REALGYMNASIUM DES JOHANNEUMS

DIE OPTISCHE VERWANDTSCHAFT IN PROJEKTIVER DARSTELLUNG

VON

RUDOLF BÖGER

BEILAGE ZUM BERICHT ÜBER DAS 73. SCHULJAHR

GEDRUCKT BEI MAX BAUMANN · · HOHE BLEICHEN 16
HAMBURG 1907

Vorwort.

An unserer Schule werden seit einem Jahrzehnt für den geometrischen Unterricht in den Oberklassen die Betrachtungsweisen der Geometrie der Lage nutzbar gemacht. In der Obersekunda lassen sich an die Lehre von den Doppelverhältnissen die neuen Begriffe ungezwungen anknüpfen und dann bei den Sätzen von den harmonischen Punkten, Pascal, Pol und Polare, Brianchon usw. verwerten und einüben. In der Prima werden die Grundtatsachen der Geometrie der Lage von neuem und zwar auf rein geometrischem Wege, also im Staudtschen Sinne, abgeleitet und soweit fortgeführt, daß Ortsaufgaben über die Kegelschnitte gleichzeitig analytisch-geometrisch und rein-geometrisch gelöst werden.

Hiermit ist aber die Verwertbarkeit der Geometrie der Lage für den Schulunterricht nicht erschöpft. Es gibt noch ein Gebiet, das geradezu zur projektiven Behandlung drängt, das ist die geometrische Optik. Bereits Möbius hat erkannt, daß optische und kollineare Verwandtschaft identisch sind, und Abbe hat gezeigt, „daß alle die allgemeinen Sätze, welche die Lagen- und Größenverhältnisse optischer Bilder betreffen, sowie die dabei aufgestellten Begriffe (die Brennweiten, Brennpunkte und sonstigen Kardinalelemente) gänzlich unabhängig sind von den physikalischen und geometrischen Bedingungen ihres Entstehens; daß sie nichts anderes sind, als der Ausdruck mathematisch notwendiger Beziehungen, die sich überall da vorfinden müssen, wo auf irgend eine Weise zwei Raumgebiete in solche Beziehung zueinander treten, daß eine optische Abbildung des einen in das andre stattfindet.“ (Czapski, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente S. 28.) Mit andern Worten: Alle allgemeinen Sätze der optischen (kollinearen) Verwandtschaft folgen aus der Definition: „Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe heißen kollinear, wenn sie so aufeinander bezogen sind, daß je zwei ungleichartigen Elementen Pq des einen Systems, von welchem das erstere P im letzteren liegt, zwei ungleichartige Elemente $P_1 q_1$ des andern entsprechen, von welchen das erstere P_1 ebenfalls im letzteren liegt.“ (v. Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 121.)

Es wäre nicht schwer gewesen, die folgende Darstellung unmittelbar an diese Definition der kollinearen Verwandtschaft anzuknüpfen; es brauchte dann nur der Satz hinzugefügt zu werden, daß es in zwei in einander liegenden kollinearen ebenen Systemen immer mindestens einen Punkt und eine Gerade gibt, die sich selbst entsprechen. Dieser Punkt und diese Gerade sind aber für zentrierte optische Systeme unmittelbar gegeben, und deshalb durfte dieser Satz in einer für die Schule bestimmten Darstellung fehlen.

Wie überall in der Geometrie der Lage zeigte sich auch hier, daß ihre Sätze erst fruchtbar und einfach sind, wenn sie in der allgemeinsten Form erfaßt werden. Die Knotenpunkte und Hauptpunkte z. B. würden einer rein geometrischen Darstellung nur schwer zugänglich sein, wenn man ihre Definitionen unmittelbar an den uneigentlichen Punkt und die ihm optisch verwandten Punkte, die Brennpunkte, anknüpfen wollte. Überraschend einfach aber ergeben sich ihre Eigenschaften, wenn man statt von dem uneigentlichen Punkt von einem beliebigen Punkt ausgeht. Jedem Punkt der optischen Achse lassen sich zwei Punkte zuordnen, die zu ihm in derselben Beziehung stehen, wie der erste Knotenpunkt und der erste Hauptpunkt zum ersten Brennpunkt. Da diese Punkte zugleich die laterale und die angulare Vergrößerung des Punktes bestimmen, so habe ich sie im folgenden, um eine kurze Bezeichnung zu haben, den lateralen und den angularen Punkt genannt. Diese Zuordnung der lateralen und der angularen Punkte zu den Punkten der Achse ist eine projektive, und daraus ergeben sich als besondere Fälle die Eigenschaften der Knotenpunkte und der Hauptpunkte.

Von selbst drängte sich die Aufgabe auf, den Zusammenhang zwischen der optischen, lateralen und angularen Projektivität (welche durch die Zuordnung Objekt und Bild, Objekt und lateraler Punkt, Objekt und angularer Punkt entstehen) zum Gegenstand einer allgemeineren Untersuchung zu machen. Diese führte zu der Erkenntnis, daß es sich hier um „konjugierte“ Projektivitäten handelt (s. mein Lehrbuch Ebene Geometrie der Lage, Göschen, 1900), also um Sätze, die zur Herstellung von Involutionen von höherer als der zweiten Ordnung benutzt werden (s. Wiener, Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden). Ferner zeigte sich, daß die laterale und die angulare Projektivität nicht zwei beliebige unter den der optischen Projektivität der Achse konjugierten Projektivitäten sind, sondern daß für sie der Satz von Lagrange-Helmholtz gilt. Den hier angedeuteten Zusammenhang habe ich näher ausgeführt in dem Aufsatz Konjugierte Projektivitäten und adjungierte Involutionen, der in den Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg von 1907 erschienen ist. —

Die Grundlage für den physikalischen Teil der folgenden Arbeit bildet die lichtvolle Darstellung der Optik von Lummer (Band II_1 von Pfaundlers Lehrbuch der Physik), die trotz der Beschränkung auf elementare Hülfsmittel eine vortreffliche Einführung in den Geist der Abbeschen Forschungen bietet.

Über die Form der folgenden Darstellung ist noch zu bemerken, daß sie sich unmittelbar an meinen kleinen Leitfaden Elemente der Geometrie der Lage, Göschen, 1900, anschließt und deshalb auch äußerlich in der Zählung der Paragraphen und Nummern als Fortsetzung desselben behandelt ist.

Hamburg, im März 1907.

Rudolf Böger.

§ 6. **Projektivität und Involution.**

121. **Doppelverhältnis.** 1. Zwei Strecken unterscheiden sich durch ihre Größe, durch ihre Richtung und, wenn sie in derselben Gerade oder in zwei parallelen Geraden liegen, durch ihren Sinn. Den Sinn unterscheidet man in der Geometrie des Maßes durch das positive und das negative Vorzeichen, sodaß $AB = -BA$ oder $AB + BA = 0$ ist. Sind ABC drei Punkte einer Gerade, so ist, wie auch ihre Lage sein mag, $AB + BC = AC$ oder $AB + BC + CA = 0$.—

2. Zwei Punkte, die eine Strecke nach demselben Verhältnis teilen, fallen zusammen. —

3. Aus den Sätzen der Geometrie der Lage finden wir Maßbeziehungen durch Anwendung des Satzes $^{(16_2)}$:
Zwei projektive Gruppen von vier Punkten haben dasselbe Doppelverhältnis.—

4. Der uneigentliche Punkt F_1 einer Gerade teilt jede in der Gerade liegende Strecke AB nach dem Verhältnis $+1$; denn

$$\frac{F_1 A}{F_1 B} = \frac{F_1 B + BA^{(121_1)}}{F_1 B} = 1 + \frac{BA}{F_1 B} = 1.—$$

5. Ist unter den Punkten eines Doppelverhältnisses der uneigentliche, so wird aus dem Doppelverhältnis ein einfaches; es ist z. B.

$$(A F_1 B C)^{(16_1)} = \frac{BA}{BF_1} : \frac{CA}{CF_1} = \frac{BA}{CA} : \frac{F_1 B}{F_1 C} = \frac{BA^{(121_4)}}{CA}.—$$

6. Lehrsatz: Der Wert eines Doppelverhältnisses bleibt ungeändert, wenn man irgend zwei Glieder und gleichzeitig die beiden übrigen vertauscht.

$$(A\,B\,C\,D) = (B\,A\,D\,C) = (C\,D\,A\,B) = (D\,C\,B\,A)$$

122. **Projektivität.** Haben wir in dem Träger s eines Grundgebildes (11) die Elemente $A\,B\,C\,..$ und in dem Träger s_1 eines zweiten Grundgebildes die Elemente $A_1\,B_1\,C_1\,..$, so können wir (12,) die Elemente der beiden Träger projektiv auf einander beziehen, sodaß wir haben

$$A\,B\,C\,.. \;\overline{\wedge}\; A_1\,B_1\,C_1\,..\ ^{(12\ Z)}.$$

Legen wir jetzt den Träger s_1 auf den Träger s, so fällt jedes Element des zweiten Trägers mit irgend einem Element des ersten Trägers zusammen. Jedes Element des gemeinsamen Trägers ist also als ein zweifaches aufzufassen, da es sowohl zum ersten als auch zum zweiten Grundgebilde gerechnet werden kann. Fassen wir das Element als zum ersten Gebilde gehörig auf, so ist ihm ein Element des zweiten Gebildes homolog; fassen wir es als Element des zweiten Gebildes auf, so ist ihm ein Element des ersten Gebildes homolog. Jedem Element des gemeinsamen Trägers sind also zwei Elemente homolog.

Mit andern Worten: Wir können von jedem Element des gemeinsamen Trägers in zweierlei Sinn zu einem homologen fortschreiten, das eine Mal, indem wir vom ersten Grundgebilde zum zweiten übergehen; das andere Mal, indem wir vom zweiten Grundgebilde zum ersten übergehen.— Fällt ein Element beim Aufeinanderlegen der beiden Träger mit seinem homologen zusammen, so heißt es ein Ordnungselement.

1. Definition: Der Inbegriff zweier geraden projektiven Grundgebilde, die einen gemeinsamen Träger haben, heißt eine gerade *Projektivität*(13).

2. Definition: Ein Element einer Projektivität, das mit seinem homologen zusammenfällt, heißt ein Ordnungselement(13).

123. **Fluchtpunkte.** Dem uneigentlichen Punkt F_1 des Trägers einer Punktprojektivität sind zwei Punkte(122) homolog, die wir durch F und F_2 bezeichnen wollen. Sind $A\,A_1$ und $B\,B_1$ irgend zwei weitere Punktpaare dieser

Projektivität, so folgt aus $(A\,B\,F\,F_1) = (A_1\,B_1\,F_1\,F_2)^{(121_3)}$: $FA : FB = F_2 B_1 : F_2 A_1{}^{(121_3)}$; daher

$$FA\,.\,F_2 A_1 = FB\,.\,F_2 B_1.$$

Lehrsatz: *Zwei homologe Punkte einer Projektivität haben von den zugeordneten Fluchtpunkten Entfernungen, deren Produkt konstant ist.*— Dies Produkt heißt die *Potenz* der Projektivität.

Zusatz. Aus $(B\,F\,A\,F_1) = (B_1\,F_1\,A_1\,F_2)$ folgt

$$AB : AF = A_1 B_1 : F_2 B_1 \text{; folglich}$$

$$A_1 B_1 : AB = F_2 B_1 : AF = A_1 F_2 : FB^{(123)}.$$

Lehrsatz: In dem Verhältnis zweier homologen Strecken einer Projektivität darf man die innern oder die äußern Punkte durch die Fluchtpunkte ersetzen.

124. **Potenzpunkte.** Haben FA und $F_2 A_1$ gleichen Sinn$^{(121_1)}$, so läßt sich stets eine Strecke f angeben, deren Quadrat gleich $FA\,.\,F_2 A_1$ ist. Setzt man $FH' = +f$ und $F_2 H_1' = +f$ oder $FH'' = -f$ und $F_2 H_1'' = -f$, so sind sowohl $H'\,H_1'$ als auch $H''\,H_1''$ Punktpaare der Projektivität.— Haben FA und $F_2 A_1$ ungleichen Sinn, so läßt sich stets eine Strecke f angeben, deren Quadrat gleich $-FA\,.\,F_2 A_1$ ist. Setzt man in diesem Fall $FH' = +f$ und $F_2 H_1' = -f$ oder $FH'' = -f$ und $F_2 H_1'' = +f$, so sind sowohl $H'\,H_1'$ als auch $H''\,H_1''$ Punktpaare der Projektivität.

In jeder Projektivität gibt es also zwei Punktpaare $H'\,H_1'$ und $H''\,H_1''$, deren Abstände von den Fluchtpunkten ihrem absoluten Wert nach einander gleich sind.— Die Punkte $H'\,H_1'\,H''\,H_1''$ heißen *Potenzpunkte* der Projektivität.

125. **Teleskopische Projektivität.** Fällt der eine, und folglich auch der zweite, Fluchtpunkt in den uneigentlichen Punkt, so heißt die Projektivität eine projektivähnliche oder, wie wir sagen wollen, eine teleskopische. Aus

$$(B\,C\,A\,F_1) = (B_1\,C_1\,A_1\,F_1)^{(121_3)}$$

folgt dann $^{(121_5)}$ $A_1 B_1 : AB = A_1 C_1 : AC$;

und aus $(D\,A\,C\,F_1) = (D_1\,A_1\,C_1\,F_1)$

folgt $A_1 C_1 : AC = C_1 D_1 : CD$;

mithin $A_1 B_1 : AB = C_1 D_1 : CD$.

Unser Schluß ist ungültig, wenn einer der Punkte $ABCD$ mit dem uneigentlichen F_1 zusammenfällt. In diesem Fall ist das Verhältnis zweier homologen Strecken, z. B. $F_1 A_1 : F_1 A$ gleich 1 [121,4]. Wir haben daher den

Lehrsatz: Das Verhältnis zweier *eigentlichen* homologen Strecken einer teleskopischen Projektivität ist konstant.

126. **Involution.** 1. Definition. Eine Projektivität heißt eine Involution, wenn die beiden Fluchtpunkte zusammenfallen.

Aus $FA \,.\, FA_1 = FB \,.\, FB_1$ [123] folgt, wenn B in A_1 fällt, $FA = FB_1$ d. h. B_1 fällt in A. Schreiten wir also von dem Punkt A im ersten Sinn [122] zu seinem homologen fort, so gelangen wir zu A_1. Schreiten wir von demselben Punkt A, den wir auch, wie wir eben sahen, durch B_1 bezeichnen dürfen, im entgegengesetzten Sinn zu seinem homologen fort, so gelangen wir zu B, d. h. ebenfalls zu A_1. Die Punkte A und A_1 entsprechen sich also in beiderlei Sinn oder, wie wir sagen wollen, zweifach. Da A ein beliebiger Punkt ist, so haben wir den

2. Lehrsatz: In einer Involution entspricht jeder Punkt seinem homologen zweifach.

3. Kennzeichen der Involution. Entspricht in einer Projektivität irgend einem Punkte A der homologe A_1 zweifach, so ist

$$FA \,.\, F_2 A_1 = FA_1 \,.\, F_2 A \text{ [123]; folglich}$$

$$FA : FA_1 = F_2 A : F_2 A_1 \,.$$

Die Punkte F und F_2 teilen also die Strecke AA_1 nach demselben Verhältnis und fallen daher zusammen [121,2]; d. h. die Projektivität ist eine Involution.

Lehrsatz: Entspricht in einer Projektivität irgend ein Punkt seinem homologen zweifach, so entspricht jeder Punkt seinem homologen zweifach.

In Zeichen: Aus $A\,A_1\,B\,C \,.\,.\, \overline{\wedge}\, A_1\,A\,B_1\,C_1$

folgt $A\,A_1\,B\,B_1\,C\,C_1 \,.\,.\, \overline{\wedge}\, A_1\,A\,B_1\,B\,C_1\,C \,.\,.$

oder, in kürzerer Schreibweise, $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$.

4. Soll also eine Projektivität zur Involution werden, so muß einem Punkte A der Punkt A_1 zweifach entsprechen; es bildet daher nicht bloß $A\,A_1$, sondern gleichzeitig auch $A_1\,A$ ein Punktpaar der zu konstruierenden Projektivität. Durch $A\,A_1$ sind uns mithin zwei Punktpaare der gesuchten Projektivität gegeben; daher haben wir, weil eine Projektivität durch drei Punktpaare bestimmt ist (14 z), den

Lehrsatz: Eine Involution ist durch *zwei* Punktpaare bestimmt.

5. Lehrsatz: Jede Gerade wird von den Gegenseiten eines Vierecks (3) in Punktpaaren einer Involution geschnitten.

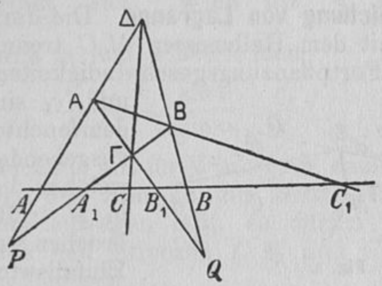


Fig. 1.

Beweis: $(A\,A_1\,B\,C) \overline{\overline{\wedge}}\, \Delta(A\,A_1\,B\,C) \overline{\overline{\wedge}}\, (P\,A_1\,\mathsf{B}\,\Gamma) \overline{\overline{\wedge}}$ $\mathsf{A}\,(P\,A_1\,\mathsf{B}\,\Gamma) \overline{\overline{\wedge}}\, (A\,A_1\,C_1\,B_1)$, folglich (16₂) $(A\,A_1\,B\,C) = (A\,A_1\,C_1\,B_1) = (A_1\,A\,B_1\,C_1)$ (121₆); mithin sind $A\,A_1\,.\,B\,B_1\,.\,C\,C_1$ Punktpaare einer Involution (126₃).

6. *Teleskopische Involution.* Fällt der Fluchtpunkt F einer Involution in den uneigentlichen Punkt F_1; mit andern Worten, ist der uneigentliche Punkt ein Ordnungspunkt (122₂), so wollen wir die Involution eine *teleskopische* nennen. In Zeichen ist sie dargestellt durch

$$F_1\,F_1\,.\,A\,A_1\,.\,B\,B_1 \text{ (126}_3\text{)}\,. —$$

Aus $(A_1\,B\,B_1\,F_1) = (A\,B_1\,B\,F_1)$ folgt

$$B_1\,A_1 : B_1\,B = B\,A : B\,B_1 \text{ (121}_5\text{)}.$$

Da $B_1 B = - B B_1$ ist [121₁], so ist (vergl. Nr. 125)

$$A_1 B_1 : A B = - 1.$$

Lehrsatz: Das Verhältnis zweier *eigentlichen* homologen Strecken einer teleskopischen Involution ist gleich — 1.

---

§ 2. Kollineare Verwandtschaft.

127. **Gleichung von Lagrange.** Die durch M gehende Kugelfläche mit dem Halbmesser $M C$ trenne zwei Mittel, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts c und c_1 sind. Der von dem leuchtenden Punkt A ausgehende Strahl $A C$, welcher die Kugelfläche in M trifft, geht ungebrochen weiter, weil sein Einfallswinkel 0 ist. — Bildet der Strahl $A E$ mit der Richtung des Einfallslotes $E C$ den $< \alpha$, so ist $E A_1$ der gebrochene Strahl, wenn der von $E A_1$ und dem Einfallslot gebildete Winkel β der Gleichung $\sin \alpha : \sin \beta = c : c_1$ genügt.

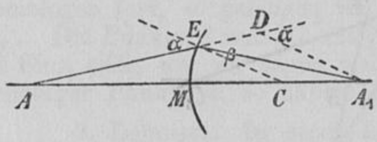


Fig. 2.

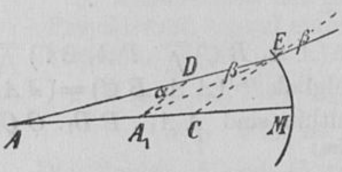


Fig. 3.

Wir ziehen durch den Punkt A_1, den wir das Bild von A nennen, zum Einfallslot $E C$ die Parallele, welche den Strahl $A E$ in D trifft. Es ist dann in dem Dreieck $E A_1 D$

$$c : c_1 = \sin \alpha : \sin \beta = E A_1 : E D; \text{ ferner}$$

$$C A_1 : C A = E D : E A = E A_1 \sin \beta : E A \sin \alpha$$
$$= E A_1 \cdot c_1 : E A \cdot c.$$

Beschränken wir unsere Betrachtungen auf die sogenannten *Nullstrahlen*, d. h. auf die Strahlen, für welche der $< EAM$ nicht merklich von 0 verschieden ist, so können wir das Verhältnis $EA_1 : EA$ durch $MA_1 : MA$ ersetzen. Damit ergibt sich die

Gleichung von Lagrange: $(A_1\,A\,C\,M) = c_1 : c$.—

Da wir uns auf Nullstrahlen beschränken, können wir allen Strahlen einen bestimmten Sinn (121₁). beilegen:

Wir wählen den Sinn der einfallenden Strahlen (die in allen Figuren von links nach rechts verlaufen) als den positiven.

Zusatz. Aus der eben abgeleiteten Gleichung $\frac{CA_1}{CA} = \frac{EA_1}{EA} \cdot \frac{c_1}{c}$ ergibt sich, wenn wir $< E A_1 A$ und $< E A A_1$ durch u_1 und u bezeichnen,

$$\frac{CA_1}{CA} = \frac{\sin u}{\sin u_1} \cdot \frac{c_1}{c}.$$

Diese Gleichung gilt für Winkel von endlicher Größe.— Weil sich über den Sinn in den Seiten eines endlichen Dreiecks nichts aussagen läßt, so dürfen wir in dieser Gleichung auch den Strecken CA_1 und CA keinen bestimmten Sinn beilegen.

128. **Konstruktion des Bildes.** Ist durch die in der vorigen Nummer angegebene Konstruktion zu *einem* Punkt A das Bild A_1 gefunden, so läßt sich zu *jedem* Punkt A das zugeordnete Bild A_1 allein mit dem Lineal zeichnen

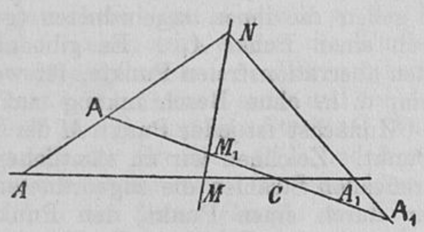


Fig. 4.

durch eine Konstruktion, die sich unmittelbar aus dem Satz von Lagrange ergibt: Trifft $\mathsf{A}\,C$ die Kugelfläche in

M_1 und schneiden sich A A und $M M_1$ in N, so trifft $N A_1$ den Strahl A C in A_1 ; denn

$$(\mathsf{A}_1 \, \mathsf{A} \, C M_1) = (A_1 \, A \, C M)^{(16_1)} = c_1 : c.$$

129. **Zweite Beschränkung.** Ist A′ ein weiteres Objekt, dessen Verbindungslinie mit C die Kugelfläche in M_1' schneidet, so würden wir zur Konstruktion des Bildes die Verbindungslinien A A′ und $M M_1'$ zu zeichnen haben. Die Verbindungslinie $M M_1'$ fällt nicht mit $M M_1$ zusammen; die Linien rücken nur um so näher zusammen, je mehr sich A und A′ dem Objekt A nähern. Die folgenden mathemathischen Betrachtungen werden aber sehr vereinfacht, wenn $M M_1$ und $M M_1'$ als zusammenfallend angesehen werden. Wir beschränken uns deswegen auf die Erörterung des besonderen Falles, daß $M M M_1'$ in einer Gerade m liegen. Die mathematischen Ergebnisse, die wir so für beliebige Strahlen und beliebige Objekte ableiten, werden dann bei der Übertragung auf die Optik wenigstens für Nullstrahlen (127) und kleine Objekte Geltung haben.

Zusatz. Die Gerade m steht senkrecht auf A C. Da dieser Umstand aber an keiner Stelle unserer allgemeinen Betrachtungen einen Beweisgrund liefert, so sehen wir vorläufig von ihm ab und zeichnen m als beliebige Gerade. (Vgl. Nr. 132).

130. **Aberrationsfreie Punkte.** Wir haben gesehen (127): Wenn die einfallenden *Nullstrahlen* durch einen Punkt A gehen, so gehen die ihnen zugeordneten (gebrochenen) Strahlen durch einen Punkt A_1 . Es gibt nun Punkte, die sogenannten aberrationsfreien Punkte, für welche dieser Satz allgemein, d. h. ohne Beschränkung auf die Nullstrahlen gilt. Zunächst ist jeder Punkt M der Kugelfläche ein solcher Punkt. Zeichnen wir zu sämtlichen in M die Kugelfläche treffenden Strahlen die zugeordneten, so gehen diese offenbar durch einen Punkt, den Punkt M selbst nämlich. Ferner ist der Kugelmittelpunkt C ein aberrationsfreier Punkt; denn die durch C gehenden einfallenden Strahlen fallen mit ihren zugeordneten zusammen; diese schneiden sich also ebenfalls in C. Schließlich ergibt sich

noch (aus der bekannten Weierstraßschen Konstruktion) ein aberrationsfreier Punkt W aus

$$CW = MC \cdot \frac{c}{c_1}; \text{ und sein Bild } W_1 \text{ aus } CW_1 = MC \cdot \frac{c_1}{c}.$$

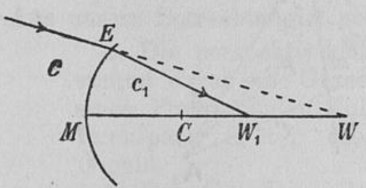


Fig. 5.

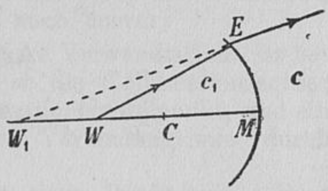


Fig. 6.

Daß der in irgend einem beliebigen Punkte E auffallende Strahl, dessen Richtung durch W geht, so gebrochen wird, daß er durch W_1 geht, folgt aus $CW : MC = c : c_1 = MC : CW_1$ und der daraus sich ergebenden Ähnlichkeit der Dreiecke ECW und ECW_1.

Zusatz. Für die folgenden Betrachtungen ist besonders von Wichtigkeit, daß in den Punkten M, die nach unserer zweiten Beschränkung (129) in einer Gerade m liegen, und im Kugelmittelpunkt C Objekt und Bild zusammenfallen. Wir sprechen daher dies Ergebnis aus in dem Satz:

Die Punkte der Gerade m und der Kugelmittelpunkt C sind sich selbst zugeordnet.

131. **Eine brechende Kugelfläche.** Wir wollen die in Nr. 128 gegebene Konstruktion benutzen, um zu den Punkten A einer beliebigen Gerade p die Bilder A_1 zu zeichnen; dabei sehen wir wieder die Punkte $A_1 A C M$ der Achse u als gegeben an. — Wir projizieren den in p liegenden Punkt A (Fig. 7) aus A auf m und den dadurch erhaltenen Punkt N aus A_1 auf den Strahl $C(\mathsf{A})$. A_1 ist also der Schnittpunkt der Strahlen $C(\mathsf{A})$ und $A_1(N)$. Bewegt sich der Punkt A in der festen Gerade p, so bewegt sich der Punkt N in der festen Gerade m und die Strahlen $C(\mathsf{A})$ und $A_1(N)$ drehen sich um C und A_1. Dabei entsteht die folgende Kette perspektiver Glieder

$$C(\mathsf{A}_1) \;\overline{\overline{\wedge}}\; \mathsf{A} \;\overline{\overline{\wedge}}\; A(\mathsf{A}) \;\overline{\overline{\wedge}}\; N \;\overline{\overline{\wedge}}\; A_1(\mathsf{A}_1).$$

Die beiden Strahlenbüschel $C(\mathsf{A}_1)$ und $A_1(\mathsf{A}_1)$ sind also projektiv $^{(12_1)}$. Die Schnittpunkte A_1 der homologen Strahlen

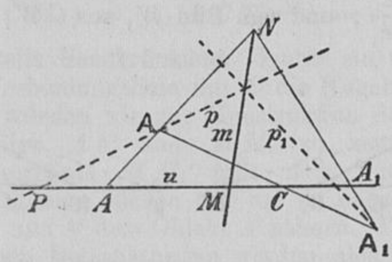


Fig. 7.

liegen daher in einer Kurve zweiter Ordnung oder in einer Gerade; und zwar in einer Gerade dann, wenn die beiden Strahlenbüschel $C(\mathsf{A}_1)$ und $A_1(\mathsf{A}_1)$ in perspektiver Lage sind $^{(15)}$, wenn also dem Strahl $C(A_1)$ der Strahl $A_1(C)$ homolog ist. Um diese Frage zu entscheiden, betrachten wir den Augenblick, wo A in den Schnittpunkt $P = pu$ fällt. $C(\mathsf{A}_1)$ fällt dann mit u zusammen, und da der Punkt N, die Projektion des Punktes P aus A auf m, in M fällt, so fällt $A_1(\mathsf{A}_1)$ ebenfalls mit u zusammen; in Zeichen

$$C(A_1) \overline{\overline{\wedge}}\, P \overline{\overline{\wedge}}\, A(P) \overline{\overline{\wedge}}\, M \overline{\overline{\wedge}}\, A_1(C).$$

Die Bilder A_1 liegen also in einer Gerade p_1. Weil die Gerade $\mathsf{A}\mathsf{A}_1$ durch C geht, so sind Objekt und Bild durch C perspektiv aufeinander bezogen $^{(11_2)}$:

1. Bewegt sich ein Punkt in einer Gerade p, so bewegt sich sein Bild in einer zweiten Gerade p_1 und ist durch C perspektiv auf das Objekt bezogen. —

Weil der Schnittpunkt pm mit seinem Bilde zusammenfällt $^{(130\,Z)}$, so ist die Verbindungslinie p_1 von pm und A_1 das Bild von p. Daher

2. Dreht sich eine Gerade q um einen beliebigen Punkt B, so dreht sich ihr Bild q_1 um den homologen Punkt B_1 und ist durch m perspektiv auf q bezogen. —

Die hier abgeleitete Verwandtschaft zwischen den Punkten und Geraden einer Ebene heißt in der Sprache der Geometrie der Lage eine perspektiv-kollineare Verwandtschaft. Wir können daher unser Ergebnis auch so aussprechen:

3. Die durch eine brechende Fläche vermittelte optische Verwandtschaft ist eine perspektiv-kollineare.

Aus unsern Betrachtungen geht noch hervor:

4. Die perspektiv-kollineare Verwandtschaft ist bestimmt durch eine Gerade m, die Kollineationsachse; einen Punkt C, den Kollineationsmittelpunkt, und ein Punktpaar $A A_1$, dessen Verbindungslinie durch C geht.

5. Die Gerade, welche einen Punkt mit seinem Bilde verbindet, geht durch den Kollineationsmittelpunkt C.

6. Der Punkt, in dem eine Gerade ihr Bild schneidet, liegt in der Kollineationsachse m.

132. **Zentrierte Kugelflächen.** Wir betrachten jetzt nicht eine brechende Kugelfläche, sondern ein System von n brechenden Kugelflächen; beschränken uns dabei aber auf *zentrierte* Kugelflächen, d. h. auf Kugelflächen, deren Mittelpunkte $C\, C_1\, C_2 \ldots C_n$ in einer Gerade u liegen. Es gehen dann die Geraden $m\, m_1\, m_2 \ldots m_n$, weil sie senkrecht auf u stehen (129 Z), durch *einen* Punkt U. Daß dieser Punkt U ein uneigentlicher ist, wird in unseren Beweisen nicht verwertet; wir wählen daher für U in unsern Zeichnungen einen eigentlichen Punkt (vergl. Nr. 149).

Von jedem Punkt A entwirft die erste Fläche ein Bild A_1, von diesem die zweite Fläche das Bild A_2; von dem Bild A_{n-1} entwirft schließlich die letzte, die n te Fläche, das Bild A_n. Der Zusammenhang zwischen dem ersten Objekt A und dem letzten Bilde A_n, für den wir den Namen *optische Verwandtschaft* gebrauchen wollen, bildet den Gegenstand der folgenden Betrachtungen.

Bewegt sich A in einer Gerade p, so bewegt sich A_1 in einer Gerade p_1 und ist perspektiv auf A bezogen (131_1); A_2 bewegt sich auf einer Gerade p_2 und ist perspektiv auf A_1 bezogen; schließlich A_n bewegt sich auf einer Gerade p_n und ist perspektiv auf A_{n-1} bezogen. Die von A und A_n beschriebenen Punktreihen sind also die Endglieder einer Kette perspektiver Glieder, also projektiv (12_1):

1. *Bewegt sich ein Punkt in einer Gerade p, so bewegt sich sein Bild in einer zweiten Gerade p_n und ist projektiv auf das Objekt bezogen.*

Dieser Satz bildet die Grundlage aller folgenden. In der Geometrie der Lage hat man für den durch diesen Satz definierten Zusammenhang zwischen Punkten und Geraden einer Ebene den Namen *kollineare* Verwandtschaft:

2. Satz von *Möbius:* Die optische Verwandtschaft ist eine kollineare. —

Eine besondere Stellung nimmt die Verbindungslinie u der Mittelpunkte C und der Schnittpunkt U der Geraden m ein. Bewegt sich A in der Gerade u, so bewegen sich auch $A_1\, A_2\, .\,.\, A_n$ in der Gerade u (131₅). Geht ferner die Gerade p durch U, so gehen auch $p_1\, p_2\, .\,.\, p_n$ durch U (131₆):

3. In der durch ein System zentrierter Flächen vermittelten optischen Verwandtschaft sind die Gerade u und der Punkt U sich selbst zugeordnet. —

Der Unterschied zwischen der zuerst betrachteten perspektiv-kollinearen Verwandtschaft (131₃) und der jetzt behandelten kollinearen ist der, daß an die Stelle der perspektiven Beziehung im allgemeinen die projektive tritt. Diesen Unterschied heben wir (in abgeänderter Bezeichnungsweise) in den folgenden beiden Sätzen noch einmal hervor.

4. Die homologen Punkte A und A_1 zweier entsprechenden Geraden p und p_1 sind jetzt nicht mehr (wie früher durch C) perspektiv, sondern projektiv aufeinander bezogen. Ihre Verbindungslinien $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ gehen daher nicht mehr durch einen Punkt, sondern bilden einen krummen Strahlenbüschel (19).

5. Die homologen Strahlen α und α_1 zweier entsprechenden Punkte P und P_1 sind jetzt nicht mehr (wie früher durch m) perspektiv, sondern projektiv aufeinander bezogen. Ihre Schnittpunkte $\alpha\,\alpha_1$ liegen daher nicht mehr in einer Gerade, sondern bilden eine krumme Punktreihe.

133. **Laterale und angulare Punkte.** Aber wenn auch im allgemeinen die kollineare Verwandtschaft eine projektive ist, so gibt es doch auch bei ihr Geradenpaare und Punktpaare, deren Beziehung eine perspektive ist; und gerade

an diese Geradenpaare und Punktpaare knüpfen sich die folgenden Betrachtungen an.

Jeder Gerade a, die durch U geht, entspricht eine Gerade a_1, die ebenfalls durch U geht, weil der Punkt U sich selbst homolog ist (132₃). Die Punkte von a_1 sind auf die Punkte von a nicht projektiv, sondern perspektiv bezogen, weil der Schnittpunkt U der Träger sich selbst homolog ist (15). Der Punkt L, durch den die Verbindungslinien homologer Punkte der perspektiv liegenden Punktreihen a und a_1 gehen, muß in u liegen, weil dem Punkt au der Punkt $a_1 u$ homolog ist.

Jedem Punkt A, der in u liegt, entspricht ein Punkt A_1, der ebenfalls in u liegt, weil die Gerade u sich selbst homolog ist (132₃). Die Strahlen von A_1 sind auf die Strahlen von A nicht projektiv, sondern perspektiv bezogen, weil die Verbindungslinie u der Strahlenmittelpunkte sich selbst homolog ist (15). Die Gerade s, in der die Schnittpunkte homologer Strahlen der perspektiven Büschel A und A_1 liegen, muß durch U gehen, weil der Gerade $A\,U$ die Gerade $A_1\,U$ homolog ist.

Wir fassen dies Ergebnis noch einmal in den beiden folgenden Sätzen zusammen, um daran zwei Erklärungen zu knüpfen.

1. Die Punktreihen zweier homologen Strahlen a und a_1 von U sind perspektiv aufeinander bezogen durch einen Punkt L, der in u liegt.

2. Erklärung. Der Punkt L von u, in dem sich die Verbindungslinien homologer Punkte des Strahlenpaares $a\,a_1$ von U schneiden, soll der dem Strahlenpaar $a\,a_1$ oder der dem Punktpaar $A = a\,u$ und $A_1 = a_1\,u$ oder kürzer der dem Punkt A zugeordnete *laterale* Punkt genannt werden. —

3. Die Strahlenbüschel zweier homologen Punkte A und A_1 von u sind perspektiv aufeinander bezogen durch eine Gerade s, die durch U geht.

4. Erklärung. Die Gerade s, in der die Schnittpunkte homologer Strahlen des Punktpaares $A\,A_1$ von u liegen, soll die dem Punkt A zugeordnete *angulare* Gerade genannt werden. Der Punkt S, in dem die Gerade s die Achse u schneidet, soll der dem Punkt A zugeordnete *angulare* Punkt genannt werden. —

Die Sätze 131_5 und 131_6 können wir jetzt auch so aussprechen:

5. Bei der perspektiv-kollinearen Verwandtschaft ist für jedes Punktpaar der Kugelmittelpunkt C der laterale und der Kugelscheitel M der angulare Punkt.

134. Laterale Projektivität. Ist L der zu A gehörige laterale Punkt (Fig. 8), dann sind irgend zwei Punkte A und A_1 von $UA = a$ und $UA_1 = a_1$, die mit L in einer Gerade liegen, einander homolog $^{(133_2)}$. Verbindet man A_1 mit dem dem Punkt L homologen Punkt L_1, so sind die Geraden $\mathsf{A}L = p$ und $\mathsf{A}_1 L_1 = p_1$ homolog, weil sie Verbindungslinien homologer Punkte sind. Hält man die bisher bezeichneten Punkte fest und nimmt ein bewegliches Punktpaar $B B_1$ von u hinzu, dessen Verbindungslinien b und b_1 mit U die Graden p und p_1 in B und B_1 schneiden, so trifft die Verbindungslinie $\mathsf{B}\,\mathsf{B}_1$ die Gerade u in dem zu B gehörigen lateralen Punkt M. Bewegt sich nun B in u, so ist

$$\mathsf{B} \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} U(\mathsf{B}) \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} B \mathrel{\overline{\wedge}} B_1 \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} U(B_1) \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} \mathsf{B}_1.$$

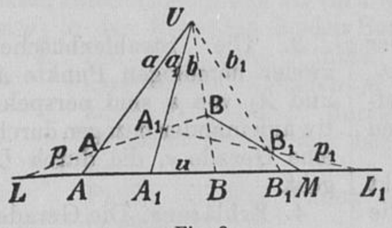


Fig. 8.

Da demnach die von B und B_1 in p und p_1 beschriebenen Punktreihen projektiv sind $^{(12_1)}$, so beschreibt die Verbindungslinie $\mathsf{B}\,\mathsf{B}_1$ einen krummen Strahlenbüschel $^{(19)}$. Zu diesem krummen Strahlenbüschel gehört auch u, weil, wenn B in L und folglich B_1 in L_1 fällt, B in L und B_1 in L_1 fällt. Da wir die Verbindungslinien der homologen Punkte zweier projektiven Punktreihen auffassen können als die Tangenten einer Kurve $^{(29_2)}$, diese Tangenten aber in zwei festen Tangenten, z. B. in u und p, zwei projektive Punktreihen ausschneiden $^{(29_1)}$, so sind die von M in u und von B in p beschriebenen Punktreihen projektiv; wir haben daher

$$M \mathrel{\overline{\wedge}} \mathsf{B} \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} U(\mathsf{B}) \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} B.$$

Lehrsatz: Die Punkte von u und die ihnen zugeordneten lateralen Punkte sind projektiv aufeinander bezogen.

Zusatz. Fällt B mit seinem homologen B_1 zusammen, d. h. ist B ein Ordnungspunkt [122,1] der Projektivität von u, so fällt M, wie aus der Fig. 8 hervorgeht, ebenfalls in B:

Jeder Ordnungspunkt der Projektivität fällt mit seinem lateralen zusammen.

135. **Punktreihe der angularen Punkte.** Ist S der zu A gehörige angulare Punkt (Fig. 9), so sind irgend zwei Strahlen α und α_1 von A und A_1, die sich in einem Punkt Γ von $U\,S$ schneiden, einander homolog [133,1]. Zeichnet man zu $U\,S = s$ den homologen Strahl $U\,S_1 = s_1$, so sind die Schnittpunkte $s\,\alpha = \Gamma$ und $s_1\,\alpha_1 = \Gamma_1$ einander homolog, weil sie Schnittpunkte homologer Strahlen sind. Hält man die bisher gezeichneten Strahlen fest und nimmt ein bewegliches Punktpaar $B\,B_1$ hinzu, so sind die Strahlen, welche B und B_1 aus Γ und Γ_1 projizieren, einander homolog und schneiden sich daher in einem Punkt T, dessen Verbindungslinie mit U den dem Punkt B zugeordneten angularen Punkt T liefert [133,1]. Bewegt sich nun B in u, so ist

$$\Gamma(\mathsf{T}) \;\overline{\overline{\wedge}}\; B \;\overline{\wedge}\; B_1 \;\overline{\overline{\wedge}}\; \Gamma_1(\mathsf{T}).$$

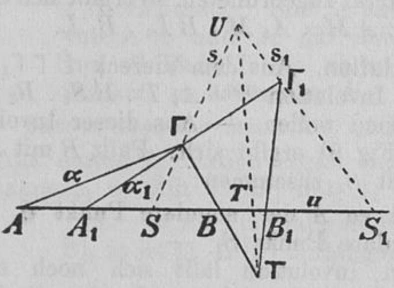


Fig. 9.

Der Punkt T ist also der Schnittpunkt homologer Strahlen zweier projektiven Büschel [12] und beschreibt daher eine krumme Punktreihe [19]. Wenn B in S und folglich B_1 in S_1 fällt, so fällt T in U; die krumme Punktreihe geht daher durch U. Deshalb werden ihre Punkte T aus den beiden Kurvenpunkten Γ und U durch zwei projektive Strahlenbüschel projiziert [26,1]. Wir haben also

$$B \;\overline{\overline{\wedge}}\; \Gamma(\mathsf{T}) \;\overline{\wedge}\; U(\mathsf{T}) \;\overline{\overline{\wedge}}\; T.$$

Lehrsatz: Die Punkte von u und die ihnen zugeordneten angularen Punkte sind projektiv aufeinander bezogen.

Zusatz. Fällt B mit seinem homologen B_1 zusammen, d. h. ist B ein Ordnungspunkt $^{(122_2)}$ der Projektivität von u, so fällt T, wie aus der Fig. 9 hervorgeht, ebenfalls in B:

Jeder Ordnungspunkt der Projektivität fällt mit seinem angularen zusammen.

136. **Laterale Involution.** Aus dem Viereck $U\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}\,\mathsf{B}_1$ (Fig. 8) ergibt sich die Involution $^{(126_5)}$ $A_1\,M \,.\, B\,L_1 \,.\, B_1\,L$, die wir die *laterale* nennen wollen. — Aus dieser Involution (sowie auch aus der Fig. 8) ergibt sich: Fällt B mit A_1 zusammen, so fällt M mit L_1 zusammen:

1. Lehrsatz: Ist zu A der laterale Punkt L, so ist zu A_1 der laterale Punkt L_1. —

Von der lateralen Involution läßt sich noch ein weiteres Punktpaar angeben. Bezeichnen wir den in ihr dem Punkt A homologen Punkt durch X, so haben wir:

$$(A_1\,B_1\,L_1\,M_1) = (A\,B\,L\,M)^{(121_3)} = (X\,L_1\,B_1\,A_1)^{(126_2)} = (A_1\,B_1\,L_1\,X)^{(121_6)}.$$

X fällt also mit M_1 zusammen $^{(14_2)}$; $A\,M_1$ ist daher ein viertes Punktpaar unserer lateralen Involution:

2. Sind A und B zwei beliebige Punkte von u und L und M die ihnen lateral zugeordneten, so ergibt sich die *Laterale Involution*: $A\,M_1 \,.\, A_1\,M \,.\, B\,L_1 \,.\, B_1\,L$.

137. **Angulare Involution.** Aus dem Viereck $U\,\Gamma\,\Gamma_1\,\mathsf{T}$ (Fig. 9) ergibt sich die Involution $^{(126_5)}$ $A_1\,T \,.\, B\,S_1 \,.\, B_1\,S$, die wir die *angulare* nennen wollen. — Aus dieser Involution (sowie auch aus der Fig. 9) ergibt sich: Fällt B mit A_1 zusammen, so fällt T mit S_1 zusammen:

1. Lehrsatz: Ist zu A der angulare Punkt S, so ist zu A_1 der angulare Punkt S_1. —

Von der angularen Involution läßt sich noch ein weiteres Punktpaar angeben. Bezeichnen wir den in ihr dem Punkt A homologen Punkt durch Y, so haben wir

$$(A_1\,B_1\,S_1\,T_1) = (A\,B\,S\,T)^{(121_3)} = (Y\,S_1\,B_1\,A_1)^{(126_2)} = (A_1\,B_1\,S_1\,Y)^{(121_6)}.$$

Y fällt also mit T_1 zusammen $^{(14_2)}$; $A\,T_1$ ist daher ein viertes Punktpaar unserer angularen Involution:

2. Sind A und B zwei beliebige Punkte von u und S und T die ihnen angular zugeordneten, so ergibt sich die

Angulare Involution $A\,T_1 \,.\, A_1\,T \,.\, B\,S_1 \,.\, B_1\,S$.

138. **Lateral-angulare Involution.** Zwei Punkte A und A_1 von UA und UA_1 (Fig. 10), die mit dem zugeordneten lateralen Punkt L in einer Gerade liegen, sind zwei homologe Punkte (133₂), folglich sind BA und BA_1 zwei homologe Geraden. Ihr Schnittpunkt T liefert also den dem Punkt B zugeordneten angularen Punkt T.

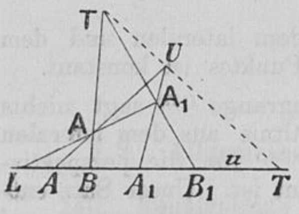


Fig. 10.

Aus dem Viereck $U A A_1 T$ ergibt sich die Involution (126₅) $A\,B_1 \,.\, A_1\,B \,.\, L\,T$, die wir die *lateral-angulare* nennen wollen.—

Geht man bei der Ableitung nicht von dem Punktpaar $A\,A_1$ und dem lateralen Punkt L, sondern von dem Punktpaar $B\,B_1$ und dem lateralen Punkt M aus und zeichnet den dem Punkt A zugeordneten angularen Punkt S, so erhält man die Involution $A\,B_1 \,.\, A_1\,B \,.\, M\,S$. Demnach haben wir (126₄) den

1. Lehrsatz: Sind A und B zwei beliebige Punkte von u, L und M die ihnen zugeordneten lateralen und S und T die ihnen zugeordneten angularen Punkte, so haben wir die

Lateral-angulare Involution: $A\,B_1 \,.\, A_1\,B \,.\, L\,T \,.\, M\,S$.—

Aus dieser Involution ergibt sich: Fällt B mit $L\,[S]$ zusammen, so fällt $T\,[M]$ mit A_1 zusammen:

2. Ist zu A der laterale Punkt L [der angulare Punkt S], so ist zu L [S] der angulare [laterale] Punkt A_1.

139. **Erweiterung des Satzes von Lagrange.** Aus der lateral-angularen Involution (138₁) folgt (126₂)

$(A_1\,A\,L\,S) = (B\,B_1\,T\,M) = (B_1 B\,M\,T)$ (121₆) oder (16¹)

$$\frac{L\,A_1}{L\,A} : \frac{S\,A_1}{S\,A} = \frac{M\,B_1}{M\,B} : \frac{T\,B_1}{T\,B}\,.$$

Nennen wir

$$\frac{LA_1}{LA} \text{ das } \textit{laterale} \text{ und } \frac{SA_1}{SA} \text{ das } \textit{angulare Verhältnis}$$

des Punktes A, so können wir den Inhalt der vorstehenden Gleichung so ausdrücken:

1. Das Verhältnis aus dem lateralen und dem angularen Verhältnis eines Punktes ist konstant.

Auch die Gleichung von Lagrange (127) sagt nichts anderes aus, als daß das Verhältnis aus dem lateralen und dem angularen Verhältnis (133₅) für die perspektiv-kollineare Verwandtschaft konstant ist. Unser Satz enthält also die Ausdehnung des Satzes von Lagrange auf die kollineare Verwandtschaft.

Aus der lateral-angularen Involution $AB_1 . A_1B . LT$ folgt (126₂) $(A_1 A L B) = (B B_1 T A_1)$ oder (16₁)

$$\frac{LA_1}{LA} : \frac{BA_1}{BA} = \frac{TB}{TB_1} : \frac{A_1 B}{A_1 B_1},$$

woraus sich ergibt die

Lateral-angulare Gleichung $\frac{LA_1}{LA} \cdot \frac{TB_1}{TB} = \frac{A_1 B_1}{AB}$.

Nennen wir das Verhältnis der homologen Strecken $A_1 B_1$ und AB das *axiale Verhältnis* der Punkte A und B, so können wir den Inhalt der vorstehenden Gleichung so ausdrücken:

2. Das Produkt aus dem lateralen Verhältnis eines beliebigen Punktes und dem angularen Verhältnis eines zweiten beliebigen Punktes ist gleich dem axialen Verhältnis der beiden Punkte.

Zusatz. Da ein Ordnungspunkt mit seinem lateralen (134 Z) und seinem angularen Punkt (135 Z) zusammenfällt, so nimmt das laterale und das angulare Verhältnis eines Ordnungspunktes den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ an. Unsere Gleichung liefert den Grenzwert für diese Verhältnisse. Bezeichnen wir einen Ordnungspunkt durch D, so ist das laterale Verhältnis: $\dfrac{D\,D}{D\,D} = \dfrac{D\,B_1}{D\,B} : \dfrac{T\,B_1}{T\,B}$;

das angulare Verhältnis: $\dfrac{D\,D}{D\,D} = \dfrac{D\,A_1}{D\,A} : \dfrac{L\,A_1}{L\,A}$.

---

§ 9. Allgemeine optische Verwandtschaft.

140. Konstruktion homologer Strahlenbüschel.

1. Gegeben ein Punktpaar $A\,A_1$ der Achse u und sein angularer Punkt S.

Lösung: Wir finden zu den Strahlen von A die homologen von A_1 [133, 3], indem wir den Strahlenbüschel A durch $U\,S$ perspektiv auf den Strahlenbüschel A_1 beziehen.

In Zeichen: $A \overline{\overline{\wedge}}\, U\,S \overline{\overline{\wedge}}\, A_1$.

2. Gegeben ein Punktpaar $A\,A_1$ der Achse u und sein lateraler Punkt L.

Lösung: Wir suchen die homologen Strahlen des Punktpaares $B\,B_1$. — Sind A und A_1 (Fig. 11) zwei Punkte von $U\,A$ und $U\,A_1$, die durch L perspektiv aufeinander bezogen sind, so sind $B\,\mathsf{A}$ und $B_1\,\mathsf{A}_1$ als Verbindungslinien homologer Punkte homologe Strahlen. Man erhält daher die entsprechenden Strahlen von B und B_1, indem man den Strahlenbüschel B durch $U\,A$ perspektiv auf den Büschel L und diesen durch $U\,A_1$ perspektiv auf den Büschel B_1 bezieht.

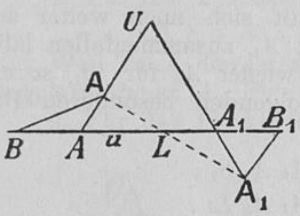


Fig. 11.

In Zeichen: $B \overline{\overline{\wedge}}\, U\,A \overline{\overline{\wedge}}\, L \overline{\overline{\wedge}}\, U\,A_1 \overline{\overline{\wedge}}\, B_1 \cdot$ —

3. Können wir die homologen Strahlen *irgend zweier* Punktpaare $A\,A_1$ und $B\,B_1$ zeichnen, so können wir auch zu jedem (nicht in u liegenden) Punkt P das Bild P_1 finden:

Wir zeichnen zu den Strahlen PA und PB die homologen von A_1 und B_1 und bestimmen ihren Schnittpunkt P_1.

141. **Bestimmungsstücke der kollinearen Verwandtschaft.** Aus unsern bisherigen Betrachtungen geht hervor, daß die kollineare Verwandtschaft (132₄) bekannt ist, wenn uns die Projektivität von u und außerdem zu irgend einem Punkt der Achse u der angulare *oder* der laterale Punkt gegeben ist. Ist uns z. B. zu A der angulare Punkt S gegeben, so können wir vermittelst der lateral-angularen Involution (138) zu einem beliebigen Punkt B den lateralen M und aus diesem wieder zu einem beliebigen C den angularen zeichnen. — Da die Projektivität von u durch drei Punktpaare $A\,B\,C \;\overline{\wedge}\; A_1\,B_1\,C_1$ bestimmt ist (14 Z), so ist uns also die kollineare Verwandtschaft durch 7 Punkte gegeben. Die Zahl dieser Punkte können wir auf 6 reduzieren, indem wir den Punkt C mit dem angularen S [dem lateralen L] zusammenfallen lassen.

Wir haben daher zwei allgemeine Bestimmungsweisen der kollinearen Verwandtschaft, die in Zeichen gegeben sind durch

$$1.\quad A\,B\,S \;\overline{\wedge}\; A_1\,B_1\,S_1\,;$$
$$2.\quad A\,B\,L \;\overline{\wedge}\; A_1\,B_1\,L_1\,. —$$

Die Zahl von 6 Punkten läßt sich noch weiter auf 5 reduzieren, indem man B mit A_1 zusammenfallen läßt. Schreiben wir in diesem Falle wieder A_2 für B_1, so ergeben sich noch die beiden folgenden besonderen Bestimmungsweisen:

$$3.\quad A\,A_1\,S \;\overline{\wedge}\; A_1\,A_2\,S_1\,;$$
$$4.\quad A\,A_1\,L \;\overline{\wedge}\; A_1\,A_2\,L_1\,.$$

Zusatz. Aus der angularen Involution (137) $A_1\,T\,.\,B\,S_1\,.\,B_1\,S$ ergibt sich (126₅), daß man aus $A_1\,T\,.\,B_1\,S$ zu B den zugeordneten Punkt S_1 finden kann. Wir können daher den Bestimmungsweisen 1 und 2 noch hinzufügen:

Die kollineare Verwandtschaft ist durch zwei Punktpaare $A\,A_1$ und $B\,B_1$ und ihre beiden angularen [oder ihre beiden lateralen] Punkte bestimmt.

142. **Erste allgemeine Konstruktion des Bildes.**

Gegeben: $A\,B\,S \overline{\wedge} A_1\,B_1\,S_1$ $^{(141_1)}$.

Konstruktion: Weil zu A der angulare Punkt S ist, so haben wir $^{(140_1)}$

1. Für das Punktpaar $A A_1$: $A \overline{\overline{\wedge}}\, U S \overline{\overline{\wedge}}\, A_1$. —

Weil zu A der angulare Punkt S ist, so ist zu S der laterale Punkt A_1 $^{(138_2)}$; wir haben daher $^{(140_2)}$

2. Für das Punktpaar $B B_1$:

$$B \overline{\overline{\wedge}}\, U S \overline{\overline{\wedge}}\, A_1 \overline{\overline{\wedge}}\, U S_1 \overline{\overline{\wedge}}\, B_1. \text{ —}$$

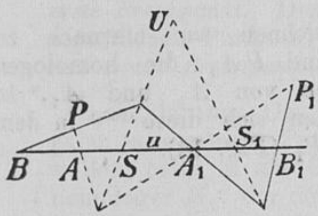


Fig. 12.

Zeichnen wir hiernach zu PA und PB die homologen Strahlen von A_1 und B_1, so schneiden sich diese $^{(140_3)}$ in dem Bild P_1 (Fig. 12).

143. **Zweite allgemeine Konstruktion des Bildes.**

Gegeben: $A\,B\,L \overline{\wedge} A_1\,B_1\,L_1$ $^{(141_2)}$.

Konstruktion: Weil zu A der laterale Punkt L ist, so haben wir $^{(140_2)}$

1. Für das Punktpaar $B B_1$:

$$B \overline{\overline{\wedge}}\, UA \overline{\overline{\wedge}}\, L \overline{\overline{\wedge}}\, UA_1 \overline{\overline{\wedge}}\, B_1. \text{ —}$$

Weil zu A der laterale Punkt L ist, so ist zu L der angulare Punkt A_1 $^{(138_2)}$; wir haben daher $^{(140_1)}$

2. Für das Punktpaar $L L_1$: $L \overline{\overline{\wedge}}\, U A_1 \overline{\overline{\wedge}}\, L_1$. —

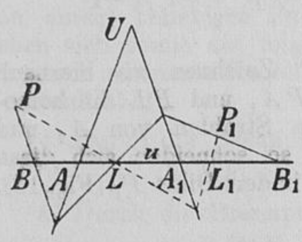


Fig. 13.

Zeichnen wir hiernach zu PB und PL die homologen Strahlen von B_1 und L_1, so schneiden sich diese $^{(140_3)}$ in dem Bilde P_1 (Fig. 13).

144. Erste besondere Konstruktion des Bildes.

Gegeben: $A A_1 S \overline{\wedge} A_1 A_2 S_1$ $^{(141_3)}$.

Konstruktion: Weil zu A der angulare Punkt S ist, so haben wir $^{(140_1)}$

1. Für das Punktpaar $A A_1$: $A \overline{\overline{\wedge}} U S \overline{\overline{\wedge}} A_1$. —

Weil zu A_1 der angulare Punkt S_1 ist $^{(137_1)}$, so haben wir $^{(141_1)}$

2. Für das Punktpaar $A_1 A_2$: $A_1 \overline{\overline{\wedge}} U S_1 \overline{\overline{\wedge}} A_2$.—

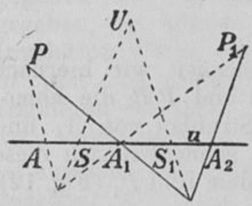


Fig. 14.

Zeichnen wir hiernach zu PA und PA_1 die homologen Strahlen von A_1 und A_2, so schneiden sich diese $^{(140_3)}$ in dem Bilde P_1 (Fig. 14).

145. Zweite besondere Konstruktion des Bildes.

Gegeben: $A A_1 L \overline{\wedge} A_1 A_2 L_1$ $^{(141_4)}$.

Konstruktion: Weil zu A der laterale Punkt L ist, so haben wir $^{(140_3)}$

1. Für das Punktpaar $A_1 A_2$:

$$A \overline{\overline{\wedge}} U A \overline{\overline{\wedge}} L \overline{\overline{\wedge}} U A_1 \overline{\overline{\wedge}} A_2. —$$

Weil zu A der laterale Punkt L ist, so ist zu L der angulare Punkt A_1 $^{(138_2)}$; wir haben daher $^{(141_1)}$

2. Für das Punktpaar $L L_1$: $L \overline{\overline{\wedge}} U A_1 \overline{\overline{\wedge}} L_1$.

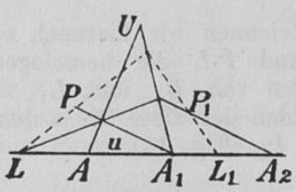


Fig. 15.

Zeichnen wir hiernach zu PA_1 und PL die homologen Strahlen von A_2 und L_1, so schneiden sich diese $^{(140_3)}$ in dem Bilde P_1 (Fig. 15).

146. **Brennpunkt, Hauptpunkt, Knotenpunkt.** Für die optischen Anwendungen, die wir von unsern rein geometrischen Betrachtungen machen wollen, ist es vorteilhaft, nicht einen beliebigen Punkt A_1 und die ihm in beiderlei Sinn (122) homologen A und A_2 den Konstruktionen zu grunde zu legen, sondern von dem uneigentlichen Punkt F_1 der Achse u auszugehen und somit die Fluchtpunkte (123) F und F_2 zur Darstellung zu benutzen.

1. Erklärung: Der Fluchtpunkt F, *dem der* eigentliche Punkt F_1 homolog ist, heißt in der Optik der *erste Brennpunkt.* Der Fluchtpunkt F_2, *der dem* uneigentlichen Punkt F_1 homolog ist, heißt in der Optik der *zweite Brennpunkt.*

2. Erklärung: Der dem ersten Brennpunkt F angular zugeordnete Punkt, den wir mit H bezeichnen wollen, heißt in der Optik der *erste Hauptpunkt;* sein homologer H_1, der dem Punkt F_1 angular zugeordnet ist (137₁), der *zweite Hauptpunkt.* —

Lehrsatz: Weil zu F der angulare Punkt H ist, so ist zu H der laterale Punkt F_1 (138₂).

3. Erklärung: Der dem ersten Brennpunkt F lateral zugeordnete Punkt, den wir durch K bezeichnen wollen, heißt in der Optik der *erste Knotenpunkt;* sein homologer K_1, der dem Punkt F_1 lateral zugeordnet ist (136₁), der *zweite Knotenpunkt.* —

Lehrsatz: Weil zu F der laterale Punkt K ist, so ist zu K der angulare Punkt F_1 (138₃). —

Gehen wir von dem uneigentlichen Punkt F_1 statt von einem beliebigen Punkt A_1 der Achse u aus, so ergeben sich somit die folgenden beiden Darstellungsweisen der durch zentrierte Kugelflächen (132) vermittelten optischen Verwandtschaft.

4. Durch die Brennpunkte und Hauptpunkte:

$$F F_1 H \,\overline{\wedge}\, F_1 F_2 H_1 \text{ (141}_3\text{)}.$$

5. Durch die Brennpunkte und Knotenpunkte:

$$F F_1 K \,\overline{\wedge}\, F_1 F_2 K_1 \text{ (141}_4\text{)}.$$

147. **Beziehungen zwischen den Hauptpunkten und den Knotenpunkten.** Da eine Projektivität durch drei Punktpaare gegeben ist (14 Z), so sind mit den Brennpunkten, die zwei Punktpaare darstellen, und dem von den beiden Hauptpunkten gebildeten dritten Punktpaar $H H_1$ auch die Knotenpunkte $K K_1$ gegeben. Diesen Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und den Knotenpunkten finden wir durch die lateral-angulare Involution.

1. Weil zu F der angulare Punkt H und der laterale Punkt K und folglich (137₁) zu F_1 der angulare Punkt H_1 und der laterale Punkt K_1 ist, so ergibt sich aus der lateral-angularen Involution (138₁) $A\,B_1\,.\,A_1\,B\,.\,L\,T\,.\,M\,S$, wenn wir A mit F und B mit F_1 zusammenfallen lassen:

$$F\,F_2\,.\,F_1\,F_1\,.\,K\,H_1\,.\,K_1\,H.$$

Da in dieser Involution der uneigentliche Punkt F_1 sich selbst homolog, also ein Ordnungspunkt (122₂) ist, so haben wir (126₆)

$$2.\quad \frac{F\,H}{F_2\,K_1} = -\,1.$$

Die Strecke $F\,H$, der Abstand zwischen dem ersten Brennpunkt und dem ersten Hauptpunkt, heißt in der Optik die *erste Brennweite.* Bezeichnen wir sie durch f, so ist $F\,H = f = -\,F_2\,K_1$. —

$$3.\quad \frac{F_2\,H_1}{F\,K} = -\,1.$$

Die Strecke $F_2\,H_1$, der Abstand zwischen dem zweiten Brennpunkt und dem zweiten Hauptpunkt, heißt in der Optik die *zweite Brennweite.* Bezeichnen wir sie durch f_1, so ist $F_2\,H_1 = f_1 = -\,F\,K$. —

$$4.\quad H\,K = H_1\,K_1 \ (126_6).$$

148. **Folgerungen.** Aus $F\,A\,.\,F_2\,A_1 = F\,H\,.\,F_2\,H_1$ (123) ergibt sich

$$1.\quad F\,A\,.\,F_2\,A_1 = f\,.\,f_1. -$$

Da zu F der angulare Punkt H und der laterale Punkt K ist, so ist (139₁)

2. $(A_1\,A\,L\,S) = (F_1\,F\,K\,H) = -f : f_1$ (147₂). —

Weil zu F der angulare Punkt H ist, so ergibt sich aus der lateral-angularen Gleichung (139₂) $\frac{LA_1}{LA} \cdot \frac{TB_1}{TB} = \frac{A_1 B_1}{A B}$, wenn wir F für B und H für T setzen, $\frac{L A_1}{L A} \cdot \frac{H F_1}{H F} = \frac{A_1 F_1}{A F}$, folglich

3. $$\frac{L A_1}{L A} = \frac{f}{F A} = \frac{F_2 A_1}{f_1} \quad (148_1) \; . —$$

In ähnlicher Weise ergibt sich

4. $$\frac{S A_1}{S A} = - \frac{f_1}{F A} = - \frac{F_2 A_1}{f} \quad (148_1) \; .$$

149. **Laterales Verhältnis der Hauptpunkte und Knotenpunkte.** Ist A ein beliebiger Punkt und L sein lateraler, so liegen zwei homologe Punkte A und A_1 von $U A$ und $U A_1$ mit L in einer Gerade (133₂). Berücksichtigen wir von jetzt an noch, daß U ein uneigentlicher Punkt ist (132), so ist

$$A_1\,\mathsf{A}_1 : A\,\mathsf{A} = L\,A_1 : L\,A.$$

Nennen wir die Strecke $A\,\mathsf{A}$ das Objekt und $A_1\,\mathsf{A}_1$ sein Bild und das Verhältnis $A_1\,\mathsf{A}_1 : A\,\mathsf{A}$ die *objektive Vergrösserung,* so haben wir

1. Die objektive Vergrößerung ist gleich dem lateralen Verhältnis. —

Für den Hauptpunkt H ist F_1 der laterale Punkt (146₂), das laterale Verhältnis also $+ 1$ (121₂):

2. Zu einem Objekt im ersten Hauptpunkt gehört ein gleich großes, aufrechtes Bild im zweiten Hauptpunkt. —

Weil zu K der angulare Punkt F_1 ist (146₃), so sind die homologen Strahlen von K und K_1 durch die uneigentliche Gerade $U\,F_1$ perspektiv aufeinander bezogen (133₄):

3. Die Strahlen des ersten Knotenpunktes und die ihnen homologen des zweiten sind parallel.

150. **Konstruktion des Bildes.** Aus den in den Nrn. 144 und 145 gegebenen besonderen Konstruktionen ergeben sich die folgenden für den Fall, daß die Punkte $A A_1 A_2$ mit $F F_1 F_2$ und $B B_1$ mit $H H_1$ oder $K K_1$ zusammenfallen.

1. *Erste Konstruktion.* Gegeben: $F F_1 H \barwedge F_1 F_2 H_1$ (144).
Für das erste Punktpaar $F F_1$: $F \barwedge U H \doublebarwedge F_1$;
Für das zweite Punktpaar $F_1 F_2$: $F_1 \doublebarwedge U H_1 \doublebarwedge F_2$.

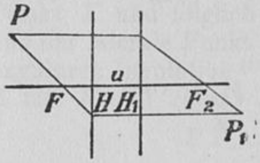


Fig. 16.

Zu den Strahlen PF und PF_1 zeichnen wir (140₃) die homologen (Fig. 16).

2. *Zweite Konstruktion.* Gegeben $F F_1 K \barwedge F_1 F_2 K_1$ (145).
Für das Punktpaar $F_1 F_2$: $F_1 \doublebarwedge U F \doublebarwedge K \barwedge U F_1 \doublebarwedge F_2$;
Für das Punktpaar $K K_1$: $K \doublebarwedge U F_1 \doublebarwedge K_1$.

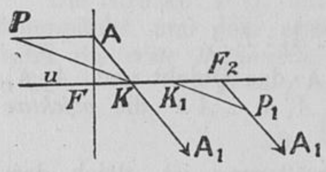


Fig. 17.

Zu den Strahlen PF_1 und PK zeichnen wir die homologen. (Fig. 17) (vergl. 149₃).

3. *Dritte Konstruktion.* Gegeben: $F_1 H K \barwedge F_2 H_1 K_1$.
Weil aus den Hauptpunkten die Knotenpunkte bequem zu finden sind (147), so ist es vorteilhaft, aus den beiden vorhergehenden Konstruktionen noch die folgende zu bilden: Man zeichnet nach der ersten den zu PF_1 und nach der zweiten den zu PK homologen Strahl (Fig. 18).

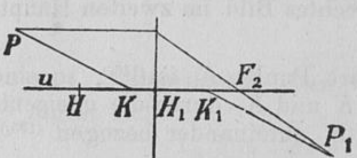


Fig. 18.

Zusatz. Die dritte Konstruktion kann man noch dazu benutzen, die Bewegung von Objekt und Bild anschaulich darzustellen. Man denkt sich die zweite Punktreihe von u um die Strecke $H_1 H$ verschoben, sodaß H_1 in H und folglich (147,) K_1 in K fällt. Hat man für diese Lage die Bilder P_1' der Punkte P gezeichnet (Fig. 19), so verschiebt man zum Schluß den Bildraum wieder um die Strecke $H H_1$, um die gesuchten Bilder P_1 zu erhalten (vergl. 168 Z). (Diese Konstruktion ist im Grunde mit der in Nr. 131 gegebenen identisch).

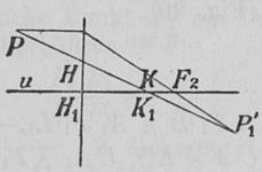


Fig. 19.

---

§ 10. Teleskopische Verwandtschaft.

151. **Konstruktion des Bildes.** Fällt der eine, und folglich auch der zweite, Brennpunkt in den uneigentlichen Punkt F_1, so wird aus der allgemeinen Projektivität eine teleskopische (125) und aus der allgemeinen optischen Verwandtschaft eine teleskopische. Da ein Ordnungspunkt mit seinem lateralen (134 Z) und seinem angularen (135 Z) Punkt zusammenfällt, so liegen bei einer teleskopischen Verwandtschaft auch die Hauptpunkte und Knotenpunkte in F_1. Die drei in den Nrn. 144 und 145 zur Darstellung benutzten Punktpaare fallen daher bei der teleskopischen Verwandtschaft in *einen* Punkt : F_1, sodaß die dort gegebenen Konstruktionen unbenutzbar werden. Wir müssen daher auf die allgemeinen Konstruktionen in den Nrn. 142 und 143 zurückgehen und in diesen die Punkte B und B_1 mit F_1 zusammenfallen lassen.

1. *Erste Konstruktion.* Gegeben: $A\, F_1\, S \overline{\wedge} A_1\, F_1\, S_1$.— Für das Punktpaar $A\, A_1$: $A \overline{\overline{\wedge}}\, U\, S \overline{\overline{\wedge}} A_1$;
Für das Punktpaar $F_1\, F_1$: $F_1 \overline{\overline{\wedge}}\, U\, S \overline{\overline{\wedge}} A_1 \overline{\overline{\wedge}}\, U\, S_1 \overline{\overline{\wedge}} F_1$.

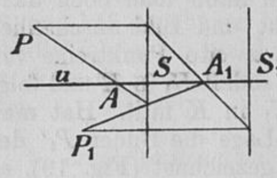


Fig. 20.

Die den Strahlen $P A$ und $P F_1$ homologen liefern [140$_3$] das Bild P_1 (Fig. 20).

2. *Zweite Konstruktion.* Gegeben: $A\, F_1\, L \;\overline{\wedge}\; A_1\, F_1\, L_1$.— Für das Punktpaar $F_1 F_1$: $F_1 \;\overline{\wedge}\; U A \;\overline{\wedge}\; L \;\overline{\wedge}\; U A_1 \;\overline{\wedge}\; F_1$; Für das Punktpaar $L L_1$: $L \;\overline{\wedge}\; U A_1 \;\overline{\wedge}\; L_1$.

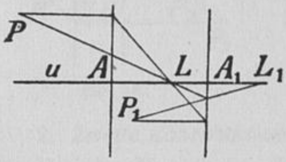


Fig. 21.

Die den Strahlen $P F_1$ und $P L$ homologen liefern [140$_3$] das Bild P_1 (Fig. 21).

Zusatz. Da bei der teleskopischen Verwandtschaft die uneigentliche Gerade $U F_1$ mit ihrer homologen zusammenfällt, so hat ein uneigentliches Objekt ein uneigentliches Bild. Um zu einem uneigentlichen Punkt das Bild zn zeichnen, hat man daher nur ein Punktpaar und seinen angularen nötig (Fig. 22).

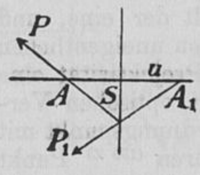


Fig. 22.

152. **Laterales und angulares Verhältnis.** Für die teleskopische Projektivität ist das Verhältnis zweier eigentlichen homologen Strecken konstant [125]. Bezeichnen wir daher den dem Punktpaar $C\, C_1$ zugeordneten lateralen Punkt durch N, so wird aus unserer lateral-angularen Gleichung [139$_2$]

$$\frac{L A_1}{L A} \cdot \frac{T B_1}{T B} = \frac{A_1 B_1}{A B} = \frac{C_1 B_1}{C B} = \frac{N C_1}{N C} \cdot \frac{T B_1}{T B};$$

$$\text{folglich } \frac{L A_1}{L A} = \frac{N C_1}{N C}$$

1. Lehrsatz: In einer teleskopischen Verwandtschaft ist das laterale (und das angulare) Verhältnis der eigentlichen Punkte konstant. —

Weil bei der teleskopischen Projektivität der uneigentliche Punkt F_1 ein Ordnungspunkt ist, so ist sein laterales Verhältnis (139 Z)

$$\frac{F_1 F_1}{F_1 F_1} = \frac{F_1 B_1}{F_1 B} : \frac{T_1 B_1}{T B} = 1 : \frac{T B_1}{T B} \overset{(121_4)}{=} \frac{T B}{T B_1}$$

2. Lehrsatz: In einer teleskopischen Verwandtschaft ist das laterale (angulare) Verhältnis des uneigentlichen Punktes gleich dem reziproken Wert des angularen (lateralen) Verhältnisses eines eigentlichen Punktes.

---

§ 11. Zusammensetzung zweier optischen Systeme.

153. **Darstellung zweier optischen Systeme.** Entspricht in einer optischen Verwandtschaft I dem Punkt A der Punkt A_1, und in einer zweiten optischen Verwandtschaft II, die mit der ersten die Achse u gemeinsam hat, dem Punkt A_1 der Punkt A_2, so können wir eine neue Verwandtschaft III herstellen, in der dem Punkt A der Punkt A_2 zugewiesen ist. Diese neue optische Verwandtschaft ist wieder eine kollineare, weil den Punkten A einer Gerade p die Punkte A_2 einer Gerade p_2 zugewiesen und die Punktreihen p und p_2 projektiv aufeinander bezogen sind (132). Wir dürfen daher die für die kollineare Verwandtschaft abgeleiteten allgemeinen Sätze auf die optische Verwandtschaft zwischen A und A_2 anwenden.

Brennpunkt und Hauptpunkt des ersten Systems bezeichnen wir durch $F F_2\, H' H_1'$; Brennpunkt und Hauptpunkt des zweiten Systems durch $G G_2\, H'' H_1''$, sodaß die beiden Systeme dargestellt werden (146₄) durch

$$\mathrm{I}: F F_1 H' \,\overline{\wedge}\, F_1 F_2 H_1'$$
$$\mathrm{II}: G F_1 H'' \,\overline{\wedge}\, F_1 G_2 H_1''$$

154. **Angulares Verhältnis des Gesamtsystems.** Zu A gehöre in I der angulare Punkt S', zu dem dem Punkt A in I homologen Punkt A_1 gehöre in II der angulare Punkt S''. Wir finden dann den zum Punktpaar AA_2 in III angularen Punkt S durch folgende Zeichnung (Fig. 23): Zu einem beliebigen Strahl von A, der US' in A' schneidet, ist in I homolog (133_4) die Verbindungslinie $A_1\,\mathsf{A}'$. Schneidet diese den Strahl US'' in A'', so ist dem Strahl $A_1\mathsf{A}'$ in II die Verbindungslinie $A_2\mathsf{A}''$ homolog, sodaß dem ursprünglichen Strahl $A\mathsf{A}'$ in III der Strahl $A_2\,\mathsf{A}''$ homolog ist.

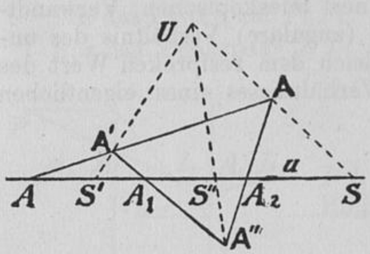


Fig. 23.

Verbinden wir den Schnittpunkt A dieser Strahlen mit U, so ist der Punkt S, in dem der Strahl $U\mathsf{A}$ die Achse u schneidet, der dem Punktpaar AA_2 in III angulare Punkt.

Aus dem Viereck $U\mathsf{A}\,\mathsf{A}'\,\mathsf{A}''$ (Fig. 23) ergibt sich (126_5) die Involution: $A\,S''\,.\,A_1\,S\,.\,A_2\,S'$; und aus dieser (126_3) $(A_1\,A\,S'\,S'') = (S\,S''\,A_2\,A)$ oder

$$\frac{S'A_1}{S'A} : \frac{S''A_1}{S''A_1} = \frac{A_2\,S}{A_2\,S'} : \frac{A\,S}{A\,S''}\text{; folglich}$$

$$\frac{S'A_1}{S'A} \cdot \frac{S''A_2}{S''A_1} = \frac{S\,A_2}{S\,A}$$

Lehrsatz: Das Produkt aus den angularen Verhältnissen der Einzelsysteme ist gleich dem angularen Verhältnis des Gesamtsystems.

155. **Laterales Verhältnis des Gesamtsystems.** Zu A gehöre in I der laterale Punkt L'; zu dem dem Punkt A in I homologen Punkt A_1 gehöre in II der laterale Punkt L''. Wir finden dann den zum Punktpaar

$A\,A_2$ in III homologen Punkt L durch folgende Zeichnung (Fig. 24): Zu einem beliebigen Punkte A von $U\,A$ finden wir durch L' den ihm in I homologen Punkt A_1 von $U\,A_1$ $^{(133_2)}$, zu A_1 durch L'' den ihm in II homologen A_2 von $U\,A_2$. Die Verbindungslinie $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_2$ schneidet u in dem Punkte L, der in III dem Punktpaar $A\,A_2$ lateral zugeordnet ist.

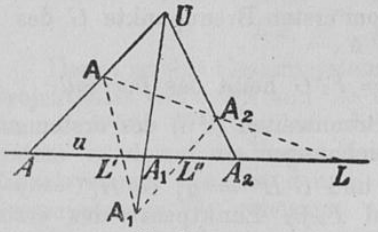


Fig. 24.

Aus dem Viereck $U\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2$ ergibt sich $^{(126_5)}$ die Involution: $A\,L''\,.\,A_1\,L\,.\,A_2\,L'$ und daraus

$$\frac{L'A_1}{L'A}\cdot\frac{L''A_2}{L''A_1}=\frac{L\,A_2}{L\,A}.$$

Lehrsatz: Das Produkt aus den lateralen Verhältnissen der Einzelsysteme ist gleich dem lateralen Verhältnis des Gesamtsystems.

156. **Die Projektivität des Gesamtsystems.** Dem Brennpunkt F entspricht im ersten System der uneigentliche Punkt F_1, diesem im zweiten System G_2:

1. F und G_2 sind homologe Punkte des Gesamtsystems.

Bezeichnen wir den Punkt, dem in I der Punkt G homolog ist, durch B, so ist B, weil dem Punkt G im zweiten System der Punkt F_1 homolog ist, der erste Brennpunkt des resultierenden Systems. — Ferner ergibt sich, daß der Punkt B_2, der dem Punkt F_2 in II homolog ist, der zweite Brennpunkt des resultierenden Systems ist.

In Zeichen:

$$2.\quad \begin{array}{rl} \text{I:} & F\,F_1\,H'\,\mathsf{B} \barwedge F_1\,F_2\,H_1'\,G \\ \text{II:} & G\,F_1\,H''\,F_2 \barwedge F_1\,G_2\,H_1''\,\mathsf{B}_2 \\ \hline \text{III:} & \mathsf{B}\,F_1\,F \barwedge F_1\,\mathsf{B}_2\,G_2 \end{array}$$

Damit ist uns die Projektivität der Achse u für das resultierende System gegeben $^{(14\,Z)}$.

157. **Intervall.** Die Lage der Systeme I und II zu einander kennen wir, wenn wir den Abstand irgend zweier Punkte kennen. Wir wählen den Abstand des zweiten Brennpunktes F_2 des I vom ersten Brennpunkte G des II und bezeichnen ihn durch Δ.

1. Erklärung: $\Delta = F_2\,G$ heißt das *Intervall.*

Führen wir für die Brennweiten $^{(147_5)}$ des ersten und zweiten Systems die Bezeichnungen ein

$$F\,H' = f;\ F_2\,H_1' = f_1 \text{ und } G\,H'' = g;\ G_2\,H_1'' = g_1,$$

so ist $^{(148_1)}$, weil $\mathsf{B}\,G$ und $F_2\,\mathsf{B}_2$ Punktpaare des ersten und zweiten Systems sind,

$$F\,\mathsf{B}\,.\,F_2\,G = f f_1 \text{ und } G\,F_2\,.\,G_2\,\mathsf{B}_2 = g\,g_1;\ \text{folglich}$$

2. $$F\,\mathsf{B} = \frac{f f_1}{\Delta};\quad G_2\,\mathsf{B}_2 = -\frac{g\,g_1}{\Delta}.$$

158. **Das Punktpaar** FG_2. Für das Gesamtsystem haben wir die Projektivität $^{(156)}$ und die Lage der Brennpunkte $^{(157_2)}$ bereits gefunden. Es bleibt noch übrig $^{(141)}$, zu irgend einem Punktpaar den angularen Punkt anzugeben. Wir wählen das Punktpaar FG_2 $^{(156_1)}$ und bezeichnen den gesuchten angularen Punkt durch S. Da zu F im System I der angulare Punkt H und zu F_1 in II der angulare Punkt H_1'' $^{(146_2)}$ ist, so ergibt sich aus der Gleichung von Nr. 154

$$\frac{HF_1}{HF}\cdot\frac{H_1''\,G_2}{H_1''\,F_1} = \frac{SG_2}{SF}$$

und hieraus $^{(121_5)}$, wenn wir die in Nr. 157 eingeführten Bezeichnungen benutzen,

1. Das angulare Verhältnis des Punktpaares $F\,G_2$ im Gesamtsystem ist

$$\frac{S\,G_2}{SF} = \frac{g_1}{f}\cdot -$$

Den zum Punktpaar FG_2 in III gehörigen lateralen Punkt L finden wir, da zu F in I der laterale Punkt der Knotenpunkt K' und zu F_1 in II der laterale Punkt der Knotenpunkt K_1'' ist $^{(146_3)}$, aus der Gleichung von Nr. 155:

$$\frac{K'\,F_1}{K'\,F}\cdot\frac{K_1''\,G_2}{K_1''\,F_1} = \frac{L\,G_2}{L\,F}:$$

2. Das laterale Verhältnis des Punktpaares $F G_2$ im Gesamtsystem ist

$$\frac{L\,G_2}{LF} = \frac{g}{f_1}\,.$$

Damit ist das Gesamtsystem bestimmt (141), da wir die Projektivität von u (156) und zu einem Punkt den angularen kennen (158₁). Wir wollen aber noch, um das Gesamtsystem in derselben Form darstellen zu können wie die Einzelsysteme, die zu den Brennpunkten B und B_2 des Gesamtsystems (156₂) gehörigen angularen Punkte, d. h. (146₂) die Hauptpunkte H und H_1 des Gesamtsystems bestimmen:

159. **Brennweite des Gesamtsystems.** Die gesuchten Brennweiten $\mathsf{B}\,\mathsf{H} = \varphi$ und $\mathsf{B}_2\,\mathsf{H}_1 = \varphi_1$ ergeben sich aus der Gleichung (155)

$$\frac{L'\,A_1}{L'\,A} \cdot \frac{L''\,A_2}{L''\,A_1} = \frac{L\,A_2}{L\,A}\,,$$

wenn wir in ihr die lateralen Verhältnisse durch die in Nr. 148₃ gefundenen Werte ersetzen:

$$\frac{f}{FA} \cdot \frac{g}{GA_1} = \frac{\varphi}{\mathsf{B}A} \quad \text{oder} \quad FA \cdot \frac{G\,A_1}{\mathsf{B}A} = \frac{fg}{\varphi}\,.$$

$\mathsf{B}\,G$ ist ein Punktpaar des ersten Systems (156₂), folglich $GA_1 : \mathsf{B}A$ das Verhältnis zweier homologen Strecken; in diesem können wir die inneren Punkte durch die Fluchtpunkte F_2 und F ersetzen (123 Z): $G\,A_1 : \mathsf{B}\,A = G\,F_2 : FA$, folglich (157)

$$1. \qquad \mathsf{B}\,\mathsf{H} = \varphi = -\frac{fg}{\Delta}\,. \text{ —}$$

Setzen wir in die eben benutzte Gleichung (155) den zweiten der in Nr. 148₃ für das laterale Verhältnis gefundenen Werte ein, so erhalten wir

$$2. \qquad \mathsf{B}_2\,\mathsf{H}_1 = \varphi_1 = \frac{f_1\,g_1}{\Delta}\,.$$

160. **Berechnung des Gesamtsystems.** Ein optisches System ist gegeben (146₄), wenn die Lage der beiden Brennpunkte F und F_2 und die beiden Brennweiten (147₁) f und

f_1 bekannt sind; denn aus den Abständen f und f_1 ergibt sich die Lage der Hauptpunkte H' und H_1'. Ist ein zweites optisches System durch die Brennpunkte G und G_2 und die Brennweiten g und g_1 und seine Lage zum ersten (157₁) durch das Intervall Δ gegeben, so kommt die Aufgabe, das aus diesen beiden Einzelsystemen resultierende Gesamtsystem zu finden, darauf hinaus, die Lage der beiden Brennpunkte B und B_2 und die beiden Brennweiten φ und φ_1 zu berechnen:

Aus $F F_2$ $f f_1$; $G G_2$ $g g_1$; Δ sind $\mathsf{B}\,\mathsf{B}_2$ $\varphi\,\varphi_1$ zu berechnen.

Diese Aufgabe ist gelöst durch die Formeln 157_2 und 159. — Diese Formeln nehmen die Brennpunkte als Ausgangspunkte; für die Anwendungen ist es vorteilhafter, die Hauptpunkte der drei Systeme der Rechnung zugrunde zu legen:

161. **Umformung.** Bezeichnen wir den Abstand zwischen dem zweiten Hauptpunkt H_1' des ersten Systems und dem ersten Hauptpunkt H'' des zweiten Systems durch δ, so heißt unsere Aufgabe (160) also jetzt:

Aus $H' H_1'$ $f f_1$; $H'' H_1''$ $g g_1$; δ sind $\mathsf{H}\,\mathsf{H}_1$ $\varphi\,\varphi_1$ zu berechnen.

$$\Delta = F_2 G^{(157)} = F_2 H_1' + H_1' H'' + H'' G^{(121_1)};$$

$$\Delta = f_1 + \delta - g^{(157)} . —$$

$$H' \mathsf{H} = H' F + F \mathsf{B} + \mathsf{B}\,\mathsf{H}^{(121_1)} = - f^{(157)} + f f_1 : \Delta^{(157_2)}$$
$$- f g : \Delta^{(159_1)} = - f(\Delta - f_1 + g) : \Delta = - f \delta : \Delta^{(161)};$$

ebenso ergibt sich $H_1'' \mathsf{H}_1 = - g_1 \delta : \Delta$.

Wir stellen die fünf Gleichungen, die zur Berechnung des Gesamtsystems dienen, noch einmal zusammen:

1. $\delta = H_1' H''$; $\Delta = f_1 + \delta - g$

2. $H' \mathsf{H} = - \dfrac{f \delta}{\Delta}$; $H_1'' \mathsf{H}_1 = - \dfrac{g_1 \delta}{\Delta}$

3. $\mathsf{B}\,\mathsf{H} = \varphi = - \dfrac{f g}{\Delta}$; $\mathsf{B}_2\,\mathsf{H}_1 = \varphi_1 = \dfrac{f_1 g_1}{\Delta}$ (159)

§ 12. Satz von Helmholtz.

162. **Satz von Helmholtz.** Der Satz von Lagrange (139₁) sagt aus, daß das Verhältnis aus dem lateralen und dem angularen Verhältnis für die kollineare Verwandtschaft konstant ist. Den Wert dieser Konstante, der für die perspektiv-kollineare Verwandtschaft $c_1 : c$ ist (127), hat für die allgemeine optische Verwandtschaft Helmholtz angegeben. Wir finden ihn, indem wir auf die Ableitung der durch mehrere zentrierte Flächen vermittelten optischen Verwandtschaft aus der durch *eine* Kugelfläche bestimmten Verwandtschaft zurückgehen (132).

Die erste brechende Fläche, welche durch den Kugelmittelpunkt C und den Scheitel M bestimmt ist, trenne die Mittel mit den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c und c_1; die zweite, die bestimmt ist durch C_1 und M_1, die Mittel mit den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 usw. Der Satz von Lagrange (127) ergibt dann

$$(A_1\, A\, C\, M) = c_1 : c$$
$$(A_2\, A_1\, C_1\, M_1) = c_2 : c_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(A_n\, A_{n-1}\, C_{n-1}\, M_{n-1}) = c_m : c_{m-1}\,.$$

Bezeichnen wir in dem resultierenden System, in dem dem Objekt A das Bild A_n entspricht, den dem Punktpaar $A\,A_n$ zugeordneten lateralen Punkt durch L, den angularen durch S, so ergibt sich durch Multiplikation der vorstehenden Gleichungen (154 und 155)

$$(A_n\, A\, L\, S) = c_n : c.$$

Satz von Helmholtz: Für die allgemeine optische Verwandtschaft hat das Lagrangesche Doppelverhältnis, das Verhältnis aus dem lateralen und dem angularen Verhältnis, den Wert $c_n : c$.

Zusatz. Durch dieselben Betrachtungen, durch die wir eben aus der Lagrangeschen Gleichung die Helmholtzsche abgeleitet haben, ergibt sich aus der Gleichung (127 Z)

$$\frac{C\,A_1}{C\,A} = \frac{\sin u}{\sin u_1} \cdot \frac{c_1}{c} \quad \text{das}$$

Sinusgesetz: $$\frac{L\,A_n}{L\,A} = \frac{\sin u}{\sin u_n} \cdot \frac{c_n}{c}\,.$$

163. **Linsensysteme.** Der Wert $c_n : c$ des Lagrangeschen Doppelverhältnisses ist nur abhängig vom ersten und letzten Mittel. Ist daher das letzte Mittel dasselbe wie das erste, *und* wird es in demselben Sinn durchlaufen wie das erste, sodaß $c_n = +c$ ist, so ist, welches auch die zwischen ihnen liegenden Mittel sein mögen, der Wert des Doppelverhältnisses gleich 1. Tatsächlich ist für fast alle optischen Systeme das erste und das letzte Mittel Luft; für solche optischen Systeme wollen wir, um uns kurz ausdrücken zu können, ein neues Wort einführen durch die

1. Erklärung: Ein optisches System, für welches die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im ersten und letzten Mittel in Größe *und* Sinn übereinstimmen, nennen wir ein Linsensystem. —

2. Lehrsatz: *Für ein Linsensystem fallen die angularen Punkte mit den lateralen zusammen* (121₂).

164. **Allgemeines Linsensystem.** Aus der lateral-angularen Involution $A\,B_1 \,.\, A_1\,B \,.\, L\,T$ (138₁) wird, weil der angulare Punkt T in den lateralen M fällt (163₂): $A\,B_1 \,.\, A_1\,B \,.\, L\,M$; durch die beiden Punktpaare $A\,A_1$ und $B\,B_1$ und den lateralen Punkt L ist daher auch der laterale Punkt M gegeben (126₄); folglich (141 Z)

1. Ein Linsensystem ist durch zwei Punktpaare und einen lateralen Punkt gegeben. —

Lassen wir B mit A_1 zusammenfallen (und setzen A_2 für B_1) so wird, weil zu A_1 der laterale Punkt L_1 ist (136₁), die lateral-angulare Involution

$$A\,A_2 \,.\, A_1\,A_1 \,.\, L\,L_1 \,.$$

Aus $A\,A_1\,A_2\,L$ läßt sich daher L_1 finden (126₄):

2. Zur Darstellung eines Linsensystems genügen 4 Punkte. —

Lassen wir (164₂) A mit dem Brennpunkt F zusammenfallen, so wird, weil zu F der angulare (146₂) und folglich (163₂) auch der laterale Punkt H ist, aus der lateral-angularen Involution: $F\,F_2 \,.\, F_1\,F_1 \,.\, H\,H_1$; daher

3. Ein Linsensystem ist durch die beiden Brennpunkte und einen Hauptpunkt gegeben. —

Weil die letzte Involution eine teleskopische ist, so ergibt sich (126₆):

$$4.\ \frac{F_2 H_1}{F H} = -1 \text{ oder }^{(147_2)}\ f_1 = -f:$$

5. Die Hauptpunkte sind Potenzpunkte (124) der Achsenprojektivität. —

$$\text{Aus } (A\,H\,F\,F_1) = (A_1\,H_1\,F_1\,F_2)^{(121_3)} \text{ folgt}$$
$$F A \,.\, F_2 A_1 = -f^2$$

6. Für ein Linsensystem ist die Potenz (123) der Achsenprojektivität stets negativ.—

Weil $F A$ und $F_2 A_1$ also stets entgegengesetzten Sinn haben, ergibt sich

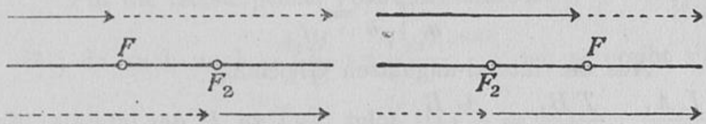


Fig. 25.

7. Objekt und Bild bewegen sich stets in demselben Sinn (Fig. 25).—

Weil die zweite Brennweite f_1 stets durch die erste f gegeben ist (164₄), so sind (nicht vier, sondern) nur zwei Linsensysteme möglich: die Brennweite f kann entweder positiv oder negativ sein. Die Linsensysteme der ersten Art heißen kollektiv, die der zweiten dispansiv:

8. Es sind nur zwei Linsensysteme möglich: das *kollektive* und das *dispansive*.

Verschieben wir wieder den Bildraum um die Strecke $H_1 H$ (150 Z), so lassen sich (vergl. 168₃) die beiden möglichen Linsensysteme durch sehr einfache Zeichnungen anschaulich darstellen (Fig. 26):

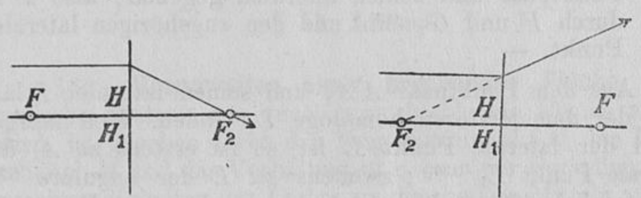


Fig. 26.

Zusatz. *Objektweite und Bildweite.*

1. Erklärung. Der Abstand $HA = a$ zwischen dem ersten Hauptpunkt und dem Objekt heißt Objektweite; der Abstand $H_1 A_1 = b$ zwischen dem zweiten Hauptpunkt und dem Bild heißt Bildweite.—

Aus $(A\,F\,F_1\,H) = (A_1\,F_1\,F_2\,H_1)$ (121₃) folgt (121₅)

$$\frac{HF}{HA} = \frac{F_2 A_1}{H_1 A_1} = \frac{F_2 H_1}{H_1 A_1} + 1$$ (121₁); folglich (164₄)

2. $$-\frac{1}{HA} + \frac{1}{H_1 A_1} = \frac{1}{FH}$$ oder

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. —$$

Aus der lateral-angularen Gleichung

$$\frac{LA_1}{LA} \cdot \frac{TB_1}{TB} = \frac{A_1 B_1}{AB}$$ folgt, weil zu H der laterale (146₄)

und folglich (163₂) auch der angulare Punkt F_1 ist,

$$\frac{LA_1}{LA} = \frac{H_1 A_1}{H\,A}$$

3. Lehrsatz: Für ein Linsensystem ist das laterale Verhältnis gleich dem Verhältnis aus Bildweite und Objektweite.

165. **Teleskopisches Linsensystem.** Beim teleskopischen System bildet der uneigentliche Punkt F_1 als Ordnungspunkt (151) ein Punktpaar; folglich (164₁)

1. Ein teleskopisches Linsensystem ist durch ein Punktpaar und seinen lateralen gegeben; also z. B. durch F und G_2 (156₁) und den zugehörigen lateralen Punkt. —

Aus dem Punktpaar $A\,A_1$ und seinem lateralen L läßt sich der dem letzteren homologe L_1 finden. Weil nämlich zu A der laterale Punkt L ist, so ist erstens zu A_1 der laterale Punkt L_1 (136₁); zweitens zu L der angulare (138₃) und folglich (163₂) auch der laterale Punkt A_1. Ferner ist zu dem Ordnungspunkt F_1 der laterale Punkt F_1 (134 Z). Da nun die Punkte $A\,A_1\,L\,F_1$ und ihre lateralen $L\,L_1\,A_1\,F_1$ projektiv aufeinander bezogen sind (134), so ergibt sich aus

$$(A\,A_1\,L\,F_1) = (L\,L_1\,A_1\,F_1):$$

$$L\,A : L\,A_1 = A_1\,L : A_1\,L_1 \;{}^{(121_5)};\text{ daher}$$

2. $$L\,A \,.\, L_1\,A_1 = (L\,A_1)^2. \text{ —}$$

Aus der lateral-angularen Gleichung (139₂) folgt, weil jetzt T mit M zusammenfällt (163₂),

$$\frac{L\,A_1}{L\,A} \cdot \frac{M\,B_1}{M\,B} = \frac{A_1\,B_1}{A\,B}.$$

Für die teleskopische Verwandtschaft ist $\dfrac{L\,A_1}{L\,A} = \dfrac{M\,B_1}{M\,B}$ 152₁); da auch noch $\dfrac{A_1 B_1}{A\,B} = \dfrac{C_1 D_1}{C\,D}$ (125) ist, so ergibt sich

$$\frac{C_1\,D_1}{C\,D} = \left(\frac{L\,A_1}{L\,A}\right)^2:$$

3. Lehrsatz: Das Verhältnis zweier homologen Strecken eines teleskopischen Systems ist gleich dem Quadrat des lateralen Verhältnisses.

Zusatz. Das Verhältnis zweier homologen Strecken ist also stets positiv und daher bewegen sich, wie auch aus Nr. 164₇ folgt, Objekt und Bild stets in demselben Sinn.

---

§ 13. Linsen.

166. **Brennweiten einer brechenden Fläche.** Das optische System, das durch eine brechende Fläche erzeugt wird, ist gegeben durch den Kugelmittelpunkt C, den Kugelscheitel M und das Verhältnis $c : c_1 = n$ der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts in den beiden Mitteln, welche

durch die Kugelfläche getrennt werden. Weil für ein solches System zu allen Punkten der laterale C und der angulare M ist (133₅), so haben wir den

1. Lehrsatz: Für eine brechende Fläche fallen die beiden Knotenpunkte (146) in den Mittelpunkt C und die beiden Hauptpunkte in den Scheitel M.

Demnach sind die Brennweiten(147₁)

$$F M = f \text{ und } F_2 M = f_1 . —$$

2. Ihre Werte erhalten wir aus der Lagrangeschen Gleichung (127) $(A_1 \, A \, C \, M) = c_1 : c = 1 : n$, indem wir für das beliebige Punktpaar $A \, A_1$ einmal das Punktpaar $F \, F_1$ und dann $F_1 \, F_2$ setzen. Aus $(F_1 \, F \, C \, M) = 1 : n$ ergibt sich (121₅) $\frac{1}{n} = \frac{M F}{C F} = \frac{M F}{C M + M F}$ (121₁); folglich

$$f = F M = \frac{1}{n - 1} \, M \, C \, .$$

In derselben Weise ergibt sich durch Einsetzung von $F_1 \, F_2$ für $A \, A_1$ aus der Lagrangeschen Gleichung

$$f_1 = F_2 \, M = - \frac{n}{n - 1} \, M \, C . —$$

Mittelpunkt und Scheitel einer zweiten brechenden Fläche bezeichnen wir durch C_1 und M_1, ihre Brennpunkte durch G und G_2, ihre Brennweiten durch g und g_1. Trennt diese zweite Fläche die Mittel c_1 und c, sodaß für sie die Lagrangesche Gleichung lautet

$$(A_1 \, A \; C_1 \, M_1) = c : c_1 = n ,$$

so ergibt sich durch eine der vorigen entsprechende Rechnung:

$$g = G \, M_1 = - \frac{n}{n - 1} \, M_1 \, C_1 \, ;$$

$$g_1 = G_2 \, M_1 = \frac{1}{n - 1} \, M_1 \, C_1 \, .$$

Zusatz. Wiederholen wir die in Nr. 127 angestellten Betrachtungen, indem wir, statt des Brechungsgesetzes das Reflexionsgesetz zugrunde legen, so ergibt sich

$$\frac{C A_1}{C A} = \frac{E D}{E A} = -\frac{E A_1}{E A} = -\frac{M A_1}{M A} \text{ oder}$$

$$(A_1 A C M) = -1.$$

Diese Form der Lagrangeschen Gleichung zeigt, daß wir die Gesetze der Spiegelung erhalten, wenn wir in den für die Brechung abgeleiteten $c_1 = -c$ setzen. Dabei ist aber zu beachten, daß die für Linsensysteme $^{(163_1)}$ abgeleiteten Sätze (z. B. die Gleichung Nr. 164 Z_2) für die Spiegelung nicht gelten; denn die Bedingung $c_n = +c$ ist nicht erfüllt.

Wir ziehen es daher vor, die Gesetze der Spiegelung an einer Kugelfläche direkt abzuleiten. Auch hier fallen die beiden Knotenpunkte in den Mittelpunkt C und die beiden Hauptpunkte in den Scheitel M (vergl. 166_1). Aus $(A_1 A C M) = -1$ ergibt sich $(A_1 A C M) = 1 : -1 = -1$, d. h. dem Punkt A entspricht der Punkt A_1 zweifach, die Projektivität wird also zur Involution $^{(126_3)}$. Bei der Spiegelung gibt es daher nur einen Brennpunkt F. — Aus $(F_1 F C M) = (C M F_1 F)^{(121_6)} = -1$ ergibt sich $^{(121_4)}$ $F M : F C = -1$; folglich $^{(16\ Z)}$

1. Der Brennpunkt eines Kugelspiegels ist die Mitte von $M C$.

2. Brennweite $f = F M = -\frac{1}{2} M C$.

Die Spiegel mit positivem Krümmungshalbmesser $M C$, d. h. die Konvexspiegel, haben also eine negative Brennweite; die Konkavspiegel haben eine positive Brennweite.

Aus $(A F F_1 M) = (A_1 F_1 F M)^{(121_3)}$ folgt $^{(121_4)}$

$$\frac{M F}{M A} = \frac{F A_1}{M A_1} = \frac{F M}{M A_1} + 1 \quad ^{(121_1)} \text{; folglich}$$

$$3. \quad -\frac{1}{M A} - \frac{1}{M A_1} = \frac{1}{F M}. -$$

Erfolgt außer der ersten noch eine zweite Spiegelung, so ist $c_2 = -c_1 = +c$. Für diese, wie überhaupt für jede gradzahlige Anzahl von Spiegelungen an zentrierten Kugelflächen, gelten daher die für Linsensysteme abgeleiteten Sätze.

167. **Brennweiten einer Linse.** Eine Linse ist der Inbegriff zweier brechenden Kugelflächen, die drei Mittel, von denen das letzte gleich dem ersten ist, trennen. Das optische System einer solchen Linse zu berechnen, heißt also (161):

Aus $M f f_1$; $M_1 g g_1$; δ sind $\mathsf{H}\,\mathsf{H}_1\,\varphi$ (164,) zu berechnen.

Da die Hauptpunkte jetzt mit dem Kugelscheitel zusammenfallen (166,), so ist die Dicke der Linse $d = MM_1 = \delta$. Die zu benutzenden Formeln sind daher (161):

$$1.\quad \Delta = f_1 + d - g$$

$$M\mathsf{H} = -\frac{f\,d}{\Delta} \qquad M_1\,\mathsf{H}_1 = -\frac{g_1\,d}{\Delta}$$

$$\mathsf{B}\,\mathsf{H} = \varphi = -\frac{f\,g}{\Delta} = -\,\mathsf{B}_2\,\mathsf{H}_1 \text{ (164,)}.$$

Durch Einsetzung der für ff_1 und gg_1 gefundenen Werte (166) ergibt sich

$$2.\quad \Delta = -\frac{n}{n-1}(M\,C - M_1\,C_1) + d$$

$$M\mathsf{H} = -\frac{M\,C\,.\,d}{-\,n\,(M\,C - M_1\,C_1) + (n-1)\,d};$$

$$M_1\,\mathsf{H}_1 = -\frac{M_1\,C_1\,.\,d}{-\,n\,(M\,C - M_1\,C_1) + (n-1)\,d};$$

$$\mathsf{B}\,\mathsf{H} = \varphi = +\frac{n}{n-1}\cdot\frac{M\,C\,.\,M_1\,C_1}{-n(M\,C - M_1\,C_1) + (n-1)\,d}$$

$$= -\,\varphi_1 = -\,\mathsf{B}_2\,\mathsf{H}_1 \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\varphi} = (n-1)\left(\frac{1}{M\,C} - \frac{1}{M_1\,C_1} + \frac{(n-1)\,d}{n\,M\,C\,.\,M_1\,C_1}\right)$$

Zusatz. Es ist $C\,C_1 = C\,M + M\,M_1 + M_1\,C_1$ (121,) $= d - (M\,C - M_1\,C_1)$; ferner $\mathsf{H}\,\mathsf{H}_1 = \mathsf{H}\,M + M\,M_1 + M_1\,\mathsf{H}_1$. Durch Einsetzung der Werte erhält man

$$\mathsf{H}\,\mathsf{H}_1 = \frac{(n-1)\,d}{n - \dfrac{d}{C\,C_1}}$$

Da d stets positiv ist, so ergibt sich: Nur wenn $C\,C_1$ positiv und gleichzeitig kleiner als d ist, kann $\mathsf{H}\,\mathsf{H}_1$ größer als d sein. Ist dagegen $C\,C_1$ negativ oder ist $C\,C_1$, wenn es positiv ist, größer als d, so ist $\mathsf{H}\,\mathsf{H}_1$ positiv und kleiner als d. —

168. **Ideelle Linsen.** 1. Erklärung: Eine Linse heißt eine *ideelle*, wenn ihre Dicke $d = M\,M_1$ so klein ist, daß sie gleich 0 gesetzt werden darf. —

2. Für $d = 0$ gehen die Formeln [167₂] über in

$$M\,\mathsf{H} = 0 = M_1\,\mathsf{H}_1\,;\quad \frac{1}{\varphi} = (n-1)\left(\frac{1}{M\,C} - \frac{1}{M_1\,C_1}\right).$$

Lehrsatz: Für eine ideelle Linse fallen die beiden Scheitel mit den beiden Hauptpunkten zusammen in einen Punkt.

3. Die beiden möglichen ideellen Linsen werden daher durch die beiden Figuren zu Nr. 164_8 dargestellt. Die dort durch Verschiebung gewonnene einfache Konstruktion bedeutet also: Wir betrachten jede Linse zuerst als eine ideelle, führen für diese die Konstruktion von Objekt und Bild aus und erhalten hieraus die optische Verwandtschaft für die wirkliche Linse, indem wir den Bildraum um $H\,H_1$ verschieben.

Zusatz. Für ein optisches System, bei welchem das letzte Mittel nicht gleich dem ersten ist [(163₁)], haben wir die entsprechende einfache Konstruktion bereits in Nr. 150 Z gegeben.

169. **Die verschiedenen Linsenarten.** Aus den allgemeinen Linsenformeln [(167₂)] wollen wir jetzt die besondern für die verschiedenen Linsenarten ableiten. Dabei beschränken wir uns, um übersichtliche Ergebnisse zu gewinnen, bei den Bikonvex- und Bikonkavlinsen auf solche, bei denen die beiden brechenden Flächen Radien von gleicher Größe haben.

1. *Bikonvexlinse*: $M\,C = +r$; $M_1\,C_1 = -r$.

$$M\,\mathsf{H} = \frac{d}{2n - (n-1)\frac{d}{r}};\quad M_1\,\mathsf{H}_1 = -\frac{d}{2n - (n-1)\frac{d}{r}}$$

$$\frac{1}{\varphi} = (n-1)\left[\frac{2}{r} - \frac{(n-1)\,d}{n\,r^2}\right].$$

2. *Bikonkavlinse*: $MC = -r;\ M_1 C_1 = +r.$

$$M\mathsf{H} = \frac{d}{2n + (n-1)\frac{d}{r}};\ M_1\mathsf{H}_1 = -\frac{d}{2n + (n-1)\frac{d}{r}}$$

$$\frac{1}{\varphi} = -(n-1)\left[\frac{2}{r} + \frac{(n-1)\,d}{n\,r^2}\right].$$

3. *Plankonvexlinse*: $MC = \infty;\ M_1 C_1 = -r.$

$$M\mathsf{H} = \frac{d}{n};\quad M_1\mathsf{H}_1 = 0$$

$$\frac{1}{\varphi} = (n-1)\,\frac{1}{r}.$$

3a. *Konvexplanlinse*: $MC = +r;\ M_1 C_1 = \infty.$

$$M\mathsf{H} = 0;\quad M_1\mathsf{H}_1 = -\frac{d}{n}$$

$$\frac{1}{\varphi} = (n-1)\,\frac{1}{r}.$$

4. *Plankonkavlinse*: $MC = \infty;\quad M_1 C_1 = +r.$

$$M\mathsf{H} = \frac{d}{n};\quad M_1\mathsf{H}_1 = 0$$

$$\frac{1}{\varphi} = -(n-1)\,\frac{1}{r}.$$

4a. *Konkavplanlinse*: $MC = -r;\quad M_1 C_1 = \infty.$

$$M\mathsf{H} = 0;\ M_1\mathsf{H}_1 = -\frac{d}{n}$$

$$\frac{1}{\varphi} = -(n-1)\,\frac{1}{r}.$$

5. *Ergebnis*: Bei den Bikonkavlinsen liegen die Hauptpunkte immer im Innern der Linse;

bei den Bikonvexlinsen ebenfalls, solange ihre Dicke nicht außergewöhnlich groß ist.

Bei den Bikonvex- und Bikonkavlinsen sind, solange d gegenüber r klein ist, die Hauptpunkte von den zugehörigen Scheiteln um ungefähr $\frac{1}{3}\,d$ entfernt.

Bei den Planlinsen fällt der eine Hauptpunkt immer in den krummen Scheitel; der andere liegt immer im Innern der Linse und ist um ungefähr $\frac{2}{3}$ d von dem ebenen Scheitel entfernt.

170. **Berechnung eines Linsensystems.** Für ein Huyghenssches Okular $^{(174_1)}$ sind die folgenden fünf Größen gemessen worden:
Kollektivlinse: Brennweite $f=4{,}0$; Dicke $d=M'M_1'=0{,}19$;
Augenlinse: Brennweite $g=1{,}2$; Dicke $e=M''M_1''=0{,}14$;
der Abstand $M'M_1''=2{,}60$.—

Aus Nr. 169_{3a} ergibt sich, weil wir $n=\frac{3}{2}$ setzen dürfen,

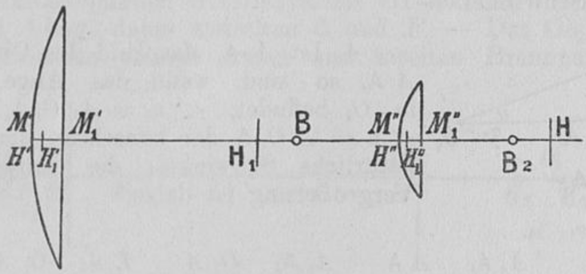


Fig. 27.

$M_1'H_1'=-\frac{2}{3}.0{,}19=-0{,}13; M_1''H_1''=-\frac{2}{3}.0{,}14=-0{,}09.$
$\delta=H_1'H''^{(161)}=H_1'M_1'+M_1'M'+M'M_1''+M_1''H''^{(121_1)}$
$=0{,}13-0{,}19+2{,}60-0{,}14=2{,}4.$—

Aus Nr. 161 ergibt sich

$\Delta=f_1+\delta-g=-4{,}0+2{,}4-1{,}2=-2{,}8;$
$H'\,\mathrm{H}=-f\delta:\Delta=4{,}0\,.\,2{,}4:2{,}8=3{,}4;$
$H_1''\,\mathrm{H}_1=-g_1\,\delta:\Delta=-1{,}2\,.\,2{,}4:2{,}8=-1{,}0;$
$\mathrm{B\,H}=-fg:\Delta=4{,}0\,.\,1{,}2:2{,}8=1{,}7.$

171. **Vergrösserung.** Wir unterscheiden zwischen *objektiver* Vergrößerung $^{(149_1)}$ und *subjektiver* Vergrößerung.

1. Objektive Vergrößerung. $\dfrac{A_1\,\mathrm{A}_1}{A\,\mathrm{A}}=\dfrac{LA_1}{LA}=\dfrac{H_1\,A_1}{H\ A}$ $^{(164\ \mathrm{Z}_3)}$

Von jedem Gegenstand, den wir betrachten, wird auf unserer Netzhaut ein reelles Bild entworfen. Die Größe dieses Bildes wird eine andre, wenn wir den Gegenstand nicht direkt, sondern indirekt durch ein optisches Instrument betrachten. Das Verhältnis des bei der indirekten Betrachtung erhaltenen Netzhautbildes, das wir das künstliche nennen wollen, zu dem bei der direkten Betrachtung erhaltenen, dem natürlichen, ist gleich dem Verhältnis der Sehwinkel bei der indirekten und direkten Betrachtung:

2. Erklärung: Subjektive Vergrößerung heißt das Verhältnis des künstlichen zum natürlichen Netzhautbilde.

3. Lehrsatz: Die subjektive Vergrößerung ist gleich dem Verhältnis des künstlichen zum natürlichen Sehwinkel. —

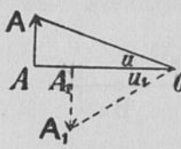


Fig. 28.

4. Ist $A_1\,\mathsf{A}_1$ das Bild des Objekts $A\,\mathsf{A}$, so sind, wenn das Auge sich in O_1 befindet, $\sphericalangle\, u_1 = A_1\,O_1\,\mathsf{A}_1$ und $\sphericalangle\, u = A\,O_1\,\mathsf{A}$ der künstliche und der natürliche Sehwinkel; die subjektive Vergrößerung ist daher

$$v = \frac{u_1}{u} = \frac{A_1\,\mathsf{A}_1}{O_1\,A_1} : \frac{A\,\mathsf{A}}{O_1\,A} = \frac{A_1\,\mathsf{A}_1}{A\,\mathsf{A}} \cdot \frac{O_1\,A}{O_1\,A_1} = \frac{L\,A_1}{L\,A} \cdot \frac{O_1\,A}{O_1 A_1} \quad (149_1)$$

Die subjektive Vergrößerung ist also gleich dem Produkt aus der objektiven und einem Faktor, der von der Lage O_1 des Auges abhängig ist.

Zusatz. Wir beschränken uns im folgenden auf das Mikroskop mit positivem Okular und das astronomische Fernrohr. Bei beiden befindet sich das Auge am Ort der Austrittspupille, die das Bild des Objektivs (der Eintrittspupille) ist. Unter O_1 ist daher der Achsenpunkt der Austrittspupille (des Augenkreises) zu verstehen.

172. **Vergrösserung des Mikroskops.** Das Mikroskop (in seiner einfachsten Form) besteht aus zwei positiven (171 Z) Linsen, dem Objektiv und dem Okular, und ist dadurch

charakterisiert, daß der Abstand $\delta = H_1' H''$ (161) im Vergleich zu den Brennweiten f und g der beiden Linsensysteme groß ist, sodaß das Intervall (die Tubuslänge)

$$\Delta = -f + \delta - g$$

positiv und gegenüber f und g groß ist. Es ist daher $F\mathsf{B} = -f^2 : \Delta$ (157₂) negativ und $G_2 \mathsf{B}_2 = g^2 : \Delta$ positiv. B liegt also in der Nähe von F (Fig. 30) und zwar links von F; B_2 in der Nähe von G_2 und zwar rechts von G_2.

Das vom Objektiv entworfene reelle Bild wird durch das Okular als Lupe betrachtet. Dies reelle Bild muß sich daher zwischen dem Okular H'' und seinem ersten Brennpunkt G befinden. Das Okular ist, weil es weit vom Objektiv H' entfernt ist, im Objektivsystem I einem Punkt nahe bei F, und zwar einem links von F liegenden, homolog; der Punkt G ist in I dem ersten Brennpunkt B des mikroskopischen Gesamtsystems III homolog (156₂). Das Objekt A liegt daher zwischen B und F. — Das Objektiv liegt zwischen seinem ersten und zweiten Brennpunkte.

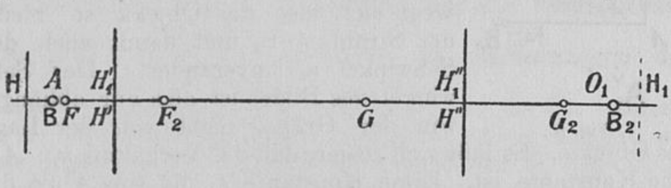


Fig. 30.

Dem ersten Brennpunkt F ist, weil er weit vom Okular entfernt ist, im Okularsystem II ein Punkt in der Nähe von G_2, und zwar ein rechts von G_2 liegender, homolog; dem zweiten Brennpunkt F_2 ist in II der Brennpunkt B_2 homolog (156₂). Der Augenkreis, das Bild des Objektivs (171 Z), muß daher zwischen G_2 und B_2 liegen.

1. Ergebnis. Das Objekt und der Augenkreis fallen nahezu in die beiden Brennpunkte des Mikroskops und diese nahezu in den ersten Brennpunkt des Objektivs und den zweiten Brennpunkt des Okulars.

Aus unserer allgemeinen Formel für die subjektive Vergößerung (171₁) wird also für das Mikroskop:

$$2. \quad v = \frac{L A_1}{L A} \cdot \frac{\mathsf{B}_2 A}{\mathsf{B}_2 A_1} = \frac{\mathsf{B}_2 A}{\varphi_1} \text{ (148₃)}:$$

Die subjektive Vergrößerung eines Mikroskops ist direkt proportional der Entfernung des zweiten Brennpunktes vom Objekt und indirekt proportional der zweiten Brennweite des Mikroskops.

Die Entfernung $\mathsf{B}_2 A$ ist veränderlich; man pflegt dafür die Entfernung zu setzen, in der ein normales Auge das Objekt deutlich sieht: die deutliche Sehweite $d = 25$ cm. Da $\mathsf{B}_2 A$ negativ ist, so haben wir

$$3. \quad v = -\frac{d}{\varphi_1} = -d \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\Delta}{g}^{\,(159_2)}.$$

Da Δ, f und g positiv sind [172], so ist die subjektive Vergrösserung eines Mikroskops negativ, d. h. das Mikroskop gibt umgekehrte Bilder.

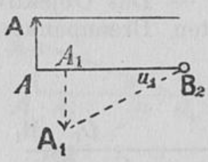


Fig. 30.

Zusatz. 1. Ziehen wir den Strahl $\mathsf{A} F_1$, so ist der homologe $\mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2$. Bewegt sich also das Objekt, so bleibt der Strahl $\mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2$ und damit auch der Sehwinkel u_1 unverändert. Der Sehwinkel des Bildes ist also nur abhängig von der Größe, nicht von der Lage des Objekts. Es läßt sich zeigen, daß das Verhältnis $u_1 : A\mathsf{A}$ eine Konstante ist. Diese Konstante k, die von Abbe die *subjektive Vergrösserungskraft* genannt ist, ist

$$k = \frac{u_1}{A\mathsf{A}} = \frac{A_1\mathsf{A}_1}{A\mathsf{A}} \cdot \frac{1}{\mathsf{B}_2 A_1} = \frac{1}{\varphi_1} \text{ (vergl. } 172_2\text{); folglich}$$

$$k = \frac{1}{f} \cdot \frac{\Delta}{g}^{\,(172_3)}.$$

worin $\Delta : g$ nach Abbe die *Okularkraft* heißt. —

2. Nebenbei mag bemerkt werden, daß die hier abgeleitete Gleichung

$$\frac{u_1}{A\mathsf{A}} = \frac{1}{\varphi_1} \text{ oder } \varphi_1 = \frac{A\mathsf{A}}{u_1}$$

die Gaußsche Definition der (hintern) Brennweite enthält: die Brennweite ist gleich der Einfallshöhe $A\mathsf{A}$ eines achsenparallelen Strahles dividiert durch den zugehörigen Achsenwinkel u_1 im Bildraum.

173. Vergrösserung des astronomischen Fernrohres. Das astronomische Fernrohr (in seiner einfachsten Form) besteht aus zwei positiven Linsen, dem Objektiv und dem Okular, und ist dadurch charakterisiert, daß das Intervall Δ gleich 0 oder eine kleine positive Strecke ist. Während beim Mikroskop Objektiv und Okular fest mit einander verbunden sind und daher das Intervall unveränderlich ist, kann beim Fernrohr das Okular gegen das Objektiv verschoben, das Intervall Δ also verändert werden. Wir beschränken unsere Betrachtungen auf den Fall, daß $\Delta = 0$ ist, daß also die Punkte F_2 und G (157₁) zusammenfallen. Es ist dann der uneigentliche Punkt F_1, weil ihm im Objektivsystem der Punkt F_2 und diesem (G) im Okularsystem der Punkt F_1 (146₁) homolog ist, ein Ordnungspunkt des Gesamtsystems und dies daher ein teleskopisches (151) .—

In unserer allgemeinen Formel für die Vergrößerung $v = \frac{L A_1}{L A} \cdot \frac{O_1 A}{O_1 A_1}$ (171₄) kommen die Entfernungen des Auges vom Objekt und vom Bild vor; da die letztere, $O_1 A_1$, der Messung nicht zugänglich ist, so nehmen wir eine Umformung vor, indem wir den Punkt O, das Objekt zu O_1, einführen. Da sich das Auge in der Austrittspupille, dem Bild des Objektivs, befindet (171 Z), so ist O der Achsenpunkt des Objektivs. In der Gleichung

$$\frac{O_1 A}{O_1 A_1} = \frac{O_1 A}{O A} \cdot \frac{O A}{O_1 A_1}$$

ist also $\frac{O A}{O_1 A_1}$ das Verhältnis zweier homologen Strecken und daher (165₃)

$$\frac{O_1 A}{O_1 A_1} = \left(\frac{L A}{L A_1}\right)^2 \cdot \frac{O_1 A}{O A},$$

sodaß aus unserer Formel (171₄) wird

$$v = \frac{L A}{L A_1} \cdot \frac{O_1 A}{O A}.$$

Das laterale Verhältnis $L A_1 : L A$ ist in der teleskopischen Verwandtschaft für alle eigentlichen Punkte konstant (152₁). Da wir nun das laterale Verhältnis *eines*

Punktes, des Punktes F, aus den Brennweiten der Einzelsysteme in Nr. 158_2 bestimmt haben, so ist in unserem teleskopischen System für jeden Punkt $LA_1 : LA = g : f_1$; folglich (164,)

$$1.\ v = -\frac{f}{g} \cdot \frac{O_1 A}{O A} \cdot -$$

Aus dieser allgemeinen Formel ergibt sich die Vergrößerung für ein uneigentliches Objekt (121,)

$$2.\ v = -\frac{f}{g},$$

ein Wert, der sich auch unmittelbar aus der allgemeinen Vergrößerungsformel (171,) hätte herleiten lassen (152,).

Zusatz. Vermittels der eben benutzten Formel $\frac{LA}{LA_1} = \frac{f_1}{g}$ läßt sich die Vergrößerung eines Fernrohrs praktisch bestimmen, wenn wir beachten, daß $LA : LA_1 = A\mathsf{A} : A_1\mathsf{A}_1$ ist (149): Wir müssen von irgend einem Objekt $A\mathsf{A}$ ein reelles Bild entwerfen und seine Größe $A_1\mathsf{A}_1$ messen. Lassen wir $A\mathsf{A}$ z. B. in das Objektiv fallen, so ist $A_1\mathsf{A}_1$ der Durchmesser der Austrittspupille (171 Z). Die Vergrößerung eines Fernrohres ist demnach gleich dem Verhältnis aus dem Durchmesser des Objektivs und dem Durchmesser des Augenkreises.

174. **Achromatische Okulare.** Zwei Linsen aus demselben Glas, die wir, um übersichtliche Ergebnisse zu erhalten, als ideelle ansehen wollen, liefern ein achromatisches System, wenn ihr Abstand δ und ihre Brennweiten f und g der achromatischen Bedingungsgleichung

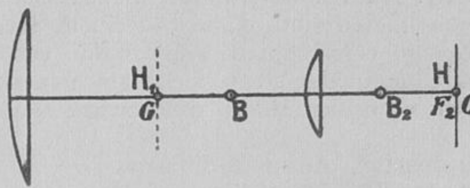
$$\delta = \tfrac{1}{2}(f + g)$$

genügen.

1. *Das Okular von Huyghens* besteht aus zwei Plankonvexlinsen, für welche ist, wenn wir unter e eine beliebige Strecke verstehen,

$$\delta = 2e;\ f = 3e;\ g = e.$$

Aus Nr. 161 ergibt sich dann (164,)



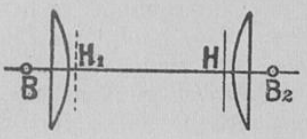
$$\Delta = -2e;$$
$$H'' H = +3e;$$
$$H_1'' H_1 = -e;$$
$$BH = \tfrac{3}{2} e.$$

Fig. 31.

Über den Strahlengang sei noch bemerkt: Das Bild, welches das (nicht gezeichnete) Objektiv des Fernrohrs oder Mikroskops in dem (jetzt B genannten) Brennpunkt des Okulars [172; 173] entwerfen würde, ist für die erste Linse des Okulars, die Kollektivlinse, ein virtuelles Objekt, sodaß in der Entfernung e von dieser [164 Z.] ein reelles Bild entsteht, von dem dann die Augenlinse ein uneigentliches Bild entwirft. — Gesichtsfeldblende und Fadenkreuz befinden sich (ebenso wie das von Objektiv- und Kollektivlinse entworfene reelle Bild) in G. —

2. *Das Okular von Ramsden* besteht aus zwei Plankonvexlinsen, die der achromatischen Bedingungsgleichung nur angenähert genügen. Bezeichen wir durch ε eine kleine Größe, deren zweite Potenz gegenüber e vernachlässigt werden kann, so ist

$$f = g = e; \; \delta = e - \varepsilon;$$



folglich [161] $\Delta = -(e + \varepsilon)$;

$$BH = \frac{e^2}{e + \varepsilon} = e - \varepsilon;$$

Fig. 32.

$$H' H = +e\left(\frac{e - \varepsilon}{e + \varepsilon}\right) = e - 2\varepsilon = -H_1'' H_1 . -$$

Das Objektiv entwirft in B [173] ein reelles Bild, von dem das Okular ein uneigentliches Bild entwirft.

Zusatz. Die achromatische Gleichung spricht nur aus, daß die Brenn*weiten* für alle Farben einander gleich sind, und daraus folgt nur für ideelle Linsen, daß die optischen Systeme für alle Farben identisch sind. Für nicht ideelle

Linsen folgt aber aus Nr. 172 Z_2, daß für alle Farben die Sehwinkel u_1 des Bildes gleich sind, d. h. daß einem auf die uneigentliche Ebene eingestellten Auge die verschiedenen farbigen Bilder an derselben Stelle erscheinen und sich daher zu einem weißen Bilde zusammensetzen.

175. **Numerische Apertur.** Aus dem Sinusgesetz (162 Z), das wir mit abgeänderter Bezeichnung schreiben:

$$\frac{L A_1}{L A} : \frac{\sin u}{\sin u_1} = \frac{c_1}{c},$$

ergibt sich, wenn u_1, wie z. B. beim Mikroskop, ein kleiner Winkel ist,

$$u_1 = \frac{c_1}{c} \sin u : \frac{L A_1}{L A}.$$

Befindet sich das Bild in Luft, so ist $\frac{c_1}{c} = n$, also

$$u_1 = n \sin u : \frac{L A_1}{L A}.$$

Verstehen wir unter $2u$ den Öffnungswinkel, d. h. den Winkel, unter dem die Eintrittspupille (das Objektiv (171 Z)) aus dem Achsenpunkt A des Objekts gesehen wird, so ist $2u_1$ der Projektionswinkel, d. h. der Winkel, unter dem die Austrittspupille (das Bild des Objektivs) aus dem Achsenpunkt A_1 des Bildes gesehen wird. Dieser Projektionswinkel ist ein Maß für die austretende Lichtmenge. Diese Lichtmenge wächst also nach unserer Gleichung mit dem Produkt $n \sin u$, und daher ist dies Produkt a, das Abbe die *numerische Apertur* genannt hat, für die Beurteilung der Leistungsfähigkeit eines Mikroskopes von Wichtigkeit. Sie läßt sich bestimmen aus

$$a = n \sin u = u_1 \cdot \frac{L A_1}{L A} = \frac{u_1 \cdot \mathsf{B}_2 A_1}{\varphi_1} \quad (148_3).$$

Weil die Austrittspupille in der Brennebene liegt (172₁), so ist $u_1 \cdot \mathsf{B}_2 A_1$ der Radius der Austrittspupille; bezeichnen wir diesen durch p_1, so ist

$$a = \frac{p_1}{\varphi_1}.$$

für alle Farben die
d. h. daß einem auf
ten Auge die ver-
ben Stelle erscheinen
ilde zusammensetzen.

lem Sinusgesetz (162 Z),
ng schreiben:

$\frac{c_1}{}$,

Mikroskop, ein kleiner

$\frac{A_1}{A}$.

ist $\frac{c_1}{c} = n$, also

$\frac{A_1}{A}$.

nungswinkel, d. h. den
lle (das Objektiv (171 Z))
s gesehen wird, so ist
er Winkel, unter dem
Objektivs) aus dem
en wird. Dieser Pro-
ie austretende Licht-
st also nach unserer
, und daher ist dies
e Apertur genannt hat,
fähigkeit eines Mikro-
sich bestimmen aus

$$u_1 \,.\, \mathrm{B}_2\, A_1 \over \varphi_1 \quad (148_3).$$

Brennebene liegt (172₁),
trittspupille; bezeichnen