Über
gewisse Erscheinungen in auffallendem und durchgehendem Licht an bearbeiteten Flächen.

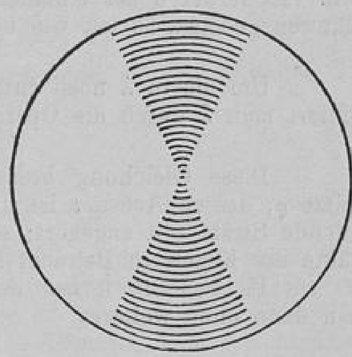
Von

E. Jancke,
Oberlehrer an der Löbenichtschen Realschule.

Königsberg i. Pr.
Hartungsche Buchdruckerei.
1904.

1904. Beilage zu Progr. Nr. 24.

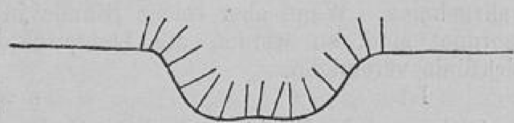
An kreisförmigen, auf der Drehbank abgedrehten Metallflächen gewahrt man leicht eine Lichtreflexion, welche weder regulär noch diffus genannt werden kann, nämlich zwei oder auch mehr schmale Sektoren, welche sich von der mattglänzenden Umgebung durch helleres Licht abheben. Dafs diese Erscheinung den Zeichnern aufgefallen sein mufs, bemerkt man oft an Bildern, besonders in älteren physikalischen Lehrbüchern.



Der nahe liegende Gedanke, sie auf eine von der Ebene abweichende Gestalt der Fläche, etwa einen stumpfen Kegel oder eine niedrige Kugelkalotte, wie bei Pendellinsen, zurückzuführen, widerlegt sich sofort, wenn man sich die Lage der Lichtstrahlen und der supponierten Einfallslote vorstellt.

Analoge Erscheinungen zeigt durchgehendes Licht bei Glasscheiben, welche zu dekorativen oder anderen Zwecken irgendwie mit regelmäfsigen, eng benachbarten Rillen versehen sind. Man kann von weitem beobachten, dafs solche Scheibe mit senkrechten Rillen, hinter der eine Hängelampe brennt, auf ihrer im übrigen mattleuchtenden Fläche ein mehr oder weniger breites helleres Lichtband zeigt; man sieht endlich bei einiger Aufmerksamkeit gelegentlich auf gewöhnlichen, nicht vollkommen sauberen Fensterscheiben schwach leuchtende Streifen, welche scheinbar nach einer dahinter stehenden Lichtquelle verlaufen, und welche man vielleicht für Interferenzerscheinungen halten würde, wenn sie nicht einfarbig und zu wenig veränderlich wären.

Für alle diese Erscheinungen ergibt sich eine Erklärung aus demselben Gedanken, der den Erklärungen des Regenbogens und der Mondringe zu Grunde liegt: im menschlichen Auge vereinigen sich Lichteindrücke, die von unzählig vielen benachbarten, aber diskontinuierlichen Flächenteilchen herrühren, zu einem zusammenhängenden Bilde.



Die Figur 2 soll das stark vergröfserte Profil einer sehr feinen Rinne darstellen, welche in die Oberfläche irgend eines Körpers eingeschnitten ist. Wenn die Wand dieser Rinne einer regulären Reflexion oder Brechung fähig ist, so wird sie die Lichtstrahlen, welche von einem entfernten Punkte herkommen, keineswegs alle nach derselben Richtung brechen oder reflektieren, aber ebenso wenig diffus. Die Flächenelemente an den verschiedenen Stellen dieses Profiles haben lauter verschieden gerichtete Normalen, wie in der Figur angedeutet, aber diese Normalen liegen alle in der Profil-Ebene, bilden nur eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, nicht eine zweifache, wie bei der diffusen Reflexion und Brechung angenommen wird. Die von dieser Stelle der Rinne reflektierten oder gebrochenen Strahlen müssen in ihrem weiteren Verlaufe stark divergieren und, im ganzen genommen, eine gradlinige Fläche bilden, welche sich in ihren entfernteren Teilen nicht erheblich von einer Kegelfläche unterscheidet, deren Spitze in irgend einem Punkte des in Wirklichkeit ja sehr klein gedachten Rinnenprofils liegen würde.

Diese Gruppierung der Strahlen zu einer Fläche würde nicht stattfinden, wenn an der betrachteten Stelle Flächenelemente in allen Stellungen vorhanden wären: hier sind sie parallel zur Längsrichtung der Rinne, ihre Lote darauf senkrecht.

Bei der vorausgesetzten Feinheit der Rinne wird man für die Rechnung annehmen dürfen, an jeder Stelle der Rinne sei in einem Punkt eine einfache Unendlichkeit von Flächenelementen vereinigt, deren Normalen der eben genannten Bedingung unterworfen sind. Damit wird die wirkliche Gestalt des Rinnenprofils bedeutungslos.

Ich stelle zuerst die Gleichung für die Reflexion auf, in Hamiltonscher Bezeichnungsweise. ϱ bedeute die betrachtete Stelle der Rinne, τ deren Längsrichtung ebenda, λ eines der Einfallslote, so muſs nach den vorhergegangenen Erwägungen

$$S\tau\lambda = 0$$

sein. Ist ferner σ der einfallende und σ' einer der reflektierten Strahlen, beide als Einheitsvektoren gedacht, so ist, wie bekannt:

$$\sigma' = \sigma + 2\lambda \cdot S\lambda\sigma\,.$$

Um die in λ noch enthaltene Beziehung zur Profilform der Rinne zu beseitigen, eliminiert man λ durch die Operation $S\tau$ und erhält

$$S\tau\sigma' = S\tau\sigma\,.$$

Diese Gleichung besagt, daſs die reflektierten Strahlen einen Kegel bilden, dessen Spitze ϱ, dessen Achse τ ist und dessen Öffnung sich dadurch bestimmt, daſs ihm der einfallende Strahl mit angehört; sie läſst aber auch sogleich erkennen, daſs physikalisch nur eine Hälfte des Kegels in Betracht kommt, die vom einfallenden Strahl abgekehrte.

Es bedeute ferner α den Ort der Lichtquelle und β den des Auges. Für σ kann man dann ohne weiteres

$$\sigma = U(\varrho - \alpha)$$

setzen. Aber nicht von jedem Punkt ϱ der ganzen Rinne wird ein Strahl σ' in das Auge β gelangen, sondern nur von solchen, bei denen man

$$\sigma' = U(\beta - \varrho)$$

setzen kann. Man erhält so:

$$S\tau\, U(\beta - \varrho) = S\tau\, U(\varrho - \alpha)\,.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der der Rinnenkurve bestimmt also die Punkte, welche dem Auge leuchtend erscheinen; das sind in der betrachteten Linie nur einige, im allgemeinen getrennte.

Wenn auf der ganzen Fläche nur eine solche Rinne vorhanden wäre, so würden nur einzelne getrennte sehr kleine Flächenteilchen so auf das Auge wirken. Man würde sie kaum wahrnehmen. Wenn aber solche Rinnen in groſser Zahl regelmäſsig und dicht nebeneinander geordnet sind, so werden die Lichtpunkte der verschiedenen Rinnen sich im Auge zu einer Lichtlinie vereinigen.

Ist

$$\varrho = \varphi(u, v)$$

die Gleichung der Fläche, in welche die Rinnen eingeschnitten sind, so kann deren Schar durch die Bedingung

$$f(u, v, p) = 0$$

dargestellt werden, wo p einen für die einzelne Rinne konstanten Parameter bedeutet. Ist dann $d\varrho$ ein Bogenelement einer Rinne, so ist

$$d\varrho = \frac{\partial\varrho}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial\varrho}{\partial v} \cdot dv \;\Big\|\; \tau\,,$$

andrerseits aber

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot dv = 0\,,$$

um also die Richtung τ zu bestimmen, welche zu $d\varrho$ parallel ist, kann man in dem Ausdruck für $d\varrho$ die Gröfse du durch $\frac{\partial f}{\partial v}$, dv durch $-\frac{\partial f}{\partial u}$ ersetzen, und erhält

$$\tau = \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varrho}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varrho}{\partial v}.$$

Die Skalargleichung

$$S\,\tau\,U(\beta-\varrho) = S\,\tau\,U(\varrho-\alpha)$$

bestimmt dann im Verein mit:

$$f(u, v, p) = 0$$

für jeden Wert von p, also für jede Rinne, den Lichtpunkt, und wenn man p aus ihnen eliminiert, bestimmt die resultierende Gleichung zwischen u und v die Lichtlinie.

Die Reflexionsgleichung in der Form

$$S\,U(\varrho-\beta)\,d\varrho + S\,U(\varrho-\alpha)\,d\varrho = 0$$

führt auf eine geometrische Beziehung, welche man allerdings auch ohne sie finden kann. Sie läfst sich integrieren, da

$$d\,T(\varrho-\alpha) = -S\,U(\varrho-\alpha)\,d\,\varrho$$

ist, und lautet so:

$$d\,T(\varrho-\alpha) + d\,T(\varrho-\beta) = 0,$$

$$T(\varrho-\alpha) + T(\varrho-\beta) = \text{konst.}$$

Diese Gleichung würde an sich ein Rotations-Ellipsoid darstellen, das α und β als Brennpunkte hätte. Aber die Lichtlinie ist nicht etwa ein Schnitt der gegebenen Fläche mit einem solchen Ellipsoid, — das $d\varrho$ in der Differentialgleichung ist ja nicht ein Element der Lichtlinie, sondern der Rinnenkurve —, es haben also nur einzelne Achsenschnitte verschiedener solcher Ellipsoide hier eine Bedeutung. Man kann sich vorstellen, eine veränderliche, aber zu sich selbst immer konfokal bleibende Ellipse würde um die Verbindungslinie von α und β gedreht und mit ihr die gegebene Fläche gewissermafsen abgetastet; überall, wo die veränderliche Ellipse sich in eine Rinne einfügen läfst, liegt ein Punkt der Lichtlinie.

Es kann also ein zusammenhängendes Stück der Rinne leuchtend erscheinen — wenn es einer Ellipse angehört, die α und β zu Brennpunkten hat; und ein ganzes Flächenstück würde leuchten, wenn es z. B. ein Stück eines Rotations-Ellipsoïdes der erwähnten Art wäre.

Praktisch wird man bei diesen Betrachtungen meist Lichtquelle und Auge oder wenigstens eins von beiden als unendlich fern behandeln können. Dann sind σ und σ' konstante Richtungen, und indem man

$$\sigma' - \sigma = U(\alpha-\varrho) + U(\beta-\varrho) = \mu$$

setzt, nimmt die Reflexionsgleichung die einfache Form

$$S\mu\tau = 0$$

an, in welcher nun μ eine Richtung angibt, welche den Winkel zwischen den beiden Strahlenrichtungen halbiert, das Einfallslot. Wählt man hierbei als Nullpunkt einen ungefähr in der Mitte des reflektierenden Körpers gelegenen Punkt, so kann man nötigenfalls μ durch $U\alpha + U\beta$ ersetzen.

Es wird zweckmäfsig sein, einzelne Beispiele etwas ausführlicher zu behandeln.

Die Fläche sei eine Ebene, welche durch Schleifen, Hobeln oder unvollständiges Polieren eine feine parallele Schraffierung erhalten hat. Wählt man sie als ij-Ebene, den Fufspunkt des vom Auge auf sie gefällten Lotes als Nullpunkt, so kann man

$$\tau = i, \quad \beta = h\cdot k$$

setzen. Sieht man die Lichtquelle als unendlich fern an, wie etwa die Sonne, so ist $S\,i\,\sigma$ konstant und kann durch $\cos w$ ersetzt werden, wo w den Winkel zwischen der Richtung der

Rinnen und der nach der Sonne bedeutet. Dann erhält man

$$S\,i\,U\,(h\,k - \varrho) = \cos w \cdot$$
$$S\,i\,(h\,k - \varrho) = \cos w \cdot T\,(h\,k - \varrho)$$
$$- S\,i\,\varrho = \cos w \cdot T\,(h\,k - \varrho)$$
$$x^2 = \cos^2 w \cdot (h^2 + x^2 + y^2)$$
$$x^2 \cdot \sin^2 w - y^2 \cdot \cos^2 w = h^2 \cdot \cos^2 w\,.$$

Die Lichtlinie ist also in diesem Fall eine Hyperbel von leicht erkennbarer Lage und Gestalt. Doch hat von ihren Zweigen nur einer physikalische Realität. Durch das Quadrieren der Gleichung, die $T\,(\beta - \varrho)$ enthielt, ist ein Vorzeichenunterschied weggefallen; offenbar wird das bei jeder Anwendung der Reflexions-Gleichung geschehen müssen, wenn μ nicht als konstant behandelt wird. Hier ist derjenige Zweig der richtige, für dessen Punkte der Winkel zwischen i und $(\beta - \varrho)$ stumpf ist, also der der Sonne zugekehrte.

Wenn die Lichtquelle so nahe ist, dafs man die Verschiedenheit in den Richtungen der einfallenden Strahlen nicht mehr vernachlässigen kann, so erhält man statt der Hyperbel eine Kurve dritten Grades, doch ist praktisch dieser Fall wohl ohne Bedeutung. Übrigens kommt sein Analogon später bei der Brechung zur Behandlung.

Wenn umgekehrt das Auge weit entfernt ist, kann man aus der Gleichung:

$$S\,i\,U\,(h\,k - \varrho) = S\,i\,U\,(\varrho - \alpha)$$

oder

$$- T\,(\varrho - \alpha) \cdot S\,i\,\varrho = T\,(h\,k - \varrho) \cdot S\,i\,(\varrho - \alpha)$$

näherungsweise entnehmen

$$S\,i\,(\varrho - \alpha) = 0\,,$$

und das bedeutet hier eine Gerade, welche zur Rinnenrichtung senkrecht ist und durch das reguläre Spiegelbild des Lichtpunktes

$$\alpha' = \alpha + 2\,k \cdot S\,k\,\alpha$$

verläuft. Ungefähr kann man dies beinah bei jeder Rinnenschar auf irgend einer Fläche bestätigt finden; für die meisten Fälle liegt hierin eine Regel zur Orientierung über den ungefähren Verlauf der Rinnen.

Wollte man hier die Vereinfachung

$$\mu = \text{konst.}$$

anwenden, so würde die Gleichung

$$S\,i\,\mu = 0$$

wertlos, wie man leicht erkennt.

Häufiger ist die zu Anfang dargestellte Erscheinung, bei Pendellinsen, abgedrehten Schraubenköpfen, messingnen Apparatfüfsen, die ja nicht wie Eisenteile lackiert werden und bei gröfseren Apparaten meist nicht hochpoliert sind —, überhaupt bei Rotationsflächen mit Schraffierung nach Breitenkreisen.

In Wirklichkeit hat hier der Meifsel nicht Kreise, sondern eine zusammenhängende schraubenähnliche Linie hinterlassen, auf dem Zylinder eine wirkliche Schraubenlinie, auf der plangedrehten Scheibe eine Archimedische Spirale, aber die einzelnen Windungen liegen eng nebeneinander mit so geringer Steigung, dafs man keinen merklichen Fehler begeht, wenn man sie durchweg als koaxiale Kreise behandelt.

Ist k die Achse einer solchen Fläche, so ist die Rinnenrichtung an irgend einer Stelle ϱ senkrecht sowohl auf k wie auf ϱ, man kann also τ durch $V\,k\,\varrho$ ersetzen.

$$S\,k\,\varrho\,(\sigma' - \sigma) = 0\,.$$

Wenn nun Auge und Lichtquelle einigermafsen weit entfernt sind, kann man $\sigma' - \sigma$ durch den konstanten Vektor μ ersetzen und erhält

$$S\,k\,\mu\,\varrho = 0$$

Dann stellt die Gleichung eine Meridianebene der Rotationsfläche dar, welche den Winkel zwischen dem einfallenden und dem reflektierten Strahlbüschel halbiert. Die leuchtende Linie ist also in diesem Fall ein Meridian der Fläche. Bei einer auf der Drehbank abgedrehten Kreisfläche wird es ein Durchmesser, beim Kegel und Zylinder eine Seite. Dies ist häufig zu beobachten.

Wenn die Lichtquelle nicht punktförmig ist, sondern als leuchtende Fläche behandelt werden mufs, wie etwa ein Fenster, so setzen sich natürlich die stetig benachbarten Lichtlinien auf der Kreisscheibe oder einer niedrigen Kalotte zu Doppelsektoren zusammen. Man wird also auf der Pendellinse eines der Fensterwand gegenüberhängenden Regulators für jedes Fenster einen hellen Doppelsektor erblicken, jeden noch von einem dunklen Durchmesser geteilt, welcher dem Fensterkreuz (oder vielmehr, wie aus späterem hervorgehen wird, in erster Linie nur dem senkrechten Teil des Kreuzes) entspricht. Schon die geringste Bewegung des Kopfes läfst die Sektoren sich sehr merklich verschieben, sie sind also eine subjektive Erscheinung; bei jeder Pendelschwingung machen sie kleine Drehungen, welche man bei genauer Beobachtung deutlich wahrnimmt; ein an passender Stelle vorgehaltener undurchsichtiger Gegenstand, durch welchen ein Fenster „abgeblendet" wird, läfst sofort ein Paar der Sektoren verschwinden.

Hier wird es wieder zweckmäfsig sein, näher einzugehen, und zwar wegen der Übereinstimmung der Rechnungen gleich auf beliebige Rotationsflächen. Die Bezeichnungen gelten wie vorher; als Nullpunkt sei ein ungefähr in der Mitte des nicht allzusehr ausgedehnten Körpers liegender Punkt gewählt.

Da die Lage eines Meridians sich in Quaternionen am bequemsten durch die Richtung des Radius angeben läfst, in welchem er die Äquatorebene, hier die ij-Ebene, schneidet, zerlegt man zweckmäfsig ϱ in

$$\varrho = \varepsilon r + k z,$$

womit sich die Gleichung der Meridianebene in

$$S k \mu \varepsilon = 0$$

umformt. Hierzu kommt

$$S k \varepsilon = 0,$$

also

$$\varepsilon \parallel V k V k \mu,$$

$$\varepsilon = \pm U V k V k \mu.$$

In Wirklichkeit kann meist nur eine der Meridianhälften reflektieren, da die andere durch den Körper selbst verdeckt ist, aufser in Spezialfällen. Welches Vorzeichen dann für ε richtig ist, ergibt sich aus der Erwägung, dafs der Winkel zwischen μ und ε spitz, also

$$S \mu \varepsilon < 0$$

sein mufs:

$$\begin{aligned} T V k \mu \cdot S \mu \varepsilon &= \pm S \mu k V k \mu \\ &= \mp V^2 k \mu \\ &= \pm T^2 V k \mu \\ S \mu \varepsilon &= \pm T V k \mu, \end{aligned}$$

also ist das untere Zeichen das richtige:

$$\varepsilon = - U V k V k \mu.$$

Dieses ε gibt also den leuchtenden Meridian, bei der Kreisscheibe den leuchtenden Durchmesser.

Wenn man nun die Fragen, wie die Breite des Lichtstreifens von den Dimensionen der Lichtquelle abhänge, und wie der Lichtstreifen bei einer Bewegung des Auges, der Lichtquelle oder des reflektierenden Körpers sich verschiebe, untersuchen will, so zeigt sich sogleich, dafs es sich immer nur um Veränderung des Vektors μ handelt. Wenn die Lichtquelle hinreichend weit entfernt ist, kann man ihre Dimensionen als unendlich klein gegenüber der mittleren Entfernung $T\alpha$ behandeln; der Übergang von einem ihrer Punkte zu einem andern ändert also nur $U\alpha$. Ebenso kommt bei einer Bewegung des Auges nur $U\beta$ in Frage. Und wenn der Körper selbst eine Parallelverschiebung η erfährt, kann man stattdessen α und β gleichzeitig um $-\eta$ verschieben, woraus sich nach der bekannten Formel

$$dU\varrho = -\frac{V\varrho V\varrho d\varrho}{T\varrho^3}$$

ergibt

$$d\mu = \frac{V\alpha V\alpha \eta}{T\alpha^3} + \frac{V\beta V\beta \eta}{T\beta^3}.$$

Auch wenn der Körper eine kleine Drehung um die Achse ζ durch den Winkel w erfährt, kann man dafür die Vektoren α und β entgegengesetzt gedreht denken und

$$d\alpha = -w \cdot V\zeta\alpha, \qquad d\beta = -w \cdot V\zeta\beta$$

setzen, woraus sich wieder

$$d\mu = -w \cdot V\zeta\mu$$

ergibt.

Der Veränderung $d\mu$ entspricht ein $d\varepsilon$, und dessen Ermittelung löst alle drei Fragen.

$$d\varepsilon = -dUVkVk\mu.$$

Für den Augenblick werde $Vk\mu = \nu$ gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned}
d\varepsilon &= -dUVk\nu \\
T^3Vk\nu \cdot d\varepsilon &= VVk\nu V(Vk\nu Vkd\nu) \\
T\nu^3 \cdot d\varepsilon &= VVk\nu \cdot (-k \cdot Sk\nu d\nu) \\
&= VkVk\nu \cdot Sk\nu d\nu \\
&= -\nu Sk\nu d\nu \\
&= -Vk\mu \cdot SkVk\mu Vkd\mu \\
&= -Vk\mu \cdot Sk(-kSk\mu d\mu) \\
&= -Vk\mu \cdot Sk\mu d\mu
\end{aligned}$$

$$d\varepsilon = -\frac{UVk\mu \cdot SUVk\mu d\mu}{TVk\mu}.$$

Für die Drehung des Vektors ε kommt also von $d\mu$ nur die Komponente in der Richtung $UVk\mu$ zur Geltung, senkrecht zu der Ebene, welche k, μ und ε enthält. Aber auch die Gröfse von $TVk\mu$ hat darauf Einflufs.

Nun ist

$$\begin{aligned}
TVk\mu &= T\mu \cdot \sin(k, \mu), \\
T\mu &= \sqrt{2 - 2SU\alpha U\beta} \\
&= \sqrt{2 \cdot (1 + \cos(\alpha, \beta))} \\
&= 2 \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha, \beta),
\end{aligned}$$

$$\text{also } TVk\mu = 2 \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha, \beta) \cdot \sin(k, \mu).$$

Dieser Nenner kann also zwar gröfser als 1, aber niemals gröfser als 2 werden. Im Spezialfall wird er $= 0$, wenn nämlich $U\alpha$ und $U\beta$ symmetrisch zur Achse k liegen. Dann ist aber ε selbst schon unbestimmt; entweder ist gar kein Reflex zu sehen, oder, wenn die Fläche einen Pol hat, leuchtet dessen ganze Umgebung. Allgemein folgt aus der Gleichung für $TVk\mu$: je flacher μ gegen die Äquatorebene ansteigt und je näher $U\alpha$ und $U\beta$ einander liegen, desto weniger Einflufs haben ihre Änderungen auf die Lage der Meridianebene. Und wenn μ nur in der Ebene des bereits leuchtenden Meridianes verschoben wird, ändert sich dessen Lage garnicht.

Der Drehungswinkel ist, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, im Bogenmafs:

$$T\,d\,\varepsilon = \frac{SUVk\,\mu\,d\,\mu}{TVk\,\mu},$$

oder, auf ε selbst bezogen

$$T\,d\,\varepsilon = \frac{Sk\,\varepsilon\,d\,\mu}{TVk\,\mu}.$$

Hiernach bestimmt sich auch die Breite des Lichtstreifens: sie hängt wesentlich von den Dimensionen der Lichtquelle parallel zu $Vk\,\mu$ ab; ihre Ausdehnung in der Ebene $Sk\mu\varrho = 0$ hat nur auf die Helligkeit des Lichtreflexes Einflufs.

Ein praktisches Beispiel. Der Fensterwand eines Zimmers gegenüber hängt in 5 m Abstand eine Uhr, deren Pendel eine abgedrehte Messinglinse trägt, in mittlerer Fensterhöhe, aber gegen die vertikale Mittellinie des Fensters um 1,5 m verschoben. Der Beobachter steht nach derselben Richtung noch 1 m weiter, 1 m von der Uhrwand entfernt, sein Auge noch 0,5 m unter der Linsenhöhe.

So kann man

$$\alpha = k\cdot 5 + j\cdot 1{,}5$$
$$\beta = k - j + i\cdot 0{,}5$$

setzen und erhält

$$T\alpha = 5{,}22; \qquad T\beta = 1{,}5$$

$$Vk\,\mu = i\cdot\frac{11}{29} + j\cdot\frac{1}{3}$$

$$\varepsilon = \frac{i\cdot 29 - j\cdot 33}{\sqrt{1930}}.$$

Diese Linie, ungefähr die Halbierungslinie des leuchtenden Sektors, ist gegen die Vertikale auf den Beobachter zu um 49° geneigt.

Ist nun das Fenster 1 m breit, so kann man näherungsweise annehmen:

$$d\,\alpha = \pm j\cdot 0{,}5$$

$$d\,U\alpha = \frac{d\,\alpha}{T\alpha} = \pm 0{,}095\,j = d\,\mu,$$

$$Sk\,\mu\,d\,\mu = \frac{1}{3}Sj\,d\,\mu = \mp\frac{1}{3}\cdot 0{,}095$$
$$= \mp 0{,}032,$$

$$T\,d\,\varepsilon = 0{,}125,$$

das sind rund 7°; der leuchtende Doppelsektor hat also einen Zentriwinkel von 14°; seine Grenzen sind, von der Vertikalen aus gegen den Uhrzeiger gemessen, 42° und 56°.

Wenn das Pendel 5 cm nach beiden Seiten ausschlägt, kann man setzen

$$d\alpha = d\beta = \pm j\cdot 0{,}05$$

$$d\,U\alpha = \pm 0{,}0095\,j; \quad d\,U\beta = \pm 0{,}0333\,j;$$

also $\quad d\,\mu = \pm 0{,}0428\,j;$

$$Sk\,\mu\,d\,\mu = \mp 0{,}0143,$$

$$T\,d\,\varepsilon = 0{,}056;$$

das sind rund 3°; der Sektor oszilliert also isochron mit dem Pendel, mit einer Amplitude von 3° nach beiden Seiten.

Hat eins der Uhrgewichte die meist gebräuchliche Form: ein hohler, aufsen abgedrehter Messingzylinder mit Bleifüllung, etwa 6 cm Durchmesser, so wird auf dessen Mantel ein vertikaler Lichtstreifen mit feiner dunkler Mittellinie sichtbar. Man kann

$$\alpha = i \cdot 5 + j \cdot 1{,}5\,,$$
$$\beta = i - j - k \cdot 0{,}5$$

setzen und erhält wie vorher

$$T\alpha = 5{,}22\,; \qquad T\beta = 1{,}5\,,$$

dann aber

$$Vk\mu = i \cdot 0{,}38 + j \cdot 1{,}63$$
$$d\alpha = \pm j \cdot 0{,}5$$
$$dU\alpha = \pm j \cdot 0{,}096 = d\mu\,,$$
$$Sk\mu\, d\mu = \mp 0{,}156\,,$$
$$Td\varepsilon = 0{,}056\,.$$

Dies ist eine Bogenlänge für den Radius 1; mit 30 multipliziert liefert sie die halbe Breite des Lichtstreifens in mm; die ganze Breite beträgt rund 3 mm.

Nimmt man eine Fläche dieser Art, etwa eine Kreisscheibe, in die Hände und bewegt sie, ohne die Lage ihres Mittelpunktes erheblich zu ändern, hin und her, so bewegen sich auch die auf ihr von irgend einer Lichtquelle erzeugten Sektoren, genau entsprechend den angegebenen Gesetzen. Allerdings darf man sich bei einer Untersuchung dieser Bewegungen nicht mit der einfachen Formel $w \cdot V\zeta\varrho$ begnügen, sondern mufs, wenn die Scheibe um die Achse ζ durch den endlichen Winkel w gedreht wird, der Gröfse μ die Änderung

$$V\zeta\mu \cdot \sin w - V\zeta\, V\zeta\mu \cdot (1 - \cos w)$$

zuschreiben. Man findet, dafs die Sektoren entweder nur Pendelbewegungen oder ganze Kreistouren machen müssen, erstere, wenn der von der Scheibenachse beschriebene Kegel die Linie μ ausschliefst, letztere, wenn er sie einschliefst.

Wenn übrigens die Drehspirale auf der Scheibe recht fein, eng und exakt ist, sieht man deutlich die kleine Krümmung der Sektorenränder, die sich rechnerisch ergibt, sobald man für μ den exakten Wert

$$\mu = U(\alpha - \varrho) + U(\beta - \varrho)$$

benutzt; man findet dann nämlich als Lichtlinie eine Kurve vierten Grades, welche im Nullpunkt einen Doppelpunkt hat; beide Zweige haben dort Krümmungsminima, aber nur einer von ihnen ist physikalisch reell.

Dies sind wohl die Fälle, die man am häufigsten wahrnimmt, also die wichtigsten. Theoretisch ist es nicht ohne Interesse, die Erscheinung für bestimmte Kurvenscharen auf irgend einer Fläche rechnerisch zu verfolgen.

Denkt man sich z. B. eine Rotationsfläche mit meridionalen Rinnen, so liegt τ in der Ebene von k und ϱ, man hat also die Gleichung

$$Sk\varrho\tau = 0\,,$$

im übrigen ist τ durch die Gestalt der erzeugenden Kurve bestimmt. Im besonderen Fall einer Kugel erhält man noch die Bedingung

$$S\varrho\tau = 0\,,$$
$$\text{also} \quad \tau = V\varrho\, Vk\varrho\,,$$

und damit als Gleichung der Lichtkurve

$$S\mu\varrho\, Vk\varrho = 0$$
$$\text{oder} \quad Sk\varrho \cdot S\mu\varrho - Sk\mu \cdot \varrho^2 = 0\,.$$

Für sich ist das ein Kegel zweiten Grades, die Kurve also ein sphärischer Kegelschnitt.

Da sie offenbar zu der Ebene von k und μ symmetrisch ist, da ferner k und μ selbst auf dem Kegel liegen, so kann man schliefsen, dafs die Vektoren $k \pm U\mu$ Achsen sein müssen; die Probe mit der Achsenfunktion

$$\varphi\varrho = k \cdot S\mu\varrho + \mu \cdot Sk\varrho - 2\varrho \cdot Sk\mu$$

liefert denn auch die Bestätigung:

$$\varphi(k \pm U\mu) \parallel k \pm U\mu .$$

Dritte Achse ist $Vk\mu$; die Fokallinien liegen, wenn der Winkel zwischen k und μ spitz ist, in der Ebene von $k + U\mu$ und $Vk\mu$, und machen mit der letzteren Achse einen Winkel m, der durch die Gleichung

$$tg\frac{m}{2} = \sqrt{-SkU\mu}$$

bestimmt ist.

Fälle dieser Art lassen sich, wenn auch unvollkommen, mit blanken Drahtfiguren auf der Zentrifugalmaschine herstellen, überhaupt mit irgend einem linearen, gut reflektierenden Gegenstand in schneller Bewegung, wobei natürlich die Nachwirkung im Auge mitspielt.

Die hier für Spezialfälle durchgeführten Rechnungen lassen sich einigermafsen verallgemeinern.

Wird wie vorher

$$\tau = \frac{\partial\varrho}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial\varrho}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}$$

gesetzt, wo die Bedingung $f(u, v, p) = 0$ die Schar der Rinnenkurven bestimmt, so ist zunächst die Richtung der Lichtlinie an dem betrachteten Ort zu ermitteln.

Für eine benachbarte Rinne ist p durch $p + dp$ zu ersetzen. So wird in irgend einem benachbarten Punkt die Tangentenrichtung sich von τ um

$$d\tau = \frac{\partial\tau}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial\tau}{\partial v}\cdot dv + \frac{\partial\tau}{\partial p}\cdot dp$$

unterscheiden. Wenn nun μ als konstant behandelt wird, erhält man unter diesen benachbarten Punkten den leuchtenden durch die Bedingung

$$S\mu(\tau + d\tau) = 0$$

oder $$S\mu\, d\tau = 0,$$

also $$S\mu\frac{\partial\tau}{\partial u} + S\mu\frac{\partial\tau}{\partial v}dv + S\mu\frac{\partial\tau}{\partial p}dp = 0 .$$

Da aufserdem die Gleichung $f(u, v, p) = 0$ mit angemessener Veränderung weiter bestehen mufs, ergibt sich:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot dv + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot dp = 0,$$

und diese beiden Skalargleichungen bestimmen das Verhältnis der Differentiale

$$du : dv = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\cdot S\mu\frac{\partial\tau}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot S\mu\frac{\partial\tau}{\partial p}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot S\mu\frac{\partial\tau}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\cdot S\mu\frac{\partial\tau}{\partial u}\right).$$

Mit Verwendung eines solchen Wertepaares für du und dv kann man ein Element der Lichtlinie

$$d\varrho = \frac{\partial\varrho}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial\varrho}{\partial v}dv$$

setzen; die Richtung der Lichtlinie ist also an der betrachteten Stelle durch den Vektor

$$\zeta = \frac{\partial \varrho}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial p} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial p}\right) + \frac{\partial \varrho}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial u}\right)$$

oder

$$\zeta = \frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{\partial \varrho}{\partial v} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial u}\right) - \tau S\mu \frac{\partial \tau}{\partial p}$$

gegeben.

Wenn nun μ eine Änderung $d\mu$ erfährt, so wird dadurch auch τ in der betrachteten Rinne um $d\tau$ verändert, und diese beiden Inkremente sind durch die Bedingung

$$S\mu d\tau + S\tau d\mu = 0$$

miteinander verbunden. Hier ist p konstant, also

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \tau}{\partial v} \cdot dv$$

also $$S\mu \frac{\partial \tau}{\partial u} \cdot du + S\mu \frac{\partial \tau}{\partial v} \cdot dv + S\tau d\mu = 0.$$

Diese beiden Differentiale du und dv sind ferner der Bedingung unterworfen, dafs das durch sie bestimmte Bogenelement

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} du + \frac{\partial \varrho}{\partial v} dv$$

die Richtung τ habe, also

$$V\tau\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} du + \frac{\partial \varrho}{\partial v} dv\right) = 0,$$

welche sich auf

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0$$

reduziert, und hieraus folgt

$$du : dv : S\tau d\mu = \frac{\partial f}{\partial v} : -\frac{\partial f}{\partial u} : \left(\frac{\partial f}{\partial u} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial u}\right),$$

also die veränderte Lage des Lichtpunktes:

$$d\varrho = \frac{\frac{\partial \varrho}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial \varrho}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial u}} \cdot S\tau du$$

$$= \frac{\tau \cdot S\tau d\mu}{\frac{\partial f}{\partial u} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial u}}$$

Daraus wäre auch $Td\varrho$ bestimmt, und es könnte, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$Td\varrho = \frac{T\tau \cdot S\tau d\mu}{\frac{\partial f}{\partial u} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} S\mu \frac{\partial \tau}{\partial u}}$$

gesetzt werden. Aber diese Gröfse ist hier ohne Bedeutung. Ist nämlich die Verschiebung von ϱ durch den Übergang von einem Punkte der Lichtquelle zu einem andern bedingt, so stellt $Td\varrho$ nur einen schrägen Schnitt durch den Lichtstreifen dar, und wenn es sich um eine Bewegung des Lichtstreifens handelt, ist $d\varrho$ als Resultierende aus einer seitlichen und einer Längsbewegung aufzufassen.

Die wirkliche Breite des Lichtstreifens oder seine rein seitliche Verschiebung ist durch Projektion von $d\varrho$ auf eine Richtung zu finden, welche zu der Lichtlinie senkrecht ist, natürlich in der Tangential-Ebene der Fläche.

Diese Richtung kann in der Form $V\nu\zeta$ gegeben werden, wo ν die Flächennormale bedeutet, und ν könnte als $V\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varrho}{\partial v}$ eingeführt werden, doch wird die Rechnung etwas einfacher, wenn man

$$\nu = V\zeta\tau$$

setzt. In der Richtung

$$V\zeta\, V\tau\zeta$$

liegt also die Streifenbreite; ihre Gröfse wird, abgesehn vom Vorzeichen

$$\begin{aligned}
&S(UV\zeta\, V\tau\zeta)\, d\varrho \\
&= \frac{S(V\zeta\, V\tau\zeta)\, d\varrho}{TV\zeta\, V\tau\zeta} \\
&= \frac{SV\zeta\tau\, V\zeta\, d\varrho}{T\zeta\cdot TV\tau\zeta} \\
&= \frac{SV\zeta\tau\, V\zeta\tau\cdot S\tau\, d\mu}{T\zeta\cdot TV\tau\zeta\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u}S\mu\frac{\partial\tau}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}S\mu\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)} \\
&= -\frac{TV\tau\zeta\cdot S\tau\, d\mu}{T\zeta\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u}S\mu\frac{\partial\tau}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}S\mu\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)}
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$V\zeta\tau = \frac{\partial f}{\partial p}\left[S\mu\frac{\partial\tau}{\partial u}\cdot V\tau\frac{\partial\varrho}{\partial v} - S\mu\frac{\partial\tau}{\partial v}\cdot V\tau\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right]$$

und

$$V\tau\frac{\partial\varrho}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}V\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varrho}{\partial v},$$

$$V\tau\frac{\partial\varrho}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}V\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varrho}{\partial v},$$

also

$$V\zeta\tau = \frac{\partial f}{\partial p}\cdot V\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varrho}{\partial v}\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial v}\cdot S\mu\frac{\partial\tau}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial u}S\mu\frac{\partial\tau}{\partial v}\right],$$

so dafs die Klammergröfse ausfällt; demnach wird die Streifenbreite:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial p}\cdot TV\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varrho}{\partial v}\cdot S\tau\, d\mu}{T\zeta}$$

Es ist ersichtlich, dafs diese Gröfse, die jetzt das $d\varepsilon$ der Rotationsflächen ersetzt, wieder nur von der Komponente der Strecke $d\mu$ in der Rinnenrichtung abhängt.

Man könnte jetzt noch einen Zusammenhang zwischen den Gröfsen $\frac{\partial f}{\partial p}$, $TV\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varrho}{\partial v}$, $T\zeta$, die auf die Streifenbreite Einflufs haben, und den Krümmungsverhältnissen der Fläche vermuten. Nimmt man, um diesen Gedanken zu prüfen, die Rinnenkurven als

$$v = \text{konst.},$$

was offenbar ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit geschehen kann, so folgt

$$f = v - p,$$
$$\tau = \frac{\partial \varrho}{\partial u}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0,$$
und der Vektor ζ, auf den es in erster Linie ankommt, nimmt die Gestalt
$$\zeta = \frac{\partial \varrho}{\partial v} S\mu \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u^2} - \frac{\partial \varrho}{\partial u} S\mu \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\, \partial v}$$
an. Für irgend eine beliebige Kurve, deren Gleichung auf die Bogenlänge bezogen ist, beträgt an der Stelle ϱ die Krümmung
$$T\frac{d^2 \varrho}{d s^2},$$
daraus folgt für einen andern Parameter
$$\frac{T V d\varrho\, V d\varrho\, d^2\varrho}{T d\varrho^4}.$$

Soll die Kurve auf der vorher betrachteten Fläche liegen, so muſs
$$S \nu\, d\varrho = 0$$
sein; soll sie ferner in der Umgebung von ϱ eine auf dem Vektor ξ senkrechte Ebene als Oskulationsebene haben, so folgt
$$S \xi\, d\varrho = 0,$$
und aus diesen beiden Gleichungen läſst sich ableiten
$$d\varrho \parallel V\xi\nu,$$
$$d\varrho = V\xi\nu \cdot dt,$$
wo t einen passend gewählten Parameter bedeutet; daraus folgt
$$d^2\varrho = V\xi \frac{d\nu}{dt} \cdot dt^2$$
$$V d\varrho\, d^2\varrho = V V\xi\nu\, V\xi \frac{d\nu}{dt} \cdot dt^3$$
$$= -\xi \cdot S\xi\nu \frac{d\nu}{dt} \cdot dt^3$$
$$V d\varrho\, V d\varrho\, d^2\varrho = V\xi\, V\xi\nu \cdot S\xi\nu \frac{d\nu}{dt} \cdot dt^4,$$
$$T V d\varrho\, V d\varrho\, d^2\varrho = T\xi \cdot T V\xi\nu \cdot S\xi\nu \frac{d\nu}{dt} \cdot dt^4,$$
also die Krümmung
$$\frac{T\xi \cdot S\xi\nu \frac{d\nu}{dt}}{T^3 V\xi\nu}.$$

Die zweiten partiellen Differentialquotienten stecken in $\frac{d\nu}{dt}$. Man kann setzen
$$S\xi\nu \frac{d\nu}{dt} = S\frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{\partial \varrho}{\partial v} V\xi \frac{d\nu}{dt}$$
$$= S\xi \frac{\partial \varrho}{\partial v} \cdot S\frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{d\nu}{dt} - S\xi \frac{\partial \varrho}{\partial u} \cdot S\frac{\partial \varrho}{\partial v}\frac{d\nu}{dt},$$

und da $S\nu d\varrho = 0$,

$$S d\nu d\varrho = -S\nu d^2\varrho$$

ist, wird $S\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{d\nu}{dt} = -S\nu\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)$

$$= -S\nu\frac{\partial^2\varrho}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dt} - S\nu\frac{\partial^2\varrho}{\partial u\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

Die Gleichung

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial\varrho}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} = V\xi\nu$$

liefert

$$\frac{du}{dt} = -S\xi\frac{\partial\varrho}{\partial v},\quad \frac{dv}{dt} = S\xi\frac{\partial\varrho}{\partial u}$$

und so folgt schliefslich

$$S\xi\nu\frac{d\nu}{dt} = S^2\xi\frac{\partial\varrho}{\partial v}\cdot S\nu\frac{\partial^2\varrho}{\partial u^2} - 2S\xi\frac{\partial\varrho}{du}\cdot S\xi\frac{\partial\varrho}{\partial v}\cdot S\nu\frac{\partial^2\varrho}{\partial u\partial v} + S^2\xi\frac{\partial\varrho}{\partial v}\cdot S\nu\frac{\partial^2\varrho}{\partial v^2}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorher für ζ gefundenen, indem man dabei für ξ irgend welche Vektoren eingesetzt denkt, welche in Beziehung zu μ stehen, so ergibt sich immer, dafs die Vektoren $\frac{\partial^2\varrho}{\partial u^2}, \frac{\partial^2\varrho}{\partial u\partial v}, \frac{\partial^2\varrho}{\partial v^2}$ aus der Skalarverbindung mit ν nicht zu trennen sind, während sie in dem Ausdruck für ζ statt dessen mit μ verbunden sind. Es scheint also, dafs ein natürlicher Zusammenhang zwischen der Breite des Lichtstreifens und den Krümmungsverhältnissen der Fläche nicht besteht.

Die hier durchgeführte Rechnung verliert eines ihrer Fundamente, wenn die Fläche gradlinig ist und gerade eines ihrer Gradensysteme die Rinnen darstellt. Dieser Fall gleicht dann dem schon früher bei der Ebene erwähnten. Er würde erfordern, dafs man die Veränderlichkeit von μ berücksichtigte und setzte:

$$d\mu = \psi d\varrho - \psi_1 d\alpha - \psi_2 d\beta\ (\psi = \psi_1 + \psi_2),$$

aber er hat wohl zu wenig praktische Bedeutung, als dafs es lohnte, die Rechnung hier auszuführen.

Zum Schlufs dieses Abschnittes möchte ich noch bemerken, dafs es mitunter gelingt, solche Schraffierung auf irgend einer glatten Fläche ohne Beschädigung herzustellen, indem man dichten Seifenschaum mit der Handfläche oder einem Lappen darauf reibt, natürlich in Richtung der gewünschten Kurven.

Es liegt nahe, den Grundgedanken dieser Entwicklung: gesetzmäfsig gestellte, aber unzusammenhängende Flächenelemente, von der zweidimensionalen Anordnung auf den Raum zu übertragen.

Wenn an jeder Stelle des Raumes sich ein einziges Flächenelement befindet, mufs man eine Lichtkurve erhalten; ist in jedem Punkte eine einfache Unendlichkeit von Flächenelementen, so erhält man eine Lichtfläche.

Für beide Fälle heifst die Bedingung zunächst: Die Normale mufs den Winkel zwischen den beiden Strahlen halbieren, also parallel zu

$$\mu = U(\alpha - \varrho) + U(\beta - \varrho)$$

sein. Im ersten Fall wird aus der Vektorgleichung

$$V\mu\lambda = 0$$

die Kombination der Skalargleichungen:

$$S^2\lambda\, U(\alpha - \varrho) = S^2\lambda\, U(\beta - \varrho)$$
$$S\lambda(\alpha - \varrho)(\beta - \varrho) = 0.$$

Im zweiten bildet die Gesamtheit der Vektoren λ eine Kegelfläche, so daſs man die für λ geltende Skalargleichung $F(\lambda) = o$ homogen machen kann; ersetzt man dann darin λ durch $U(\alpha - \varrho) + U(\beta - \varrho)$, so hat man damit die Skalargleichung, welche die Lichtfläche bestimmt.

Ist der Raum mit Flächenelementen erfüllt, welche senkrecht zu k sind, so sieht ein Auge in α von dem Lichtpunkt in β eine gleichseitige Hyperbel in der Ebene von k, α, β, deren Zentrum die Mitte von α und β und deren eine Asymptote parallel zu k ist.

Sind stattdessen die Flächenelemente parallel zu k, gewissermaſsen röhrenförmig verteilt, so erscheint eine leuchtende Fläche dritten Grades, welches die Verbindungslinie von α und β als singuläre Grade enthält und aus jeder Ebene, der α und β angehören, eine Hyperbel der vorher beschriebenen Art ausschneidet.

Auf dieselbe Weise muſs in jedem solchen Fall die Verbindungslinie von α und β rechnerisch als singuläre Grade auftreten, weil man, um die Symbole U zu beseitigen, die Tensoren einführen und dann quadrieren muſs; man bringt dadurch Strahlen, die in sich selbst zurückgelaufen wären, in die Rechnung hinein.

Durchgehendes Licht bietet ganz ähnliche Erscheinungen, und zwar vielleicht viel häufiger, aber man übersieht sie, wenn man nicht mit Bewuſstsein darauf achtet; in einigen Fällen deswegen, weil das Auge sich nicht ohne weiteres grade auf den durchsichtigen Körper selbst einstellt, in anderen wohl auch, weil die Schraffierung hier, beim Glas, meist nur durch Guſs oder Pressung hervorgebracht und darum gröber ist, so daſs die Lichtlinien ihre scheinbare Stetigkeit leicht verlieren.

Hier sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. Entweder hat der durchsichtige Körper überall in einer Dimension nur geringe Ausdehnung, wie eine Fensterscheibe oder Lampenglocke, so daſs man ihn als eine Fläche behandeln, die Lichtbahn innerhalb seiner Masse als unendlich kurz vernachlässigen kann, oder er ist ungefähr isometrisch gebaut, wie etwa ein Kristall, so daſs die innerhalb liegenden Lichtbahnen gegenüber den Oberflächenmaſsen und den Abständen von Auge und Lichtquelle nicht mehr verschwinden.

Es sei n der Brechungsquotient einer gerillten Scheibe, ν die Normale, λ aber das Einfallslot eines einzelnen Flächenelementes der Rinnenwand, wobei für den Augenblick angenommen werden soll, das Licht treffe auf die schraffierte Seite der Fläche, ferner σ der einfallende Strahl, σ' der Strahl innerhalb der Scheibe, σ'' der austretende.

Das Brechungsgesetz liefert dann ohne Schwierigkeit die Formeln:

$$\sigma' = \frac{1}{n} \cdot \left[\sigma + \lambda\left(S\sigma\lambda - \sqrt{n^2 + V^2\sigma\lambda}\right)\right]$$

$$\sigma'' = n \cdot \left[\sigma + \nu\left(S\nu\sigma' - \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + V^2\nu\sigma'}\right)\right]$$

dazu kommt auch hier die Bedingung, daſs die Rinnenwand parallel zur Längsrichtung der Rinne sei:

$$S\tau\lambda = 0.$$

Daraus folgt zunächst:

$$S\tau\sigma'' = n \cdot S\tau\sigma' + n \cdot S\tau\nu\left(S\nu\sigma' - \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + V^2\nu\sigma'}\right),$$

da aber τ auch senkrecht zu ν ist:

$$S\tau\sigma'' = n \cdot S\tau\sigma',$$

ferner $$S\tau\sigma' = \frac{1}{n} \cdot S\tau\sigma,$$

also: $$S\tau\sigma'' = S\tau\sigma,$$

oder $$S\tau\mu = 0,$$

wo μ dieselbe Bedeutung wie früher hat.

Die Gleichung ist dieselbe, wie bei der Reflexion, unabhängig vom Beleuchtungsquotienten und, wie leicht einzusehn, auch davon, auf welcher Seite die Schraffierung liegt. Ich möchte hier nur zwei Beispiele ausführen.

Wenn die Scheiben einer Glastür senkrecht gerillt sind und hinter ihr eine Lampe hängt, der man ungefähr gegenübersteht, so kann man

$$\alpha = bj + ck\,,$$
$$\beta = -b'j\,,$$
$$\varrho = xi + zk$$

setzen und erhält eine Kurve dritten Grades, deren Gleichung am einfachsten die Form

$$\left(\frac{c-z}{z}\right)^2 = \frac{x^2+b^2}{x^2+b'^2}$$

annimmt. Man erkennt leicht, daſs der physikalisch reelle Teil der Kurve nicht höher als die Lichtquelle liegen kann, also für ihn $z < c$ bleiben muſs; negative Werte für z sind auch geometrisch unmöglich. Entwickelt man z nach steigenden Potenzen von x, so erhält man

$$z = \frac{cb'}{b'+b} - \frac{c\,(b'-b)}{2\,b\,b'(b'+b)}\,x^2 + \left((x^4)\right),$$

(wobei b' als die gröſste der vorkommenden Strecken gedacht ist), und daraus geht hervor, daſs für $x = 0$ auch $\frac{dz}{dx} = 0$ ist, die Kurve also im Mittelteil wagrecht verläuft, daſs sie ferner rechts und links von der Mitte sich mäſsig abwärts biegt; wenn man x unendlich groſs nimmt, liefert die ursprüngliche Gleichung

$$\frac{c-z}{z} = 1\,,$$

$$\text{also} \qquad z = \frac{1}{2}\,c\,;$$

die Kurve hat also als Asymptote eine wagrechte Grade in halber Höhe zwischen Auge und Lichtquelle.

Daraus ist zu schlieſsen, daſs sie eine gewisse Ähnlichkeit mit der Konchoïde des Nikomedes hat. Sie liegt ganz und gar zwischen den Höhen $\frac{1}{2}\,c$ und c: daraus ergibt sich praktisch: wenn die Höhendifferenz zwischen Auge und Lichtquelle nicht allzugroſs gegenüber ihren Abständen von der Scheibe ist, kann man die Lichtlinie für ein Stück einer sehr groſsen Hyperbel oder schlieſslich gar eine Grade ansehn.

Wenn unter sonst gleichen Umständen schräg laufende Rinnen da sind, welche mit der Horizontalen den Winkel w bilden, so kann man näherungsweise in der Gleichung

$$T(\varrho-\beta)\cdot S\tau(\varrho-\alpha) + T(\varrho-\alpha)\cdot S\tau(\varrho-\beta) = 0$$

$T(\varrho-\beta)$ als unendlich groſs behandeln, wobei aber $S\tau(\varrho-\beta)$ doch nur endliche Gröſse behält; dann nimmt die Gleichung die einfache Form an:

$$S\tau(\varrho-\alpha) = 0$$

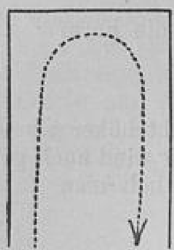
$$\text{oder} \qquad x\cdot\cos w + z\cdot\sin w = c\cdot\sin w\,;$$

das ist eine grade Linie mit folgenden Eigenschaften: sie kreuzt die Schraffierung rechtwinklig und verläuft scheinbar nach der Lichtquelle. Denn das weit entfernte Auge sieht die Lichtquelle auf der Scheibe an der Stelle

$$x = 0\,,\ z = c\,.$$

Diese beiden Eigenschaften der Lichtlinie wird man praktisch ohne weiteres auf alle vorkommenden Fälle übertragen können, ebenso wie die entsprechenden Eigenschaften bei der Reflexion. Wo überhaupt nur eine rohe Beobachtung möglich ist, findet man sie bestätigt.

Ein besonders häufiges Beispiel bieten glatte Scheiben, welche regelmäfsig, aber nicht stets sorgfältig geputzt werden. Sieht man abends durch das Fenster eines Eisenbahnwagens auf eine Bahnhofslaterne, so sieht man meist — wie gesagt, nur bei bewufster Aufmerksamkeit —, Lichtstreifen auf der Scheibe, welche von der Laterne auszugehen scheinen und, je nach ihrem Ort auf der Scheibe, in deren mittlerem Teile wagrecht, im oberen schräg nach den Ecken oder ganz senkrecht verlaufen. Die Erklärung liegt darin, dafs der Putzer beim Reiben auf der Scheibe mit der Hand die naturgemäfse Bewegung gemacht hat, welche durch die punktierte Linie in Figur 3 dargestellt ist. Er hat dabei entweder auf der Scheibe Spuren seines Wischtuches hinterlassen oder die anhaftende Flüssigkeitsschicht in solchen Linien abgerissen.



Ähnliche Lichtstreifen sieht man übrigens auch auf Wandspiegeln, infolge derselben ersten Ursache, aber durch Reflexion entstanden.

Der zweite Fall — ein nicht mehr flächenhafter Körper — dürfte praktisch kaum eine Bedeutung haben. Denkbar wäre er höchstens etwa bei einem Kristall, dessen Oberfläche Ätzfiguren von regelmäfsiger Beschaffenheit und einiger Ausdehnung trüge. Dann könnte man eine oder mehrere Scharen paralleler Rinnen annehmen und über das einfallende Licht voraussetzen, dafs es innerhalb des Kristalles parallel verlaufe, so dafs die Gleichung

$$S\tau\sigma'' = n \cdot S\tau\sigma'$$

zu verwenden wäre. Ist k die Richtung einer solchen Rinnenschar, so kann man

$$\sigma'' = U(hj - \varrho)$$

setzen und erhält die Gleichung der Lichtlinie in der Form

$$z^2 \cdot (1 - n^2 \cdot S^2 k\sigma') - x^2 \cdot S^2 k\sigma' \cdot n^2 = n^2 h^2 S^2 k\sigma'$$

Die Gestalt dieser Hyperbel ist von dem Produkt $n \cdot Sk\sigma'$ wesentlich abhängig und darum sehr veränderlich. Aber die Stellung der Gröfse h in der Gleichung läfst erkennen, dafs die Längenmafse der Kurve proportional dem Augenabstand sind, und die Form der Gleichung zeigt, dafs der Fufspunkt des vom Auge auf die Ebene gefällten Lotes Mittelpunkt der Hyperbel ist. Man wird also die Lichterscheinung, bei der Kleinheit der ganzen Fläche, nicht immer leicht finden. Immerhin könnte sie unter Umständen das rasche Erkennen einer vorhandenen feinen Schraffierung begünstigen.

Wo die Natur selbst solche Flächen bildet, da sind meist, besonders bei organischen Körpern, die Rinnen so fein, dafs man statt der hier berechneten Lichtlinien Interferenzerscheinungen erhält. Deren Linien müssen dann ungefähr parallel zu den Rinnen verlaufen. Spuren davon sieht man auch auf recht fein abgedrehten Metallflächen bei günstiger Beleuchtung, aber um Übereinstimmung mit den leicht berechenbaren Interferenzlinien zu geben, sind die Rinnen wohl gewöhnlich doch nicht exakt genug.

In dieses Übergangsgebiet zwischen regulärer und diffuser Ablenkung des Lichtes gehören noch manche andere Erscheinungen, welche sich teils vorausberechnen, teils nachträglich aus ähnlichen Ursachen erklären lassen.

Wenn die Oberfläche eines Körpers mit sehr kleinen, ungefähr isometrischen Erhebungen oder Vertiefungen übersät ist, hat deren Gestalt einen wesentlichen Einfluss auf die Reflexion oder Brechung des Lichtes. Wenn solche Hügel halbkugelig oder ellipsoidisch sind, befindet sich in jedem Punkt eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Einfallsloten, so dafs man für jede vorgeschriebene Richtung des einfallenden und des weitergehenden Strahles ein Einfallslot ermitteln kann. Das ist diffuse Reflexion. Wenn aber die Hügel kugelförmig sind, bilden die Normalen des Mantels nur eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit; man findet nicht zu jedem Strahlenpaar ein Einfallslot; man erhält also nur eine lineare Reihe von Punkten, welche Licht zum Auge senden. In diesem Falle hat man für λ eine Skalargleichung $F(\lambda) = 0$, welche homogen wird, sobald man $\lambda = U\mu = \frac{\mu}{T\mu}$ setzt. Dieses μ ist im Falle der Reflexion wieder die Winkelhalbierende, bei der Berechnung aber eine Linie, welche sich in folgender Weise ermitteln läſst:

$$n\sigma' = \sigma + \lambda(S\lambda\sigma - \sqrt{n^2 + V^2\lambda\sigma}),$$
$$V\lambda(n\sigma' - \sigma) = 0,$$
$$n\sigma' = \sigma'' + \nu(S\nu\sigma'' - \sqrt{n^2 + V^2\tau\sigma''})$$
$$\mu = n\sigma' - \sigma = \sigma'' - \sigma + \nu(S\nu\sigma'' - \sqrt{n^2 + V^2\nu\sigma''}).$$

Praktisch sind solche Fälle wohl recht denkbar. Glasscheiben werden gelegentlich zu dekorativen Zwecken mit einem Stempel geprägt, der dichtgedrängte kleine Kegelspitzen trägt; die trichterförmigen Vertiefungen der Scheibe liefern dann die Gleichung

$$Sk\lambda = -\cos w,$$

wo w die Neigung des Kegelmantels gegen die Ebene der Scheibe, k deren Lot bedeutet. Daraus folgt

$$Sk\mu = -T\mu \cdot \cos w,$$
$$S^2 k\mu + \mu^2 \cos^2 w = 0.$$

Blickt man durch solche Scheibe gegen die Sonne, so sieht man eine helle Kreislinie, deren Achse die Grade vom Auge nach der Sonne und deren Radius $h \cdot tg\frac{\mu}{2}$ ist. Dieser Winkel $\frac{\mu}{2}$ bestimmt sich aus einer Gleichung, der man u. a. die Form

$$\sin\left(w + \frac{\mu}{2}\right) = n \,.\, \sin w$$

geben kann. Hieraus erkennt man sofort eine Grenzbedingung:

$$n \cdot \sin w < 1$$

sie bedeutet: w muſs kleiner sein als der Winkel der totalen Reflexion. Auch dieses Resultat läſst sich rein geometrisch ableiten.

Die kupfernen Hohlspiegel, die man gewöhnlich zu den bekannten Versuchen über Wärmestrahlen verwendet, zeigen stets allerlei Lichtreflexe, die sich durch das gewöhnliche Spiegelgesetz selbst dann nicht erklären lassen, wenn man ganz bedeutende lokale Abweichungen von der Kugelgestalt annimmt. Insbesondere sieht man ziemlich scharf gezeichnete helle Linien, welche ungefähr als Kreisbögen gelten können. Diese Linien verschieben sich oder verschwinden ganz, wenn man, ohne an der gegenseitigen Stellung von Lichtquelle und Spiegel etwas zu ändern, den letzteren noch einmal abwischt. Daraus ist auf einen ursächlichen Zusammenhang zwischen der Art des Putzens und den Lichtreflexen zu schlieſsen. Versucht man, sich die Bewegungen vorzustellen, die man mit dem Wischtuch macht, wenn man ohne erhebliche Aufmerksamkeit diese mechanische Tätigkeit vollführt, so wird man ungefähr zu folgendem Resultat kommen: die von der Hand beschriebene Kurve lieſse sich, wenn sie eben wäre, mit einer Epizykloide von sehr kleinem Grundkreis vergleichen, die man wieder als ein Netz gleichgroſser, durch den Scheitel laufender Kreise behandeln könnte. Die von dem Wischtuch auf dem Hohlspiegel hinterlassenen Spuren kann man also geometrisch als Schnittlinien desselben mit einer Schar kongruenter Kreiskegel betrachten, deren Spitzen im Mittelpunkt des Hohlspiegels liegen und deren Achsen alle denselben Winkel, den vierten Teil der Öffnung des

Hohlspiegels, mit dessen Achse bilden. Durch irgend einen Punkt ϱ der Spiegelfläche gehen dann zwei solche Kegel, für deren Achsen ε sich die Bedingungen ergeben

$$\varepsilon \cdot V^2 k \varrho = -\cos a \cdot (S k \varrho + r)\,(\varrho + k r) + S k \varrho \varepsilon \cdot V k \varrho$$

mit $$S^2 k \varrho \varepsilon = -V^2 k \varrho - 2 r \cdot \cos^2 a \cdot (S k \varrho + r).$$

Dann folgt

$$\tau = V \varrho \varepsilon,$$

und die Lichtlinien werden durch

$$S \mu \varrho \varepsilon = 0$$

bestimmt. Sind Auge und Lichtquelle in der Achse des Hohlspiegels, so kann man μ durch k ersetzen; die Lichtlinie wird dann durch die Ebene

$$S k \varrho = -r \cdot \cos 2 a$$

bestimmt.

Aber diese trifft gerade den Rand des Spiegels, während die abnormen Reflexlinien engere Kreise zu sein pflegen.

Hier hilft die Annahme, das doch verhältnismäfsig weiche Metall habe bei dem Putzen eine solche Durchpflügung seiner Oberfläche erfahren, dafs diese überall mit kleinen, flachen, trichterförmigen Vertiefungen besetzt sei. Man wird diese zunächst wunderlich erscheinende Annahme nicht mehr abweisen, wenn man ein gründlich geputztes Stück Kupferblech bei möglichst starker Vergröfserung betrachtet.

In diesem Fall kann man mit den eingeführten Bezeichnungen setzen

$$S \lambda U \varrho = -\cos w,$$

$$S \mu \varrho = -T \mu \cdot r \cdot \cos w,$$

und dies ergibt mit passend gewähltem w jeden beliebigen zur Achse konzentrischen Kreis.

Ähnliches bietet auch die Natur selbst. Die Lichtreflexe auf den Flügeldecken von Käfern und auf den Körpern andrer Insekten, helle Linien in durchscheinenden Flügeln, alle diese Erscheinungen entsprechen keineswegs den Ablenkungsgesetzen für die Fläche als Ganzes, sondern deuten zum kleineren Teil auf „lineare", zum grösseren auf „punktierte" Oberflächen-Bearbeitung. Auch die eigenartige Lichtreflexion der Seidenstoffe dürfte dieselbe Ursache haben.

Dieser Gedanke könnte nun wieder auf den Raum ausgedehnt werden. Der ganze Raum erfüllt mit kleinen ebenflächigen, durchsichtigen Körpern, etwa Kristallen, deren Achsen irgendwie gesetzmäfsig gestellt wären, könnte auch durch Brechung Lichtlinien geben. Die Eisnadeln, die zur Erklärung atmosphärischer Lichterscheinungen herangezogen werden, könnten vielleicht auch gelegentlich nach elektrischen oder magnetischen Kraftlinien gestellt sein, ebensogut wie nach denen der Gravitation. Man könnte auf diese Weise sogar eine Deutung der Kometenschweife versuchen.

Bei solchen Erscheinungen, wie sie hiernach im Raum auftreten könnten und leicht rechnerisch zu bewältigen sind, gewinnt eine Frage, die bisher unbeachtet bleiben konnte, Bedeutung. Wie steht es mit den Bildern für beide Augen, mit dem stereoskopischen Sehen? Solange es sich um Reflexe handelt, die auf Teile der Oberfläche eines Körpers beschränkt sind, werden zwar beide Augen nicht genau denselben Lichtstreifen sehen, aber der Erfolg davon kann nur der sein, dafs der Streifen etwas breiter erscheint. Eine eigene Körperlichkeit kann er nicht gewinnen, weil das Auge mit Gewifsheit erkennt, dafs die Lichterscheinung an der gegebenen Oberfläche haftet. Aber schon bei den analogen Erscheinungen im durchgehenden Licht projiziert das Auge den Lichtstreifen leicht von seinem wirklichen Entstehungsort weg nach der Lichtquelle hin. Geschieht nun ähnliches bei räumlich verteilten einzelnen und wegen ihrer Kleinheit unsichtbaren Körperchen, so ist die „Unterlage" nicht vorhanden. Beide Augen sehen die Lichterscheinung fast übereinstimmend, aber an verschiedenen Stellen, und die Gewohnheit stereoskopischen Sehens könnte hier das Bild eines zusammenhängenden Körpers vortäuschen, der je nach den Umständen näher oder weiter angenommen werden würde, als die brechenden Flächen in Wirklichkeit liegen. Damit wäre die Möglichkeit zu eigenartigen Augentäuschungen bei der Beurteilung atmosphärischer Lichterscheinungen gegeben.

Verwandt mit den hier betrachteten, ihrem Wesen nach doch subjektiven Erscheinungen, sind die, welche man bei der Bewegung von Gittern wahrnimmt. Geht man in einigem Abstand neben einem Staketenzaun her, hinter welchem in geringer Entfernung ein zweiter solcher Zaun sich befindet, so empfängt das über diese Zäune hinaus eingestellte Auge von den sich scheinbar gegen einander bewegenden senkrechten Linien leicht einen Eindruck, als wenn darin etwa Longitudinalwellen hin und her liefen.

Gleichartige Erscheinungen kann man sich auch im Zimmer mit Drahtnetzen herstellen von denen man eins festhält, das andere ungefähr parallel dazu bewegt. Bedingung dafür ist immer eine etwas unscharfe Einstellung des Auges. Dann kann man bei schräger Beleuchtung und dunklem Hintergrunde ganze Systeme von dunklen Kurven auf hellerem Grunde sich bewegen sehn, umgekehrt auch bei hellem Hintergrund und gröſserem Augenabstand helle Kurven auf dunklem Grund. In allen diesen Fällen handelt es sich um örtlich und zeitlich wechselnde Verdeckung von Teilen des hinteren Gitters durch die des vorderen. Auch alle derartigen Erscheinungen lassen sich rechnerisch soweit verfolgen, daſs man beinah mit irgend zwei Gittern jede beliebige Kurvenschar herstellen kann.

wohnheit stereoskopischen Sehens könnte h[illegible]n Körpers vortäuschen, der je nach den Umständen nähe[illegible]würde, als die brechenden Flächen in Wirklichkeit liegen. [illegible]rtigen Augentäuschungen bei der Beurteilung atmosphär[illegible]

Verwandt mit den hier betrachteten[illegible]Erscheinungen, sind die, welche man bei der Bewegung v[illegible]n einigem Abstand neben einem Staketenzaun her, hinter[illegible]zweiter solcher Zaun sich befindet, so empfängt das über [illegible] von den sich scheinbar gegen einander bewegenden senk[illegible]als wenn darin etwa Longitudinalwellen hin und her liefen.[illegible]

Gleichartige Erscheinungen kann m[illegible]zen herstellen von denen man eins festhält, das andere u[illegible]gung dafür ist immer eine etwas unscharfe Einstellung des[illegible]r Beleuchtung und dunklem Hintergrunde ganze Systeme [illegible]runde sich bewegen sehn, umgekehrt auch bei hellem Hi[illegible]d helle Kurven auf dunklem Grund. In allen diesen Fälle[illegible]ch wechselnde Verdeckung von Teilen des hinteren Gitters[illegible] derartigen Erscheinungen lassen sich rechnerisch soweit [illegible]d zwei Gittern jede beliebige Kurvenschar herstellen kann.[illegible]