

Über ebene und sphärische Krümmungslinien.

Seit Monge zuerst die Lehre von den Krümmungslinien zu einem wesentlichen Theil der analytischen Betrachtung der Flächen gemacht, sind die Bemühungen der Geometer theils auf eine verbessernde Umgestaltung der characterisirenden Begründung, theils auf Berechnung der gewonnenen allgemeinen Differenzialgleichungen für einzelne Flächen gerichtet gewesen. Die ursprüngliche Ableitung der ganzen Lehre beruhte auf Vorstellungen, denen man vollständige Richtigkeit bald absprechen musste. Wenn man daher zur Bestimmung der Krümmungslinien statt der Annahme, dass die in zwei unendlich nahen Punkten der Fläche errichteten Normalen einen Durchschnittspunkt haben, die Voraussetzung zu Grunde legte, dass die Normalen in einer Entfernung von einander bleiben, die im Verhältniss zur Entfernung der Flächenpunkte selbst wieder unendlich klein ist; so blieb doch die Auffindung einer Beziehung zu wünschen, durch welche diese Linien mit den schon vorhandenen Theilen der Krümmungstheorie inniger verbunden wurden. Cauchy's Verdienst ist es, in seinen *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la Géométrie* den Nachweis geführt zu haben, dass Monge's Krümmungslinien diejenigen Curven sind, welche die Hauptnormalschnitte der Fläche in erster Ordnung berühren.

Die von Monge abgeleiteten Differenzialgleichungen für diese Linien blieben als richtig bestehen und wurden auf die Flächen zweiten Grades mit günstigem Erfolge angewendet. Aber schon jener Geometer hatte allgemeinere Untersuchungen begonnen, und sich die Auffindung solcher Flächen zur Aufgabe gemacht, deren Krümmungslinien gewisse Eigenschaften besitzen, z. B. sämmtlich in parallelen Ebenen enthalten sind. Von Neuem aufgenommen sind diese Probleme von H. Prof. Joachimsthal, der in seiner Abhandlung (*Crelle's Journal* Band XXX.) den wichtigen Satz aufstellt, dass die Ebene, welche die Krümmungslinie einer Fläche enthält, letztere unter constantem Winkel durchschneidet. Hieraus ergibt sich eine neue Art, Flächen zu characterisiren, indem man gewisse Ausdrücke, aus den Coordinaten der Fläche und den Bestimmungsstücken der Ebene gebildet, für jede Krümmungslinie als constant, dagegen von einer Krümmungslinie zur andern als variabel betrachtet. Die aus dieser Betrachtung abgeleiteten Diffe-

renzialgleichungen der Flächen werden in jener Abhandlung auf den Fall angewendet, dass sämtliche Krümmungslinien eines Systems in Ebenen liegen, die eine Durchschnittsline gemeinsam haben: als specielles Resultat ergibt sich die Rotationsfläche, deren Meridianebene ebenfalls durch jene gemeinsame Gerade geht.

Im Folgenden soll zuvörderst eine leichte Verallgemeinerung jenes Satzes von Joachimsthal gegeben, sodann die allgemeine Gleichung der Flächen berechnet werden, deren Krümmungslinien eines Systems sämtlich auf concentrischen Kugeln liegen, endlich diejenige „kleinste Fläche“ gesucht werden, deren Krümmungslinien sämtlich eben sind.

I.

Werden zwei Flächen durch die Gleichungen dargestellt:

$$I, z = f(x, y) \quad \text{und} \quad II, z = f_1(x, y),$$

so sind die Differenzialgleichungen derselben

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = p dx + q dy,$$

$$dz = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy = p_1 dx + q_1 dy;$$

so dass für die Durchschnittscurve beider die Beziehungen stattfinden:

$$(p - p_1) dx = (q_1 - q) dy, \quad y' = \frac{p - p_1}{q_1 - q}.$$

Da nun nach Monge die Krümmungslinien der Fläche I durch

$$(dx + p dz) dq - (dy + q dz) dp = 0$$

characterisirt werden, so erhält man durch Benutzung des ersten Werthes von dz , sowie durch Einsetzung des Quotienten für y' , zur Bestimmung der Krümmungslinien auf I

$$(q_1 - q + p^2 q_1 - p p_1 q) dq + (p_1 - p - p q q_1 + p_1 q^2) dp = 0,$$

und durch ein ähnliches Verfahren für die Krümmungslinien auf II

$$(q - q_1 + p p_1^2 - p p_1 q_1) dq_1 + (p - p_1 + p q_1^2 - p_1 q q_1) dp_1 = 0.$$

Verbindet man beide Gleichungen durch Addition, so ergibt sich, dass das vollständige Differenzial des Ausdrucks

$$\frac{p p_1 + q q_1 + 1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \sqrt{p_1^2 + q_1^2 + 1}}$$

verschwindet, also dieser Ausdruck selbst constant ist. Er bezeichnet aber den Cosinus des von beiden Flächen oder den Tangentialebenen derselben gebildeten Winkels, so dass folgender Satz stattfindet:

Schneiden sich zwei beliebige Flächen so, dass die Durchschnittscurve eine Krümmungslinie beider Flächen ist, so ist der Winkel zwischen denselben für die ganze Ausdehnung des Durchschnittes constant.

III.

Sind die rechtwinkligen Coordinaten einer Fläche x, y, z , heisst λ der veränderliche Radius der Kugeln, deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt, und wird vorausgesetzt, dass ein System der Krümmungslinien jener Fläche auf diesen concentrischen Kugeln liegt, so ist es gestattet, die Coordinaten gleichzusetzen den Producten von λ mit drei von einander verschiedenen Functionen φ, ψ, χ der Veränderlichen λ und μ . Die letztere Grösse sei für jede Krümmungslinie des andern Systems constant, für das ganze System aber veränderlich. Aus den Gleichungen

$$x = \lambda \varphi(\lambda, \mu), \quad y = \lambda \psi(\lambda, \mu), \quad z = \lambda \chi(\lambda, \mu)$$

ergeben sich für die partiellen Differenzialquotienten der Coordinaten nach λ und μ

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \varphi + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}, & \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \psi + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, & \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \chi + \lambda \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}, & \frac{\partial y}{\partial \mu} &= \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, & \frac{\partial z}{\partial \mu} &= \lambda \frac{\partial \chi}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

Da aber nach dem Sinne der Aufgabe die Summe der Quadrate der drei Coordinaten gleich dem Quadrate von λ ist, so folgt unmittelbar:

$$(A) \quad \varphi^2 + \psi^2 + \chi^2 = 1.$$

Durch partielle Differenziation dieser Gleichung nach λ und μ erhält man zwei Gleichungen, die ausdrücken, dass die Summe der Producte aus den Functionen und deren Differenzialquotienten nach λ (resp. μ) verschwindet; nach abermaliger Differenziation resultirt die Beziehung:

$$(D) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} = - \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} + \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} + \chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial \lambda \partial \mu} \right).$$

Die erste Differenzialgleichung der Fläche, welche den Winkel zwischen je zwei Krümmungslinien λ und μ als 90° bezeichnet, enthält jene Summe der Producte aus φ, ψ, χ und ihren resp. Derivirten nach μ ; da dieselbe nach dem soeben Bemerkten identisch 0 ist, so bleibt nur noch die Bedingung aufzustellen, dass

$$(I) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} = 0,$$

und demnach auch die rechte Seite der Gleichung (D) verschwindet.

Die zweite Differenzialgleichung der Fläche drückt aus, dass jede Krümmungslinie λ und μ die Hauptnormalschnitte in erster Ordnung tangirt, oder, nach der Annahme Monge's, dass die in zwei unendlich nahen Punkten der Krümmungslinien errichteten Normalen sich schneiden. Von dieser Gleichung ist für unsere Aufgabe sogleich derjenige Theil fortzulassen, der nur Differentiale erster Ordnung enthält, weil er identisch 0 ist; der andere Theil der Gleichung ist alsdann, mit Fortlassung des gemeinsamen Factors λ ,

$$(II) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \varphi \frac{\partial \chi}{\partial \mu} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \lambda \partial \mu} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) = 0. \end{aligned}$$

Multiplirt man diese Gleichung mit χ , und ersetzt nach den Gleichungen (D) und I $\chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial \lambda \partial \mu}$ durch $-\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu}$, so nimmt (II) die Form an:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \left[\left(\psi + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \chi \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} (\varphi^2 + \chi^2) - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \chi \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} (\psi^2 + \chi^2) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \chi \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) - \left(\varphi + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \chi \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right) \right] = 0.$$

Durch Benutzung der Gleichung (A) und ihrer Differenzialen wird aus der umgeformten Gleichung (II) die einfache Beziehung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = 0,$$

und durch ähnliche Operationen ergibt sich aus (II) die Formel:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = 0.$$

Die beiden links stehenden Differenzen, dividirt resp. mit $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu}\right)^2$ und $\left(\frac{\partial \chi}{\partial \mu}\right)^2$, geben aber die nach λ genommenen partiellen Differenziale der Quotienten

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{\frac{\partial \psi}{\partial \mu}} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{\frac{\partial \chi}{\partial \mu}}$$

Da beide Derivirten verschwinden, so ist jeder dieser Quotienten unabhängig von λ , und daher einer Function von μ allein gleichzusetzen, die wir resp. mit den reciproken Werthen von ρ und σ bezeichnen werden. Wir behaupten nunmehr, dass die hieraus resultirende Doppelgleichung

$$(III) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial \mu}$$

in Verbindung mit der Gleichung (A) die Functionen φ, ψ, χ genügend charakterisirt.

Denn zunächst folgt aus der Differenziation von (A) nach μ und der Elimination der Differenziale mit Hilfe von (III), dass

$$(B) \quad \varphi + \rho \psi + \sigma \chi = 0;$$

und das partielle Differenzial des links stehenden Ausdrucks nach λ , multiplirt mit $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$, ergibt genau die charakteristische Gleichung (I).

Die Aufgabe beschränkt sich also darauf, aus den Gleichungen (A) und (III) die Natur der Functionen φ, ψ, χ zu bestimmen.

Aus (A) ergibt sich durch zweimalige Differenziation nach μ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \mu}\right)^2 + \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} + \chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mu^2} = 0,$$

deren erste drei Glieder sich vermöge der Relation (III) auf die Derivirte einer der Functionen, z. B. φ , reduciren lassen, während die letzten drei Glieder unter Hinzuziehung von (III) transformirt werden. Durch Differenziation letzterer Doppelgleichung nach μ erhält man nämlich

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} = \frac{d \rho}{d \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \mu^2} = \frac{d \sigma}{d \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2};$$

wonach die Gleichung für $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \mu^2}$ die Form annimmt

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^2 (1 + \rho^2 + \sigma^2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} (\varphi + \rho \psi + \sigma \chi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \left(\psi \frac{d \rho}{d \mu} + \chi \frac{d \sigma}{d \mu}\right) = 0.$$

Hierin ist der Factor des zweiten Differenzials von φ nach (B) identisch 0, und so resultirt nach Division mit $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ die endgültig characterisirende Gleichung

$$(C) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} (1 + \rho^2 + \sigma^2) + \psi \frac{d \rho}{d \mu} + \chi \frac{d \sigma}{d \mu} = 0.$$

Um eine nur φ und dessen Differenzial enthaltende Gleichung zu erhalten, eliminire man χ und sodann ψ aus den Gleichungen (A) und (B), substituire die für ψ , sodann für χ gefundenen Functionen von φ , ρ , σ in (C), so dass diese nur als Relation zwischen φ , ρ , σ erscheint. Da diese Relation aber viel zu complicirt erscheint, als dass man das dazu gehörige Integral allgemein finden könnte, und es überdiess überflüssig ist, φ durch zwei von einander völlig unabhängige Functionen von μ zu berechnen, so ist es gestattet, einen Zusammenhang zwischen ρ und σ von vornherein festzustellen, und zwar der Einfachheit halber zu setzen

$$\sigma = a \cdot \rho,$$

wo a eine Constante sowohl in Bezug auf μ als auch auf λ bezeichnet.

Alsdann reducire man (C), indem man aus (B) den Werth für $\psi + a \chi$ entnimmt, und man gewinnt die Beziehung

$$\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d \mu = \frac{d \rho}{\rho [1 + (1 + a^2) \rho^2]}.$$

Das Integral der rechten Seite dieser Gleichung wird durch Zerlegung der Function von ρ in Partialbrüche gefunden, so dass

$$\int \frac{\partial \log \varphi}{\partial \mu} d \mu = \int \frac{d \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \int d \rho \cdot \sqrt{1 + a^2} \left(\frac{1}{\rho \sqrt{1 + a^2} - i} + \frac{1}{\rho \sqrt{1 + a^2} + i} \right),$$

wo i die imaginäre Einheit bezeichnet, und die Integrationsgränzen 1 und φ resp. ρ sind. Versieht man noch das Integral von der linken Seite mit der willkürlichen Function von λ , in welche zugleich die Integrationsconstante des rechts stehenden Gliedes einbegriffen ist, so resultirt

$$\log \varphi = \log F(\lambda) + \log \rho - \frac{1}{2} \log [1 + (1 + a^2) \rho^2],$$

daher

$$\varphi = \frac{F(\lambda) \cdot \rho}{\sqrt{1 + (1 + a^2) \rho^2}}$$

in welchem Integral ρ eine willkürliche Function von μ bezeichnet.

Die aus (A) und (B) gewonnenen Werthe für ψ und χ sind aber

$$\psi = -\frac{\varphi}{(1+a^2)\rho} \pm \frac{a}{(1+a^2)\rho} \sqrt{(1+a^2)\rho^2 - \varphi^2 - (1+a^2)\rho^2\varphi^2}$$

$$\chi = -\frac{a\varphi}{(1+a^2)\rho} \mp \frac{1}{(1+a^2)\rho} \sqrt{(1+a^2)\rho^2 - \varphi^2 - (1+a^2)\rho^2\varphi^2},$$

und somit erhält man, in $F(\lambda)$ und ρ ausgedrückt,

$$\psi = -\frac{F(\lambda)}{(1+a^2)\sqrt{1+(1+a^2)\rho^2}} \pm \frac{a}{1+a^2} \sqrt{1+a^2 - F^2(\lambda)},$$

$$\chi = -\frac{aF(\lambda)}{(1+a^2)\sqrt{1+(1+a^2)\rho^2}} \pm \frac{1}{1+a^2} \sqrt{1+a^2 - F^2(\lambda)}.$$

Durch Multiplication der gefundenen Ausdrücke mit λ ergeben sich unmittelbar die Werthe von x , y , z . Dieselben besitzen den nöthigen Grad der Allgemeinheit, indem sie sämmtlich als Functionen zweier Variablen λ und μ (der unabhängigen Veränderlichen von ρ) erscheinen.

Der Character der durch diese Gleichungen dargestellten Flächen lässt sich zwar nicht sogleich angeben, und insofern scheint die gewählte Darstellungsweise eines wichtigen Momentes zu entbehren; indessen tritt die ähnliche Erscheinung bei solchen allgemeinen Problemen so häufig hervor, dass sie dieser Auflösung nicht besonders zur Last gelegt werden darf. Die Elimination von λ und ρ aus diesen drei Gleichungen ist nicht thunlich, daher werden wir die letzteren im Folgenden an einzelnen Flächen zu discutiren haben, die man durch Specialisirung der $F(\lambda)$ leicht erhält.

1) Es sei $F(\lambda)$ gleich der Constanten a . Die Coordinaten nehmen alsdann die Werthe an:

$$x = \frac{a\lambda\rho}{\sqrt{1+(1+a^2)\rho^2}},$$

$$y = -\frac{a\lambda}{(1+a^2)\sqrt{1+(1+a^2)\rho^2}} \pm \frac{a\lambda}{(1+a^2)},$$

$$z = -\frac{a^2\lambda}{(1+a^2)\sqrt{1+(1+a^2)\rho^2}} \pm \frac{\lambda}{1+a^2}$$

Aus den beiden letzten ergeben sich sogleich die Beziehungen

$$ay - z = \pm \lambda, \quad y + az = -\frac{a\lambda}{\sqrt{1+(1+a^2)\rho^2}},$$

$$\rho = \frac{\sqrt{y^2(a^2-1) - 2ayz}}{y+az}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in den Ausdruck von x erhält man die Gleichung der Fläche

$$x^2 = y^2(a^2-1) - 2ayz.$$

Leicht zu sehen ist, dass diese Gleichung durch Umdrehung der y und z Coordinatenaxen auf die gewöhnliche Gleichung des hyperbolischen Kegels reducirt wird. — Die Verification unserer Lösung wollen wir in dem Falle unternehmen, wo $a=1$, also

$$x^2 = -2yz;$$

es ist hier zu zeigen, dass die Gleichung für den Durchschnitt des Kegels mit den concentrischen Kugeln vom Radius λ auch die Krümmungslinie des Kegels darstellt.

Da unter den Annahme $a = 1$ zugleich

$$y - z = \pm \lambda, \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \quad z^2 = \frac{x^2}{4y^2}$$

stattfinden, so ist die Projection des Durchschnittes der in Rede stehenden Flächen auf die $(x y)$ resp. $(x z)$ Ebene die Ellipse

$$x^2 + 2y^2 = \pm 2\lambda y, \quad x^2 + 2z^2 = \pm 2\lambda z.$$

Von der Krümmungslinie des Kegels erhält man aber die Projection auf die $(x y)$ Ebene durch die bekannte Gleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [(q^2 + 1)s - pqt] + \frac{dy}{dx} [(q^2 + 1)r - (p^2 + 1)t] - [(p^2 + 1)s - pqr] = 0,$$

in welcher p, q die ersten Derivirten von z nach x resp. y , r, s, t die zweiten Derivirten derselben Veränderlichen der Reihe nach bezeichnen. Da nun für den hyperbolischen Kegel

$$p = -\frac{x}{y}, \quad q = \frac{x^2}{2y^2},$$

$$r = -\frac{1}{y}, \quad s = \frac{x}{y^2}, \quad t = -\frac{x^2}{2y^3};$$

so ergibt sich nach einigen Vereinfachungen die Differenzialgleichung der Krümmungslinie

$$(x y' - y) (2 x y + 2 y^2 y' - x^2 y') = 0.$$

Der erste Factor dieses Productes stellt die Seite des Kegels, der zweite aber die andere Krümmungslinie dar. Aus seiner Identificirung mit 0 folgt unmittelbar

$$\frac{d}{dy} \frac{x^2}{y} = -2, \quad x^2 = -2y^2 + c y;$$

da hier c eine willkürliche Constante bezeichnet, so ist die Verification vollzogen.

2) Es sei $F(\lambda) = \sqrt{1 + a^2 - \lambda^2}$; sogleich ergibt sich

$$\lambda^2 = a y - z,$$

$$(y + a z)^2 = \frac{\lambda^2 (1 + a^2 - \lambda^2)}{1 + (1 + a^2) \rho^2},$$

und daher

$$\rho^2 = \frac{a y - z - y^2 - z^2}{(y + a z)^2},$$

so dass die Gleichung dieser Fläche unter der Form

$$x^2 + y^2 - a y + z^2 + z = 0$$

wodurch dieselbe als Kugel characterisirt wird. Dass dieselbe von den concentrischen Kugeln in den Krümmungslinien geschnitten wird, leuchtet ohne weiteres ein.

3) Unter der Annahme $F(\lambda) = \sqrt{1 + a^2 - \frac{1}{\lambda^4}}$ stellt sich alsbald heraus, dass

$$\lambda = \frac{1}{a y - z},$$

$$(y + a z)^2 \rho^2 = \frac{1}{(a y - z)^2} - (y^2 + z^2),$$

und die Fläche dargestellt wird durch

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{(a y - z)^2}.$$

Der Zusammenhang, welcher zwischen dieser Fläche und dem System der concentrischen Kugeln waltet, ist augenscheinlich darin auszudrücken, dass man die Durchschnitte der Fläche auf den Kugeln selbst nachweist. Denkt man sich nämlich sämtliche concentrische Kugeln und eine Schaar von Ebenen, welche der Ebene

$$a y - z = 0$$

parallel sind, so ist der Durchschnitt der Kugel mit dem Radius λ und der beiden um p vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernten Ebenen auch je ein Durchschnitt der Fläche, sobald

$$\lambda p = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Demnach findet sich dieser Durchschnitt oder die Krümmungslinie der Fläche selbst nur auf denjenigen Kugeln, deren Radius λ die Bedingung erfüllt

$$\lambda^4 \geq \frac{1}{a^2 + 1}.$$

Zu einer ganz ähnlichen Flächengattung führt

4) die Annahme, dass $F(\lambda) = \sqrt{1 + a^2 - \lambda}$, indem nämlich

$$\lambda = \sqrt[3]{(a y - z)^2},$$

und die Gleichung der Fläche selbst

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = (a y - z)^4.$$

Auch ihre Durchschnitte werden gefunden, indem durch die concentrischen Kugeln vom Radius λ eine Schaar von Ebenen gelegt wird, die der Ebene

$$a y - z = 0$$

wiederum parallel sind. Aber hier findet zwischen der Grösse λ und der Entfernung p der Ebenen vom Anfangspunkt eine Bedingung

$$p^2 = \frac{\lambda^3}{a^2 + 1},$$

sowie für die absolute Grösse von λ die Bedingung statt

$$\lambda \geq a^2 + 1.$$

Wie die Fläche n^o 3 besteht die zuletzt gefundene aus zwei Schalen; während aber n^o 3 von der Kugel mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ an zwei diametral entgegengesetzten

Punkten inwendig tangirt wird, und sich dann in immer grösserer Ausbreitung von beiden Seiten asymptotisch der Ebene $a y - z = 0$ nähert, entfernt sich n^o 4, nachdem sie mit derselben Kugel in denselben Punkten eine äussere Berührung erfahren hat, von dieser Stelle nach beiden Seiten ins Unendliche. Ausser diesen von einander getrennten Schalen gehört der Fläche n^o 4 noch der Anfangspunkt der Coordinaten als isolirter Punkt an. Beide Classen von Flächen sind in der allgemeinen Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{n+2} = (a y - z)^4$$

enthalten; die hierdurch dargestellten werden entweder der Fläche n^o 4 oder n^o 3 ähnlich sein, je nachdem n positiv oder negativ genommen ist: sie ergibt sich aus den allgemeinen Formeln der Coordinaten durch die Annahme

$$F(\lambda) = \sqrt{1 + a^2 - \lambda^n}.$$

Zu andern Arten der behandelten Flächen gelangt man dadurch, dass $F(\lambda)$ einer Potenz von λ proportional gesetzt wird, wobei hier jedoch nur die einfachsten Substitutionen vorgenommen werden sollen:

5) Es sei $F^2 = \frac{1}{2} \lambda^2$, wodurch resultirt, wenn man $a^2 + 1$ mit c^2 bezeichnet,

$$\lambda^2 = c^2 + \sqrt{c^4 - 2(a y - z)^2}$$

und als Gleichung der Fläche:

$$(x^2 + y^2 + z^2) (2c^2 - x^2 - y^2 - z^2) = 2(a y - z)^2;$$

dieselbe wird von jeder der Ebenen $a y - z = \pm p$, wo p zwischen den Werthen 0 und $c^2 \sqrt{\frac{1}{2}}$ variirt, in zwei concentrischen Kreisen geschnitten: sie besteht aus zwei symmetrischen geschlossenen Schalen, die nur den Anfangspunkt der Coordinaten gemeinsam haben. Die Krümmungslinien liegen auf den concentrischen Kugeln, deren Radien aber nicht grösser als c sein dürfen.

6) Es sei $F(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$, wodurch

$$\lambda^2 = 1 + \frac{(a y - z)^2}{c^2}$$

und die Gleichung der Fläche

$$c^2 x^2 + (y + a z)^2 = c^2,$$

also ein Cylinder mit kreisförmiger Basis vom Radius 1 dargestellt wird, welcher auf der Ebene $y + a z = 0$ senkrecht steht.

7) Substituirt man $\frac{c}{\lambda^2}$ für $F(\lambda)$, so bezeichnet die resultirende Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left[x^2 + \left(\frac{y + a z}{c} \right)^2 \right] = 1.$$

eine röhrenförmige Fläche, welche sich auf beiden Seiten im Unendlichen dem Lothe auf der Ebene $y + a z = 0$ asymptotisch nähert, und bei der kreisförmigen Berührung mit der Kugel vom Radius 1 die grösste Ausweitung erfährt. In gewissen Beziehungen verhält sich dieser letztern Fläche entgegengesetzt diejenige, zu welcher man

8) durch die Annahme $F(\lambda) = c \sqrt{\frac{2}{1 + \lambda^2}}$ gelangt, und deren Gleichung folgendermassen am einfachsten erscheint:

$$(x^2 + y^2 + z^2) (x^2 + z^2 - 1) = y^2.$$

Aus dieser Gleichung ist leicht ersichtlich, dass der Anfangspunkt der Coordinaten ein isolirter Punkt der Fläche ist, während dieselbe sonst aus einer Röhre besteht, welche sich nach beiden Seiten hin ins Unendliche erstreckt, so dass die der (xz) Ebene parallelen Durchschnitte Kreise mit immer wachsenden Radien werden. Die grösste Zusammenziehung erleidet die Fläche in der (xz) Ebene selbst, wo der Radius des Durchschnittskreises 1 ist. Die Gleichung zeigt, dass die Fläche durch Rotation einer Curve um die y Axe entstanden, deren Gleichung in Polarcordinaten ρ, θ

$$\rho = 0, \rho^2 = 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \theta$$

sie als eine zweitheilige, der Hyperbel durchaus ähnliche, Linie charakterisirt.

III.

Lagrange hat in den *Miscellanea Taurinensia* Vol. II, wo er zuerst die Principien der von ihm erfundenen Variationsrechnung auseinandersetzt, eine Anwendung derselben auf das Problem der kleinsten Fläche gemacht. Es wurde nämlich von allen krummen Flächen, welche von denselben Linien begrenzt sind, diejenige gesucht, welche am kleinsten ist, für welche also das Integral

$$\iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

ein Minimum wird. Die aus dieser Bedingung folgende Differenzialgleichung

$$(1 + p^2) t - 2 p q s + (1 + q^2) r = 0$$

ist bekannt, ebenso dass Monge und Legendre das Integral dieser Gleichung gegeben haben. In einem Anhang soll der Weg gezeigt werden, auf welchem Legendre wahrscheinlich zu diesem Resultat gelangt ist: die Memoiren der Pariser Academie waren dem Verf. zur Zeit unzugänglich. Es ergeben sich nämlich für die Coordinaten der Fläche, als Functionen zweier Variablen a und b , folgende Gleichungen

$$x = \varphi'(a) + \psi'(b)$$

$$y = \varphi(a) - a\varphi'(a) + \psi(b) - b\psi'(b)$$

$$z = i \int \sqrt{1 + a^2} \varphi''(a) da - i \int \sqrt{1 + b^2} \psi''(b) db,$$

in welchen φ , ψ willkürliche Functionen von a und b , i die imaginäre Einheit bezeichnet. Berechnet man aus diesen Formeln die Werthe von p und q , und substituirt dieselben in den Ausdruck (s. pag. 2) für den Cosinus zwischen der Fläche und einer Ebene, so ist leicht ersichtlich, dass dieser Ausdruck constant wird, wenn man für die Bestimmungsstücke der Ebene θ und τ annimmt, die mit a und b durch die Gleichungen

$$a = \theta + \tau i$$

$$b = \theta - \tau i$$

verbunden sind. Die Coordinaten der kleinsten Flächen, deren Krümmungslinien sämtlich in den Ebenen θ und τ enthalten sind, nehmen hiernach die Formen an:

$$x = \varphi'(\theta + \tau i) + \psi'(\theta - \tau i)$$

$$y = \varphi(\theta + \tau i) + \psi(\theta - \tau i) - (\theta + \tau i) \varphi'(\theta - \tau i) - (\theta - \tau i) \psi'(\theta - \tau i)$$

$$z = \int \sqrt{\tau^2 - \theta^2 - 1 - 2\theta\tau i} \varphi''(\theta + \tau i) (d\theta + i d\tau)$$

$$- \int \sqrt{\tau^2 - \theta^2 - 1 + 2\theta\tau i} \psi''(\theta - \tau i) (d\theta - i d\tau).$$

Unmittelbar resultiren die folgenden Gleichungen, in welchen die Argumente von φ und ψ , d. h. $\theta + \tau i$ resp. $\theta - \tau i$ fortgelassen sind,

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \varphi'' + \psi'', \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = i(\varphi'' - \psi''), \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial \tau} = i(\varphi''' - \psi''');$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\theta(\varphi'' + \psi'') - \tau i(\varphi'' - \psi''), \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = -\theta i(\varphi'' - \psi'') + \tau(\varphi'' + \psi''),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \theta \partial \tau} = -i(\varphi'' - \psi'') - \theta i(\varphi''' - \psi''') + \tau(\varphi''' + \psi''').$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta} &= i\varphi'' \sqrt{1+(\theta+\tau i)^2} - i\psi'' \sqrt{1+(\theta-\tau i)^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \tau} &= -\varphi'' \sqrt{1+(\theta+\tau i)^2} - \psi'' \sqrt{1+(\theta-\tau i)^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial \tau} &= -\frac{\theta+\tau i}{\sqrt{1+(\theta+\tau i)^2}} \varphi'' - \frac{\theta-\tau i}{\sqrt{1+(\theta-\tau i)^2}} \psi'' - \varphi''' \sqrt{1+(\theta+\tau i)^2} - \psi''' \sqrt{1+(\theta-\tau i)^2}.\end{aligned}$$

Durch Substituierung dieser Werthe in die erste von Joachimsthal aufgestellte Gleichung findet man den Ausdruck

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \tau}$$

ohne weitere Bedingung identisch 0. Wenn daher $\theta = \text{const.}$ und $\tau = \text{const.}$ die beiden auf einander senkrechten Systeme der Krümmungslinie bezeichnen, so bleibt für die Charakterisierung derjenigen kleinsten Flächen, deren Krümmungslinien sämmtlich eben sind, nur die zweite Gleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial \tau} \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta \partial \tau} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial \tau} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Die Berechnung des links stehenden Ausdruckes nach den oben gegebenen Werthen der partiellen Differenzialquotienten bietet keine Schwierigkeiten dar, doch soll hier nur das Endresultat des weitläufigen Exempels gegeben werden. Es resultirt nämlich folgende Differenzialgleichung:

$$\left(\frac{\varphi''}{\sqrt{1+(\theta+\tau i)^2}} - \frac{\psi''}{\sqrt{1+(\theta-\tau i)^2}} \right) \left(1 + \theta^2 + \tau^2 + \sqrt{(1+\theta^2-\tau^2)^2 + 4\theta^2\tau^2} \right) = 0.$$

Da der zweite Factor des links stehenden Gliedes nicht verschwinden kann, so muss für die Functionen φ und ψ die Bedingung stattfinden:

$$(F) \quad \varphi'' (\theta + \tau i) \sqrt{1+(\theta-\tau i)^2} = \psi'' (\theta - \tau i) \sqrt{1+(\theta+\tau i)^2}.$$

Um aus dieser Gleichung eine wirkliche Bestimmung der Functionen oder der Coordinaten, welche in denselben ausgedrückt sind, zu erhalten, ersetzt man nach den oben aufgestellten Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \varphi'' + \psi'', \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = i(\varphi'' - \psi''),$$

die zweiten Differenziale resp. durch

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} - i \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \text{ und } \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} + i \frac{\partial x}{\partial \tau} \right),$$

wodurch die obige Gleichung, unter Zusammenfassung der mit demselben partiellen Differenzial behafteten Glieder, in die folgende übergeht:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \theta} \left(\sqrt{1+(\theta+\tau i)^2} - \sqrt{1+(\theta-\tau i)^2} \right) + i \frac{\partial^2 x}{\partial \tau} \left(\sqrt{1+(\theta+\tau i)^2} + \sqrt{1+(\theta-\tau i)^2} \right) = 0.$$

Nach dem gewöhnlichen Verfahren bei partiellen Differenzialgleichungen wird hiermit die Beziehung verbunden

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau = dx,$$

so dass die beiden vorläufig als unabhängig von einander geltenden Gleichungen resultiren

$$dx = 0$$

$$d\theta [\sqrt{1+(\theta+\tau i)^2} + \sqrt{1+(\theta-\tau i)^2}] + i d\tau [\sqrt{1+(\theta+\tau i)^2} - \sqrt{1+(\theta-\tau i)^2}] = 0.$$

Da das Integral der ersteren sich als $x = \text{const.}$ ergibt, so erhält man nach Integration der zweiten Gleichung x als Function des Integrales. Wird nun die letztere auf die Form gebracht

$$(d\theta + i d\tau) \sqrt{1+(\theta+\tau i)^2} + (d\theta - i d\tau) \sqrt{1+(\theta-\tau i)^2} = 0,$$

so bieten sich zunächst logarithmische Integrale dar, deren Form jedoch weniger zur Berechnung geeignet erscheint als die von Gudermann in die Analysis eingeführten hyperbolischen Functionen. Versteht man nämlich unter hyperbolischem Cosinus von α die Reihe

$$1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots = \text{Cos } \alpha,$$

sowie unter hyperbolischem Sinus von α die Reihe

$$\frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots = \text{Sin } \alpha,$$

so folgt unmittelbar die Beziehung

$$\text{Cos}^2 \alpha - \text{Sin}^2 \alpha = 1,$$

sowie der Zusammenhang dieser Functionen mit den trigonometrischen

$$\text{Cos}(\alpha i) = \cos \alpha, \quad \text{Sin}(\alpha i) = i \sin \alpha,$$

so dass denn auch die Gleichungen stattfinden

$$\text{Sin}(\alpha \pm \beta i) = \text{Sin } \alpha \cos \beta \pm i \text{Cos } \alpha \sin \beta,$$

$$\text{Cos}(\alpha \pm \beta i) = \text{Cos } \alpha \cos \beta \pm i \text{Sin } \alpha \sin \beta.$$

Von diesen Functionen machen wir fernerhin Gebrauch durch die Substitution

$$\theta + \tau i = \text{Sin}(\alpha + \beta i), \quad \theta - \tau i = \text{Sin}(\alpha - \beta i),$$

wodurch die obige Differenzialgleichung übergeht in folgende

$$\text{Cos}^2(\alpha + \beta i) (d\alpha + i d\beta) + \text{Cos}^2(\alpha - \beta i) (d\alpha - i d\beta) = 0.$$

Da nun aus den eben aufgestellten Beziehungen erhellt, dass

$$\frac{d \text{Cos } \alpha}{d \alpha} = \text{Sin } \alpha, \quad \frac{d \text{Sin } \alpha}{d \alpha} = \text{Cos } \alpha,$$

so ist bei der Integration

$$\int \text{Cos}^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \text{Cos } \alpha \text{Sin } \alpha + \frac{\alpha}{2};$$

darum ist das halbe Integral der obigen Gleichung

$$\text{Cos}(\alpha + \beta i) \text{Sin}(\alpha + \beta i) + \text{Cos}(\alpha - \beta i) \text{Sin}(\alpha - \beta i) + \frac{\alpha}{2} = \text{const.}$$

Durch Benutzung der Formeln für Cos und Sin complexer Argumente, und der sich ebenfalls leicht ergebenden Beziehungen

$$\text{Sin } 2\alpha = 2 \text{Cos } \alpha \text{Sin } \alpha, \quad \text{Cos } 2\alpha = \text{Cos}^2 \alpha - \text{Sin}^2 \alpha,$$

erhält man als Vereinfachung des Integrales

$$\text{Sin } 2\alpha \cos 2\beta + \alpha = \text{const.}$$

Stellt man daher die Verbindung zwischen den beiden Theilintegralen wieder her, so ist, wenn f eine beliebige Function bezeichnet,

$$x = f(\text{Sin } 2\alpha \cos 2\beta + \alpha).$$

In ähnlicher Weise, wie man hier in die Bestimmungsgleichung x eingeführt und dadurch einen Ausdruck für diese Coordinate erhalten hat, bedient man sich der beiden Gleichungen

$$i \frac{\partial y}{\partial \theta} = -i(\theta + \tau i) \varphi'' - i(\theta - \tau i) \psi'', \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = -i(\theta + \tau i) \varphi'' + i(\theta - \tau i) \psi'',$$

aus welchen folgt:

$$\varphi'' = \frac{-\frac{\partial y}{\partial \theta} + i \frac{\partial y}{\partial \tau}}{2(\theta + \tau i)}, \quad \psi'' = -\frac{\frac{\partial y}{\partial \theta} + i \frac{\partial y}{\partial \tau}}{2(\theta - \tau i)}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (F) ein und verbindet damit die Beziehung

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \tau} d\tau = dy,$$

so ergeben sich die zunächst unabhängig erscheinenden Integrale

$$y = \text{const.}$$

$$\int (d\theta + i d\tau) (\theta + \tau i) \sqrt{1 + (\theta + \tau i)^2} + \int (d\theta - i d\tau) (\theta - \tau i) \sqrt{1 + (\theta - \tau i)^2} = \text{const.}$$

Die letztere Gleichung ergibt aber unmittelbar, nach der elementaren Formel

$$\int \rho d\rho \cdot \sqrt{1 + \rho^2} = \frac{1}{3} (1 + \rho^2) \sqrt{1 + \rho^2},$$

folgendes Integral

$$[1 + (\theta + \tau i)^2] \sqrt{1 + (\theta + \tau i)^2} + [1 + (\theta - \tau i)^2] \sqrt{1 + (\theta - \tau i)^2} = \text{const.}$$

Indem man nun für $\theta - \tau i$ und $\theta + \tau i$ abermals die hyperbolischen Sinus der complexen Argumente $\alpha + \beta i$ resp. $\alpha - \beta i$ einführt, nimmt das Integral die Form an

$$\text{Cosh}^3(\alpha + \beta i) + \text{Cosh}^3(\alpha - \beta i) = \text{const.},$$

oder

$$\text{Cosh}^3 \alpha \cos^3 \beta - 3 \text{Cosh} \alpha \cos \beta \text{Sin}^2 \alpha \sin^2 \beta = \text{const.}$$

Da nun nach den oben gegebenen Formeln für die hyperbol. Functionen und den bekannten für \sin^2

$$\text{Sin}^2 \alpha \sin^2 \beta = \text{Cosh}^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1 - \text{Cosh}^2 \alpha \cos^2 \beta,$$

nach ausgeführter Substitution aber von den Formeln

$$\cos^3 \beta = 4 \cos^3 \beta - 3 \cos \beta, \quad \text{Cosh}^3 \alpha = 4 \text{Cosh}^3 \alpha - 3 \text{Cosh} \alpha$$

Anwendung gemacht werden kann, so geht die obige Integralgleichung in die Form über:

$$\text{Cosh}^3 \alpha \cos^3 \beta + 3 \text{Cosh} \alpha \cos \beta = \text{const.},$$

so dass die zweite Coordinate der gesuchten Fläche, wenn f_1 eine von f verschiedene beliebige Function bezeichnet, folgendermassen ausgedrückt wird

$$y = f_1 (\text{Cosh}^3 \alpha \cos^3 \beta + 3 \text{Cosh} \alpha \cos \beta).$$

Endlich dient zur Auffindung der dritten Coordinate die Gleichung (F) mittelst der Substitutionen

$$\varphi'' = \frac{\frac{\partial z}{\partial \theta} - i \frac{\partial z}{\partial \tau}}{2i \sqrt{1 + (\theta + \tau i)^2}}, \quad \psi'' = -\frac{\frac{\partial z}{\partial \theta} + i \frac{\partial z}{\partial \tau}}{2i \sqrt{1 + (\theta - \tau i)^2}};$$

die partielle Differenzialgleichung wird alsdann

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} (1 + \theta^2 - \tau^2) - 2 \frac{\partial z}{\partial \tau} \cdot \theta \tau = 0,$$

welche, verbunden mit der Beziehung

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \tau} d\tau = dz,$$

die beiden Gleichungen in totalen Differenzialen ergibt

$$dz = 0, \\ (1 + \theta^2 - \tau^2) d\tau + 2\theta\tau d\theta = 0.$$

Die letztere ist identisch mit

$$(1 - \tau^2) d\tau + d(\theta^2\tau) = 0,$$

so dass die zwei Integralgleichungen resultiren

$$z = \text{const.}, \quad 3\tau - \tau^3 + 3\theta^2\tau = \text{const.}$$

Um auch diese Integrale in hyperbolischen Functionen auszudrücken, multiplicire man das letztere mit i , und substituire die nach pag. 12 erhaltenen Werthe

$$\theta = \text{Sin } \alpha \cos \beta, \quad \tau = \text{Cos } \alpha \sin \beta.$$

Benutzt man zur Vereinfachung des Integralausdruckes die bekannte Formel $\sin 3\beta = 3 \sin \beta - 4 \sin^3 \beta$ und die oben angegebene für $\text{Cos } 3\alpha$, so erhält man, indem man mit f_2 wiederum eine beliebige Function bezeichnet und beide Integrale combinirt, für die dritte Coordinate der Fläche die Gleichung

$$z = f_2 (\text{Cos } 3\alpha \sin 3\beta + 9 \text{Cos } \alpha \sin \beta).$$

Vergegenwärtigt man sich die Ausdrücke für die beiden letzten Coordinaten, indem man die zuerst gewählten Variablen a und b wiederum einführt, nämlich

$$y = f_1 [(1+a^2)\sqrt{1+b^2} + (1+b^2)\sqrt{1+a^2}] \\ z = f_2 [a^3 - b^3 + 3(a-b)],$$

welche nur Potenzen und Wurzeln der Variablen enthalten, so muss es auffallen, dass für x der aus diesen Variablen zusammengesetzte Ausdruck dieser Einfachheit entbehrt. Indem man nämlich in das mit $x = \text{const.}$ zu combinirende Integral mit den Veränderlichen a und b bildet,

$$\int da \cdot \sqrt{1+a^2} + \int db \cdot \sqrt{1+b^2} = \text{const.}$$

und die elementare Formel

$$\int d\rho \cdot \sqrt{1+\rho^2} = \frac{1}{2}\rho\sqrt{1+\rho^2} + \frac{1}{2}\log(\rho + \sqrt{1+\rho^2})$$

anwendet, findet man, dass der logarithmische Theil des Arguments von f , der für x gewählten beliebigen Function, nicht verschwindet, dass vielmehr x den folgenden Werth erhält

$$x = f [a\sqrt{1+a^2} + b\sqrt{1+b^2} + \log(a + \sqrt{1+a^2})(b + \sqrt{1+b^2})].$$

Um von den so gewonnenen Gleichungen, welche die Fläche darstellen, ein Beispiel zu geben, sollen die Coordinaten den Argumenten ihrer Functionen gleichgesetzt werden, so dass ihr Zusammenhang vermittelst der Bestimmungsstücke α und β folgendermassen ausgedrückt ist:

$$x = \text{Sin } 2\alpha \cos 2\beta + \alpha \\ y = \text{Cos } 3\alpha \cos 3\beta + 3 \text{Cos } \alpha \cos \beta \\ z = \text{Cos } 3\alpha \sin 3\beta + 9 \text{Cos } \alpha \sin \beta.$$

Setzt man zuvörderst $\beta = 0$, oder $= \pi$, so ergeben sich die Bestimmungen

$$x = + \text{Sin } 2\alpha + \alpha, \quad y = \pm \text{Cos } 3\alpha \pm 3 \text{Cos } \alpha, \quad z = 0,$$

wonach wir also einen Durchschnitt der Fläche mit der (xy) Ebene erhalten.

Die Coordinate y nimmt sogleich den Werth $\pm 4 \cos^3 \alpha$ an, so dass also

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt[3]{2y} \text{ und } \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \sqrt[3]{4y^2} - 1;$$

x und y stehen alsdann in Verbindung durch die Gleichung

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} y \sqrt[3]{2y} - \sqrt[3]{4y^2}} + \text{Arc Cos } \pm \frac{1}{2} \sqrt[3]{2y}.$$

Da nun aus den pag. 12 aufgestellten Formeln leicht ersehen wird, dass

$$\cos \alpha + \sin \alpha = e^c, \text{ also } \alpha = + \log (\cos \alpha + \sin \alpha), \text{ d. h.}$$

$$\text{Arc Cos } \pm c = + \log (\pm c + \sqrt{c^2 - 1})$$

ist, so geht die Gleichung des Durchschnittes in der (xy) Ebene über in:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} y \sqrt[3]{2y} - \sqrt[3]{4y^2}} + \log (\pm \frac{1}{2} \sqrt[3]{2y} + \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt[3]{4y^2} - 1}).$$

Da der hyperbolische Cosinus stets positiv ist, so muss, wenn man ihn gleich $-\sqrt[3]{2y}$ setzt, y negativ genommen werden, daher auch das Zeichen $-$ im Logarithmanden nur für negative Werthe von y gilt. Daher besteht die Durchschnittscurve der Fläche aus zwei getrennten Zweigen, von denen jeder in dem Punkte $x = 0, y = 4$ resp. -4 eine der (x) Axe parallele Tangente hat und von da aus sowohl auf der Seite der positiven als auch auf der der negativen x und y in's Unendliche geht.

Setzt man sodann $\alpha = 0$, so finden die Beziehungen statt:

$$x = 0, \quad y = \cos^3 \beta + 3 \cos \beta, \quad z = \sin^3 \beta + 9 \sin \beta,$$

so dass man hieraus einen Durchschnitt der kleinsten Fläche mit der (yz) Ebene erhält. Leicht ergibt sich

$$\lambda = 4 \cos^3 \beta, \quad \cos \beta = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2y}, \\ z = 12 \sin \beta - 4 \sin^3 \beta.$$

Da nun

$$\frac{y^2}{16} = (1 - \sin^2 \beta)^3, \quad \frac{z^2}{16} = \sin^2 \beta (3 - \sin^2 \beta)^2,$$

so resultirt

$$\frac{y^2 + z^2}{16} = 1 + 6 \sin^2 \beta - 3 \sin^4 \beta,$$

oder, mit Einsetzung des in y ausgedrückten Werthes von $\sin^2 \beta$,

$$y^2 + z^2 - 64 = -6y \sqrt[3]{2y}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung beständig negativ ist, so ist offenbar, dass weder y noch z einen grösseren Zahlenwerth als 8 erhalten, ja dass $y^2 + z^2$ nicht grösser als 64 werden kann. Obwohl die obige Gleichung vom sechsten Grade ist, schneidet die Curve die (y) und die (z) Axe nur in je zwei Punkten, und zwar in der Entfernung $y = \pm$ resp. $z = \pm 8$ vom Anfangspunkte. Die Curve ist geschlossen und hat in den vier Punkten

$$y = \pm \sqrt{2}, \quad z = \pm \sqrt{50}$$

je einen Wendepunkt, in welchem die Tangente mit der (y) Axe einen Winkel von $28^\circ 26' 20''$ bildet.

Ein Durchschnitt der Fläche mit der (xz) Ebene endlich besteht aus zwei ineinandergreifenden Curvenzweigen, deren einer von dem Punkte $x = 0, z = -8$ an sich nach den positiven z hin in's Unendliche erstreckt, während der andere, jenem congruente, von dem Punkte $x = 0, z = +8$ an nach der Richtung der negativen z in's Unendliche geht. Diese Zweige verhalten sich in Bezug auf negative x ebenso, wie auf positive x .

IV.

In Bezug auf das pag. 10 Gesagte soll im Folgenden der Weg gezeigt werden, auf welchem Legendre wahrscheinlich zu dem Integrale der Differenzialgleichung der kleinsten Fläche gelangte. Vergegenwärtigt man sich letztere:

$$0 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

so ist die Integration nach dem gewöhnlichen Verfahren bei Differenzialgleichungen hier gleichfalls anzuwenden unter der Bedingung, dass man die zweiten Differenziale durch solche ersetze, die in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ genommen sind. Dadurch wird man veranlasst, der Function z von x und y eine Function von p und q zu substituieren. Dieses Verfahren genügt aber nicht, weil man alsdann für die zweiten Differenziale $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$ Ausdrücke bekommen würde, die nicht nur die entsprechenden Derivirten der neuen Function, sondern auch die zweiten Derivirten der Variablen x und y nach p und q enthalten. Zur Vermeidung dieses Übelstandes ist man genöthigt, der neuen Function einen Theil hinzuzufügen, welcher aus gewissen Ausdrücken von x und y mit p resp. q multiplicirt besteht. Damit sich daraus durch partielle Differentiation unmittelbar die ersten Derivirten von z ergeben, setze man, jene Function von p und q allein mit u bezeichnend,

$$z = p \cdot x + q \cdot y + u.$$

Differenzirt man diesen Ausdruck nach p resp. q , so ergeben sich die Gleichungen

$$p \frac{\partial x}{\partial p} = z + p \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial p}, \quad q \frac{\partial y}{\partial q} = y + q \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial q},$$

durch welche man zu der Annahme genöthigt wird, zu setzen

$$x = -\frac{\partial u}{\partial p}, \quad y = -\frac{\partial u}{\partial q}.$$

Indem man die erstere nach x , die zweite nach y und nach z differenzirt, erhält man ein System von drei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} r + \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} s = -1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} s + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} t = -1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} r + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} s = 0,$$

woraus sich die Beziehungen ergeben

$$r = -\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} \right)^2}, \quad t = -\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} \right)^2}, \quad s = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} \right)^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in die ursprüngliche Differenzialgleichung der kleinsten Fläche, so nimmt diese die Gestalt an:

$$(1 + p^2) \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + 2pq \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} + (1 + q^2) \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = 0.$$

Nachdem somit die gewünschte Transformation erreicht ist, benutze man die Beziehungen

$$d \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} dp + \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} dq,$$

$$d \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} dp + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} dq,$$

um statt der vorigen Gleichung zwei zu erhalten, indem man die mit $\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q}$ behafteten gleich 0 setzt:

$$(A) (1+p^2) dq^2 - 2pq dp dq + (1+q^2) dp^2 = 0,$$

$$(B) (1+p^2) dx dq + (1+q^2) dy dp = 0.$$

Ein Integral der Gleichung (A) gewinnt man, indem man

$$p = mq + n$$

setzt, wo m und n für jetzt Constanten bezeichnen. Aus der Substitution selber ergibt sich die Beziehung

$$n = \pm i \sqrt{m^2 + 1},$$

Drückt man nunmehr m selber in p und q aus, so sieht man, dass es die beiden Werthe

$$\frac{pq \pm i \sqrt{p^2 + q^2 + 1}}{q^2 + 1}$$

annehmen kann; wählt man daher diese beiden zu den Variablen, in denen man die Coordinaten der Fläche darstellen will, und benennt sie mit a resp. b, so findet man nach leichter Rechnung

$$p = i \frac{b \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}}{b-a}$$

$$q = i \frac{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}}{b-a},$$

wo i die imaginäre Einheit bezeichnet. Mit Hilfe dieser Werthe erhält man aus der Gleichung (B), wenn man $dp = mdq$ setzt, die Beziehung

$$dy = -\frac{ab}{m} dx,$$

so dass, je nachdem $m = a$ oder $= b$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial y}{\partial a} = -a \frac{\partial x}{\partial a}, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = -b \frac{\partial x}{\partial b}$$

angenommen werden kann. Nun finden aber die Gleichungen statt:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = p \frac{\partial x}{\partial a} + q \frac{\partial y}{\partial a},$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = p \frac{\partial x}{\partial b} + q \frac{\partial y}{\partial b},$$

so dass man hieraus und aus den oben für p und q angegebenen Werthen die Formeln erhält

$$\frac{\partial z}{\partial a} = i \sqrt{1+a^2} \frac{\partial x}{\partial a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = -i \sqrt{1+b^2} \frac{\partial x}{\partial b}.$$

Zunächst tritt hervor, dass die Functionen von a und b, welche x bestimmen, willkürlich gewählt werden können. Nehmen wir vor Allem an, dass beide Variablen getrennt vorkommen, und setzen mit Legendre $x = \varphi'(a) + \psi'(b)$, so resultirt unmittelbar für z die Gleichung

$$z = i \int \sqrt{1+a^2} \varphi''(a) da + i \int \sqrt{1+b^2} \psi''(b) db.$$

Da für y zwei Bestimmungsgleichungen stattfinden, so wird das Integral derselben allgemein genug, nämlich

$$y = -\int a \varphi''(a) da - \int b \psi''(b) db;$$

integriert man daher theilweise

$$\int -a \varphi''(a) da = -a \varphi(a) + \int \varphi'(a) da,$$

so ergibt sich auch hier die Legendre'sche Form

$$y = \varphi(a) - a \varphi'(a) + \psi(b) - b \psi'(b).$$

Bei einer früheren Gelegenheit ist von mir die Frage aufgeworfen worden, ob sich unter diesen kleinsten Flächen eine findet, für welche z als Summe zweier Functionen erscheint, deren erste bloss von x , während die zweite nur von y abhängt. Als Flächen-gleichung resultirt:

$$z = \log \frac{\cos x}{\cos y}.$$

Offenbar erhält z für positive wie für negative x (oder y) dieselben Werthe, daher die Fläche nach allen Seiten von der z Axe aus symmetrisch liegt. Denkt man sich die (xy) Ebene schachbrettartig in Quadrate eingetheilt, so dass der Mittelpunkt des einen mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt; (die Seiten dieser Quadrate sind der x resp. y Axe parallel und haben eine Länge $= \pi$) errichtet man auf derselben Ebene längs den Seiten der Quadrate senkrechte Ebenen, die nach der Seite der positiven und der negativen z in's Unendliche gehen, so theilen diese den ganzen Raum in unendlich viele und unendlich lange Kanäle von quadratischem Querschnitt. Von diesen Kanälen fassen wir diejenigen in's Auge, welche paarweise nur eine auf der (xy) Ebene senkrechte Gerade gemeinsam haben, die also gewissermassen über den gleichfarbigen Feldern der (xy) Ebene stehen: in jedem dieser Kanäle findet sich ein Theil unserer Fläche, der jedem anderen Theile völlig congruent ist und mit den angränzenden Theilen eben jene zwei Kanäle zugleich angehörige Kante gemein hat. Erörtern wir daher nur denjenigen Flächentheil, welcher in dem die z Axe einschliessenden Kanal sich befindet. Denkt man sich in der (xz) Ebene die Curve $z = \log \cos x$ gezeichnet, welche, die x Axe im Anfangspunkt berührend, auf beiden Seiten der z Axe nach der Richtung der negativen z in's Unendliche geht, so dass die beiden Geraden $x = \pm \frac{\pi}{2}$ die Asymptoten der Curve werden; stellt man sich alsdann in der (zy) Ebene die Curve $z = \log \cos y$ vor, welche, die y Axe im Anfangspunkt berührend, auf beiden Seiten der z Axe nach der Richtung der positiven z in's Unendliche geht, so dass sie die Geraden $y = \pm \frac{\pi}{2}$ zu Asymptoten hat; so entsteht unsere Fläche dadurch, dass sich die erstere Curve mit ihrem Scheitelpunkt auf der letzteren bewegt, indem die Ebene jener Curve stets parallel der (xz) Ebene bleibt. Hieraus erhellt zugleich, dass die (xy) Ebene in den Diagonalen des Quadrats von der Fläche geschnitten wird, wodurch im Allgemeinen auf jener Ebene zwei Schaaren paralleler Linien entstehen, welche die den ausgewählten Kanälen angehörigen Quadrate als Diagonalen durchkreuzen.

