Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Löbenichtschen Realschule
zu Königsberg in Pr.

Über Rollbewegungen.

Von

E. Jancke,

Oberlehrer an der Löbenichtschen Realschule.

Buchdruckerei R. Leupold.
Königsberg i. Pr. ▭ 1906.

Nr. 25.

In der Literatur über die Mechanik, soweit sie mir bekannt geworden ist, habe ich wenig über Rollbewegungen gefunden. Man spricht von ihnen bei der Definition der verschiedenen Zykloiden und bei der Beschreibung der Rotation um freie Achsen; aber in diesen beiden Fällen sind es sehr einfache Bewegungen, und sie werden nur geometrisch als Hilfsmittel zur Veranschaulichung anderer Dinge benutzt. In der Theorie der Zahnräder wird die Rollbewegung schon mehr physikalisch betrachtet, aber auch hier ist es nur ein „ebenes" Rollen und zudem eine erzwungene Bewegung. Eine Unterschung über das Problem: Wie rollt ein Körper von irgend welcher Gestalt auf irgend einer Fläche? habe ich nirgends gefunden. Und doch ist dieses Problem keineswegs so einfach lösbar, daß es ohne weiteres in die Aufgabensammlungen über Mechanik eingereiht werden könnte.

Was ich darüber errechnet habe, gebe ich so wieder, wie ich es gefunden habe, in Quaternionen. Ohne sie würden meine Formeln zu abschreckender Länge auswachsen.

I.

Ich bezeichne mit ϱ den Ort irgend eines Punktes eines Körpers zur Zeit t, und mit ϱ_0 seinen Ort zu Beginn der Bewegung, so ist

$$\varrho = \varphi\varrho_0 + \tau, \tag{1}$$

wo

$$\varphi\varrho_0 = \varrho_0 \cdot \cos w - \lambda \cdot S\lambda\varrho_0 \cdot (1 - \cos w) + V\lambda\varrho_0 \cdot \sin w$$

eine lineare Vektorfunktion ist, welche bei jeder Drehung um endliche Winkel auftritt und den wichtigen Gleichungen genügt:

$$\varphi'\varrho = \varphi^{-1}\varrho$$
$$S\varphi\varrho\varphi\sigma = S\varrho\sigma$$
$$V\varphi\varrho\varphi\sigma = \varphi V\varrho\sigma$$

Hierbei bedeutet λ die Richtung der Achse durch den Nullpunkt, um welche der Körper zu drehen wäre, w den Drehungswinkel und τ die Parallelverschiebung, welche mit der Drehung verbunden werden müßte, um den Körper aus seiner Anfangslage direkt in die zur Zeit t stattfindende zu befördern.

Wenn λ, w und τ als Funktionen von t bekannt sind, so ist damit die ganze Bewegung des Körpers als bekannt anzusehen. Insbesondere läßt sich daraus die momentane Bewegung ableiten.

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varphi\varrho_0}{dt} + \frac{d\tau}{dt}$$

$$d(\varrho - \tau) = d_w\varphi\varrho_0 + d_\lambda\varphi\varrho_0$$

$$= [V\lambda V\lambda\varrho_0 \cdot \sin w + V\lambda\varrho_0 \cdot \cos w]\, dw - d\lambda \cdot S\lambda\varrho_0 \cdot (1 - \cos w) + V d\lambda\varrho_0 \cdot \sin w.$$

Ersetzt man hierin ϱ_0 durch $\varphi^{-1}(\varrho - r)$, so ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$d(\varrho - r) = V[\lambda dw + d\lambda \cdot \sin w + V\lambda d\lambda \cdot (1 - \cos w)](\varrho - r).$$

Setzt man

2) $$\varepsilon = \lambda \cdot \frac{dw}{dt} + \sin w \cdot \frac{d\lambda}{dt} + (1 - \cos w) \cdot V\lambda \frac{d\lambda}{dt},$$

so erhält man

3) $$\frac{d\varrho}{dt} = V\varepsilon(\varrho - r) + \frac{dc}{dt},$$

und dann ist ε der Vektor der momentanen Rotation in der Eulerschen Darstellung: die Winkelgeschwindigkeit als Länge auf der Achsenrichtung abgetragen.

In den gewöhnlichen Entwickelungen der Rotation um freie Achsen wird stets die Lage der Momentanachse im Körper selbst betrachtet. Sie ist

$$\varphi^{-1}\varepsilon = \lambda \cdot \frac{dw}{dt} + \sin w \cdot \frac{d\lambda}{dt} - (1 - \cos w) \cdot V\lambda \frac{d\lambda}{dt}.$$

Das geschieht wohl deswegen, weil dieser Vektor zur direkten Beobachtung bequemer und seine Differentialgleichungen leicht zu integrieren sind. Bei der Betrachtung der Rollbewegungen scheint er diese Vorzüge nicht zu haben.

In einigen einfachen Fällen ist es möglich, aus den Differentialgleichungen der Rollbewegung durch Integration ε als Funktion von t in geschlossener Form zu finden, und zur vollständigen Lösung müßte man dann daraus noch λ und w ermitteln. Theoretisch ist das ausführbar, denn die Gleichung, welche ε als Funktion von t ausdrückt, repräsentiert drei Skalargleichungen, und dazu tritt als vierte

4) $$\lambda^2 = -1.$$

Diese Integration kann allgemein in folgender Form gedacht werden: Aus der Gleichung 2), in welcher nun ε eine bekannte Funktion von t bedeutet, eliminiert man zuerst durch zwei Differentiationen λ und erhält so eine Differentialgleichung dritter Ordnung für w; diese muß integriert werden, und dann liefert die letzte Eliminationsgleichung den Vektor λ.

Es könnte scheinen, als würde sich die Elimination von w mehr empfehlen; aber man erhält dadurch für λ entweder eine Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung oder drei skalare Differentialgleichungen, welche in jedem Falle eine unübersichtliche Rechnung zur Elimination gewisser Skalargrößen, Komponenten von λ, nötig machen. Ich führe die Elimination von λ hier aus, weil sie einigermaßen glatt und elegant von statten geht.

Aus 2) folgt

5) $$S\varepsilon\lambda = -\frac{dw}{dt}$$

6) $$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \cdot \sin w = S\varepsilon \frac{d\lambda}{dt}$$

7) $$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \cdot (1 - \cos w) = S\varepsilon\lambda \frac{d\lambda}{dt}$$

8) $$2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \cdot (1 - \cos w) = \varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2.$$

Der Skalarausdruck mit ε läßt bei jeder dieser Gleichungen sofort erkennen, wie sie entstanden ist.

Aus diesen Gleichungen folgt weiter

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2}{2\cdot(1-\cos w)} \tag{9}$$

$$S\varepsilon\,\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\cdot cotg\,\frac{w}{2}\cdot\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right] \tag{10}$$

$$S\varepsilon\lambda\,\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right] \tag{11}$$

Dann folgt aus Gleichung 5) durch Differentiation

$$S\lambda\,\frac{d\varepsilon}{dt} + S\varepsilon\,\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{d^2w}{dt^2}$$

und hieraus in Verbindung mit 10)

$$S\lambda\,\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d^2w}{dt^2} - \frac{1}{2}\,cotg\,\frac{w}{2}\cdot\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right] \tag{12}$$

Aus dieser Gleichung durch abermalige Differentation:

$$S\,\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot\frac{d\lambda}{dt} = -S\lambda\,\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - \frac{d^3w}{dt^3} - \left(S\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{dw}{dt}\cdot\frac{d^2w}{dt^2}\right)cotg\,\frac{w}{2} \tag{13}$$

$$+\frac{1}{4}\,cosec^2\,\frac{w}{2}\cdot\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]\frac{dw}{dt}$$

Aus Gleichung 4) folgt noch

$$S\lambda\,\frac{d\lambda}{dt} = 0$$

und hierzu nehme ich die Gleichungen 10) und 11):

$$S\varepsilon\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\,cotg\,\frac{w}{2}\cdot\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]$$

$$S\lambda\frac{d\lambda}{dt} = 0$$

$$S\varepsilon\lambda\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right],$$

so läßt sich $\frac{d\lambda}{dt}$ im Komponenten zerlegen:

$$S\varepsilon\lambda V\varepsilon\lambda\cdot\frac{d\lambda}{dt} = V\lambda V\varepsilon\lambda\cdot S\varepsilon\frac{d\lambda}{dt} + V\varepsilon\lambda\cdot S\varepsilon\lambda\frac{d\lambda}{dt}$$

$$V^2\varepsilon\lambda\cdot\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]\cdot\left[V\lambda V\varepsilon\lambda\cdot cotg\,\frac{w}{2} + V\varepsilon\lambda\right]$$

und da $$V^2\varepsilon\lambda = S^2\varepsilon\lambda + \varepsilon^2$$

$$= \varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2,$$

so folgt

14) $$2\frac{d\lambda}{dt} = \left(\varepsilon - \lambda\frac{dw}{dt}\right) cotg\,\frac{w}{2} + V\varepsilon\lambda$$

hieraus mit Gleichung 13)

$$2\,S\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{d\lambda}{dt} = \left(S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{dw}{dt}\cdot S\lambda\frac{d\varepsilon}{dt}\right) cotg\,\frac{w}{2} + S\varepsilon\lambda\frac{d\lambda}{dt}$$

$$-2\,S\lambda\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - 2\frac{d^3w}{dt^3} - \left(S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{dw}{dt}\cdot\frac{d^2w}{dt^2}\right) cotg\,\frac{w}{2} + \frac{1}{2}\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right] cosec^2\,\frac{w}{2}\cdot\frac{dw}{dt}$$

$$= S\varepsilon\lambda\frac{d\varepsilon}{dt} + \left\{\frac{dw}{dt}\cdot\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dw}{dt}\cdot\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right] cotg\,\frac{w}{2} + S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\right\} cotg\,\frac{w}{2}$$

$$-2\,S\lambda\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + S\lambda\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt} = 2\frac{d^3w}{dt^3} + 3\,cotg\,\frac{w}{2}\left[\frac{dw}{dt}\frac{d^2w}{dt^2} + S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\right] - \frac{1}{2}\frac{dw}{dt}\cdot\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]$$

Ich führe hier die Abkürzungen ein:

15) $$\vartheta = V\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt} - 2\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$$

16) $$R = 2\frac{d^3w}{dt^3} + 3\,cotg\,\frac{w}{2}\cdot\left[\frac{dw}{dt}\frac{d^2w}{dt^2} + S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\right] - \frac{1}{2}\frac{dw}{dt}\cdot\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]$$

so lautet die letzte Gleichung

17) $$S\vartheta\lambda = R,$$

und hierin ist ϑ ein bekannter Vektor, R ein Differentialausdruck, der außer w nur bekannte Größen enthält.

Nun stelle ich wieder drei Skalargleichungen zusammen:

$$S\varepsilon\lambda = -\frac{dw}{dt}$$

$$S\frac{d\varepsilon}{dt}\lambda = +\frac{d^2w}{dt^2} - \frac{1}{2}\,cotg\,\frac{w}{2}\cdot\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]$$

$$S\vartheta\lambda = R,$$

so folgt aus ihnen

18) $$S\vartheta\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot\lambda = S\varepsilon\lambda\cdot V\frac{d\varepsilon}{dt}\,\vartheta + S\lambda\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot V\vartheta\varepsilon + S\vartheta\lambda\cdot V\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$= \frac{dw}{dt}\cdot V\vartheta\frac{d\varepsilon}{dt} - \left\{\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{1}{2}\,cotg\,\frac{w}{2}\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]\right\} V\vartheta\varepsilon + R\cdot V\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}$$

Wenn man diese Gleichung quadriert, so fällt λ heraus und man erhält die Differentialgleichung für w in der Gestalt:

$$\left[RV\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}+2V\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\,\omega\right]^2+4\cdot S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\cdot\omega^2+V^2\omega V\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}+S^2\vartheta\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}=0,$$

worin zur Abkürzung

$$\varepsilon\frac{d^2w}{dt^2}-\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{dw}{dt}+\frac{1}{2}\,cotg\,\frac{w}{2}\cdot\left[\varepsilon^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]\cdot\varepsilon=\omega$$

gesetzt ist.

Sie enthält $\frac{d^3w}{dt^3}$ im zweiten Grade und läßt keine Möglichkeit einer Integration erkennen.

Hierbei bietet sich ein seltsamer Spezialfall. Es könnte $\vartheta=0$ sein, also

$$2\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}=V\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Dann wäre $R=0$, und dies selbst wäre die Differentialgleichung für w. Ob diesem Falle eine physikalische Bedeutung zukommt, habe ich noch nicht ermitteln können. Um hiernach ε als Funktion von t zu finden, kann man zunächst die Operationen $S\varepsilon$ und $S\frac{d\varepsilon}{dt}$ auf die Gleichung anwenden:

$$S\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}=0,$$

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2=konst.=-a^2,$$

$$S\varepsilon\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}=0,\ \text{also}$$

$$S\varepsilon\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2=-a^2,$$

$$\frac{d}{dt}S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}=-a^2,$$

$$S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}=-a^2t+b,$$

$$\varepsilon^2=-a^2t^2+2bt-c^2.$$

Bei passender Wahl des Anfangspunktes für die Zählung von t kann man $b=0$ setzen, und erhält so:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon^2&=-(a^2t^2+c^2),\\ S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}&=-a^2t,\\ \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2&=-a^2.\end{aligned}\right\}\quad 19)$$

Auf diese Weise erhält man aber nur solche Skalarverbindungen von ε, welche auf keine im Raum feste Richtung bezug haben. Führt man eine solche Richtung α ein, so wird

$$2\, S\alpha \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = S\alpha\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\begin{aligned} 4\, S^2\alpha \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} &= S^2\alpha\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \\ &= S^2\alpha V\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \\ &= V^2\alpha V\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + \alpha^2 V^2\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \\ &= \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \cdot S\alpha\varepsilon - \varepsilon \cdot S\alpha \frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 - V^2\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \\ &= S^2\alpha\varepsilon \cdot \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 - 2 S\alpha\varepsilon \cdot S\alpha \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot S\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon^2 \cdot S^2\alpha \frac{d\varepsilon}{dt} - V^2\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \\ &= -a^2 \cdot S^2\alpha\varepsilon + 2a^2 t \cdot S\alpha\varepsilon \cdot S\alpha \frac{d\varepsilon}{dt} - (a^2t^2 + c^2) \cdot S^2\alpha \frac{d\varepsilon}{dt} - a^4t^2 + a^2(a^2t^2 + c^2), \end{aligned}$$

und mit $S\alpha\varepsilon = -p$:

20)
$$4\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)^2 + (a^2t^2 + c^2)\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 - 2a^2t \cdot p \frac{dp}{dt} + a^2p^2 = a^2c^2.$$

Genau dieselbe Differentialgleichung gilt für die Komponente von ε nach irgend einer andern festen Richtung; außerdem führt die Differentiation von 20) auf eine homogene Gleichung

21)
$$4\frac{d^3p}{dt^3} + (a^2t^2 + c^2)\frac{dp}{dt} - a^2t \cdot p = 0,$$

welche sich bekanntlich reduzieren ließe, wenn man eine partikulare Lösung von ihr hätte; und diese Beobachtungen legten mir nahe, zu versuchen, ob hier nicht eine Riccatische Gleichung zu finden wäre, welche den Kernpunkt des Problems bilden würde. Nach einigen vergeblichen Versuchen ist mir das durch ein Verfahren gelungen, welches sich auf das von Scheffers in seinem Lehrbuch der Differentialgeometrie angegebene stützt — bei der Frage nach Raumkurven, deren Krümmung und Torsion gegeben sind — aber ich kann mir nicht verhehlen, daß darin noch ein Umweg liegt, der vermieden werden müßte.

Ich setze

22)
$$\left\{\begin{aligned} S\alpha \frac{d\varepsilon}{dt} &= -a \cdot \frac{1 - uv}{u - v}, \\ S\alpha\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\sqrt{-1} \cdot ac \cdot \frac{1 + uv}{u - v}, \\ S\alpha\left(\varepsilon - t\frac{d\varepsilon}{dt}\right) &= -c \cdot \frac{u + v}{u - v}, \end{aligned}\right.$$

wo diesmal ausdrücklich festzusetzen ist, daß α ein konstanter Einheitsvektor sein soll. Wenn man diese drei Skalargleichungen differenziert und jedesmal $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ durch $\frac{1}{2} V\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt}$ ersetzt, so erhält man drei Gleichungen, welche sich auf zwei unabhängige reduzieren lassen und schließlich zu dem Ergebnis führen, daß u und v partikulare Lösungen der Gleichung

$$4 \cdot \sqrt{-1} \cdot \frac{du}{dt} = at - 2\,cu - at \cdot u^2 \tag{23}$$

sind. Mit Hilfe der bekannten Sätze über die Riccatische Gleichung kann man hiernach formale Lösungen konstruieren, welche schließlich einen Vektorausdruck für ε liefern. Aber irgendwelche brauchbaren Folgerungen lassen sich daraus nicht ziehen, solange die drei erforderlichen partikularen Lösungen nicht gefunden sind.

Auch eine Reihenentwicklung von p nach Potenzen von t, welche direkt nach Gleichung 21) verhältnismäßig einfach ausführbar ist, liefert keinen Erfolg; wenigstens lassen die Koeffizienten kein Bildungsgesetz erkennen, von welchem man auf einen geschlossenen Ausdruck für p kommen könnte.

Bei der Differentiation von Gleichung 20) fällt eine vermutlich singuläre Lösung aus, nämlich $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$. Sie ist aber unverwertbar, da es nicht möglich ist, die sechs Konstanten für drei aufeinander senkrechte Achsen widerspruchsfrei zu bestimmen.

Uebrigens kann man, auch ohne die Integration zu Ende zu führen, eine ziemlich klare Vorstellung über den Zusammenhang der Vektorwerte von ε gewinnen, wenn man ε als Ortsangabe für einen variablen Punkt in bezug auf den Nullpunkt auffaßt, wie es ja analog bei der Darstellung der Rotation um freie Achsen üblich ist. Das Bogenelement der so entstehenden Kurve steht mit t in dem Zusammenhang

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 = a^2,$$

$$ds = a \cdot dt,$$

$$s = a \cdot t;$$

die Kurve wird also mit konstanter Geschwindigkeit beschrieben.

Es folgt dann weiter

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = a \cdot \frac{d\varepsilon}{ds},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = a \cdot \frac{d^2\varepsilon}{ds^2}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a^2 \cdot \frac{d^2\varepsilon}{ds^2}$$

also:

$$2\,a \cdot \frac{d^2\varepsilon}{ds^2} = V\varepsilon \frac{d\varepsilon}{ds},$$

ferner

$$\varepsilon^2 = -(s^2 + c^2), \quad S\varepsilon \frac{d\varepsilon}{ds} = -s,$$

$$\left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = -1,$$

$$V^2\varepsilon\frac{d\varepsilon}{ds} = -c^2,$$

also $2a\cdot T\frac{d^2\varepsilon}{ds^2} = c$, die Kurve hat also konstante Krümmung, $\frac{c}{2a}$.

Endlich folgt

$$2a\cdot\frac{d^3\varepsilon}{ds^2} = V\varepsilon\frac{d^2\varepsilon}{ds^2}$$

$$4a^2\cdot\frac{d^3\varepsilon}{ds^2} = V\varepsilon V\varepsilon\frac{d\varepsilon}{ds}$$

$$= s\cdot\varepsilon - (s^2+c^2)\frac{d\varepsilon}{ds},$$

$$4a^2\cdot S\frac{d\varepsilon}{ds}\frac{d^2\varepsilon}{ds^2}\frac{d^3\varepsilon}{ds^3} = s\cdot S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{ds}\frac{d^2\varepsilon}{ds^2},$$

$$8a^3\cdot S\varepsilon\frac{d\varepsilon}{ds}\frac{d^3\varepsilon}{ds^2} = s\cdot V^2\varepsilon\frac{d\varepsilon}{ds}$$

$$= -c^2 s,$$

und hieraus nach der gewöhnlichen Torsionsformel

$$\mathfrak{T} = -\frac{S\varrho'\varrho''\varrho'''}{\varrho''^2}$$

$$\mathfrak{T} = -\frac{c^2 s}{8a^3}\cdot\frac{4a^2}{c^2}$$

$$\mathfrak{T} = -\frac{s}{2a}.$$

Die Torsion nimmt also gleichmäßig zu.

Bemerkenswert erscheint mir noch, daß die Gleichung $R = 0$ durch die Substitution $\cos\frac{w}{2} = u$ in eine Gleichung übergeht, welche 21) sehr ähnelt.

Die Aufgabe, aus gefundenem ε λ als Funktion von t zu bestimmen, gestattet eine einfache Integration nur in dem Falle, daß ε konstant ist. Aber dann zeigt die Anschauung ohne weiteres, daß $\lambda = U\varepsilon$, $w = T\varepsilon\cdot t$ sein muß.

Es bietet sich noch ein hiervon gänzlich verschiedener Weg, um zu Integralen zu gelangen, welche eine brauchbare Lösung gerade für die Rollprobleme bilden; er kann aber erst nach der geometrischen Betrachtung über ε gezeigt werden.

II.

Eine Rollbewegung, neben welcher ein Gleiten stattfindet, dürfte einer exakten mathematischen Untersuchung aus verschiedenen Gründen wenig Erfolg bieten. Die Resultate wären kaum experimentell nachprüfbar und würden auf ebenso schwachen Füßen stehen, wie die nur als ungefähr richtig anerkannten Gesetze der Reibung. Wie weit die im folgenden abgeleiteten Gleichungen des Rollens ohne Gleiten mit der Erfahrung übereinstimmen, wäre leichter zu prüfen. Auch sie sind vermutlich nur annähernd richtig; welche Bedenken ich selbst dabei habe, will ich nachher an passender Stelle darlegen. Zunächst entwickle ich rein geometrische Sätze über die Rollbewegung, und zwar durchweg in der Annahme, daß die Berührung der beiden Körper in einem Punkte, nicht längs einer Linie, stattfinde.

Die aufeinander folgenden Berührungspunkte bilden auf der ruhenden Fläche und auf der Oberfläche des rollenden Körpers je eine kontinuierliche Linie, die Rollspuren. Deren Punkte kann man einander paarweise zuordnen, immer die, die während der Bewegung einmal zusammenfallen. Sind A und A_1 zwei Punkte der einen und B, B_1 die entsprechenden der anderen Rollspur, so sind die Bogenlängen AA_1 und BB_1 gleich groß, sonst müßte neben dem Rollen auch ein Gleiten stattfinden. Also empfiehlt es sich, die Gleichungen beider Kurven auf die Bogenlänge zu beziehen, gemessen von irgend einem Paare entsprechender Punkte aus, etwa von der Anfangslage. $\xi = f(s)$ sei die Gleichung der Rollspur auf der ruhenden Fläche und $\eta = g(s)$ die der anderen. Die Differentialquotienten nach s sollen durch Striche angedeutet werden.

Hierbei ist die Gleichung $\eta = g(s)$ mit Vorsicht aufzunehmen. Sie kann in irgend einer bestimmten Form nur zu einem bestimmten Zeitpunkt gültig sein, weil eben der Körper mit der auf ihm gedachten Linie fortwährend in Bewegung ist. Demnach sollen die Vektoren η, η', η'', die in der folgenden Entwicklung vorkommen, nur gerade auf die augenblickliche Lage des Körpers bezogen sein. Es wird sich herausstellen, daß sie schließlich nur in gewissen Skalarverbindungen übrig bleiben, welche in Beziehung zu den Krümmungsverhältnissen am Berührungspunkt stehn.

Die Rollbewegung ist nun in jedem Augenblick eine Drehung um eine Achse, welche durch den Berührungspunkt geht, nach der üblichen Definition für ebenes Rollen. Anschaulicher und dementsprechend bequemer für die Rechnung scheint die Vorstellung, die Berührung geschehe in einem Flächenelement, welches sich vom Punkte ξ bis zum Punkte $\xi + \xi' ds$ längs der Rollspur erstrecke, und die Rotation geschehe um eine Achse durch den letzteren Punkt.

Zur Zeit t liege nun der Punkt η des rollenden Körpers auf ξ des ruhenden. Auch der Nachbarpunkt $\eta + \eta' ds$ muß auf $\xi + \xi' ds$ liegen. Es muß also in diesem Augenblick $\eta = \xi$ und $\eta' = \xi'$ sein. Dagegen fällt der zweite folgende Punkt, $\eta + 2\eta' ds + \eta'' ds^2$, nicht mit $\xi + 2\xi' ds + \xi'' ds^2$ zusammen. Er wird vielmehr erst durch die unendlich kleine Rotation, welche jetzt stattfindet, zur Koinzidenz mit ihm gebracht. Irgend ein Punkt des rollenden Körpers, ϱ, erfährt durch diese Rotation eine Verschiebung

$$d\varrho = V\varepsilon(\varrho - \xi - \xi' ds) \cdot dt$$

wo ε dieselbe Bedeutung wie früher hat.

Hierbei ist $dt = \frac{ds}{v}$ zu setzen, indem unter v die Geschwindigkeit verstanden wird, mit der momentan die Rollspur abgelaufen wird.

Es ist also

$$d\varrho = \frac{ds}{v} V\varepsilon\,(\varrho - \xi - \xi' ds).$$

Der Punkt $\eta + 2\,\eta' ds + \eta'' ds^2$ des Körpers erfährt die Verschiebung

$$\frac{ds}{v} \cdot V\varepsilon\,(\eta + 2\,\eta' ds + \eta'' ds^2 - \xi - \xi' ds)$$
$$= \frac{ds}{v} \cdot V\varepsilon\,(\xi' ds + \eta'' ds^2),$$

da $\eta = \xi$ und $\eta' = \xi'$ ist.

Diese Größe ist unendlich klein zweiter Ordnung, weil ε nicht allgemein parallel zu ξ' sein kann, wie die Anschauung zeigt. Das Glied mit η'' kann also vernachlässigt werden, so daß die betrachtete Verschiebung $\frac{ds^2}{v} \cdot V\varepsilon\,\xi'$ wird.

Sie soll aber den Punkt $\eta + 2\,\eta' ds + \eta'' ds^2$ in die Lage $\xi + 2\,\xi' ds + \xi'' ds^2$ überführen; sie muß also

$$= \xi + 2\,\xi' ds + \xi'' ds^2 - \eta - 2\,\eta' ds - \eta'' ds^2$$
$$= (\xi'' - \eta'')\, ds^2$$

sein. Daraus folgt die erste Gleichung für ε:

24) $$V\varepsilon\,\xi' = v \cdot (\xi'' - \eta'').$$

Die zweite ergibt sich aus der selbstverständlichen Bedingung, daß der Zustand der Berührung erhalten bleiben muß. Bedeutet μ die Normalenrichtung der ruhenden Fläche, nach außen gerichtet, und ν die der Oberfläche des rollenden Körpers, nach innen gerichtet, beide als Einheitsvektoren, so muß momentan $\nu = \mu$ sein, und durch die Rotation muß $\nu + \nu' ds$ in $\mu + \mu' ds$ übergeführt werden. Irgend eine Richtung α des rollenden Körpers erfährt bei der Rotatioe die Aenderung

$$d\alpha = V\varepsilon\alpha \cdot dt$$
$$= \frac{ds}{v} \cdot V\varepsilon\alpha;$$

es ist also

$$\frac{ds}{v}\, V\varepsilon(\nu + \nu' ds) = \mu + \mu' ds - \nu - \nu' ds$$
$$\frac{ds}{v} \cdot V\varepsilon\nu = (\mu' - \nu')\, ds$$

25) $$V\varepsilon\nu = v \cdot (\mu' - \nu')$$

Hiernach hat man zur Bestimmung von ε sechs Skalargleichnungen — wenn man will, nur vier —, jedenfalls mehr als nötig. Daß sie miteinander verträglich sind, ergibt die folgende Rechnung und liefert damit eine Verifikation für die geometrische Richtigkeit dieser Auffassung von der Rollbewegung.

Ich wende auf Gleichnng 24) die Operation $S\mu$, auf 25) $S\xi'$ an und erhalte

$$S\mu\,\varepsilon\xi' = v\,S\mu\,(\xi'' - \eta''),$$
$$S\xi'\,\varepsilon\nu = v \cdot S\nu\,(\mu' - \nu').$$

Diese beiden Gleichungen erkennt man als identisch, wenn man bedenkt, daß aus der Eigenschaft der Normalen

$$S\mu\,\xi' = 0$$

folgt: $$S\mu\,\xi'' + S\mu'\xi' = 0.$$

Die Operationen $S\xi'$ bei 24) und $S\mu$ bei 25) geben ohne weiteres die Identitäten $0=0$, denn da die Bogenlänge Parameter ist, hat man $\xi'^2 = -1$, also $S\xi'\xi'' = 0$ zu setzen, und da μ ein Einheitsvektor sein sollte, ist $\mu^2 = -1$, $S\mu\mu' = 0$.

Endlich ergibt $S\mu\xi'$ zwei neue und letzte Skalargleichungen für ε:

$$S\mu\varepsilon = v \cdot S\mu\xi'(\xi'' - \eta'')$$
$$S\xi'\varepsilon = -v \cdot S\mu\xi'(\mu' - \nu').$$

Die drei Vektoren μ, ξ', $V\mu\xi'$ sind aufeinander senkrechte Einheitsvektoren in positiver Folge. Demnach ist

$$\varepsilon = -\mu S\mu\varepsilon - \xi' S\xi'\varepsilon - V\mu\xi' \cdot S\mu\xi'\varepsilon.$$

$$\varepsilon = v\,[-\mu S\mu\xi'(\xi'' - \eta'') + \xi' S\mu\xi'(\mu' - \nu') + V\mu\xi' \cdot S\mu(\xi'' - \eta'')]. \tag{26}$$

Dieser Ausdruck für ε läßt einige bemerkenswerte Umformungen zu. Zunächst kann man trennen, was auf den einen und auf den andern Körper bezogen ist:

$$\varepsilon = v \cdot (X - \chi), \tag{27}$$

wobei

$$X = -\mu S\mu\xi'\xi'' + \xi' S\mu\xi'\mu' + V\mu\xi' \cdot S\mu\xi''$$

$$\chi = -v \cdot S\nu\eta'\eta'' + \eta' S\nu\eta'\nu' + V\nu\eta' \cdot S\nu\eta''.$$

Man erkennt hieraus den analogen Bau beider Größen.

Außerdem kann man den hier auftretenden Skalargrößen wertvolle geometrische Deutungen geben. $S\mu\xi'\xi''$ ist, abgesehen vom Vorzeichen, die geodätische Krümmung der ruhenden Kurve. Will man sie als positiv für den Fall ansehen, daß sie einer positiven Drehung um eine zu μ parallele Achse entspricht, so muß man, wie die Anschauung zeigt, dem Skalar das Minuszeichen vorsetzen:

$$\left.\begin{aligned} C_g &= -S\mu\xi'\xi'', \quad \text{ebenso} \\ c_g &= -S\nu\eta'\eta''. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$S\nu\eta''$ ist, abgesehn vom Vorzeichen, die Normalenkrümmung. In der Voraussetzung, daß der rollende Körper im allgemeinen eine konvexe Oberfläche habe, empfiehlt es sich, die Normalenkrümmung eben für diesen Fall als positiv anzusehen, und dann muß man

$$\left.\begin{aligned} c_n &= -S\nu\eta'', \quad \text{analog} \\ C_n &= -S\mu\xi'' \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

setzen. C_n ist hiernach positiv, wenn die ruhende Fläche an der betrachteten Stelle in der Richtung der Rollspur aufwärts gekrümmt ist, das heißt, dem rollenden Körper entgegen.

Weniger einfach ist die dritte Skalargröße, $S\mu\xi'\mu'$, zu deuten. Wenn sie verschwindet, so fällt an der betrachteten Stelle die Rollspur mit einer Krümmungslinie zusammen. $S\mu\xi'\mu'$ muß also in einer nahen Beziehung zu den Winkeln stehen, die die Rollspur mit den Krümmungslinien bildet. Denkt man für den Augenblick ξ als Funktion zweier Parameter u und v, welche einzeln konstant gesetzt die Krümmungslinien ergeben, so ist für den Winkel m zwischen der Kurve und der ersten Krümmungslinie

$$\cos m = -S\xi' \, U \frac{\delta \xi}{\delta u}$$

$$= -\frac{1}{T \dfrac{\delta \xi}{\delta u}} \cdot S\xi' \frac{\delta \xi}{\delta u}$$

$$= -\frac{1}{T \dfrac{\delta \xi}{\delta u}} \cdot S \frac{\delta \xi}{\delta u} \left(\frac{\delta \xi}{\delta u} \cdot u' + \frac{\delta \xi}{\delta v} \cdot v' \right)$$

$$= -\frac{1}{T \dfrac{\delta \xi}{\delta u}} \cdot \left(\frac{\delta \xi}{\delta u} \right)^2 \cdot u'$$

$$\cos m = T \frac{\delta \xi}{\delta u} \cdot u'$$

und ebenso, da $\left(\frac{\pi}{2} - m\right)$ der Winkel mit der anderen Krümmungslinie ist:

$$\sin m = T \frac{\delta \xi}{\delta v} \cdot v'.$$

Ferner ist $$\frac{\delta \mu}{\delta u} = -C_1 \cdot \frac{\delta \xi}{\delta u}$$

und $$\frac{\delta \mu}{\delta v} = -C_2 \cdot \frac{\delta \xi}{\delta v},$$

also $$\mu' = -\left(C_1 \cdot \frac{\delta \xi}{\delta u} \cdot u' + C_2 \cdot \frac{\delta \xi}{\delta v} \cdot v' \right),$$

wo C_1 und C_2 die beiden Hauptkrümmungen sind. Demnach wird

$$S\mu \xi' \mu' = -S\mu \left(\frac{\delta \xi}{\delta u} \cdot u' + \frac{\delta \xi}{\delta v} \cdot v' \right) \left(C_1 \frac{\delta \xi}{\delta u} \cdot u' + C_2 \cdot \frac{\delta \xi}{\delta v} \cdot v' \right)$$

$$= -S\mu \frac{\delta \xi}{\delta u} \frac{\delta \xi}{\delta v} \cdot (C_2 - C_1) \cdot u'v'$$

$$= -S\mu \, U \frac{\delta \xi}{\delta u} \, U \frac{\delta \xi}{\delta v} \cdot (C_2 - C_1) \cdot T \frac{\delta \xi}{\delta u} \cdot u' \cdot T \frac{\delta \xi}{\delta v} \cdot v'$$

30) $$Su\xi' \mu' = -(C_2 - C_1) \cos m \sin m.$$

Statt dessen kann man auch die Normalenkrümmung C_n für die Richtung von ξ' einführen, mit Hilfe der Gleichung

$$C_n = C_1 \cos^2 m + C_2 \cdot \sin^2 m.$$

Aus dieser geht hervor, daß

$$C_n - C_1 = (C_2 - C_1) \sin^2 m,$$

$$C_2 - C_n = (C_2 - C_1) \cos^2 m,$$

also $$(C_2 - C_1)\cdot \sin m \cdot \cos m = \sqrt{(C_n - C_1)\cdot(C_2 - C_n)}$$

ist, folglich $$S\mu\xi'\mu' = \sqrt{(C_n - C_1)(C_2 - C_n)}. \qquad 31)$$

Da für diese Größe eine einfachere geometrische Deutung nicht zu ersehen ist, gebe ich ihr nur zur Akürzung ein Zeichen E und nenne die analoge $S\nu\eta'\nu' = e$. So wird

$$\left.\begin{aligned} X &= \mu\cdot C_g + \xi'\cdot E - V\mu\xi'\cdot C_n \\ \chi &= \nu\cdot C_g + \eta'\cdot e - V\nu\eta'\cdot C_n \end{aligned}\right\} \qquad 32)$$

Hieraus folgt auch noch

$$\varepsilon = v\,[\mu\,(C_g - c_g) + \xi'\cdot(E - e) + V\mu\xi'\cdot(c_n - C_n)] \qquad 33)$$

An diese Darstellungsweise von ε kann man eine nützliche Zerlegung der Rollbewegung anknüpfen; nämlich nach eben den drei Vektoren, welche in dem Ausdruck für ε vorkommen.

Wenn $E = e$ und $C_n = c_n$ ist, was ja für einzelne Punkte möglich erscheint, so ist $\varepsilon = \mu v\cdot(C_g - c_g)$. Dann besteht die Bewegung momentan gar nicht in einem wirklichen Rollen, sondern ist nur eine Drehung um die gemeinsame Normale; man wird das als ein Kreiseln auffassen und $v\,(C_g - c_g)$ als Kreiselkomponente bezeichnen dürfen.

Auch für den Fall, daß die Bewegung dauernd ein reines Kreiseln bleibt, wird der Ausdruck für ε nicht unrichtig. Dann ist zwar, wie die Anschauung unmittelbar zeigt, $v = 0$, dafür aber C_g und c_g als unendlich groß anzusehen.

Wenn $C_g = c_g$ und $C_n = c_n$ ist, so wird $\varepsilon = \xi' v\cdot(E - e)$; die Bewegung ist dann kein eigentliches Rollen, sondern geschieht quer zur Richtung des Vorwärtsgehens; man wird das als ein Schwanken bezeichnen und $v\cdot(E - e)$ die Schwankungskomponente nennen dürfen.

Wenn endlich $C_g = c_g$ und $E = e$ ist, so verfolgt der rollende Körper gewissermaßen unbeirrt seine Bahn und dreht sich um eine zur Bahn senkrechte Achse; das ist die reine Rollbewegung und $v\cdot(c_n - C_n)$ die reine Rollkomponente.

Insbesondere dieser letzte Ausdruck ist sehr anschaulich zu deuten; er ist es auch, der bei der ebenen Rollbewegung allein in Frage kommt. Um bei dem Vorwärtsgehn das folgende Flächenelement auf die Unterlage herunterzubringen, muß der Körper sich um so mehr drehn, je größer seine Krümmung C_n ist, und um so weniger, je größer C_n ist, also je mehr ihm die ruhende Fläche entgegenkommt.

$C_g - c_g$, die Differenz der geodätischen Krümmungen ist ein Maß für die Projektion des Winkels, unter dem die beiden Rollspuren auseinanderstreben, auf die ruhende Fläche. Man sieht, daß hiervon die Größe der Kreiselbewegung abhängen muß.

In dieser Weise erhält schließlich auch die Größe E noch ihre Bedeutung. Schreibt man sie in der Form

$$E = \frac{1}{ds}\,S\,(\mu + d\mu)\,V\mu\xi',$$

so sieht man, daß sie dem Sinus des Winkels zwischen dem neuen Berührungsflächenelement und der eigentlichen Rollachse proportional ist, also auch dem Winkel selbst; so wird $E - e$ ein Maß für die Größe der Schwankung.

Man kann nun aus dem für ε gefundenen Ausdruck manche nicht uninteressanten Folgerungen über den Charakter der Rollbewegung in allerlei Spezialfällen ziehen, aber das wären größtenteils rein geometrische Schlüsse, meist keine physikalisch möglichen Bewegungen, und ich möchte mich auf solche beschränken, um in den Grenzen des Ausführbaren und Kontrollierbaren zu bleiben.

Zu erwähnen sind noch zwei Umformungen, die für gewisse Fälle anscheinend Bedeutung gewinnen können. Nach den Regeln der Vektorenrechnung ist

$$\begin{aligned} V\mu\xi' \cdot S\mu\xi'' - \mu \cdot S\mu\xi'\xi'' &= V\xi'' V\mu V\mu\xi' \\ &= V\xi'\xi'', \end{aligned}$$

und hiernach

34) $$\varepsilon = v \cdot [V\xi'\xi'' - V\mu'\mu'' + (E - e)\,\xi'].$$

Ebenso ist, da $S\mu\xi''$ durch $-S\mu'\xi'$ ersetzt werden kann:

$$\begin{aligned} \xi' \cdot S\mu\xi'\mu' - V\mu\xi' \cdot S\mu'\xi' &= -V\mu' V\xi' V\mu\xi' \\ &= V\mu\mu', \end{aligned}$$

also

35) $$\varepsilon = v\,[V\mu\mu' - V\nu\nu' + (C_g - c_g)\,\mu].$$

Aus dem für ε in Gleichung 33) gegebenen Ausdruck läßt sich die am Schluß von I angedeute zweite Integrationsmethode herleiten.

Die einzelnen speziellen Probleme gestatten zum Teil, außer ε auch noch die Rollkurve auf der ruhenden Fläche zu ermitteln. Daß dies gerade möglich ist, erklärt sich leicht daraus, daß diese Kurve ihrer Lage nach, also als Ganzes, von t unabhängig ist. Damit kennt man ξ, μ und die Skalargrößen C_g, E und C_n zunächst als Funktionen von t und kann aus ihnen mit Hilfe von Gleichung 33) auch c_g, e und c_n als Funktionen von t bestimmen. Da aber auch die Beziehung zwischen s und t dann bekannt ist, kann man c_g, e und c_n durch s ausdrücken und steht dann vor dem Problem: Auf einer gegebenen Fläche eine Kurve zu finden, für welche die Krümmungen und die Größe e als Funktionen der Bogenlänge gegeben sind. Man findet so die Gestalt der Rollkurve, natürlich im Zusammenhang mit ihrer Lage auf dem rollenden Körper, und die Zuordnung zu den entsprechenden Punkten der ruhenden Kurve läßt dann λ und w bestimmen.

Zur Lösung dieses Problems kann ich einen Weg angeben. Erstens kann man aus c_g und c_n die eigentliche Krümmung der Kurve ableiten nach der bekannten Formel

$$c^2 = c_g^{\,2} + c_n^{\,2}.$$

Zweitens kann man die Torsion der Kurve in folgender Weise finden: Aus den Gleichungen

$$S\nu\eta'' = -c_n,\; S\eta'\eta'' = 0,\; S\nu\eta'\eta'' = -c_g$$

folgt, da ν, η' und $V\nu\eta'$ drei aufeinander senkrechte Einheitsvektoren in positiver Folge sind:

$$\eta'' = c_n \cdot \nu + c_g \cdot V\nu\eta',$$

und hieraus durch Differentiation:

$$\eta''' = c_n \cdot \nu' + C_g \cdot (V\nu'\eta' + V\nu\eta'') + C_n' \cdot \nu + C_g' \cdot V\nu\eta',$$

ferner

$$V\eta'\eta'' = c_g \cdot \nu - c_n \cdot V\nu\eta'$$

also

$$
\begin{aligned}
S\eta'\eta''\eta''' &= c_g \cdot [c_g\, S\nu\nu'\eta' - c_n'] - c_n \cdot [c_n\, S\nu\eta'\nu' + c_g \cdot S\nu\eta' (V\nu'\eta' + V\nu\eta'') - c_g'] \\
&= -\, c_g \cdot (e \cdot c_g + c_n') - c_n\, (e \cdot c_n - c_g') \\
&= -\, e\, (c_g^2 + c_n^2) + (c_n\, c_g' - c_g\, c_n') \\
S\eta'\eta''\eta''' &= -\, e \cdot c^2 + (c_n\, c_g' - c_g\, c_n')
\end{aligned}
$$

Die gewöhnliche Torsionsformel

$$\mathfrak{T} = -\frac{S\varrho'\varrho''\varrho'''}{\varrho''^2}$$

gibt also hier

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{c^2}\, S\eta'\eta''\eta''' = \frac{c_n\, c_g' - c_g\, c_n'}{c_g^2 + c_n^2} - e.$$

Man kennt nun Krümmung und Torsion der Raumkurve und ist damit auf die bekannte schon vorher erwähnte Aufgabe zurückgekommen, welche mit Hilfe einer Riccatischen Gleichung wenigstens im Prinzip lösbar ist. Zugestehen muß ich freilich, daß selbst bei den scheinbar einfachsten Problemen die Riccatische Gleichung sehr kompliziert aussieht.

III.

Um nach diesen Vorbereitungen die Rollbewegung dynamisch darzustellen, verwende ich das D'Alembertsche Prinzip in der Form

$$\Sigma m S \frac{d^2\varrho}{dt^2}\, \delta\varrho = \Sigma S \beta \delta\varrho, \tag{36}$$

in welcher die Bedeutung der einzelnen Zeichen wohl nicht unklar sein kann.

Alle virtuellen Verschiebungen können in diesem Falle nur Drehungen um eine Achse durch den Berührungspunkt sein; es ist also $\delta\varrho$ zu ersetzen durch $V\vartheta\,(\varrho - \xi)$, wo ϑ einen beliebigen unendlich kleinen Vektor bedeutet.

So folgt

$$\Sigma m S \vartheta V (\varrho - \xi) \frac{d^2\varrho}{dt^2} = \Sigma S \vartheta V (\varrho - \xi) \beta$$

und hieraus

$$\Sigma m V (\varrho - \xi) \frac{d^2\varrho}{dt^2} = \Sigma V (\varrho - \xi) \beta \tag{37}$$

hiervon ist zunächst

$$\Sigma m V \varrho \frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{d}{dt}\, \Sigma m V \varrho \frac{d\varrho}{dt}.$$

Bezeichnet man mit ζ den Schwerpunkt des Körpers, so kann man $\varrho = \sigma + \zeta$ setzen und erhält: $\Sigma m\varrho = M \cdot \zeta$, $\Sigma m\sigma = 0$;
dann wird

$$
\begin{aligned}
\Sigma m V \varrho \frac{d\varrho}{dt} &= \Sigma m V (\sigma + \zeta) \left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} \right) \\
&= \Sigma m V \sigma \frac{d\sigma}{dt} + M \cdot V \zeta \frac{d\zeta}{dt}.
\end{aligned}
$$

Da nun
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\varrho}{dt} - \frac{d\zeta}{dt}$$
und da ζ auch einen dauernd bestimmten Punkt in dem Körper bedeutet, so ist
$$\frac{d\varrho}{dt} = V\varepsilon(\varrho - \zeta),$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = V\varepsilon(\zeta - \xi),$$
$$\frac{d\sigma}{dt} = V\varepsilon\sigma,$$
also

38)
$$\Sigma m V\varrho \frac{d\varrho}{dt} = \Sigma m V\varrho V\varepsilon\sigma + M \cdot V\zeta \frac{d\zeta}{dt}.$$

Ich bezeichne nun mit α, β, γ für den Augenblick die Richtungen der drei Hauptträgheitsachsen im Schwerpunkt und mit A, B, C die zugehörigen Trägheitsmomente. So läßt sich die Vektorfunktion

39)
$$\Phi\tau = A\alpha S\alpha\tau + B\beta S\beta\tau + C\gamma S\gamma\tau$$

bilden, deren Bedeutung darin liegt, daß $S\tau\Phi\tau$ das Trägheitsmoment für die Richtung τ im Schwerpunkt ist. Das Trägheitsmoment kann auch in der Form $-\Sigma m V^2\tau\sigma$ ausgedrückt werden, und so folgt
$$\Sigma m V^2\tau\sigma = - S\tau\Phi\tau$$

Diese Gleichung bleibt auch richtig, wenn τ ein ganz beliebiger Vektor ist. Differenziert man sie in diesem Sinne nach τ, so folgt
$$\Sigma m S V\tau\sigma V d\tau\sigma = - S\Phi\tau d\tau,$$
$$S d\tau \Sigma m V\sigma V\tau\sigma = - S\Phi\tau d\tau,$$
$$\Sigma m V\sigma V\tau\sigma = - \Phi\tau$$
als eine für jeden Vektor τ richtige Gleichung.

Daraus geht hervor, daß
$$\Sigma m V\sigma V\varepsilon\sigma = - \Phi\sigma$$
gesetzt werden kann, und so folgt aus Gleichung 38)
$$\Sigma m V\varrho \frac{d\varrho}{dt} = - \Phi\varepsilon + M V\zeta \frac{d\zeta}{dt},$$
$$\Sigma m V\varrho \frac{d^2\varrho}{dt^2} = - \frac{d\Phi\varepsilon}{dt} + M \cdot V\zeta \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Das zweite Glied der linken Seite von Gleichung 37) ist
$$- \Sigma m V\xi \frac{d^2\varrho}{dt^2} = - V\xi \Sigma m \frac{d^2\varrho}{dt^2}$$
$$= - M \cdot V\xi \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

und so nimmt die ganze linke Seite der Gleichung 37) die Gestalt an

$$-\frac{d\Phi\varepsilon}{dt} + M \cdot V(\zeta - \xi)\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Die rechte Seite ist durch die äußeren Kräfte β bedingt. Irgend einen praktischen Wert hat da nur die Betrachtung der Schwerkraft und die der Reibung. Wenn man aber diese als eine im Punkte ξ oder η angreifende Kraft einführt, verliert sie jede Bedeutung, weil sie dann in der Verbindung $V(\eta - \xi)\beta = 0$ auftritt. Läßt man sie demnach zunächst außer Betracht, so folgt, daß β durchweg $= - mgk$ gesetzt werden kann, und die rechte Seite von Gleichung 37) nimmt die Gestalt an:

$$\begin{aligned} & - g\,\Sigma m V(\varrho - \xi)\,k \\ = & - g\,[\Sigma m V \varrho k - M \cdot V \xi k] \\ = & - M g V(\zeta - \xi)\,k. \end{aligned}$$

Damit geht Gleichung 37) über in

$$-\frac{d\Phi\varepsilon}{dt} + M \cdot V(\zeta - \xi)\frac{d^2\zeta}{dt^2} = - M g V(\zeta - \xi)\,k$$

oder

$$\frac{d\Phi\varepsilon}{dt} = M \cdot V(\zeta - \xi)\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + gk\right) \qquad 41)$$

hierzu kommt die Gleichung

$$\frac{d\zeta}{dt} = V\varepsilon(\zeta - \xi). \qquad 42)$$

Eine einfache Ueberlegung zeigt, daß nunmehr die Anzahl der Skalargleichungen, eingerechnet den Ausdruck für ε und die gegebenen Formen beider Oberflächen, im Prinzip ausreicht zur Bestimmung sämtlicher Unbekannten.

Bedenken macht hier das vollständige Fehlen der Reibungskraft in den Gleichungen. Man kann sich darüber hinwegsetzen mit der Entgegnung, die Reibung bewirke hier eben nur die Verwandlung der einfachen rotationslosen Bewegung in eine aus Translation und Rotation zusammengesetzte, ohne Energieverlust, wie es ja in den Lehrbüchern der Mechanik seit Lagrange oder noch länger immer bei der Betrachtung unfreier Bewegungen angenommen wird. Aber es ist kaum zu bestreiten, daß alle die so erhaltenen Resultate nur näherungsweise richtig sind, und das Bedenken erhöht sich, wenn man bei einer einfachen Anwendung der gefundenen Gleichungen auf einen Widerspruch gegen die Erfahrung stößt.

Wenn eine homogene Kugel auf einer wagrechten Ebene rollt, so wird, da das Trägheitsmoment der Kugel $= \frac{2}{5} Mr^2$ ist,

$$\Phi\varepsilon = - \frac{2}{5} \mathrm{M}\varepsilon \cdot r^2,$$

ferner $\zeta - \xi = kr$, also

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = V\varepsilon(\zeta - \xi) = r \cdot V\varepsilon k,$$

und damit aus Gleichung 41)

$$-\frac{2}{5} Mr^2 \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = Mr \cdot Vk \left[-rVk \frac{d\varepsilon}{dt} + gk \right]$$

$$\frac{2}{5} \frac{d\varepsilon}{dt} = VkVk \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$= -\frac{d\varepsilon}{dt} - k \cdot Sk \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = -k \cdot Sk \frac{d\varepsilon}{dt},$$

also

$$\frac{7}{5} Sk \frac{d\varepsilon}{dt} = Sk \frac{d\varepsilon}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0,$$

$$\varepsilon = \text{konst.}$$

Daraus folgt weiter $\frac{d\varepsilon}{dt} =$ konst., und daraus wieder, daß die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit gradeaus rollt, unter allen Umständen.

Dem widerspricht zunächst die Erfahrungstatsache, daß die Geschwindigkeit sich allmählich auf 0 reduziert. Davon könnte man noch auf Luftwiderstand schließen. Ein böserer Widerspruch ist in der dem Billardspieler bekannten Wirkung des „Effet"stoßes zu sehn. Der Ball rotiert dabei ziemlich rasch um eine nahezu vertikale Achse und beschreibt dabei eine mehr oder weniger gekrümmte Bahn. Aber seine Translationsgeschwindigkeit ist dabei recht gering im Vergleich mit der Rotationsgeschwindigkeit, und das läßt den Schluß zu: Hier ist mit dem Rollen ein Gleiten verbunden, und zwar, wie es der Wirkung der Reibung entspricht, ein rückwärts gerichtetes Gleiten. Das setzt eine beträchtliche Reibung voraus, und demzufolge möchte ich behaupten, daß auf einem Billard aus Spiegelglas der Effetstoß versagen würde. Der rollende Körper wird stets den ruhenden in einer Fläche berühren, welche durch eine geringfügige gegenseitige Deformation zustande kommt und um so größer ist, je geringer die Elastizitätsmoduln sind. Infolgedessen werden erstens Druckkräfte in der Normalenrichtung auftreten, welche genau anzugeben sehr schwierig sein dürfte, und zweitens Drehungsmomente infolge der Reibung in dieser kleinen Fläche, wenigstens wenn die momentane Rotation eine Kreiselkomponente hat. Ich glaube, daß jede zahlenmäßige Annahme über die Größe sowohl der normalen Kraft als des Drehungsmomentes ganz willkürlich ist. Dazu wissen wir viel zu wenig über Struktur und Molekularkräfte an den Oberflächen der Körper. Aber soviel ist sicher, daß alle diese Kräfte sehr klein sind, um so kleiner, je glatter die beiden Flächen sind und je langsamer die Bewegung erfolgt.

Annäherung an die Wirklichkeit bleibt jede physikalische Rechnung. In der geometrischen Optik unterscheidet man sogar Näherungen verschiedener Stufe. Ich beschränke mich also hier mit Bewußtsein darauf, eine Rollbewegung in der beschriebenen Weise zu betrachten, als eine erste Annäherung. Ich nehme an, daß ein allmählich in Bewegung geratender Körper von Anfang an sich diesen Gleichungen entsprechend verhält, ein gestoßener aber zuerst noch ein Gleiten, mit der Richtung des Fortschreitens oder gegen sie ausführt, welches bald infolge der Reibung in ein gleitungsfreies Rollen übergeht. Für die Richtigkeit dieser Annahme findet man leicht Bestätigungen auf dem Billard wie auf der Kegelbahn.

Zum Schlusse dieses Abschnittes erwähne ich die selbstverständliche Tatsache, daß der Satz von der Erhaltung der Energie auch bei diesem Problem ein Integral darstellt, und leite sie ab.

Setzt man wieder

$$\Phi\varepsilon = A\alpha \cdot S\alpha\varepsilon + B\beta \cdot S\beta\varepsilon + C\gamma \cdot S\gamma\varepsilon,$$

so folgt

$$\frac{d\Phi\varepsilon}{dt} = A \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot S\alpha\varepsilon + B\frac{d\beta}{dt} \cdot S\beta\varepsilon + C \cdot \frac{d\gamma}{dt} \cdot S\gamma\varepsilon$$

$$+ A\alpha \cdot S\varepsilon\frac{d\alpha}{dt} + B\beta \cdot S\varepsilon\frac{d\beta}{dt} + C\gamma \cdot S\varepsilon\frac{d\gamma}{dt}$$

$$+ A\alpha \cdot S\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} + B\beta \cdot S\beta\frac{d\varepsilon}{dt} + C\gamma \cdot S\gamma\frac{d\varepsilon}{dt}$$

und da α eine im Körper feste Richtung ist, ist

$$\frac{d\alpha}{dt} = V\varepsilon\alpha,$$

$$S\varepsilon\frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

also

$$\frac{d\Phi\varepsilon}{dt} = A \cdot V\varepsilon\alpha \cdot S\alpha\varepsilon + B \cdot V\varepsilon\beta \cdot S\beta\varepsilon + C \cdot V\varepsilon\gamma \cdot S\gamma\varepsilon + \Phi\frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$= \Phi\frac{d\varepsilon}{dt} + V\varepsilon\Phi\varepsilon.$$

Ferner ist die Bewegungsenergie

$$K = \Sigma\frac{1}{2}mv^2$$

$$= -\Sigma\frac{1}{2}m\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left[\Sigma m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + M \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\Sigma m\, V^2\varepsilon\sigma + M \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]$$

$$K = \frac{1}{2}S\varepsilon\Phi\varepsilon - \frac{1}{2}M \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2,$$

also

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} S \frac{d\varepsilon}{dt} \Phi\varepsilon + \frac{1}{2} S\varepsilon \frac{d\Phi\varepsilon}{dt} - M \cdot S \frac{d\zeta}{dt} \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

$$= \frac{1}{2} S \frac{d\varepsilon}{dt} \Phi\varepsilon + \frac{1}{2} S\varepsilon\Phi \frac{d\varepsilon}{dt} - M \cdot S\varepsilon(\zeta - \xi) \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

$$= S\varepsilon\Phi \frac{d\varepsilon}{dt} - M \cdot S\varepsilon(\zeta - \xi) \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

$$\frac{dK}{dt} = S\varepsilon \frac{d\Phi\varepsilon}{dt} - M \cdot S\varepsilon(\zeta - \xi) \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Aus Gleichung 41) folgt:

$$S\varepsilon \frac{d\Phi\varepsilon}{dt} = MS\varepsilon(\zeta - \xi)\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + gk\right)$$

$$S\varepsilon \frac{d\Phi\varepsilon}{dt} - M \cdot S\varepsilon(\zeta - \xi)\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Mg \cdot S\varepsilon(\zeta - \xi)k$$

$$\frac{dK}{dt} = Mg \cdot S \frac{d\zeta}{dt} k$$

$$K - Mg \cdot Sk\zeta = \text{konst.}$$

Hierin ist ja $-Sk\zeta$ die Höhe des Schwerpunktes über der ij-Ebene. Diese Energiegleichung kann auch geschrieben werden:

$$\frac{1}{2} S\varepsilon\Phi\varepsilon - \frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 - Mg \cdot Sk\zeta = \text{konst.} \tag{43}$$

Ein weiteres allgemeingültiges Integral kann nicht gegeben werden.

IV.

Anwendungen auf Spezialfälle.

1. Den Fall, daß eine homogene Kugel auf einer wagrechten Ebene rollt, führe ich hier bis zu Ende durch, weil er anscheinend der einzige ist, bei dem es wirklich ausführbar ist.

Es hat sich bereits ergeben, daß ε konstant und

$$\frac{d\xi}{dt} = r \cdot V\varepsilon k$$

ist. Hiernach ist

$$v = T \frac{d\xi}{dt} = r \cdot TV\varepsilon k,$$

und es kann

$$s = r \cdot TV\varepsilon k \cdot t.$$

gesetzt werden, sowie

$$\xi = UV\varepsilon k \cdot s.$$

Dann wird

$$\xi' = UV\varepsilon k, \ \mu = k, \ \xi'' = 0, \ \mu' = 0,$$

$$C_g = 0, \ E = 0, \ C_n = 0.$$

Für die Kugel ist zu irgend einer Zeit

$$r \cdot \nu = \zeta - \eta, \ r\nu' = -\eta',$$

$$e = 0, \ c_n = \frac{1}{r}.$$

So nimmt die geometrische Gleichung für ε die Gestalt an:

$$\varepsilon = r \cdot TV\varepsilon k \cdot \left[-k \cdot c_g + \frac{1}{r} VkUV\varepsilon k \right]$$

$$\varepsilon = -k \cdot r \cdot c_g \cdot TV\varepsilon k + VkV\varepsilon k$$

$$\varepsilon = -k \cdot r \cdot c_g \cdot TV\varepsilon k + k \cdot Sk\varepsilon + \varepsilon,$$

woraus folgt

$$-rc_g \cdot TV\varepsilon k + Sk\varepsilon = 0,$$

$$c_g = \frac{Sk\varepsilon}{r \cdot TVk\varepsilon}.$$

Bezeichnet man den Winkel zwischen k und ε mit a, so ist

$$c_g = -\frac{cotg\, a}{r}.$$

Daraus folgt weiter

$$c^2 = \frac{cotg^2\, a}{r^2} + \frac{1}{r^2}$$

$$c = \frac{cosec\, a}{r}$$

Es sind c_g und c_n Konstanten, also

$$c_g' = 0, \ c_n' = 0,$$

$$\mathfrak{T} = -e = 0.$$

Die Rollkurve auf der Kugel ist also eben, ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{c} = r \cdot sin\, a.$

Die Anwendung des in I gegebenen Integrationsverfahrens für λ und w liefert hier schon aus Gleichung 12)

$$2\frac{d^2w}{dt^2}+cotg\frac{w}{2}\cdot\left[\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+\varepsilon^2\right]=0,$$

$$2\frac{dw}{dt}\cdot\frac{d^2w}{dt^2}+2\cdot cotg\frac{w}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{dw}{dt}\cdot\left[\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+\varepsilon^2\right]=0$$

$$sin\frac{w}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+\varepsilon^2\right]+\left[\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+\varepsilon^2\right]\cdot\frac{d\,sin^2\frac{w}{2}}{dt}=0,$$

$$sin\frac{w}{2}\cdot\left[\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+\varepsilon^2\right]=\text{konst.}$$

Da zu Beginn der Bewegung — der Rollbewegung ohne Gleiten — $w=0$ sein muß, folgt, daß hier die Konstante $=0$ zu setzen ist, also

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+\varepsilon^2=0,$$

$$\frac{dw}{dt}=T\varepsilon,$$

$$w=T\varepsilon\cdot t,$$

ferner

$$S\varepsilon\lambda=-T\varepsilon,$$

$$S\lambda U\varepsilon=-1,$$

und diese Gleichung in Verbindung mit $\lambda^2=-1$ zeigt, daß

$$\lambda=U\varepsilon.$$

Demnach ist hier

$$\varphi\varrho_0=\varrho_0\,cos\,T\varepsilon\cdot t-U\varepsilon\cdot S\varrho_0U\varepsilon\cdot(1-cos\,T\varepsilon\cdot t)+VU\varepsilon\varrho_0\cdot sin\,T\varepsilon\cdot t$$

Aus der Gleichung

$$\zeta=\varphi\zeta_0+\tau$$

wird

$$\xi+kr=r\cdot\varphi k+\tau$$

$$\tau=r\cdot[V\varepsilon k\cdot t-\varphi k-k].$$

Dies Resultat kann zunächst falsch erscheinen; es erklärt sich aber sofort daraus, daß ja die Gleichung 1) in der ausdrücklichen Voraussetzung aufgestellt worden ist, die Totaldrehung erfolge um den Nullpunkt.

Man erhält so als Bewegungsgleichung für jeden beliebigen Punkt der Kugel

$$\varrho = \varphi(\varrho_0 - kr) + r(V\varepsilon k \cdot t - k).$$

2. Wenn eine homogene Kugel auf einer beliebigen Fläche rollt, so kann

$$\zeta = \xi + r\mu$$

gesetzt werden. Die Gleichung 42) gibt dann

$$\frac{d\zeta}{dt} = r \cdot V\varepsilon\mu, \tag{44}$$

dazu

$$r\frac{d\mu}{dt} = r \cdot V\varepsilon\mu - \frac{d\xi}{dt}$$

oder auch

$$\frac{d\xi}{dt} = r \cdot \left(V\varepsilon\mu - \frac{d\mu}{dt}\right) \tag{45}$$

So nimmt Gleichung 41) die Gestalt an:

$$-\frac{2}{5}Mr^2 \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = Mr \cdot V\mu\left(r\frac{dV\varepsilon\mu}{dt} + gk\right)$$

$$-\frac{2}{5}r \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = r \cdot V\mu\frac{dV\varepsilon\mu}{dt} + g \cdot V\mu k$$

$$= r \cdot V\mu\left(-V\mu\frac{d\varepsilon}{dt} + V\varepsilon\frac{d\mu}{dt}\right) + g \cdot V\mu k$$

$$= r\left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \mu \cdot S\mu\frac{d\varepsilon}{dt} + V\mu V\varepsilon\frac{d\mu}{dt}\right) + g \cdot V\mu k$$

$$-\frac{7}{5}r \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = r\left(\mu S\mu\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d\mu}{dt} \cdot S\varepsilon\mu\right) + g \cdot V\mu k.$$

Hieraus folgt sofort

$$S\mu\frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \tag{46}$$

und damit wird

$$\frac{7}{5}r \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + S\varepsilon\mu \cdot \frac{d\mu}{dt} + g \cdot V\mu k = 0. \tag{47}$$

Hierzu kommt die Energiegleichung in der Gestalt

$$\frac{7}{10}r^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}r^2 \cdot S^2\varepsilon\mu + g \cdot Sk(\xi + \mu r) = \text{konst.} \tag{48}$$

Aus Gleichung 46) ist zu schließen:

$$\frac{d}{dt} S\varepsilon\mu = S\varepsilon \frac{d\mu}{dt}$$

$$= -\frac{1}{r} S\varepsilon \frac{d\xi}{dt} \quad \text{(Gleichung 45)}$$

$$= -\frac{v}{r} S\varepsilon\xi'$$

$$\frac{d}{dt} S\mu\varepsilon = \frac{v^2}{r} \cdot E,$$

weil bei der Kugel $e = 0$ ist.

Wenn also die Kugel auf einer Ebene oder einer anderen Kugel oder längs einer Krümmungslinie auf einer beliebigen Fläche rollt, so ist $S\mu\varepsilon$ konstant; die Kreiselbewegung erfolgt also immer gleichmäßig.

Dieselbe Gleichung 46) gibt auch Anlaß zu einer gerade für die Untersuchung des Kugelrollens recht nützlichen Umformung der Gleichung 47).

Setzt man

$$v \cdot (C_g - c_g) = N,$$

so wird

$$\varepsilon = \mu N + \frac{d\xi}{dt} \cdot E + V\mu \frac{d\xi}{dt} \cdot \left(\frac{1}{r} - C_n\right).$$

Indem man auf die unmittelbaren Beziehungen zur Krümmung und zur Bogenlänge verzichtet, kann man ableiten:

$$E = S\mu\xi'\mu'$$

$$v^2 \cdot E = S\mu \frac{d\xi}{dt} \frac{d\mu}{dt}$$

$$C_n = S\mu'\xi'$$

$$v^2 \cdot C_n = S \frac{d\mu}{dt} \frac{d\xi}{dt}$$

$$v^2 \cdot \varepsilon = \mu v^2 N + \frac{d\xi}{dt} \cdot S\mu \frac{d\xi}{dt} \frac{d\mu}{dt} - V\mu \frac{d\xi}{dt} \cdot \left(S \frac{d\mu}{dt} \frac{d\xi}{dt} - \frac{v^2}{r}\right)$$

$$= \mu v^2 N - V \frac{d\mu}{dt} V \frac{d\xi}{dt} V\mu \frac{d\xi}{dt} + \frac{v^2}{r} \cdot V\mu \frac{d\xi}{dt}$$

$$= \mu v^2 N - V\mu \frac{d\xi}{dt} \cdot \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \frac{v^2}{r} \cdot V\mu \frac{d\xi}{dt},$$

und da $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = -v^2$:

$$\varepsilon = \mu N + V\mu \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{r} V\mu \frac{d\xi}{dt}$$

$$r \cdot \varepsilon = \mu \cdot r \cdot N + V\mu \frac{d\xi}{dt} + r \cdot V\mu \frac{d\mu}{dt}$$

$$= \mu r N + V\mu \left(\frac{d\xi}{dt} + r \frac{d\mu}{dt}\right)$$

$$r\varepsilon = \mu r N + V\mu \frac{d\zeta}{dt}.$$

Hierzu tritt, da $N = -S\mu\varepsilon$ ist, die Gleichung

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{v^2}{r} \cdot E$$

$$= -\frac{1}{r} \cdot S\mu \frac{d\xi}{dt} \frac{d\mu}{dt}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{r} \cdot S\mu \frac{d\zeta}{dt} \frac{d\mu}{dt}.$$

Damit erhält man

$$r \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = r\left(\mu \frac{dN}{dt} + N \frac{d\mu}{dt}\right) + V\mu \frac{d^2\zeta}{dt^2} + V \frac{d\mu}{dt} \frac{d\zeta}{dt}$$

$$r \frac{d\varepsilon}{dt} = rN \frac{d\mu}{dt} + V\mu \frac{d^2\zeta}{dt^2} + V \frac{d\mu}{dt} \frac{d\zeta}{dt} + \mu S\mu V \frac{d\mu}{dt} \frac{d\zeta}{dt}$$

$$= rN \frac{d\mu}{dt} + V\mu \frac{d^2\zeta}{dt^2} - V\mu V\mu V \frac{d\mu}{dt} \frac{d\zeta}{dt}$$

$$r \frac{d\varepsilon}{dt} = rN \frac{d\mu}{dt} + V\mu \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

Dieser Ausdruck für $\frac{d\varepsilon}{dt}$ läßt sich in die Differentialgleichung für die Bewegung der Kugel einsetzen.

$$\frac{7}{5}\left[rN \frac{d\mu}{dt} + V\mu \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right] - rN \frac{d\mu}{dt} + g V\mu k = 0$$

$$2\, rN \cdot \frac{d\mu}{dt} + 7 \cdot V\mu \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 5\, g V\mu k = 0. \qquad 49)$$

hierzu gehört

$$r \cdot \frac{dN}{dt} = S\mu \frac{d\mu}{dt} \frac{d\zeta}{dt} \qquad 50)$$

Die Energiegleichung wird hier

$$7\,V^2\mu\,\frac{d\zeta}{dt} - 2\,r^2N^2 + 10\,\mathrm{g}\cdot Sk\zeta = \text{konst.}$$

Wodurch diese Transformation nützlich wird, geht aus der folgenden Betrachtung hervor. Der Kugelmittelpunkt ζ muß bei der Rollbewegung auf einer Parallelfläche zur gegebenen im Abstande r bleiben. Die Gleichung dieser Fläche ist $\zeta = \xi + r\mu$, wenn ξ als Funktion zweier Parameter gegeben ist. Führt man an Stelle der gegebenen Fläche diese Mittelpunktsfläche ein, so bleibt μ die Normalenrichtung, denn es ist $d\zeta = d\xi + r d\mu$, also

$$S\mu d\zeta = S\mu d\xi + r\,S\mu d\mu = 0.$$

Die Größe N in den Gleichungen 49) und 50) ist die normale Komponente, die Kreiselkomponente der Momentan-Rotation. Wenn es sich zunächst um die Bestimmung der ruhenden Rollkurve handelt, oder um die der Mittelpunktsbahn, so wird man N zu eliminieren suchen.

Die Operation $V\frac{d\mu}{dt}$ auf Gleichung 49) angewendet, gibt:

$$7\,V\frac{d\mu}{dt}\;V\mu\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 5\,g\;V\frac{d\mu}{dt}\;V\mu k = 0,$$

$$-\,7\mu\cdot S\frac{d\mu}{dt}\,\frac{d\,\zeta}{dt^2} - 5\,g\,\mu\cdot Sk\frac{d\mu}{dt} = 0,$$

51) $$7\,S\frac{d\mu}{dt}\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 5\,g\cdot Sk\frac{d\mu}{dt} = 0.$$

Diese eine Skalargleichung reicht nicht aus zur Bestimmung der Mittelpunktsbahn; es wird also notwendig, mit Hilfe einer Differentiation noch einmal N zu beseitigen. Diese Elimination liefert an der allgemeinen Gleichung nicht viel Erfolg; zudem scheint es bei den speziellen Problemen zweckmäßiger, N in der Rechnung zu behalten. Wenn man dann einen der Flächenparameter eliminiert, erhält man jedesmal eine integrable Gleichung, welche der Energiegleichung entspricht.

3. Als erste Anwendung hiervon behandle ich die Bewegung einer homogenen Kugel auf einer schiefen Ebene. Es sei

$$\mu = k\cos a + j\sin a,$$

und der Nullpunkt soweit über der Ebene gewählt, daß die Parallelfläche für ζ ihn enthält. Aus Gleichung 50) ergibt sich dann, daß N konstant ist; aus 51) entfällt N von selbst:

$$7\,V\mu\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}\,5\,g\,V\mu k = 0.$$

Da μ konstant ist, folgt aus der Gleichung der ζ-Ebene

$$S\mu\zeta = 0,$$

$$S\mu\,\frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

$$S\mu\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0,$$

also

$$7\mu\cdot\frac{d^2\zeta}{dt^2}+5g\cdot V\mu k=0;$$

hieraus durch vordere Multiplikation mit μ:

$$-7\frac{d^2\zeta}{dt^2}+5g\mu V\mu k=0,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{5}{7}g\cdot V\mu V\mu k$$

$$=\frac{5}{7}g\sin a\cdot V\mu i.$$

Schon hieraus ist zu erkennen, daß der Kugelmittelpunkt eine Parabel beschreibt. Es folgt

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{5}{7}g\sin a\cdot V\mu i\cdot t+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0.$$

Der höchste Punkt dieser Parabel wird zu der Zeit erreicht, für welche $Sk\frac{d\zeta}{dt}=0$ ist, also

$$\frac{5}{7}g\sin^2 a\cdot t_0+Sk\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0=0.$$

Wählt man hier den Anfang für die Zeitzählung, so wird $Sk\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0=0$; hierzu kommt die konstante Bedingung $S\mu\frac{d\zeta}{dt}=0$, also wird

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 \parallel Vk\mu \parallel i.$$

Man kann $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0=v_0\cdot i$ setzen und erhält so

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{5}{7}g\sin a\cdot V\mu i\cdot t+v_0 i.$$

Die zweite Integration gibt

$$\zeta=\frac{5}{14}g\sin a\cdot V\mu i\cdot t^2+v_0\cdot i\cdot t,$$

indem man als höchsten Punkt der Parabel den Nullpunkt denkt.

Man findet dann

$$\varepsilon=\mu N+\frac{1}{r}V\mu\frac{d\zeta}{dt}$$

$$=\mu N+\frac{1}{r}\left[V\mu i\cdot v_0-i\cdot\frac{5}{7}g\sin a\cdot t\right]$$

und erkennt, daß die Rotationsgeschwindigkeit hier nicht mehr konstant ist. Sie hat einen Grenzwert zu der Zeit, für die

$$\frac{dT\varepsilon}{dt} = 0$$

ist, also

$$S\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} = 0,$$

$$S\varepsilon i = 0,$$

$$t = 0.$$

Der zweite Differentialquotient von $T\varepsilon^2$,

$$-2\left(S\varepsilon \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2\right),$$

wird hier notwendig positiv, also hat $T\varepsilon$ im Scheitel der Parabel ein Minimum, und das beträgt

$$\sqrt{N^2 + \frac{v_0^2}{r^2}}$$

Für unendlich wachsendes t wird ε mehr und mehr parallel zur Scheiteltangente und die Bewegung nähert sich einem reinen Rollen.

Man könnte nun auch versuchen, die Rollkurven zu bestimmen. Die ruhende ist leicht zu finden:

$$\xi = \frac{1}{2} g_1 \cdot V\mu i \cdot t^2 + v_0 \cdot i \cdot t - \mu r,$$

wo $g_1 = \frac{5}{7} g \sin a$ gesetzt ist. So folgt

$$\frac{d\xi}{dt} = g_1 \cdot V\mu i \cdot t + v_0 i$$

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = -(g_1^2 t^2 + v_0^2)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_1^2 t^2 + v_0^2}$$

Hieraus ergibt sich

$$s = \frac{v_0^2}{2g_1} \cdot \left[\frac{g_1 t}{v_0} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{g_1 t}{v_0}\right)^2} + l\left(\frac{g_1 t}{v_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{g_1 t}{v_0}\right)^2}\right)\right],$$

so daß man besser tut, s in Wirklichkeit nicht einzuführen.

Man erhält

$$\xi' = \frac{1}{v} \cdot \frac{d\xi}{dt},$$

$$\xi'' = -\frac{1}{v^4}\, V \frac{d\xi}{dt}\, V \frac{d\xi}{dt} \frac{d^2\xi}{dt^2},$$

$$S\mu\xi'\xi'' = \frac{1}{v^3} \cdot S\mu \frac{d\xi}{dt} \frac{d^2\xi}{dt^2},$$

$$= -\frac{v_0 g_1}{v^3},$$

also

$$Cg = \frac{v_0 g_1}{v^3},$$

$$Cg = \frac{v_0 g_1 - Nv^2}{v^3},$$

$$Cg' = \frac{g_1^2 \cdot t \cdot (Nv^2 - 3v_0 g_1)}{v^6},$$

ferner die Torsion der Kugelkurve:

$$\mathfrak{T} = \frac{r g_1^2 t \cdot (Nv^2 - 3v_0 g_1)}{v^6 + r^2 (Nv^2 - v_0 g_1)^2}$$

und die totale Krümmung

$$c = \frac{1}{rv^3} \sqrt{v^6 + r^2 (Nv^2 - v_0 g_1)^2}$$

Die Riccatische Gleichung, welche nun zu lösen wäre (vgl. Scheffers):

$$2\sqrt{-1} \cdot \frac{du}{dt} = v\,[-\mathfrak{T} + 2\,cu + \mathfrak{T} \cdot u^2],$$

wird aussichtslos kompliziert.

4. Eine homogene Kugel in einem wagerechten Kreiszylinder. Man kann, indem man die x = Achse als Zylinderachse nimmt, setzen

$$\mu = k \cos u - j \sin u,$$

$$\zeta = ix - \mu a.$$

So wird

$$\frac{d\mu}{dt} = Vi\mu \cdot \frac{du}{dt},$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = i \cdot \frac{dx}{dt} - Vi\mu \cdot a \cdot \frac{du}{dt},$$

$$S\mu \frac{d\mu}{dt} \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{du}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}$$

also

$$r \cdot \frac{dN}{dt} = -\frac{du}{dt} \frac{dx}{dt}.$$

Gleichung 41) wird hier:

$$\left(2rN\frac{du}{dt}-7\frac{d^2x}{dt^2}\right)\cdot Viu-\left(7a\frac{d^2u}{dt^2}+5g\sin u\right)\cdot i=0,$$

es folgt also

$$2rN\frac{du}{dt}=7\frac{d^2x}{dt^2}$$

und

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{5g}{7a}\cdot\sin u.$$

Diese Gleichung scheint mir besonders interessant, da sie zeigt, daß die Abweichungen der Kugel von der tiefsten Linie des Zylinders genau isochron verlaufen mit den Schwingungen eines Pendels von der Länge $\frac{7}{5}a$.

Will man hiernach auch x und N bestimmen, so kann man etwa die Legendresche Funktion *am* benutzen und

$$u=2am\left(\sqrt{\frac{5g}{7a}}\cdot\sin\frac{1}{2}u_0\cdot t\right)$$

setzen. Es ergibt sich dann

$$7\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-2rN\frac{du}{dt}\frac{dx}{dt}=0$$

$$7\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+2r^2N\frac{dN}{dt}=0$$

$$\frac{7}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+r^2N^2=\text{konst.}=\frac{7}{2}b^2$$

$$2rN=\sqrt{14\left[b^2-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]}$$

$$\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\frac{du}{dt}=\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{b^2-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot(u-u_0)=arc\sin\frac{dx}{bdt},$$

$$\frac{dx}{dt}=b\sin\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot(u-u_0)$$

und hieraus ergibt sich x als eine periodische, aber $\left(\text{wegen des Faktors }\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ nicht in geschlossener Form darstellbare Funktion von t.

Die ziemlich langwierigen Rechnungen setze ich nicht hierher. Das Problem kann angenähert auf die Bewegung der Kegelkugel bezogen werden, aber auch wirklich nur wenig angenähert.

5. Ein gewisses Interesse hat die Rollbewegung einer Kugel in einer Rotationsfläche mit senkrechter Achse für sich. Die ζ-Fläche ist dann von derselben Beschaffenheit und man kann

$$\zeta = kz + \sigma q$$

setzen, wo σ ein horizontaler Einheitsvektor, bestimmt durch die geographische Länge, und q ein Querschnittsradius ist. Die erzeugende Kurve, ein Meridian, soll dadurch bestimmt sein, daß z und q als Funktionen der Bogenlänge m des Meridians gegeben sind, wobei m von unten herauf gemessen ist. Es bezeichne ferner τ die Meridiantangente und C_m die Meridiankrümmung.

So folgt

$$\left(\frac{dz}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dm}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{d^2z}{dm^2} = C_m \cdot \frac{dq}{dm}, \; \frac{d^2q}{dm^2} = - C_m \frac{dz}{dm}$$

$$d\sigma = Vk\sigma \cdot dl$$

$$\tau = k\frac{dz}{dm} + \sigma\frac{dq}{dm}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \tau \cdot \frac{dm}{dt} + Vk\sigma \cdot q \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\mu = k \cdot \frac{dq}{dm} - \sigma \cdot \frac{dz}{dm}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = - \tau \cdot C_m \cdot \frac{dm}{dt} - Vk\sigma \cdot \frac{dz}{dm} \cdot \frac{dl}{dt}$$

Die Größe $S\mu \dfrac{d\mu}{dt}\dfrac{d\zeta}{dt}$ berechnet sich bequem als Wert der Determinante

$$- \begin{vmatrix} \dfrac{dq}{dm} & -\dfrac{dz}{dm} & 0 \\ -C_m \cdot \dfrac{dz}{dm} \cdot \dfrac{dm}{dt} & -C_m \cdot \dfrac{dq}{dm} \cdot \dfrac{dm}{dt} & -\dfrac{dz}{dm} \cdot \dfrac{dl}{dt} \\ \dfrac{dz}{dm} \cdot \dfrac{dm}{dt} & \dfrac{dq}{dm} \cdot \dfrac{dm}{dt} & q \cdot \dfrac{dl}{dt} \end{vmatrix},$$

es wird

$$r \cdot \frac{dN}{dt} = \left(q \cdot C_m - \frac{dz}{dm}\right) \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{dm}{dt}, \tag{52}$$

ferner

$$\frac{d\tau}{dt} = \mu \cdot C_m \cdot \frac{dm}{dt} + Vk\sigma \cdot \frac{dq}{dm} \cdot \frac{dl}{dt},$$

also

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mu C_m \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + 2\, Vk\sigma \frac{dq}{dm} \cdot \frac{dm}{dt} \frac{dl}{dt} - \sigma q \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \tau \frac{d^2m}{dt^2} + Vk\sigma \cdot q \cdot \frac{d^2l}{dt^2},$$

$$V\mu \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\tau \left(q \frac{d^2l}{dt^2} + 2 \frac{dq}{dm} \frac{dm}{dt} \frac{dl}{dt}\right) + Vk\sigma \cdot \left(\frac{d^2m}{dt^2} - q \cdot \frac{dq}{dm} \left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right).$$

So zerfällt Gleichung 49) in die Skalargleichungen

53) $$2\,rNC_m \frac{dm}{dt} + 7\left(q \frac{d^2l}{dt^2} + 2 \frac{dq}{dm} \frac{dm}{dt} \frac{dl}{dt}\right) = 0$$

54) $$2rN \frac{dz}{dm} \frac{dl}{dt} + 7\left[\frac{d^2m}{dt^2} - q \cdot \frac{dq}{dm} \cdot \left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right] + 5g \frac{dz}{dm} = 0.$$

Nimmt man hierzu die beiden Gleichungen, welche z und q als Funktionen von m ausdrücken, so hat man fünf simultane Differentialgleichungen, um l, m, z, q, N als Funktionen von t ausfindig zu machen.

In dieser allgemeinen Gestalt ist wieder außer dem Satz von der Energie kein Integral zu erkennen, auch wenn man die ziemlich leichte Elimination von l ausführt.

Die Energiegleichung wird

55) $$7\left[\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + q^2 \cdot \left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right] + 2\,r^2N^2 + 10gz = \text{konst.}$$

6. Hiernach erhält man für eine Kugel in einer Hohlkugel

$$C_m = \frac{1}{a},\ \frac{dN}{dt} = 0,\ N = \text{konst.},$$

dadurch wird Gleichung 53) integrabel:

$$-2rN\cos\frac{m}{a} + 7a\sin^2\frac{m}{a} \cdot \frac{dl}{dt} = \text{konst.},$$

und 54) wird

$$-2rN\sin\frac{m}{a}\frac{dl}{dt} + 7\left[\frac{d^2m}{dt^2} - a\sin\frac{m}{a}\cos\frac{m}{a} \cdot \left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right] + 5g\sin\frac{m}{a} = 0.$$

Das Integral, welches man hieraus nach Elimination von $\frac{dl}{dt}$ oder durch Multiplikation der zweiten Gleichung mit $\frac{dm}{dt}$ und passende Kombination erhält, ist mit der Energiegleichung übereinstimmend und zeigt, daß m im allgemeinen nicht in geschlossener Form als Funktion von t darstellbar ist.

Wenn $\frac{dl}{dt} = 0$ ist, die Kugel also auf einem Meridian rollt, wird auch $N = 0$,

$$7\frac{d^2m}{dt^2} + 5\,g\,sin\,\frac{m}{a} = 0,$$

und wenn man $m = a \cdot u$ setzt, so zeigt die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{5g}{7a} \cdot sin\,u,$$

daß hier wieder eine Pendelbewegung stattfindet.

Wenn statt dessen m konstant ist, so wird auch $\frac{dl}{dt}$ konstant; ist m festgelegt, so kann von den beiden Größen N und $\frac{dl}{dt}$ eine noch beliebig bestimmt werden. Sie sind dann durch die Gleichung

$$2\,rN\frac{dl}{dt} + 7a\,cos\,\frac{m}{a} \cdot \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = 5\,g$$

verbunden. Die entsprechende Kreisbewegung beim Pendel ist nur eindeutig bestimmt.

7. Auf ein eigentümliches Resultat gelangt man bei der Betrachtung einer Kugel in einem vertikalen Kreiszylinder. Hier ist $C_m = 0$, q konstant und z kann $= m$ gesetzt werden. Man findet

$$r\frac{dN}{dt} = -\frac{dl}{dt}\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2l}{dt^2} = 0, \qquad \frac{dl}{dt} = \text{konst.} = c,$$

$$7\frac{d^2z}{dt^2} - 2\,rc \cdot N + 5g = v.$$

Nach Elimination von N

$$7\frac{d^3z}{dt^3} + 2c^2 \cdot \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$z = A + B\cos\sqrt{\frac{2}{7}}\,ct + C\sin\sqrt{\frac{2}{7}}\,ct.$$

Hierin kann $A = 0$ gesetzt werden, dazu $l = ct$, und man findet als Bahngleichung

$$z = B\cos l\sqrt{\frac{2}{7}} + C \cdot \sin l\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Das gibt auf dem Zylinder eine vielfältig verschlungene Kurve, welche herauf und herunter geht, so daß die Kugel auch nach dem Sinken wieder ansteigt. Das kann erklärlich scheinen: eben infolge der durch die Rotation veranlaßten Reibung. Ob es wirklich möglich ist, müßte mit Röhren und Kugeln aus geeignetem Material erprobt werden.

8. Wenn man die Rollbewegungen andrer Körper als homogener Kugeln zu entwickeln versucht, wird man fast durchweg abgeschreckt durch die große Anzahl variabler Größen, welche in die Rechnung eintreten. Einigermaßen angreifbar erscheint noch das Problem: Wie rollt ein homogener Rotationskörper ~~auf~~ einer wagrechten Ebene?

Man kann ohne Erhöhung der Schwierigkeit das Wort „homogen" hier dahin deuten, daß alle Meridianschnitte dieselbe Struktur haben sollen. Der Schwerpunkt ζ liegt dann in der Achse. Deren Richtung sei γ, so kann die Gleichung der Oberfläche in der Gestalt

$$\eta = \zeta + \varrho, \quad \varrho = \gamma z + \sigma q$$

gegeben werden, worin zunächst ζ als konstant anzusehn ist, σ einen variablen, zu γ senkrechten Einheitsvektor und q den Querschnittsradius bedeutet. Die Gestalt der Fläche sei dadurch bestimmt, daß z und q als Funktionen der Bogenlänge m des Meridians gegeben seien. So ist

$$dz = z_1 \cdot dm, \quad dq = q_1 \cdot dm,$$

$$z_1^2 + q_1^2 = 1,$$

$$z_{11} = \frac{d^2 z}{dm^2} = c_m \cdot q_1, \quad q_{11} = - c_m \cdot z_1,$$

worin c_m die Krümmung des Meridians bedeutet.

Der Vektor σ ist als Funktion der geographischen Länge l anzusehen, so daß

$$d\sigma = V\gamma\sigma \cdot dl$$

gesetzt werden kann. Es folgt dann

$$d\eta = (\gamma z_1 + \sigma q_1)\, dm + V\gamma\sigma \cdot q \cdot dl$$

oder

$$\eta' = \tau \cdot m' + V\gamma\sigma \cdot q \cdot l',$$

indem die Striche wieder Differentiationen nach der wirklichen Bogenlänge andeuten sollen und die Meridiantangente mit τ bezeichnet wird. Hieraus folgt

$$m'^2 + q^2 \cdot l'^2 = 1,$$

und wenn man den Winkel der Kurvenrichtung mit dem Meridian u nennt, kann man

$$m' = \cos u, \quad ql' = \sin u$$

setzen. Dann ist u als eine vorläufig unbestimmte Funktion von s anzusehen und analoges gilt für m, q, z und l. So folgt

$$\eta' = \tau \cos u + V\gamma\sigma \cdot \sin u.$$

Die Normale muß parallel zu $V\tau V\gamma\sigma$ sein; man findet ihre Innenrichtung als

$$\nu = \gamma q_1 - \sigma z_1.$$

Man findet nur

$$\tau' = \nu \cdot c_m \cdot \cos u + V\gamma\sigma \cdot q_1 l',$$

und indem man zur Abkürzung

$$\frac{q_1}{q} = q_2, \quad \frac{z_1}{q} = z_2$$

setzt:

$$\tau' = \nu \cdot c_m \cos u + V\gamma\sigma \cdot q_2 \cdot \sin u$$

$$\nu' = -\tau \cdot c_m \cdot \cos u - V\gamma\sigma \cdot z_2 \cdot \sin u.$$

Bemerkenswert ist die Beziehung

$$V\nu\tau = V\gamma\sigma.$$

Endlich wird

$$\eta'' = \tau' \cos u + V\gamma\sigma' \cdot \sin u + (-\tau \sin u + V\gamma\sigma \cdot \cos u) \cdot u$$

$$= (\nu \cdot c_m \cdot \cos u + V\nu\tau \cdot q_2 \cdot \sin u) \cos u - \sigma l' \sin u + (-\tau \sin u + V\iota\tau \cdot \cos u)\, u'$$

$$= \nu\,(c_m \cos^2 u + z_2 \cdot \sin^2 u) - \tau \cdot \sin u\,(u' + q_2 \sin u) + V\nu\tau \cdot \cos u \cdot (u' + q_2 \sin u)$$

und die Krümmungsgrößen bestimmen sich nun folgendermaßen

$$c_g = -S\nu\eta'\eta''$$

$$= -(u' + q_2 \sin u) \cdot S\nu\,(\tau \cos u + V\nu\tau \sin u)\,(-\tau \sin u + V\nu\tau \cos u)$$

$$c_g = u' + q_2 \sin u$$

$$e = S\nu\eta'\nu'$$

$$= -S\nu\,(\tau \cos u + V\nu\tau \sin u)\,(\tau c_m \cos u + V\nu\tau\, z_2 \sin u)$$

$$= z_2 \sin u \cos u - c_m \sin u \cos u$$

$$e = (z_2 - c_m) \sin u \cos u$$

$$c_n = -S\nu\eta''$$

$$c_n = c_m \cos^2 u + z_2 \sin^2 u.$$

Es scheint unter Umständen vorteilhaft zu sein, auch noch den Winkel einzuführen, den die Meridiantangente mit dem umgekehrten Berührungsradius bildet (weil das nachher der Neigungswinkel des Vektors $\zeta - \xi$ gegen die wagerechte Ebene wird). Ich setze also

$$S\,U\varrho\tau = \cos h,$$

so wird

$$zz_1 + qq_1 = -r \cdot \cos h,$$

$$rz = q \sin h - z \cos h,$$

$$rq_1 = -q \cos h - z \cdot \sin h,$$

$$\frac{dr}{dm} = -\cos h,$$

worin

$q^2 + z^2 = r^2$ gesetzt ist.

Hiermit wird

$$e = \left(h_1 - \frac{z}{qr} \cos h\right) \sin u \cos u$$

$$c_m = \frac{\sin h}{r} - h_1.$$

Für die ruhende Fläche ist

$$Sk\xi = 0,\ \mu = k,\ C_g = - Sk\xi' \xi''.$$

C_g ist hier mit der absoluten Krümmung identisch und könnte darum $= T\xi''$ gesetzt werden, doch dann entstehen Vorzeichenschwierigkeiten.

Ferner ist $E = 0$, $C_n = 0$, und wenn man wieder die Bezeichnung $N = v \cdot (C_g - c_g)$ einführt,

$$\varepsilon = kN - \frac{d\xi}{dt} \cdot e + Vk \frac{d\xi}{dt} \cdot c_n.$$

Daß nun der Körper augenblicklich im Punkte ξ die wagrechte Ebene berührt, ist durch die beiden Gleichungen

$$\zeta + \gamma z + \sigma q = \xi$$

$$\nu = \gamma q_1 - \sigma z_1 = k$$

auszudrücken. Der Vektor τ gelangt dabei in die Ebene; wenn er in der Rechnung bleiben soll, kann man die Gleichung

$$\gamma z_1 + \sigma q_1 = \tau$$

mit hinzunehmen und findet

$$\gamma = kq_1 + \tau z_1.$$

Man kann auch den Vektor $\zeta - \xi$ an Stelle von τ einführen, etwa mit dem Namen ω, und erhält damit

$$\gamma z + \sigma q = - \omega,$$

doch scheint es, daß dieser Vektor ziemlich unverwendbar ist, weil er nicht ohne weiteres mit $-\varrho$ identifiziert werden darf, wegen der Bewegung des Körpers. Nur, wenn man von vornherein die Skalargleichung des Meridians in der Form $F(T\omega,\ S\nu\omega) = 0$ oder $S\nu\omega = f(T\omega)$ annimmt, wäre die Möglichkeit gegeben, ihn zu verwerten, aber dann werden die Krümmungsskalare sehr kompliziert. Ich habe darum diesen ersten Versuch aufgegeben und zwei andere Wege nebeneinander gewählt, nämlich als unmittelbare Funktionen von t entweder τ und u oder ξ und u in den Gleichungen zu behalten.

Zur vollständigen Bestimmung der Lage des Körpers muß noch η' mit ξ' identifiziert werden.

$$\tau \cdot \cos u + Vk\tau \cdot \sin u = \xi'.$$

Hieraus folgt

$$Vk\xi' = -\tau \sin u + Vk\tau \cos u$$

$$\tau = \xi' \cos u - Vk\xi' \sin u$$

$$Vk\tau = \xi' \sin u + Vk\xi' \cos u.$$

Mehrfach verwendbar sind auch noch die Gleichungen

$$\xi'' = - Vk\xi' \cdot Sk\xi'\xi'' = Vk\xi' \cdot C_g$$

und

$$\tau' = - Vk\tau \cdot Sk\tau\tau',$$

welche aus $\xi'^2 = -1$, $S\xi'\xi'' = 0$, $Sk\xi = 0$, $Sk\xi'' = 0$ und den analogen für τ hervorgehen.

Als naheliegend erscheint es nun, vor allen Dingen auf die Bestimmung der Rollspur in der Ebene auszugehen, also τ zu eliminieren, so daß die Vektordifferentialgleichung 41) drei Skalargleichungen für u, h und C_g zu liefern hätte, aus denen schließlich C_g als Funktion von s hervorgehen sollte.

Man setzt dazu zweckmäßig

$$\varepsilon = \vartheta \cdot \frac{ds}{dt}, \text{ wo}$$

$$\frac{ds}{dt} = T\frac{d\xi}{dt}, \quad \vartheta = k(C_g - c_g) - \xi' c + Vk\xi' c_n,$$

und bestimmt

$$\gamma = kq_1 + \xi' \cdot \cos u \cdot z_1 - Vk\xi' \sin u \cdot z_1$$

$$\omega = kr \sin h + (\xi' \cos u - Vk\xi' \sin u)\, r \cos h.$$

Gleichung 42) wird dann hier:

$$\xi'' \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} V\vartheta\omega$$

$$\xi' + \omega' = V\vartheta\omega.$$

Man überzeugt sich durch die Skalaroperationen Sk, $S\xi'$, $Sk\xi'$, daß das hier eine Identität ist.

Die Trägheitsfunktion wird hier:

$$\Phi\varepsilon = A\alpha S\alpha\varepsilon + A\beta S\beta\varepsilon + C\gamma S\gamma\varepsilon$$

$$= C\gamma S\gamma\varepsilon - A(\varepsilon + \gamma S\gamma\varepsilon)$$

$$\Phi\varepsilon = (C - A)\gamma S\gamma\varepsilon - A\varepsilon.$$

Ich setze $C - A = G \cdot M$ und $A = a^2 M$. a ist dann ein Trägheitsradius; G ist die Differenz der Quadrate zweier Trägheitsradien und kann positiv oder negativ sein, je nach der Massenverteilung des Körpers. Mit $\varepsilon = \vartheta \frac{ds}{dt}$ wird

$$\Phi\varepsilon = \frac{ds}{dt} \cdot \Psi\vartheta \cdot M,$$

wo

$$\Psi\vartheta = G\gamma S\gamma\vartheta - a^2\vartheta \text{ ist.}$$

$S\gamma\vartheta$ wird $= -q_1(C_g - u') + \frac{1}{q}\,sin\,u$. Hier schon γ und ϑ durch ihre längeren Ausdrücke zu ersetzen, hätte wenig Zweck.

Aus der rechten Seite von Gleichung 41) wird hier:

$$M \cdot Vw\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + gk\right) = M \cdot Vw\left(\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2} + gk\right)$$

$$= M\,\frac{d}{dt}\,V\omega\,\frac{d\omega}{dt} + M\,V\omega\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + gk\right)$$

und so nimmt hier die Gleichung 41) die Gestalt an:

$$\frac{d}{dt}\left[v\,(\psi\vartheta - V\omega\omega')\right] = V\omega\left(\xi'' \cdot v^2 + \xi'\,\frac{dv}{dt} + gk\right)$$

oder

$$\frac{d^2s}{dt^2} \cdot (\psi\vartheta - V\omega\omega' - V\omega\xi') + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left[\frac{d\psi\vartheta}{ds} - V\omega\omega'' - V\omega\xi''\right] + g \cdot Vk\omega = 0.$$

Die Energiegleichung wird hier:

$$v^2 \cdot (S\vartheta\psi\vartheta - \zeta'^2) - 2\,g\,Sk\omega = \text{konst.},$$

und man kann hierin

$$\zeta' = V\vartheta\omega \text{ oder } = \xi' + \omega'$$

setzen.

Diese Differentialgleichungen bleiben formell bestehend, wenn man auch an Stelle von ξ und ξ' den Vektor τ einführt. In diesem Falle hat man für ω den etwas einfacheren Ausdruck

$$\omega = r\,(k\,sin\,h + \tau\,cos\,h)$$

und es ist zu beachten, daß in den Skalargleichungen schließlich τ nur in der Verbindung $Sk\tau\tau'$ und in deren Ableitung $Sk\tau\tau''$ stehen bleibt, daß aber

$$Sk\tau\tau' = u' - C_g$$

ist. Man könnte also, wenn die Gleichungen für u und $Sk\tau\tau'$ vollständig integriert wären, sofort C_g finden und daraus die Gestalt der Kurve ableiten.

Die Zerlegung in Skalargleichungen muß durch passende Skalaroperationen erfolgen, und zwar mit drei nicht komplanaren Vektoren. Die Energiegleichuug entsteht durch die Operation $S\vartheta$. Die Konstante g ist damit hinreichend berücksichtigt, und so kann man die beiden Vektoren k und ω dazu nehmen, mit Ausnahme des Falles, daß $Sk\vartheta\omega = 0$ ist. Dieser Fall soll besonders behandelt werden.

Man findet so erstens

$$\frac{d^2s}{dt^2} \cdot (Sk\psi\vartheta - Sk\omega\zeta') + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \left(Sk\,\frac{d\psi\vartheta}{ds} - Sk\omega\zeta''\right) = 0$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}(Sk\psi\vartheta - Sk\omega\zeta')\right] + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot Sk\omega''\zeta' = 0$$

und zweitens

$$\frac{d^2s}{dt^2} \cdot S\omega\psi\vartheta + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot S\omega\frac{d\psi\vartheta}{ds} = 0.$$

Mit Hilfe der Energiegleichung kann t eliminiert werden, so daß man zwei Skalargleichungen behält, welche die Rollkurve und für jeden ihrer Punkte die entsprechende Lage des Körpers bestimmen. Doch im allgemeinen Falle bietet sich da noch keine Integrationsmöglichkeit.

Ich untersuche zunächst den Fall

$$Sk\vartheta\omega = 0.$$

Das gibt

$$cos\,h \cdot Sk\tau\vartheta = 0,$$

$$C_m \cdot cos\,h \cdot cos\,u = 0$$

$C_m = 0$ bedeutet schon einen besonderen Punkt des Meridians, sonst würde ein Rollen mit linearer Berührung eintreten. Dieser Punkt liegt entweder in der Achse, ist also ein Pol, oder er liegt irgendwo auf dem Meridian, dann gibt es einen ganzen Breitenkreis von dieser Eigenschaft. Im ersten Falle folgt $z_1 = 0_1$, $z_2 = 0$, $\vartheta \parallel k$, $\omega \parallel k$, also reine Kreiselbewegung an derselben Stelle. Im zweiten würde $u = \frac{\pi}{2}$, $cos\,u = 0$ folgen, und dieser Fall schließt auch $cos\,h = 0$ als Spezialfall mit ein, von dem eben erledigten abgesehn. Es ist dann $m' = o$, also sämtliche Funktionen von m haben konstante Werte, der Körper rollt mit einem Breitenkreis. $Vk\xi'$ wird $= r$, $u' = o$,

$$c_g = q_2,\ e = 0,\ c_n = z_2,$$

$$\vartheta = k(C_g - q_2) - r\,z_2$$

$$S\gamma\vartheta = q_1 \cdot C_g + \frac{1}{q}$$

$$Skw\zeta' = -r\,cos\,h\,(1 + r\,cos\,h \cdot C_g)$$

$$Skw'\zeta' = Skw'\xi' = Srw' = 0,$$

damit wird die Sk-Gleichung integrabel:

$$\frac{ds}{dt} \cdot (Sk\psi\vartheta - Skw\zeta') = \text{konst.}$$

Ebenso wird aber $Sw'\psi\vartheta = 0$, also

$$\frac{d}{ds}Sw\psi\vartheta = Sw\frac{d\psi\vartheta}{ds},$$

und damit wird aus der Sw-Gleichung

$$\frac{ds}{dt} \cdot Sw\psi\vartheta = \text{konst.}$$

Indem man aus der Energiegleichung, in welcher auch Skw konstant ist, und einer dieser Gleichungen $\frac{ds}{dt}$ eliminiert, findet man, daß C_g konstant ist; die Rollkurve in der Ebene ist also auch ein Kreis, und er wird mit konstanter Geschwindigkeit abgerollt, da auch $\frac{ds}{dt}$ konstant ist. Diese Bewegung kann man beim Kreisel beobachten, wie auch bei einer Münze, die man zuerst in senkrechter Stellung in Rotation versetzt hat. Wendet man auf die nun sehr vereinfachte Differentialgleichung die Operation $S\xi'$ an, so erhält man auch die Bedingung, der v, C_g und die Neigung der Körperachse unterworfen sind. Nur eine Bedingung; so daß diese Bewegung mit sehr verschiedenen Nebenumständen erfolgen kann.

Auf diese Formeln ließe sich vielleicht eine Theorie des Kreisels bauen. Es scheint, daß dessen Bewegungen in hohem Maße von der Gestalt seiner Spitze abhängen. Man müßte also bestimmte Annahmen über die Form dieser Spitze machen. Indes würden die Resultate wieder nur für den Fall annähernd sein, daß die Bewegung des Kreisels bereits bedeutend abgeschwächt ist. In den beiden Fällen, die ich in Angriff genommen habe: Kugelspitze und parabolische Spitze, werden die endgültigen Formen der Differentialgleichungen noch sehr kompliziert.

und damit wird aus der Sw-Gl

Indem man aus der En … konstant ist, und einer
dieser Gleichungen $\frac{ds}{dt}$ eliminiert … die Rollkurve in der
Ebene ist also auch ein Kreis, … windigkeit abgerollt, da
auch $\frac{ds}{dt}$ konstant ist. Diese B … eobachten, wie auch bei
einer Münze, die man zuerst in … setzt hat. Wendet man
auf die nun sehr vereinfachte I … S_g' an, so erhält man
auch die Bedingung, der v, C_g … unterworfen sind. Nur
eine Bedingung; so daß dies … n Nebenumständen er-
folgen kann.

Auf diese Formeln ließe … sels bauen. Es scheint,
daß dessen Bewegungen in hoh … Spitze abhängen. Man
müßte also bestimmte Annahme … hen. Indes würden die
Resultate wieder nur für den F … ng des Kreisels bereits
bedeutend abgeschwächt ist. I … griff genommen habe:
Kugelspitze und parabolische … ormen der Differential-
gleichungen noch sehr komplizi