linearem Zusammenhang stehen

$$(6) \quad N = \frac{\Omega}{a'' + b''\Omega}$$

folglich auch

$$(7) \quad B = \frac{\Omega}{m + n\Omega} = \frac{i}{m' + n'i}$$

Die letzte Formel ist die elektrotechnisch höchwichtige Formel, welche O. Frölich empirisch an Dynamomaschinen abgeleitet hat (Elekt. Ztschr. 1881). Ihre Uebereinstimmung mit der Beobachtung ist für Dynamomaschinen so vorzüglich, daß S. P. Thompson (Phil. Mag. 21. 1886) geneigt ist sie als Naturgesetz zu nehmen. Ohne so weit zu gehen begnügen wir uns aus der Gültigkeit der Gleichungen (6) und (7) für ein so kompliziertes magnetisches System, wie es die Dynamomaschine ist, den Schluß zu ziehen, daß unsere 4 Annahmen und Ohm's Gesetz auch in einfacheren Fällen zu richtigen Ergebnissen führen müssen. Zugleich aber giebt diese Behandlung einen ersten Einblick in die Abhängigkeit der Coefficienten m und n von den unmittelbaren Bestimmungsstücken, während sie bei Frölich einfach empirische Constanten sind.

Nur im Vorbeigehen möge noch erwähnt werden, daß sich Gleichung (7) bereits in Lamont's Handbuch des Magnetismus 1867 S. 41 findet. Doch, fügt Lamont hinzu, ist eine rationelle Begründung dafür wohl nicht anzugeben.

Gleichung (6) oder (7), welche die allgemeine Form des magnetischen Ohm'schen Gesetzes ist, zeigt, daß der Zusammenhang zwischen B und H hyperbolisch ist. Die Curve ist eine gleichseitige Hyperbel, ihre Asymptoten laufen den Axen parallel, der Mittelpunkt hat die Coordinaten $(-\frac{m}{n}, \frac{1}{n})$. Der größte Wert von B ist $\frac{1}{n}$. Doch sei noch einmal daran erinnert, daß (6) und (7) nur für Werte von H oberhalb des kritischen gelten, d. h. nur jenseits des Wendepunkts der wirklichen Magnetisierungskurve und nur für Induktionen $B < 21000$. Die charakteristische Form der Magnetisierungskurve hat schon J. Müller gefunden. Er hat sie mit der Curve \arctg verglichen und darnach seine bekannte empirische Formel aufgestellt, welche trotz ihrer Transcendenz wertvolle Ergebnisse lieferte, vor allem in den Händen von v. Waltenhofen's.

II. Abschnitt.

Gerade, cylindrische Elektromagnete.

§ 11.

Wir wenden die im I. Abschnitt aufgestellten Grundsätze auf das Problem der geraden cylindrischen Elektromagnete an.

Es sind darüber zahlreiche theoretische Formeln aufgestellt worden. Dieselben betreffen jedoch ausschließlich sehr dünne und sehr lange Magnetstäbe. Am bekanntesten ist Green's Formel (Essay 1828, abgedruckt im 47. Bd. von Crelle's Journal). Dieselbe ist aus der allgemeinen Theorie von Poisson abgeleitet und geht auch aus der Biot'schen Formel (Traité de phys. 1816) für die magnetische Verteilung

(Kettenlinie) hervor. Besonders wichtig aber an dieser Stelle ist Rowland's Behandlung nach Ohm's Gesetz, welche in der mehrfach erwähnten wichtigen Abhandlung von 1873 angedeutet ist. Rowland giebt nur die Endformeln, die mit denen von Green und Biot übereinstimmen; die Rechnung selbst findet man in Mascart & Joubert I. art. 268 und 423. Der Widerstand des Eisens gilt dabei als konstant. 1876 erhielt Jamin, einer Andeutung W. Thomson's folgend, aus der Analogie mit der Wärmeleitung ähnliche Ausdrücke wie Biot (Wied. Elekt. III. p. 383); erst kürzlich (1890) ist auf diese Analogie von Pisati aufs neue großes Gewicht gelegt worden, weil die thermische Leitungsfähigkeit auch nicht notwendig konstant ist. Die zahlreichen aus der Drehung der Molekularmagnete hergeleiteten Formeln bleiben für uns außer Betracht.

Diesen Ergebnissen gegenüber steht die empirische Formel Müller's für das Moment von Stäben.

Die im folgenden abgeleiteten Formeln stehen gewissermaßen in der Mitte zwischen den rein theoretischen und empirischen. Für die Rechnung werden zunächst dünne cylindrische Stäbe aus weichem Schmiedeeisen vorausgesetzt. Der magnetische Widerstand eines solchen Stabes setzt sich zusammen aus dem des Eisens und dem der Luft. Letzterer zerfällt wieder in 2 Teile, den seitlichen, welchen die aus dem Mantel des Cylinders austretenden Kraftlinien zu überwinden haben, und denjenigen, welcher sich den aus den Endflächen ausströmenden magnetischen Linien entgegensetzt. Für den Verlauf dieser Kraftlinien werden nach dem Vorbild von Forbes und S. P. Thompson einfache Formen angenommen (vergl. § 7).

§ 12.

Seitlicher Luftwiderstand eines dünnen cylindrischen Stabes.

Die Berechnung erfolgt unter der Annahme, daß die magnetischen Linien Meridiane der konzentrischen Kugelschaalen sind, die um die Mitte des Stabes beschrieben werden und deren Pole in den Mitten der Stabenden liegen. Fig. 8.

2a Stablänge, 2c Stabdicke; c klein gegen a. Mit Einführung der räumlichen Polarkoordinaten r, φ , ϑ erhält man

$$\begin{aligned} \text{Leitungsfähigkeit eines Volumelements} &= \frac{\sin \varphi \, dr \, d\vartheta}{d\varphi} \\ \text{„ „ eines Elementarringes} &= \frac{2\pi \cdot \sin \varphi \cdot dr}{d\varphi} \\ \text{Widerstand „ „ „} &= \frac{d\varphi}{2\pi \sin \varphi \, dr} \\ \text{Widerstand der Schale} &= \frac{1}{2\pi \, dr} \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \\ &= \frac{1}{2\pi \, dr} \cdot \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi-\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} \\ &= \frac{\pi \, dr}{1} \cdot \log \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Nun ist } \sin \varphi_1 = \frac{c}{r}; \text{ hieraus } \operatorname{cotg} \frac{\varphi_1}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{c}{r}\right)^2}}{\frac{c}{r}}. \text{ Da } \frac{c}{r} < 1, \text{ so läßt sich die Wurzel}$$

in eine Reihe entwickeln. Begnügen wir uns mit den 2 ersten Gliedern, so wird

$$\cotg \frac{\varphi_1}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r} \right)^2}{\frac{s}{r}}$$

oder näherungsweise

$$\cotg \frac{\varphi_1}{2} = \frac{2r}{s}$$

Die hier zugelassene Vernachlässigung rechtfertigt sich, wenn man bedenkt, daß die Kraftlinienströmung in der Stabmitte schwach ist und also hauptsächlich die kleineren Beträge von $\frac{s}{r}$ ins Gewicht fallen.

Man hat also

$$\text{Widerstand der Schaale} = \frac{\log \frac{2r}{s}}{\pi dr}$$

$$\text{und daher Leitungsfähigkeit der ganzen Kugel} = \pi \int_s^a \frac{dr}{\log \frac{2r}{s}}$$

Die obere Grenze a ist die nach den Voraussetzungen über den Stab gestattete erste Näherung von $\sqrt{a^2 + s^2}$.

Das Integral, auf welches wir gestoßen sind, ist in geschlossener Form nicht lösbar. Um einen genäherten Wert zu erhalten, bestimmen wir das arithmetische Mittel von $\log \frac{2r}{s}$ zwischen den Grenzen des Integrals, also

$$\frac{1}{a-s} \int_s^a \log \frac{2r}{s} \cdot dr$$

Man findet leicht durch partielle Integration

$$\frac{s}{2(a-s)} \left[\left(\log \frac{2a}{s} - 1 \right) \frac{2a}{s} - (\log 2 - 1) 2 \right]$$

$2(1 - \log 2)$ ist = 0,61370, also klein gegen das erste Glied, welches für einen Stab von einer Länge gleich dem 5fachen Durchmesser 13, für einen Stab, der 10 mal so lang als dick ist, etwa 40, für einen solchen, der 100 mal so lang als dick ist, etwa 960 beträgt. Lassen wir also eine Vernachlässigung von höchstens 5% zu, so können wir für alle Stäbe, für welche die Länge den Durchmesser mindestens 5 mal übertrifft, das zweite Glied vernachlässigen.

Für Stäbe von dieser Art ist also der gesuchte Mittelwert

$$\frac{a}{a-s} \cdot \left(\log \frac{2a}{s} - 1 \right)$$

oder einfacher

$$\log \frac{2a}{s} - 1$$

Dieser Mittelwert bedarf aber einer Correction. Seine Bestimmung ist offenbar gegründet auf die stillschweigende Annahme, daß die Werte $\log \frac{2r}{s}$ alle gleiches Gewicht haben, d. h. daß die magnetischen Kraftlinien längs des ganzen Stabmantels überall in gleicher Dichte austreten. Dies trifft, wie schon oben bemerkt wurde, nicht zu. Der einfachste Versuch mit Eisenfeilen zeigt, daß die Dichte der Kraftlinien gegen die Enden des Stabes zu viel größer ist als in der Mitte. Um dieser physikalischen Eigentümlichkeit — der unbekannteren magnetischen Oberflächenverteilung — Rechnung zu tragen, multiplizieren wir den gefundenen Mittelwert mit einer Constanten c , deren untere Grenze 1, deren obere, wie sich zeigen wird, 2 ist.

Man erhält mithin für die seitliche Leitungsfähigkeit der Luft für Stäbe vom Verhältnis $\frac{a}{s} \geq 5$

(8) und für deren seitlichen Luftwiderstand

$$\frac{\pi a}{c \left(\log \frac{2a}{c} - 1 \right)}$$

(9)

$$\frac{c \left(\log \frac{2a}{c} - 1 \right)}{\pi a}$$

§ 13.

Luftwiderstand der ebenen Endflächen cylindrischer Stäbe.

Betrachtet man nach dem Vorgang von Dr. Ulbricht (Electrot. Zeitsch. 1883) die Niveauflächen der aus den Endflächen des Stabes austretenden Kraftlinien als zusammengesetzt aus den Endflächen parallelen, kongruenten Scheiben vom Radius c und Viertelwulstflächen, die den Rand der Endflächen als Axe haben, so ergibt sich der Luftwiderstand einer Endfläche

$$(10) \quad \int_0^a \frac{dr}{\pi c^2 + \pi^2 r \left(c + \frac{2r}{\pi} \right)} = \frac{1,36}{2\pi c}$$

Der Luftwiderstand einer Endfläche bezogen auf das q_{om} ist demnach $0,68 c$. Es ist nicht uninteressant zu bemerken, daß dieser Wert nahe übereinstimmt mit dem von Lord Rayleigh (Theory of Sound 1878 II. p. 188) und Bosanquet (ibid.) angegebenen Werten $0,6 c$ bzw. $0,635 c$ für die Correktion der Länge einer offenen Pfeife, welche dem Widerstand der Ausstrahlung der Schallstrahlen in die freie Luft entspricht.

Da die Luftwiderstände beider Endflächen als hintereinander geschaltet zu betrachten sind, ist der Gesamtluftwiderstand der Endflächen des Stabes doppelt so groß, also

$$(11) \quad \frac{1,36}{\pi c} = \frac{1}{0,74 \pi c}$$

§ 14.

Magnetischer Gesamtwiderstand eines Stabes.

Für mittlere Stäbe, wie wir sie hier betrachten, kann man näherungsweise annehmen, daß die Kraftlinien den Eisenstab seiner ganzen Länge nach geradlinig durchsetzen. Ist daher $\frac{l}{\mu}$ der Widerstandscoefficient des Eisens, so ist der vom Eisen herrührende Widerstand des Stabes $\frac{l}{\mu Q}$.

Unter derselben Annahme sind dann die Luftwiderstände des Mantels und der Endflächen als mit einander parallel und mit dem Widerstand des Eisens in Reihe geschaltet zu denken (Annahme 4, § 10).

Der Gesamtwiderstand des Stabes ergibt sich darnach zu

$$(12) \quad \frac{1}{\mu \pi c^2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{c \left(\log \frac{2a}{c} - 1 \right)}{a + 0,74 c \left(\log \frac{2a}{c} - 1 \right)} \quad (\text{Dimension } [L^{-1}])$$

Dieser Widerstandswert in die magnetomotorische Kraft dividiert, liefert den magnetischen Gesamtfluß N durch die Stabmitte. Für die Berechnung der Induktion B , welche das Gewöhnliche ist, bedarf man des Widerstands des Stabes bezogen auf die Querschnittseinheit desselben; dieser ist

$$(13) \quad \frac{1}{\mu} + \frac{c s^2 \left(\log \frac{2a}{s} - 1 \right)}{a + 0,74 c s \left(\log \frac{2a}{s} - 1 \right)} \quad (\text{Dimension } [L^1])$$

Zur bequemeren Rechnung setzen wir

$$(14) \quad c \cdot \frac{\log \frac{2a}{s} - 1}{\frac{a}{s}} = \beta$$

Dann wird der auf 1 qcm bezogene Widerstand des Stabes

$$(15) \quad \frac{1}{\mu} + \frac{s\beta}{1 + 0,74 \cdot \beta}$$

§ 15.

Bestimmung der oberen Grenze der Constanten c.

Die Bestimmung geschieht durch Vergleichen des nach der Poisson'schen Theorie für ein stark verlängertes Rotationsellipsoid erhaltenen Resultates mit dem unfrigen für Stäbe. Nach Maxwell (El. II. art. 438 c) ist für ein solches Ellipsoid mit der Hauptaxe a und der Aequatoraxe s der Coefficient der demagnetisierenden Kraft

$$N = 4\pi \cdot \frac{s^2}{a^2} \left(\log \frac{2a}{s} - 1 \right)$$

ferner nach art. 438d die Neumann'sche Magnetisierungsfunktion

$$z = \frac{1}{N + \frac{Z}{c}}$$

wo Z die äußere magnetisierende Kraft in der Richtung der Hauptaxe, c die Magnetisierungskomponente des Ellipsoids in der gleichen Richtung bedeutet. Nach Maxwell II. art. 428 ist aber $c = z \cdot Z$, also

$$\frac{Z}{c} = \frac{1}{z} = \frac{4\pi}{\mu - 1} = \frac{4\pi}{\mu} \quad (\text{nahe})$$

und

$$z = \frac{\mu}{4\pi} = \frac{B}{4\pi H}$$

also

$$B = \frac{H}{\frac{s^2}{a^2} \left(\log \frac{2a}{s} - 1 \right) + \frac{1}{\mu}}$$

Wir haben nun andererseits nach dem vor. § für einen Stab von der Länge 2a und der Dicke 2s

$$B = \frac{Q}{\frac{2a}{\mu} + \frac{s\beta}{1 + 0,74\beta}}$$

oder

$$B = \frac{H}{\frac{1}{\mu} + \frac{s}{2a} \cdot \frac{\beta}{1 + 0,74\beta}}$$

Vergleicht man beide Resultate, so erhält man die Bedingung

$$\frac{s}{2a} \cdot \frac{\beta}{1 + 0,74\beta} = \frac{s^2}{a^2} \cdot \left(\log \frac{2a}{s} - 1 \right)$$

oder

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{1 + 0,74\beta} = \frac{1}{c} \cdot \beta$$

Mit Berücksichtigung von Gleichung (14) folgt hieraus

$$c = \frac{2}{1 - 1,48 \cdot \frac{\log \frac{2a}{s} - 1}{\frac{a}{s}}}$$

Diese Gleichung hat nur Gültigkeit für sehr lange Stäbe.

Für große Werte von $\frac{a}{s}$ ist aber das zweite Glied des Nenners klein gegen das erste, so daß sich als oberer Grenzwert für c 2 ergibt. Es ist also

$$1 < c < 2.$$

Für mittlere Stäbe liegt mithin c zwischen 1 und 2.

Es ist nicht zu erwarten, daß c eine wirkliche Constante ist. Sie ist gewissermaßen die Repräsentantin der magnetischen Verteilung und hängt demgemäß nicht nur ab von den Dimensionen der Stäbe, sondern auch von der Magnetisierungsstärke. (Ueber die Veränderlichkeit der Lage der Pole siehe besonders Rowland l. c. 1873). Wir müssen uns hier mit einer empirischen Bestimmung dieser Größe begnügen.

§ 16.

Prüfung der Formeln für mittlere und lange Stäbe.

Zur Prüfung unserer Widerstandsformeln eignen sich am besten die Versuche von Bosanquet in Philos. Magazine XVII. p. 531 1884. und XXII. p. 298 1886. über den magnetischen Widerstand von stabförmigen Elektromagneten.

In der ersten Abhandlung benützte Bosanquet 2 weiche Eisenstäbe I und II mit folgenden Dimensionen:

$$\text{I.} \quad s = 0,9379 \text{ cm} \quad 2a = 28,55 \text{ cm} \quad n = 957 \quad \frac{a}{s} = 15,22$$

$$\text{II.} \quad s = 0,4800 \quad 2a = 30,00 \quad n = 995 \quad \frac{a}{s} = 31,25$$

Die von ihm gefundenen Zahlen sind berechnet nach der Formel

$$\text{Mag. Widerstand} = \frac{4 \pi n i}{B}$$

stellen also den Gesamtwiderstand pro qcm dar und bewegen sich für den ersten Stab zwischen 0,343 und 0,522 mit einem langgestreckten Minimum von etwa 0,23; die entsprechenden Zahlen für den sich ähnlich verhaltenden Stab II sind 0,183; 0,385; 0,08. Besonders auffallend sind die Gegenden des Minimums, welche zwischen $B = 2000$ bis $B = 15000$ höchstens 2—3% von einer Geraden abweichen.

Bosanquet kommt nun zum Schluß, daß der magnetische Widerstand jedes der 2 Stäbe dargestellt werden kann als Summe des Eisenwiderstands $\frac{2a}{\mu}$ und eines „Formwiderstands“, für welchen er die empirische Formel giebt

$$(16) \quad 0,37 s \cdot 10^{-0,0061 \cdot \frac{2a}{s}}$$

Man erkennt unmittelbar, daß diese Formel dasselbe darstellen muß wie unser Luftwiderstand

$$(17) \quad \frac{s \beta}{1 + 0,74 \beta}$$

Man wird also Bosanquet's empirische Formel dazu anwenden können über die in β enthaltene Constante c näheres zu erfahren, bezw. unsere Formel zu prüfen.

Die Rechnung ergibt

	Formwiderstand (16)	Luftwiderstand (17)	c
Stab I	0,2263	$\frac{0,1489 \cdot c}{1 + 0,74 \cdot \frac{0,1489}{0,9379} \cdot c}$	1,85

	Formwiderstand (16)	Luftwiderstand (17)	c
Stab II	0,0738	$\frac{0,0482 \cdot c}{1 + 0,74 \cdot \frac{0,0482}{0,4800} \cdot c}$	1,73

Im zweiten der angeführten Bosanquet'schen Aufsätze handelt es sich um Stäbe mit dem Verhältnis $\frac{a}{c} = 20$, aber wechselndem a und c (kleinster Wert von c 0,5 cm, größter 2,5 cm). Auch für sie nimmt Bosanquet seine empirische Formel in Anspruch. Für c ergibt sich hieraus der Wert 1,86, also fast genau derselbe wie für Stab I. Nehmen wir für c einen mittleren Wert 1,80, so erhält man

Stab.			Formwiderstand (16)	Luftwiderstand (17)	Differenz in %
2a	c	$\frac{2a}{2c}$			
28,55	0,9379	15,22	0,2263	0,2212	- 2,1
30,00	0,4800	31,25	0,0738	0,0765	+ 3,6
20,00	0,5000	20,00	0,1056	0,1026	- 2,8
40,00	1,0000	20,00	0,2112	0,2052	- 2,8
60,00	1,5000	20,00	0,3168	0,3078	- 2,8

Es folgt also aus den Bosanquet'schen Versuchen, daß für nicht zu dünne Stäbe, deren Länge das 15—30fache des Durchmessers beträgt, die Formel (17) mit dem Wert $c = 1,80$ bis auf etwa 3% richtige Widerstandswerte liefert.

Für die praktische Rechnung kann die Formel (17) ersetzt werden durch die einfachere

$$\text{Gesamtluftwiderstand pro qem} = \varepsilon \beta$$

jedoch hat dann c einen andern Wert. Denn für Stäbe mit dem Verhältnis $\frac{a}{c} > 15$ ist $\beta < 0,3$; $0,74\beta < 0,2$; also

$$\frac{\varepsilon \beta}{1 + 0,74 \beta} > \varepsilon \beta (1 - 0,2)$$

Läßt man den Faktor 0,8 in das c von β eingehen, so folgt für das c der vereinfachten Formel daß es etwas größer ist als 1,44. Die direkte Bestimmung von c durch Anwendung der vereinfachten Formel $\varepsilon \beta$ auf die obigen Stäbe ergibt für c der Reihe nach 1,52; 1,53; 1,56. Nimmt man als Mittel $c = 1,54$, so giebt die Formel $\varepsilon \beta$ als Luftwiderstand für die oben angeführten Stäbe der Reihe nach

	0,2293;	0,0742;	0,1035;	0,2070;	0,3105
Differenz in %	+ 1,3	+ 0,5	- 1,9	- 1,9	- 1,9

Die Frage nach der oberen Gültigkeitsgrenze der Formel (12) habe ich bis jetzt aus Mangel an geeignetem Beobachtungsmaterial nicht beantworten können. Zwar liegt eine Beobachtungsreihe von Ewing vor (Ph. Trans. 1885) über Drähte von 0,158 cm Durchmesser und 50—300facher Länge. Jedoch stimmen die von Ewing erhaltenen Curven (l. c. Fig. 3) nicht überein mit dem Resultat, das er von einem gleich dicken (und wohl auch gleichbeschaffenen) Draht von 400facher Länge erhielt (l. c. Fig. 4) und welches Ewing als „Thoroughly typical example of the behaviour of annealed iron“ bezeichnet; die Resultate sind daher nicht zu einer endgültigen Entscheidung zu brauchen.

Die erwähnten Versuche wurden von Ewing in der Absicht gemacht diejenige Länge der Drähte aufzufinden, für welche — nach alter Auffassung gesprochen — der entmagnetisierende Einfluß der Endflächen verschwindend ist und sich also die Drähte verhalten wie geschlossene Ringe. Das Ergebnis ist, wie schon § 8 erwähnt, daß die Länge die Dicke mindestens 300 bis 400 mal übertreffen muß. Das lehrt aber auch unsere Formel. Denn soll der gerade Draht sich magnetisch wie ein Ring verhalten, so muß der Luftwiderstand $\frac{\varepsilon}{2a} \cdot \frac{\beta}{1 + 0,74 \beta}$ gegen den Eisenwiderstand $\frac{1}{\mu} = a + b H$ vernachlässigt werden können. Für den ersteren haben wir nun

$$\frac{a}{s} = \quad 200 \quad 300 \quad 400 \quad 500$$

$$\frac{s}{2a} \cdot \frac{\beta}{1+0,74\beta} = 0,000109 \quad 0,000053 \quad 0,000031 \quad 0,000029$$

Für $\frac{1}{\mu}$ legen wir den Wert (4) $0,0001 + 0,000058 H$ zu Grunde. Läßt man nun zu, daß der Luftwiderstand als gegen den Eisenwiderstand verschwindend angesehen wird, wenn er höchstens $\frac{1}{10}$ desselben beträgt, so ergibt sich, daß gerade Drähte vom Verhältnis

$$\frac{a}{s} = 500 \text{ von } H = 5 \text{ an}$$

$$\frac{a}{s} = 400 \text{ von } H = 10 \text{ an}$$

$$\frac{a}{s} = 300 \text{ von } H = 15 \text{ an}$$

$$\frac{a}{s} = 200 \text{ von } H = 36 \text{ an}$$

sich nahe wie geschlossene Ringe verhalten. Bei Stäben von $\frac{a}{s} \geq 400$ haben wir mithin schon von kleinen magnetisierenden Kräften an nahe Uebereinstimmung mit Ringen, im Einklang mit der Erfahrung.

Wir ziehen hieraus den Schluß, daß unsere Luftwiderstandsformel auch für große $\frac{a}{s}$ nicht wesentlich unrichtig sein kann. Die genaue obere Gültigkeitsgrenze kann nur durch unmittelbare Prüfung an Beobachtungen festgelegt werden. Es ist wohl nicht zu zweifeln, daß sie erheblich über dem höchsten, der Prüfung unterworfenen Wert $\frac{a}{s} = 31$ liegt. Die Lage der untern Gültigkeitsgrenze zeigt der folgende § über kurze Stäbe.

§ 17.

Kurze Stäbe.

Die Prüfung unserer Formel an kurzen Stäben läßt sich an einigen von Waltenhofen'schen Versuchsreihen ausführen. Von Waltenhofen giebt allerdings keine direkten Induktionsmessungen, sondern magnetische Momente. Der Zusammenhang der Induktion B in der Mitte des Stabes mit dem Gesamtmoment ist folgender (conf. Bosanquet, Ph. Mag. 1884. 17):

Ist m die Magnetismussmenge (nach Coulomb) im Pol eines Stabes, so ist

$$\text{Moment} = p \cdot l m$$

p soll der Polabstandskoeffizient heißen, pl = Polabstand. Für gewöhnliche Stahlmagnete ist dieser Coeffizient nach F. Kohlrausch 0,83 (Wied. Ann. 1884. 22). Für Elektromagnete findet sich eine kleine Notiz hierüber in Wied. El. III. p. 510, wonach Lenz und Jacobi für Stäbe von 12—48" Länge fanden $p = 0,74$ bis $0,68$; außerdem ist angeführt, daß nach Bouty die Lage der Pole von der magnetisierenden Kraft unabhängig sei.

Der der magnetischen Masse m entsprechende Fluß ist $4\pi m$, andererseits bei kurzen Stäben $\pi s^2 \cdot B$, also

$$4\pi m = \pi s^2 \cdot B$$

$$m = \frac{s^2}{4} \cdot B$$

(18)

$$\text{Moment} = \frac{p l s^2}{4} \cdot B$$

(19)

$$p = \frac{\text{Moment}}{l s^2 \cdot B}$$

Bei der einen Versuchsreihe (Bericht von Dr. Krieg, Electrotech. Zeitschrift 1886) benötigte v. Waltenhofen einen 7 cm dicken, 27 cm langen Eisenzylinder in einer gleich langen Drahtspule von 384 Windungen. Die angewendeten Stromstärken waren

2,0 5,7 8,4 11,2 19,0 19,6 Amp.

entsprechend den Werten $= \frac{4\pi ni}{2a}$ wird

$H = 35,74 \quad 101,9 \quad 150,1 \quad 209,2 \quad 339,6 \quad 350,3 \quad \text{C.G.S.}$

Der Luftwiderstand ist nach der Formel $\frac{c\beta}{1+0,74\beta} = 1,253$ ($c = 1,8$ wie im vorigen §).

Unter der Voraussetzung, daß das Eisen sich nicht wesentlich verschieden verhält vom norwegischen, wird B unter Benützung von Gleichung (4)

$$(20) \quad B = \frac{H}{0,0465 + 0,000058 \cdot H}$$

$B = 736 \quad 1944 \quad 2720 \quad 3445 \quad 5130 \quad 5244 \quad \text{C.G.S.}$
 Beobachtete Momente = 39000 96000 145000 194000 337000 347000 C.G.S.

Nach Formel (19) endlich kommt

$p = 0,6431 \quad 0,5972 \quad 0,6448 \quad 0,6810 \quad 0,7946 \quad 0,8003$

Die Zahlen p bewegen sich sämtlich in der Höhe der oben gegebenen von Lenz & Jacobi. Zugleich aber zeigen sie, wenn man von der ersten absteht, ein langjames Wachstum entsprechend dem von B . Mit Rücksicht auf die schon erwähnte Bemerkung von Rowland (welche der Borty'schen Angabe widerspricht), daß die Pole mit verstärkter Magnetisierung gegen die Enden rücken, wird man daher sagen können, daß die gefundenen Zahlen p in hinreichendem Grade den an sie zu stellenden Bedingungen genügen, um daraus auf die Richtigkeit der Formeln (20) und (15) zu schließen.

Das Verhältnis der Länge zur Dicke ist beim untersuchten Stab 3,85.

Es liegt nahe das Wachstum von p mit B weiter zu prüfen. Unter der Voraussetzung, daß die oben gemachten Schlüsse, also die Werte B richtig sind, fand ich, daß sich p darstellen läßt als lineare Funktion von B ; p nähert sich demnach mit B einer Grenze, welche wohl nahe an 0,83 liegen dürfte, und die Abhängigkeit der Coefficienten p von B ist ähnlich derjenigen der Induction B von H . Ich behalte mir hierüber weitere Untersuchung vor.

Zur weiteren Prüfung des Geltungsbereichs der Formel (15) habe ich noch die Resultate benützt, die v. Waltenhofen (Wied. Ann. 1887. 32) von einem sehr großen Elektromagnet erhielt, wohl dem größten, der bis jetzt gemessen wurde. Derselbe ist ein Schenkel einer Edison'schen Dynamomaschine, 23,4 cm dick, 52 cm lang, mit 2628 Windungen in 12 Lagen bewickelt. Länge = $2,2 \times$ Durchmesser.

Aus der Ablenkung einer 5 m entfernten Buffole wurde das Gesamtmoment von Eisenkern und Spirale berechnet und hiedon das der Spirale abgezogen. Die Ergebnisse sind in nachstehender kleiner Tafel enthalten.

Stromstärke 3,9 4,0 4,97 5,65 Amp.
 Moment 2,12 3,00 3,69 4,11 Millionen C.G.S.-Einheiten.

Der Gesamtluftwiderstand ergibt sich hier nach bekannter Formel mit $c = 1,80$ zu 3,8714, woraus

$$B = \frac{H}{0,0745 + 0,000058 \cdot H}$$

wobei wieder angenommen ist, daß das Eisen des Magnets sich nahe wie norwegisches verhält. Man erhält

$B = 2226 \quad 2851 \quad 3405 \quad 2769 \quad \text{C.G.S.}$
 $p = 0,5352 \quad 0,5913 \quad 0,6090 \quad 0,6127$

Diese Werte, obgleich etwas niedriger als die oben erhaltenen, zeigen dasselbe Verhalten wie

jene; jedenfalls wird man angesichts der riesenhaften Dimensionen des Magnetschenkels die Uebereinstimmung genügend finden. Sieht man von der Veränderlichkeit von p ab und nimmt als Mittel $p = 0,6$, welches also einer Magnetisierungsstärke $B = 3400$ entspricht, so erhält man für die Momente

$$\text{nach (18)} \quad 2,37 \quad 3,04 \quad 3,64 \quad 4,02 \quad \text{Millionen C.G.S.-Einh.}$$

Von Waltenhofen erhält mit seiner empirischen, aus den Müller'schen und den Dub'schen Sätzen abgeleiteten Formel

$$\text{Moment} = 0,15 \cdot n i \sqrt{l d} \quad (i \text{ in Amp.})$$

$$2,14 \quad 2,86 \quad 3,55 \quad 4,04 \quad \text{Millionen C.G.S.-Einh.}$$

Beide Formeln geben mithin nahe gleich gute Resultate.

Der hier angewandte Faktor 0,15 ist übrigens ad hoc bestimmt; mit dem sonst üblichen 0,135 fallen nach v. Waltenhofen die Resultate etwa 10% zu klein aus.

Nach allem betrachten wir die Formel (15) mit dem Wert $\sigma = 1,80$ bis herunter zum Verhältnis $\frac{a}{c} = 2,2$ bestätigt. Bei $\frac{a}{c} = \frac{\sigma}{2} = 1,35 \dots$ hört die Formel von selbst auf zu gelten, da sonst $\beta < 0$ wird. Nennen wir cylindrische Eisenstücke dieser Art Scheiben, so wären also Scheiben für sich besonders zu untersuchen.

Zusatz. Es möge nicht unerwähnt bleiben, daß unsere Momentenformel (18) für cylindrische Stäbe mit dem bekannten W. Thomson'schen Ähnlichkeitsatz im Einklang steht, welcher aussagt, daß ähnliche und ähnlich umwickelte Körper durch gleiche Ströme so magnetisiert werden, daß sie auf ähnlich liegende entfernte Punkte gleiche Wirkung üben.

In der That, schreiben wir in extenso

$$\text{Moment} = \frac{p l c^2}{4} \cdot \frac{H}{(a + b H) + \frac{c}{1} \cdot \frac{\beta}{1 + 0,74 \beta}}$$

Der 2te Faktor ist für ähnliche und ähnlich bewickelte Stäbe bei gleicher Stromstärke konstant, da $H = \frac{4 \pi n i}{l}$ und n sich wie l verhält; der erste ist von der Dimension eines Körpers. Weil aber die Wirkung auf ferne Punkte der 3ten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist, so ist dieselbe für ähnlich liegende ferne Punkte gleich.

§ 18.

Der Dub'sche Durchmesseratz.

Als Beispiel der Anwendbarkeit unserer Widerstandsformel für Stäbe $2,2 < \frac{a}{c} < 50$ wählen wir den Dub'schen Durchmesseratz (Dub, Elektromagnetismus 1861, p. 210). In Wiedemann's Electric. III. p. 488 ist derselbe so formuliert: **Die Momente von cylindrischen Stäben, welche gleichen magnetisierenden Kräften ausgesetzt sind, sind den Quadratwurzeln ihrer Durchmesser proportional.** Dieser Satz ist rein empirischen Ursprungs. Zwar ergibt sich aus der bekannten Müller'schen acc tg Formel für schwache magnetisierende Kräfte

$$\text{Moment} = \text{const } p \sqrt{d}$$

(wo p die magnetisierende Kraft und d der Durchmesser), allein Müller selbst hat dieser Formel durchaus keinen theoretischen Wert beigelegt.

Gehen wir aus von der Momentengleichung (18)

$$\text{Moment} = \frac{p l \cdot c^2}{4} \cdot B = \frac{p l \cdot c^2}{4} \cdot \frac{\Omega}{\frac{1}{\mu} + c \cdot \frac{\beta}{1 + 0,74 \beta}}$$

oder

$$\text{Moment} = \frac{p \epsilon^2}{4} \cdot \frac{\Omega}{\frac{1}{\mu} + \frac{\epsilon}{2a} \cdot \frac{\beta}{1 + 0,74 \beta}}$$

so erfordert zunächst die rein geometrische Natur des Dub'schen Satzes, daß wir uns auf schwache Magnetisierung beschränken, also auf solche, für welche das Lenz-Jacobi'sche Proportionalitätsgesetz zwischen Magnetismus und Stromstärke gilt. Daß in dieser Beziehung aber keine absolute, sondern eine von $\frac{a}{\epsilon}$ abhängige Grenze besteht, zeigt eine ganz ähnliche Betrachtung wie die bei den Ewing'schen Drähten (§ 16) angestellte.

Wir können daher schreiben

$$\begin{aligned} \text{Moment} &= \frac{p \epsilon^2}{4} \cdot \frac{\Omega (1 + 0,74 \beta)}{\frac{\epsilon}{2a} \cdot \beta} \\ &= \frac{1}{2} p a \epsilon \Omega \left[0,74 + \frac{1}{\beta} \right] \\ (21) \quad &= \frac{1}{2} p a \epsilon \Omega \left[0,74 + \frac{\frac{a}{\epsilon}}{c \left(\log \frac{2a}{\epsilon} - 1 \right)} \right] \end{aligned}$$

Von der Veränderlichkeit des Polabstandskoeffizienten p wird hier abgesehen. Für c ist 1,8 zu setzen.

Nach Dub soll nun sein

$$\frac{(\text{Mom.})}{\sqrt{\epsilon}} = \text{const.}$$

oder durch Differentiation $\epsilon \cdot \frac{d}{d\epsilon} (\text{Mom.}) - \frac{1}{2} (\text{Mom.}) = 0$.

Die Länge $2a$ ist dabei konstant zu nehmen, ebenso Ω .

Die Rechnung führt nach einigen Umformungen auf die Bedingungsgleichung

$$(22) \quad \frac{\frac{a}{\epsilon}}{c \left(\log \frac{2a}{\epsilon} - 1 \right)} \left[1 - \frac{2}{\log \frac{2a}{\epsilon} - 1} \right] = 0,74$$

Wäre nun Dub's Satz allgemein gültig, so müßte diese Gleichung identisch erfüllt sein. Daß dies aber nicht zutrifft, sieht man noch deutlicher an der Ableitung der Gleichung nach $\frac{a}{\epsilon}$, welche auf

$$\left(\log \frac{2a}{\epsilon} - 1 \right)^2 - 3 \left(\log \frac{2a}{\epsilon} - 1 \right) + 4 = 0$$

$$\text{oder} \quad \left[\left(\log \frac{2a}{\epsilon} - 1 \right) - \frac{3}{2} \right]^2 + \frac{5}{4} = 0$$

führt. Die linke Seite ist wesentlich positiv, also größer als Null.

Der Dub'sche Durchmesseratz in der von seinem Entdecker angenommenen Allgemeinheit besteht demnach nicht.

Eine andere Frage ist ob der Satz nicht innerhalb gewisser Grenzen gilt. Die Auflösung von (22) liefert $\frac{a}{\epsilon}$ nahe = 17. Diesem Wert entspricht, wie man sich ohne viel Mühe überzeugt, ein Minimum von $\frac{(\text{Mom.})}{\sqrt{\epsilon}}$. Wir erhalten daher den Satz:

Bei einer und derselben (schwachen) magnetisierenden Kraft ist der Quotient $\frac{(\text{Mom.})}{\sqrt{\epsilon}}$ konstant für Stäbe, deren Länge das 17fache des Durchmessers ist; für Stäbe, für welche sich die Dimensionsverhältnisse $\frac{a}{\epsilon}$ beiderseits nahe um 17 herumgruppieren, ist der Quotient $\frac{(\text{Mom.})}{\sqrt{\epsilon}}$ nahezu konstant.

Dieses Ergebnis findet seine Bestätigung fast in jeder der Tafeln, die z. B. in Wiedemann's Elekt. III. p. 485—490 angeführt sind, falls überhaupt das Verhältnis $\frac{a}{\epsilon} = 17$ darin vorkommt und beiderseits

hinlänglich viele Beobachtungen vorliegen. Ich füge hier 2 solcher Beobachtungsreihen bei. Die erste erhielt Dub an Eisenkernen von 3 Fuß Länge und 1, 2, 4, 6 Zoll Durchmesser.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{a}{s} = & 36 & 18 & 9 & 6 & \\ \text{const. } \frac{(\text{Mom.})}{\sqrt{s}} = & 0,03404 & \mathbf{0,03102} & 0,03710 & 0,03630 & \end{array}$$

Das Minimum liegt also dicht bei dem angegebenen Wert $\frac{a}{s} = 17$.

Die andere Reihe stammt von G. Wiedemann (l. c. p. 489) und lautet

$$\begin{array}{cccccc} \frac{a}{s} = & 23,8 & 12,5 & 8,3 & 4,1 & 2,8 \\ \text{const. } \frac{(\text{Mom.})}{\sqrt{s}} = & 1000 & 1026 & 1067 & 1207 & 1339 \end{array}$$

Leider fehlt gerade der charakteristische Stab mit $\frac{a}{s} = 17$. Man sieht aber deutlich das Fallen der Werte $\frac{(\text{Mom.})}{\sqrt{s}}$ gegen die angegebene Stelle hin. Daß für $\frac{a}{s} = 23,8$ sich ein niedrigerer Wert ergibt als für $\frac{a}{s} = 12,5$ ist kein Widerspruch, da ja das Minimum < 1000 sein kann. Im Gegenteil spricht der geringe Unterschied zwischen den Werten 1000 und 1026, die den am weitesten auseinanderliegenden Argumenten 23,8 und 12,5 entsprechen, dafür, daß gerade zwischen ihnen annähernde Konstanz herrscht.

Man weiß wie zahlreich die Beobachtungen sind, die zur Bestätigung des Dub'schen Satzes gemacht wurden; teilweise scheinen sie einander geradezu zu widersprechen. Der Grund tritt nach unserer Auseinandersetzung klar zu Tage. Weicht der Quotient $\frac{a}{s}$ der verwendeten Stäbe stark von 17 ab, so kann der Dub'sche Satz sich nicht bestätigen.

Lenz und Jacobi hielten das temporäre Moment der runden weichen Eisenstäbe dem Durchmesser proportional. Man sieht leicht, daß die Bedingungsgleichung in diesem Fall wird

$$s \frac{d}{ds} (\text{Mom.}) - (\text{Mom.}) = 0$$

was zur Gleichung führt

$$1 - \frac{1}{\log \frac{2a}{s} - 1} = 0$$

also

$$\begin{aligned} \log \frac{2a}{s} &= 2 \\ \frac{2a}{s} &= 8 \text{ (circa)} \\ \frac{a}{s} &= 4 \end{aligned}$$

Die Gleichung $\frac{(\text{Mom.})}{s}$ ist also nur für ganz kurze Stäbe gültig. In der That findet sich diese Angabe an einer von Waltenhofen'schen Reihe bestätigt, die in Wiedemann Elekt. III p. 486 angeführt ist, nämlich

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{a}{s} = & 90 & 49 & 48 & 34 & 25 & 18 & 9 & 7 & 5 & 4 \\ \frac{(\text{Mom.})}{s} = & 0,660 & 0,530 & 0,638 & 0,455 & 0,455 & 0,380 & 0,277 & 0,268 & 0,248 & 0,228 \end{array}$$

Der kleinste in dieser Reihe vorkommende Quotient liegt bei $\frac{a}{s} = 4$, während die andern Zahlen bis 0,228 fast gleichmäßig fallen. (Die Zahl, 0,638 für $\frac{a}{s} = 48$ dürfte kaum richtig sein.)

Verwendet man also ganz kurze Stäbe, so gilt nicht mehr das Dub'sche, sondern das Lenz-Jacobi'sche Gesetz.

Mit dieser Erkenntnis treten auch die Versuche v. Feilitzsch's (Pogg. Ann. 80. 1850, Wiedem. El. III. p. 490) in ein neues Licht. Von Feilitzsch verwendete 5 Stäbe 91 mm lang und 94,4, 90,7,

79,2, 67,6, 54,9, 42,9 mm im Umfang. Die Verhältnisse $\frac{a}{c}$ sind daher 3,01, 3,15, 3,61, 4,23, 5,21, 6,66. Von Feilitzsch trug die erhaltenen Momente als Ordinaten zu den Stromstärken als Abscissen auf. Nun zeigen die erhaltenen Linien fast geradlinigen Verlauf, also fast volle Proportionalität zwischen Moment und Stromstärke. Die Voraussetzungen des Dub'schen oder Lenz-Jacobi'schen Satzes sind mithin erfüllt. Bei der Kleinheit des Quotienten $\frac{a}{c}$ mußte sich weit mehr Annäherung an das Gesetz von Lenz-Jacobi ergeben. In der That schwanken für eine gewisse Stromstärke die Werte $\frac{(\text{Mom.})}{c}$ zwischen 273 und 318, also etwa um 7% um die Mitte 295, während die Werte $\frac{(\text{Mom.})}{\sqrt{c}}$ zwischen 841 658, also um mehr als 12% um die Mitte 750 oscillieren. (Vergl. auch S. P. Thompson, Lectures, p. 152, wo versucht wird die Proportionalität mit dem Durchmesser oder Umfang auf anschaulichem Wege plausibel zu machen.)

Einen Satz von allgemeiner Gültigkeit $\frac{(\text{Mom.})}{ca}$ für jedes beliebige $\frac{a}{c}$ kann es nicht geben; daher die Widersprüche in den Beobachtungsergebnissen.

Berechtigt ist nur folgende Fragestellung: Wenn eine Auswahl von Stäben vorliegt, deren Quotienten $\frac{a}{c}$ nicht viel von einander verschieden sind, welche Beziehung besteht alsdann zwischen dem Moment der Stäbe und ihrer Dicke bei gleichbleibender (kleiner) magnetomotorischer Kraft? oder umgekehrt: Für welche Stäbe gilt das Gesetz $\frac{(\text{Mom.})}{ca} = \text{const}$?

Die Bedingungsgleichung lautet beidemal

$$c \frac{d}{d c} (\text{Mom.}) - a (\text{Mom.}) = 0$$

$$\text{und giebt} \quad \frac{\frac{a}{c}}{c \left(\log \frac{2a}{c} - 1 \right)} \left[a - \frac{1}{\log \frac{2a}{c} - 1} \right] = 0,74(1-a)$$

welche Form für die Auflösung nach $\frac{a}{c}$ am geeignetsten ist; für a als Unbekannte ist zweckmäßiger

$$a \left[\frac{\frac{a}{c}}{c \left(\log \frac{2a}{c} - 1 \right)} + 0,74 \right] = 0,74 + \frac{\frac{a}{c}}{c \left(\log \frac{2a}{c} - 1 \right)^2}$$

Für $\frac{a}{c}$ ist der Mittelwert der Dimensionsverhältnisse der gegebenen Stäbe zu nehmen.

Im ersten Fall, wo die Gleichung transcendent ist, leisten die Grenzbedingungen gute Dienste. Ist $a < 1$, so muß offenbar sein

$$a > \frac{1}{\log \frac{2a}{c} - 1}$$

$$\text{oder} \quad \log \frac{2a}{c} > 1 + \frac{1}{a}$$

Für $a > 1$ dagegen muß sein

$$a < \frac{1}{\log \frac{2a}{c} - 1}$$

$$\log \frac{2a}{c} > 1 + \frac{1}{a}$$

Der Gebrauch dieser Grenzbedingungen ist übrigens beschränkt durch diejenigen von $\frac{a}{c}$, welche für a nach sich ziehen: $\frac{1}{2} > a > \frac{1}{3}$.

Die Richtigkeit dieser Auseinandersetzungen mag zum Schluß noch an einem Beispiel gezeigt

werden. Fragt man nach Stäben, die das Gesetz $\frac{(\text{Mom.})}{\sqrt{s}}$ befolgen, so liefert die oben aufgestellte Gleichung

$\frac{a}{\tau} = 50$. In der That erhält man aus der schon angeführten Reihe von Waltenhofen's

$$\begin{array}{cccccc} \frac{a}{s} = & 90 & 49 & 34 & 25 & 18 \\ \text{const. } \frac{(\text{Mom.})}{\sqrt{s}} = & 707 & 861 & 950 & 1150 & 1253 \end{array}$$

Mit Berücksichtigung des bei der Wiedemann'schen Reihe Gesagten und in Anbetracht, daß für $\frac{a}{s} = 50$ die Gültigkeit unserer Formel wohl sicher, für $\frac{a}{\tau} = 90$ indessen wahrscheinlich nicht mehr ganz zutreffend ist — jedenfalls was den Wert $c = 1,8$ betrifft — wird man die Uebereinstimmung mit der Rechnung genügend finden.

§ 19.

Dub's Längensatz.

Dub hat auch einen, allerdings viel weniger bekannten Satz über die Abhängigkeit des magnetischen Moments der Stäbe von ihrer Länge aufgestellt (Dub, Elektromagnetismus 1861, p. 254 ff.; Wiedemann Elect. III. p. 504 ff.). Darnach soll bei geraden Elektromagneten und Festhaltung der (schwachen) magnetomotorischen Kraft das Moment der 3ten Potenz der Länge proportional sein.

Der Satz ist genau derselben Behandlung fähig wie der Durchmesseratz. Indessen hat ihn schon Dub (Poggendorf's Ann. 1863. 120) aus dem W. Thomson'schen Satz abgeleitet als Folge des letzteren. Wir verfolgen einen ähnlichen Weg, indem wir von einer allgemeinen Schreibweise der Momentengleichung (21) Gebrauch machen. Dieselbe läßt sich unter der gemachten Voraussetzung über Ω in die Gestalt bringen

$$\text{Moment} = C \cdot a \cdot s \cdot F\left(\frac{a}{s}\right)$$

C ist eine Constante.

Nun gilt für den Bereich des Durchmesseratzes

$$C \cdot a \sqrt{s} \cdot F\left(\frac{a}{s}\right) = \text{const.}$$

oder

$$C a^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{s}{a}} \cdot F\left(\frac{a}{s}\right) \right) = \text{const.}$$

weil für den Durchmesseratz a als konstant gilt. Aus diesem Grunde ist aber auch

$$\sqrt{\frac{s}{a}} F\left(\frac{a}{s}\right) = \text{const.}$$

und daher, wenn nun die Veränderlichkeit von $\frac{a}{s}$ nicht mehr durch Variation von s unter Festhaltung von a , sondern umgekehrt durch Veränderung von a unter Beibehaltung von s erfolgt

$$\frac{(\text{Mom.})}{a \sqrt{a}} = C \cdot \sqrt{s} \cdot \left(\sqrt{\frac{s}{a}} \cdot F\left(\frac{a}{s}\right) \right) = \text{const.}$$

Innerhalb derselben Grenzen wie der Durchmesseratz gilt daher auch Dub's Längensatz. Er gilt mithin nahezu für die Werte von $\frac{a}{s}$, die in der Nähe von 17 liegen, wo die Funktion $\frac{(\text{Mom.})}{a \sqrt{a}}$ ein Minimum hat. In der That zeigt eine von Wiedemann (Elect. II. p. 507) angeführte und hier abgedruckte Beobachtungs-Reihe von Dub dieses Minimum für $\frac{a}{s} = 18$.

1: d	4	6	9	12	18	24	36	48
const. $\frac{(\text{Mom.})}{a \sqrt{a}}$	100	98,7	98,6	98,1	94,0	96,7	94,4	92,0

Eine andere von Wiedemann in seiner Lehre von der Elektrizität aufgenommene Reihe läßt übrigens kein Minimum erkennen, sondern zeigt ein stetiges Fallen mit wachsendem $\frac{a}{c}$.

Daß der hier und da gemachte Versuch die Gleichung $\frac{(\text{Mom.})}{a^2} = \text{const.}$ für konstante magnetomotorische Kraft nachzuweisen fehlschlagen muß, ist ebenfalls leicht nachzuweisen. Denn aus

$$(\text{Mom.}) = C a c \cdot F\left(\frac{a}{c}\right)$$

folgt
$$\frac{(\text{Mom.})}{a^2} = C \left(\frac{c}{a} \cdot F\left(\frac{a}{c}\right)\right)$$

Könnten nun ein Satz $\frac{(\text{Mom.})}{a^2} = \text{const.}$ bestehen, so müßte auch ein ihm zugeordneter Durchmesser vorhanden sein von der Form

$$\frac{(\text{Mom.})}{c^a} = C a^\beta \left(\frac{c}{a} \cdot F\left(\frac{a}{c}\right)\right) = \text{const.}$$

wo a und β noch zu bestimmende Exponenten sind. Nimmt man hieraus

$$(\text{Mom.}) = C a^{\beta-1} c^{a+1} F\left(\frac{a}{c}\right)$$

so sieht man, daß $\beta = 2$ und $a = 0$ sein muß. Der entsprechende Durchmesser wäre mithin $(\text{Mom.}) = \text{const.}$

und dieser ist ausgeschlossen, da unsere Formel (21) leicht zeigt, daß das Moment bei wachsendem $\frac{a}{c}$ unter Festhaltung von a stetig — innerhalb der uns gezogenen Grenzen ohne Maximum oder Minimum — abnimmt, wie es auch die Erfahrung bestätigt.

§ 20.

Zwei Aufgaben von v. Waltenhofen.

In einem Aufsatz „Über die Formeln von Müller und Dub für cylindrische Elektromagnete“ (Wiedem. Ann. 27. 1886) gelangt v. Waltenhofen durch Vereinigung der genannten empirischen Formeln zu einem Ausdruck, welcher die Lösung zweier Aufgaben gestattet, deren Beantwortung bis dahin nicht möglich war. Die im Vorhergehenden aufgestellten Formeln ermöglichen es ebenfalls diese Fragen zu beantworten. Die Resultate stimmen fast genau mit denen v. Waltenhofen's überein.

Die erste Frage lautet:

Wie lange muß ein 9 cm dicker Eisencylinder gemacht werden, wenn derselbe mit einer Bewicklung von je 16 Windungen für jeden cm seiner Länge für einen magnetisierenden Strom von 10 Amp. eine magnetische Sättigung von 30% erreichen soll?

Als größtes Moment von 1 gr Eisen nimmt v. Waltenhofen 212,5 C. G. S. Einheiten, welchem nach § 8 $B = 17000$ entspricht. Wir halten uns an das im selben § angegebene Maximum $B = 20000$ mit um so mehr Recht, als sich alle unsere Formeln auf die Induktion in der Stabmitte beziehen, welche größer ist als diejenige an den Enden, deren Größe das Moment bestimmt.

30% Sättigung bedeutet also $B = 6000$.

Die Lösung der Aufgabe ergibt sich nun leicht aus der Gleichung

$$B = \frac{H}{a + b} + \frac{c}{2a} \cdot \frac{\beta}{1 + 0,74 \beta}$$

in welcher
$$H = \frac{4 \pi ni}{2a} = 4 \pi \cdot 16 \cdot \frac{10}{10} = 200,96$$

$$a + b H = 0,0001 + 0,000058 \cdot 200,96 = 0,0117$$

zu setzen ist. Die Unbekannte a (halbe Stablänge) ist lediglich im letzten Glied des Nenners enthalten. Man erhält

$$\frac{c}{2a} \cdot \frac{\beta}{1 + 0,74 \beta} = 0,0218$$

Mit Rücksicht auf (14) bekommt man durch Probieren oder mittelst einer Tafel des häufig auftretenden Ausdrucks links $\frac{a}{c} = 7$, woraus sich die gesuchte Stablänge 63 cm ergibt; v. Waltenhofen findet 62 cm.

Die zweite Frage heißt:

Wie groß ist das magnetische Moment (bezw. Sättigungsgrad), welches ein 40 cm langer und 8 cm dicker, mit 600 Windungen bewickelter Eisenzylinder durch einen Strom von 20 Amp. erreicht?

Die Antwort giebt dieselbe Formel wie vorhin, nur ist die Rechnung viel einfacher.

Man hat zu setzen
$$H = \frac{4 \pi \cdot 600 \cdot 2}{40} = 376,8$$

$$a + b H = 0,0001 + 0,000058 \cdot 376,8 = 0,0219$$

$$\frac{c}{2a} \cdot \frac{\beta}{1 + 0,74 \beta} = 0,0348$$

also
$$B = \frac{376,8}{0,0219 + 0,0348} = 6542$$

Die Sättigung beträgt mithin unter derselben Annahme wie oben 32,7%. v. Waltenhofen findet 35%.

Die Entscheidung durch den Versuch, welche Zahlen die richtigen sind, steht noch aus; aber wie sie auch ausfallen mag, große Abweichungen werden weder auf der einen noch andern Seite zu gewärtigen sein. Nur daran sei noch erinnert, daß unsere Formeln theoretischer Natur sind, während die von v. Waltenhofen durch Induktion aus der Erfahrung hervorgiengen.

* * *

Die Anwendungen des magnetischen Ohm'schen Gesetzes auf Polstücke, Hufeisen-Magnete u. s. w., die teilweise fertig vorliegen, gedenke ich demnächst an anderer Stelle zu veröffentlichen.



Fig. 7.

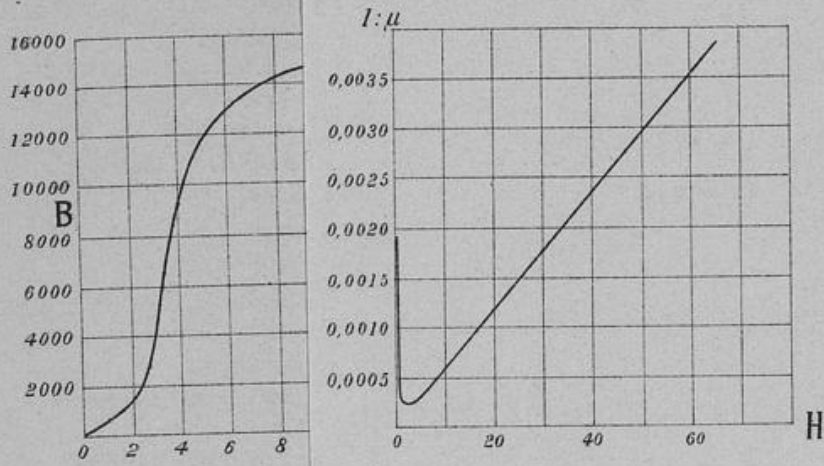


Fig. 8.

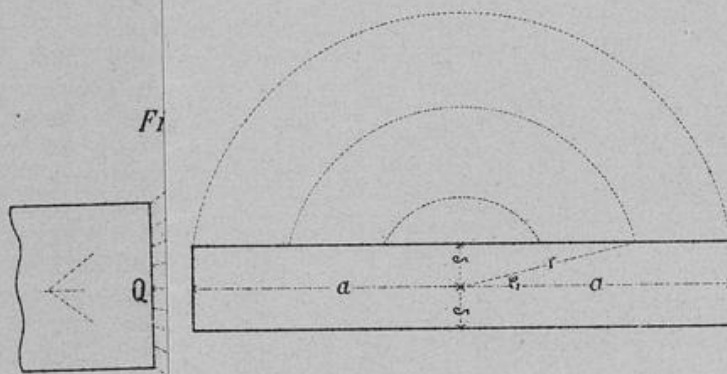


Fig. 4.

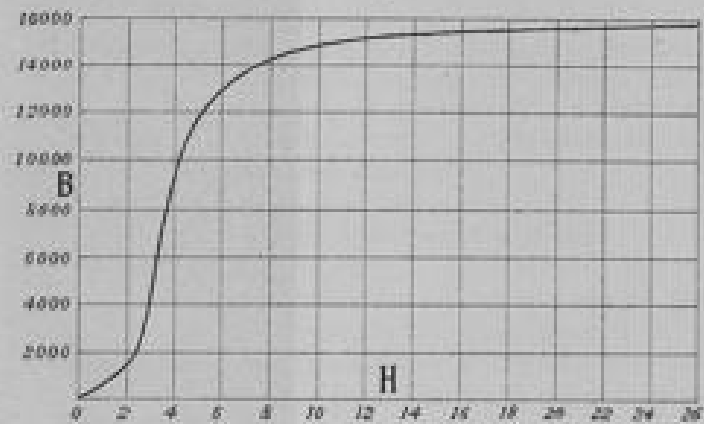


Fig. 5.

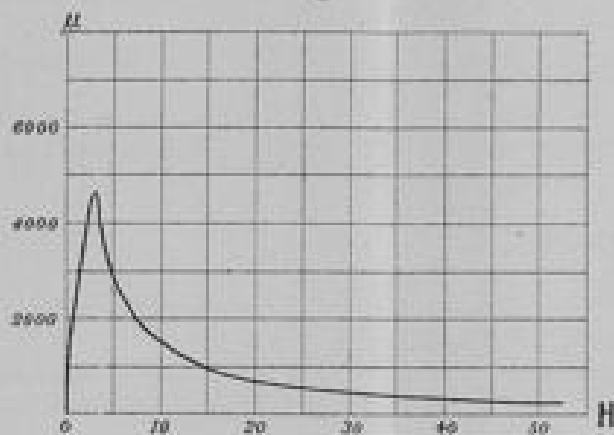


Fig. 6.

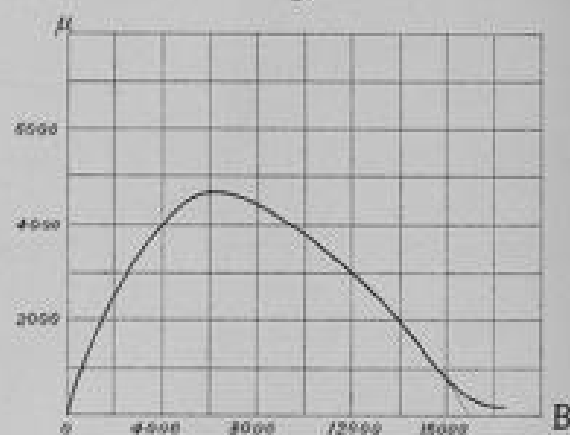


Fig. 7.

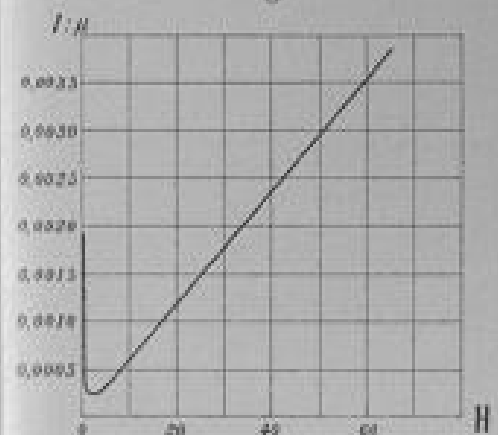


Fig. 1.

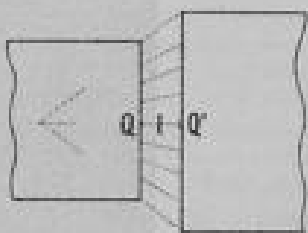


Fig. 2.

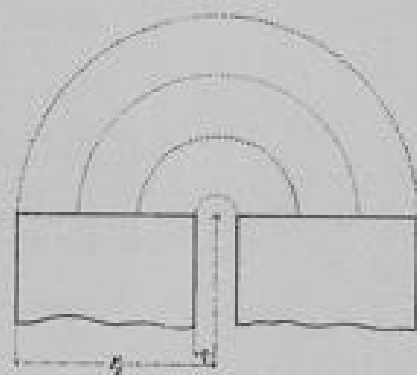


Fig. 3.

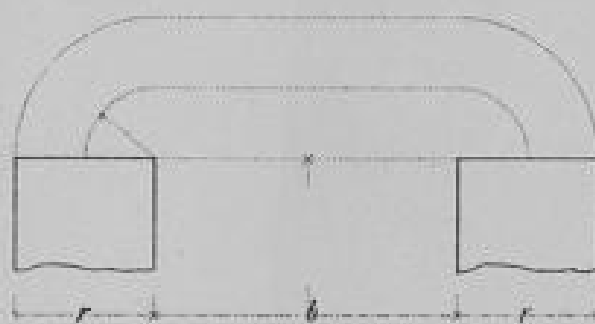


Fig. 8.

