Ueber die Art der durch gegebene Stücke bestimmten Kegelschnitte.

§. 1.

Soll ein Kegelschnitt gezeichnet werden, der durch vorgeschriebene Punkte geht und gegebene gerade Linien berührt, so gehören bekanntlich 5 solcher Stücke dazu, um einen Kegelschnitt oder eine begrenzte Anzahl derselben zu erhalten. Es entstehen hier durch Kombination von Tangenten und Punkten 6 Hauptaufgaben, die in Bezug auf die Anzahl der möglichen Kegelschnitte, welche durch dieselben Stücke bestimmt sind, vollständig gelös't sind und namentlich hat Steiner*) auf geometrischem Wege diese Aufgaben behandelt.

Möbius hat in seinem „barycentrischen Calcul“**) die Kegelschnitte, insofern sie durch 5 Punkte gehen oder durch 5 Tangenten bestimmt sind, einer ausführlichen Betrachtung unterzogen, und hierbei die Frage beantwortet: Welcher Art gehört der Kegelschnitt an, von dem 5 Tangenten oder 5 Punkte beliebig in der Ebene hingezeichnet sind? — In jedem dieser beiden Fälle ist die Anzahl der möglichen Kegelschnitte = 1. Dieselbe Frage für die 4 übrigen Hauptaufgaben, (wenn der Kegelschnitt durch 4 Punkte und 1 Tangente, 3 Punkte und 2 Tangenten, 2 Punkte und 3 Tangenten, 1 Punkt und 4 Tangenten bestimmt ist) läßt sich schon deshalb nicht stellen, weil die Anzahl der möglichen Kegelschnitte hier größer als 1 ist. Wenn aber die Punkte gegen die Tagenten eine besondere Lage haben, so wird diese Anzahl in jedem der 4 Hauptfälle auch gleich der Einheit und so gehe ich zu folgender Aufgabe über.

Aufgabe.

§. 2.

Die Art des Kegelschnitts aus der Lage der ihn bestimmenden Punkte und Tangenten anzugeben, sobald nur 1 Kegelschnitt gezeichnet werden kann.

Schließt man bei der ganz willkürlichen Lage der gegebenen Tangenten und Punkte in der Ebene diejenigen Fälle aus, welche überhaupt bei Kegelschnitten gar nicht oder nur in Grenzfällen vorkommen können, daß

3 Tangenten durch einen Punkt gehen, oder
3 Punkte in gerader Linie liegen, oder
2 Tangenten sich in einem Punkte des Kegelschnitts schneiden, oder endlich
2 Punkte desselben auf einer Tangente liegen,

---

*) Die geometrischen Konstructionen §. 20.
**) §. 249. ff.

so läßt sich bei jeder festgesetzten Lage der Punkte und Linien eine begrenzte Anzahl von Kegelschnitten durchlegen, sobald 5 Stücke gegeben sind; und zwar ist dieselbe gleich der Einheit, sobald der Kegelschnitt

1) durch 5 Punkte geht,
2) durch 3 Punkte gelegt wird und 1 Gerade in einem gegebenen Punkte berührt,
3) durch 1 Punkt geht und 2 Gerade in gegebenen Punkten tangirt,
4) 3 Gerade berührt, davon 2 in gegebenen Punkten,
5) 4 Gerade und zwar die eine in einem gegebenen Punkte, und
6) 5 Gerade berührt.

Der Beweis für die Richtigkeit obiger Behauptung wird weiter unten durch die Methode des barycentrischen Calculs geführt werden. Die Lösung der gestellten Aufgabe zerfällt demnach in 6 Abschnitte.

1. Der Kegelschnitt ist durch 5 gegebene Punkte bestimmt.

Auflösung. Unter den 5 Punkten lassen sich immer 4 so auswählen, daß jeder außerhalb des von den 3 andern gebildeten Dreiecks liegt. Man beschreibe durch diese 4 Punkte die beiden Parabeln. Liegt der 5te Punkt auf einer dieser Parabeln, so ist diese der Kegelschnitt, welcher durch die 5 Punkte gezeichnet werden kann. — Befindet sich der Punkt innerhalb beider Parabeln oder außerhalb derselben, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel. — Ist der 5te Punkt innerhalb der einen und außerhalb der anderen Parabel gelegen, so muß der gesuchte Kegelschnitt eine Ellipse sein *).

2. Der Kegelschnitt wird durch 3 Punkte gelegt und berührt eine Gerade in einem gegebenen Punkt.

Auflösung. 1) Liegt von den 4 Punkten einer in dem Dreiecke der 3 andern, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

2) Liegt keiner der 4 Punkte in dem Dreiecke der 3 andern, so beschreibe man durch die 4 Punkte die beiden Parabeln und lege in dem Punkte, durch den die gegebene Gerade geht, die beiden Tangenten an die Parabeln. Durch diese Tangenten wird die Ebene in 2 Theile **) getheilt, in deren einem das durch die 3 andern Punkte gebildete Dreiecke liegt. Befindet sich die gegebene Gerade auch in diesem Theile der Ebene, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel. Liegt dagegen die Gerade in dem andern Theile der Ebene, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Fällt endlich die gegebene Linie mit einer dieser Tangenten zusammen, so ist der Kegelschnitt die zur Tangente gehörige Parabel.

3. Der Kegelschnitt berührt 2 Gerade in gegebenen Punkten und geht noch durch einen dritten gegebenen Punkt.

Auflösung 1. Man lege die (immmer mögliche) Parabel, welche die beiden Linien in den gegebenen Punkten berührt. Befindet sich der 3te Punkt innerhalb dieser Parabel, so ist der zu bestimmende Kegelschnitt eine Ellipse. Liegt der 3te Punkt außerhalb der Parabel, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel. Ist

---

*) Moeb. baryc. Calc. §. 255.

**) 2 sich schneidende Linien theilen zwar die Ebene in 4 Theile, doch werden hier je 2 Scheitelwinkel-Räume als einer betrachtet, da sie in ihren unendlich entfernten Grenzen nicht getrennt sind.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

endlich der 3te Punkt ein Punkt der Parabel selbst, so fällt der einzig mögliche Kegelschnitt mit dieser Parabel zusammen.

Auflösung 2. Die gegebenen Linien seien a und c mit den Berührungspunkten A und C, der 3te Punkt B.

1) Schneidet eine der Linien (a und c) oder beide das durch A, B, C gebildete Dreieck, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

2) Liegen beide Linien außerhalb des Dreiecks ABC, so lege man die beiden Parabeln, welche durch A, B, C gehen und eine der Linien (etwa a) berühren, ferner durch den gegebenen Punkt (C) der andern Linie die beiden Tangenten an dieselben. Durch diese beiden Tangerten wird die Ebene in 2 Theile getheilt, in deren einem das Dreick ABC liegt. Befindet sich die Linie c in demselben Raume, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel. Ist dagegen c in dem andern Theile der Ebene gelegen, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Fällt endlich c mit einer der Tangenten zusammen, so ist der Kegelschnitt die zu der Tangente gehörige Parabel.

4. Der Kegelschnitt berührt 3 Gerade und zwar 2 derselben in gegebenen Punkten.

Auflösung. Die gegebenen Linien seien a und c mit den Punkten A und C und die Linie b.

1) Schneidet die Linie b die Linie AC zwischen A und C, so ist der Kegeschnitt eine Hyperbel.

2) Trifft die Linie b die Linie AC in ihren Verlängerungen über A oder C hinaus, so beschreibe man die Parabel, welche die Linien a und c in A und C berührt. Schneidet die Linie b diese Parabel, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Hat die Linie b mit der Parabel keinen Punkt gemeinsam, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel. Ist endlich b eine Tangente an die Parabel, so fällt der gesuchte Kegelschnitt mit dieser Parabel zusammen.

5 Der Kegelschnitt berührt 4 Linien und zwar die eine derselben in einem gegebenen Punkte.

Auflösung. Drei der gegebenen Linien seien AB, BC, CA, die 4te Linie d mit dem gegebenen Punkte D.

1) Liegt D in dem Raume $\overline{ABC}$*), so ist der Kegelschnitt eine Ellipse.

2) Befindet sich D in den Räumen $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

3) Liegt D in einem der Räume $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$, etwa in $\overline{AC}$, so beschreibe man durch D die beiden Parabeln, welche die Linien AB, BC, CA berühren und ziehe in D die beiden Tangenten an dieselben. Diese beiden Tagenten theilen die Ebene in 2 Räume, in deren einem sich der Durchschnittspunkt B befindet. Liegt die Linie d in demselben Raume mit B, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel. Wenn dagegen B und d nicht in demselben Raum liegen, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Fällt d mit einer der Tangenten zusammen, so ist der verlangte Kegelschnitt die zu dieser Tangente gehörige Parabel.

Aehnliches folgt wenn D in den Räumen $\overline{AB}$, oder $\overline{BC}$, sich befindet.

*) Cf. § 3.

6. Der Kegelschnitt berührt 5 gegebene Gerade.

Man lege die Parabel, welche 4 der gegebenen Linien berührt und unterscheide 3 Fälle.

1) Wird die 5te Gerade von dieser Parabel nicht getroffen, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem auf der einen und folglich auch auf der andern Seite der 5ten Linie eine ungerade oder gerade Anzahl der 6 Punkte liegt, in welchen die 4 ersten Geraden sich schneiden.

2) Wenn die 5te Gerade die Parabel berührt, so ist der Kegelschnitt eben diese Parabel.

3) Wird die Parabel von der 5ten Linie geschnitten, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem auf der einen und also auch auf der andern Seite der 5ten eine gerade oder ungerade Anzahl der 6 Durchschnittspunkte der 4 erstern Geraden sich befindet *).

Barycentrische Koordinaten nach Möbius. — Darstellung der geraden Linie und der Kegelschnitte durch dieselben.

§ 3.

Werden durch 2 gegebene Punkte A und B irgend 2 Parallelen gelegt und diese durch eine beliebige Ebene in den Punkten A' und B' geschnitten; so wird ein Punkt C gesucht, der die Eigenschaft hat, daß, wenn man bis zu jener Ebene CC' parallel zu AA' legt, $a\,AA' + b\,BB' = (a+b)\,CC'$ entsteht, worin a und b gegebene Zahlen bedeuten.

Es befindet sich C auf der Linie AB und wird durch $AC : CB = b : a$ bestimmt, so daß C von der Richtung jener Parallelen und der Ebene unabhängig ist, sondern nur durch das Verhältniß $a : b$ und durch die Punkte A und B gefunden wird. Möbius bezeichnet den Ausdruck: $a\,AA' + b\,BB' = (a+b)\,CC'$ kürzer durch $a\,A + b\,B = (a+b)\,C$, oder $a\,A + b\,B \equiv C$ und nennt $a : b$ die Koordinate des Punktes C in der Linie AB. Wirken in A und B 2 parallele Kräfte, die in dem Verhältnisse $a : b$ stehen, so wäre C der Schwerpunkt derselben, so wie die Gleichung $a.\,AA' + b.\,BB' = (a+b)\,CC'$ auch nichts anderes ausdrückt.

Sind ferner von 3 Punkten A, B, C Parallelen gelegt, die von einer Ebene in $A'\,B'\,C'$ geschnitten werden und man sucht einen Punkt D der Art, daß, wenn man DD' parallel AA' bis zu jener Ebene zieht, $a\,AA' + b\,BB' + c\,CC' = (a+b+c)\,DD'$ wird, so ist D wiederum nur von $a : b : c$ und von der Lage der 3 Punkte A, B, C abhängig und befindet sich in der Ebene derselben. D wird auch hier der Schwerpunkt dreier parallelen Kräfte sein, die in den Punkten A, B, C angebracht sind und in dem Verhältnisse $a : b : c$ stehen.

Man nennt A, B, C die Fundamental-Punkte, AB, BC, CA die Fundamental-Linien und ABC das Fundamental-Dreieck. In Bezug auf dieses ist daher ein Punkt D der Ebene ABC durch: $a\,AA' + b\,BB' + c\,CC' = (a+b+c)\,DD'$ oder durch $a\,A + b\,B + c\,C = (a+b+c)\,D \equiv D$ dargestellt, und die Koordinaten von D sind das Verhältniß $a : b : c$.

Aus diesem Verhältniß kann man den Punkt D konstruiren, indem man auf der Fundamental-Linie AB einen Punkt E so sucht, daß $AE : EB = b : a$ wird, und auf der durch E und C gelegten Geraden

*) Baryc. C. §. 264.

einen Punkt D so nimmt, daß: $ED : DC = c : (a + b)$ entsteht, so ist D der verlangte Punkt. D wird ein unendlich entfernter Punkt der Ebene, sobald $a + b + c$ verschwindet.

Durch die Verlängerung der 3 Fundamental-Linien AB, BC, CA des Fundamental-Dreiecks wird die Ebene in 7 Theile getheilt. Der begrenzte Theil heißt $\overline{ABC}$, die unbegrenzten Theile über AB, BC und CA werden durch $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, und die unbegrenzten Scheitelwinkel-Räume der Winkel A, B, C des Fundamental-Dreiecks durch $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ bezeichnet.

Der Punkt D liegt dann

I. in $\overline{ABC}$, wenn a, b, c einerlei Zeichen haben,
II. in $\overline{BC}$, wenn $b + c > a$
in $\overline{CA}$, wenn $a + c > b$
in $\overline{AB}$, wenn $a + b > c$
III. in $\overline{A}$, wenn $a > b + c$
in $\overline{B}$, wenn $b > a + c$
in $\overline{C}$, wenn $c > a + b$

unter der Bedingung, daß die auf einer Seite des Ungleichheits-Zeichens stehenden Größen dasselbe Vorzeichen haben, welches dem auf der andern Seite entgegengesetzt ist.

Liegt ein Punkt D auf einer F.-Linie, z. B. auf AB, so ist $c = o$ also der Ausdruck desselben $D \equiv a.A + b.B$; und zwar, wenn D zwischen A und B sich befindet, haben a und b dasselbe Zeichen. Ist dagegen a und b von verschiedenen Vorzeichen, so liegt D über A (oder B) hinaus, jenachdem a (oder b) die absolut größere Zahl bedeutet. $D \equiv A - B$ bezeichnet den unendlich entfernten Punkt der Linie. Fällt endlich der Punkt D mit einem der F.-Punkte, z. B. mit A zusammen, so ist b und c gleich o zu setzen.

Ein beliebiger Punkt X der Linie DE ist nach dem Vorigen durch $D + xE \equiv X$ dargestellt, d. h. $D + xE$ ist der Ausdruck der geraden Linie DE, worin x variabel und für jeden Punkt der Linie das Verhältniß $1 : x$ ein anderes ist. Es sei nun auf die F.-Punkte A, B, C bezogen:

$$D \equiv aA + b.B + cC \text{ und } E = a'A + b'B + c'C$$

setzt man $a + b + c = 1$ und $a^1 + b^1 + c^1 = 1$, was immer angeht, da nur die Verhältnisse $a : b : c$ und $a_1 : b_1 : c_1$ in Betracht kommen, so ist:

$$D = aA + bB + cC \text{ und } E = a^1A + b^1B + c^1C \text{ und also:}$$

$$D + xE = (a + a'x)\,A + (b + b'x)\,B + (c + c'x)\,C.$$

Den Ausdruck einer geraden Linie bezogen auf die F.-Punkte A, B, C hat daher die Form: $(a + a'x).\,A + (b + b'x).\,B + (c + c'x).\,C$, worin x variabel, die übrigen Größen gegebene Konstanten sind.

Da die gerade Linie durch 2 Bedingungen bestimmt ist, so muß es auch möglich sein, ihren Ausdruck durch 2 Konstanten darzustellen. Sind nämlich D und E 2 beliebige Punkte auf den F.-Linien AB und AC, so wird $A + \beta B = (1 + \beta)\,D$ und $A + \gamma C = (1 + \gamma)\,E$; daher erhält man für die Linie DE den Ausdruck $A + \beta B + xA + x\gamma C$ oder $(1 + x)\,A + \beta B + \gamma x C$. Im Folgenden wird die Form $\alpha\,(1 - x)\,A + \beta B + \gamma x C$ öfters in Anwendung kommen.

$xA + bB + cC$ ist der Ausdruck einer Linie, welche durch den Punkt A geht.

Die Linie $xA + B - C$ geht durch A und ist BC parallel.

Eine Parallele zu BC wird durch $A + (b + x)\,B - xC$ dargestellt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind $f(x)$, $f_1(x)$ $f_2(x)$ Funktionen des 2ten Grades, die keinen gemeinschaftlichen x enthaltenden Faktor haben, so stellt

1) $f(x)A + f_1(x)B + f_2(x)C$ einen Kegelschnitt dar, bezogen auf das F.-Dreieck ABC, und in dessen Ebene liegend. Von den 9 Konstanten, die darin vorkommen, können 4 durch Einführung einer andern Variabeln beseitigt werden. Möbius *) zeigt, daß jeder Kegelschnitt in einer der Formen

2) $zA + (1 + \beta' z + \beta'' z^2) B + (\gamma + \gamma' z + \gamma'' z^2) C$, oder

3) $(1 + z^2) A + (\beta + \beta'' z^2) B + (\gamma + \gamma' z + \gamma'' z^2) C$ übergeht, wenn das F.-Dreieck gegen den Kegelschnitt eine beliebige Lage hat.

Besondere Formen für Kegelschnitte sind:

4) $\frac{f}{1-x} A - gB + \frac{h}{x} C$, wenn derselbe durch die 3 F.-Punkte geht; durch A für $x = 1$, durch B für $x = \infty$, durch C für $x = o$.

5) $f(1-x)^2 A + gB + hx^2 C$, wenn derselbe die 3 F.-Seiten berührt; für $x = 1$ die Seite BC, für $x = \infty$ die Seite AC und für $x = C$ die Seite AB.

6) $aA + xB + x^2 C$, wenn derselbe die F.-Seiten AB und BC in den Punkten A und C berührt und zwar AB in A für $x = o$ und BC in C für $x = \infty$.

Die Eigenschaft der Kegelschnitte, daß die Ellipse keinen die Parabel einen und die Hyperbel zwei unendlich entfernte Punkte hat, dient dazu die Art derselben aus obigen Formen zu bestimmen.

Es sei $f(x)A + f_1(x)B + f_2(x)C$ der Kegelschnitt und X ein Punkt desselben, so ist:

$$f(x)A + f_1(x)B + f_2(x)C = \big(f(x) + f_1(x) + f_2(x)\big) X.$$

Soll nun X ein unendlich entfernter Punkt sein, so muß der Koafficient von X verschwinden; jenachdem also die Gleichung $f(x) + f_1(x) + f_2(x) = o$ 0, 1 oder 2 mögliche Wurzeln für x hat, ist der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

Ist $pA + qB + rC$ der Ausdruck einer Kurve in der Ebene des F.-Dreiecks und sind p, q, r einer Variabeln x, so findet man nach Möbius die Tangente im Punkte $x = x_1$ durch die Form

7) ..... $(p' + \frac{\delta p'}{\delta x'} \nu) A + (q' + \frac{\delta q'}{\delta x'} \nu) B + (r' + \frac{\delta r'}{\delta x'}) C$ dargestellt, wenn p', q', r' aus p, q, r entsteht, indem man darin x' statt x setzte, ν dagegen ist die Variable für die Tangente.

Den Kegelschnitten:

$$\frac{f}{1-x} A - gB + \frac{h}{x} C,\ f(1-x)^2 A + gB + hx^2 C,\ aA + xB + x^2 C$$

entsprechen in den Punkten $x = x_1$ die Tangenten:

$$8) \left\{ \begin{array}{l} f\nu A - g\big(x_1^2 + (1-2x_1)\nu\big) B + h(1-\nu) C \\ \quad \text{oder } \frac{f(1-\nu)}{(1-x_1)^2} A - gB + \frac{h\nu}{x_1^2} C \end{array} \right\}$$

9) $f(1-x_1)(1-\nu)A + gB + hx_1\nu C$.

10) $aA + (x_1 + \nu)B + x_1(x_1 + 2\nu) C$.

---

*) Baryc. Calc. §. 59 ff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ausdrücke der Kegelschnitte, die durch Punkte und Tangenten bestimmt sind.

§. 4.

I. Der Kegelschnitt geht durch 5 Punkte.

Die Punkte sind die 3 F.-Punkte, $D \equiv aA + bB + cC$, $E \equiv a_1 A + b_1 B + c_1 C$.

Der Kegelschnitt hat den Ausdruck:

9) $$\frac{a(\beta-\gamma)}{1-x} A - b(\gamma-\alpha) B + \frac{c(\alpha-\beta)}{x} C\text{*)}$$

wenn $\alpha = \frac{a}{a_1}$, $\beta = \frac{b}{b_1}$, $\gamma = \frac{c}{c_1}$ gesetzt ist.

Durch A geht die Kurve für $x = 1$, durch B für $x = \infty$, durch C für $x = o$, durch D für $x = -(\alpha-\beta) : (\gamma-\alpha)$ und durch E für $- \gamma(\alpha-\beta) : \beta(\gamma-\alpha)$.

Die Anzahl der möglichen Kegelschnitte für dieselben Punkte ist Eins.

II. Der Kegelschnitt berührt 5 Linien.

Die Linien sind die 3 F.-Seiten AB, BC, CA

$d \ldots \alpha(1-\nu) A - \beta B + \gamma\nu C$ und $e \ldots \alpha_1 (1-\nu) A - \beta_1 B + \gamma_1 \nu C$,

dann ist der Ausdruck des Kegelschnitts:

10) $$\frac{1-x^2}{\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma} A + \frac{1}{\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha} B + \frac{x^2}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} C\text{**)}$$

Die Anzahl der Kegelschnitte ist Eins.

III. Der Kegelschnitt geht durch 4 Punkte und berührt eine Linie.

Die Punkte seien die 3 F.-Punkte A, B, C, D $aA + bB + cC$ und die Linie $e \ldots$ $\alpha(1-\nu) A + \beta B + \gamma\nu C$.

Nach §. 3, 4 ist der Kegelschnitt, welcher durch die 3 F.-Punkte geht $\frac{f}{1-x} A + gB + \frac{h}{x} C$ und die Tangente im Punkte $x = m$ wird $f\nu A + g\left(m^2 + (1-2m)\nu\right) B + h(1-\nu) C$. Die Tangente schneidet die 3 F.-Seiten in den Punkten $gm^2 B + hC$ für $\nu = o$, $- fm^2 A + h(1-m)^2 C$ für $\nu = \frac{m^2}{1-2m}$ und $fA + g(1-m)^2 B$ für $\nu = 1$. Die gegebene Linie $\alpha(1-\nu) A + \beta B + \gamma\nu C$, dagegen schneidet die F.-Seiten in den Punkten $\beta B + \gamma C$ für $\nu = 1$, $- \alpha A + \gamma C$ für $\nu = \infty$ und $\alpha A + \beta B$ für $\nu = o$. Sollen die Tangenten und e zusammenfallen, so sind jene Durchschnittspunkte auch dieselben, welches die Bedingung giebt:

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{f}{1-m^2} : g : \frac{h}{m^2} \text{ oder } \alpha(1-m)^2 : \beta : \gamma m^2 = f : g : h; \text{ daher:}$$

11) $\frac{\alpha(1-m)^2}{1-x} A + \beta B + \frac{\gamma m^2}{x} C$ die Form des Kegelschnitts, der durch die 3 F.-Punkte geht und die Linie $\alpha(1-\nu) A + \beta B + \gamma\nu C$ berührt. Liegt auf diesem Kegelschnitt noch der Punkt $D \equiv aA + bB + cC$ so ist die Bedingung:

---

*) Baryc. Calc. §. 250.

**) Baryc. Calc. §. 261.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\frac{\alpha(1-m)^2}{1-x} : \beta : \frac{\gamma m^2}{x} = : a : b : c$ zu erfüllen,

oder $\frac{\alpha(1-m)^2}{a} : \frac{\beta}{b} : \frac{\gamma m^2}{c} = 1-x : 1 : x$ oder die Gleichung:

$\frac{\alpha}{a}(1-m)^2 - \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma m^2}{c} = o$ bestimmt noch m in der Form des gesuchten Kegelschnitts:

12) $$\frac{\alpha(1-m)^2}{1-x} A + \beta B + \frac{\gamma m^2}{x} C.$$

Die Anzahl der Kegelschnitte ist daher 2.

Sucht man aus $\frac{\alpha}{a}(1 m)^2 - \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma m^2}{c} = o$ die Bedingung dafür, daß die Werthe für m gleich werden, so erhält man $\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = o$ oder $\frac{a}{1-y} : b : \frac{c}{y} = \alpha : \beta : \gamma$. Setzt man diese Werthe für α, β, γ in dem Ausdruck der Linie $e \ldots \alpha(1-\nu) A + \beta B + \gamma \nu C$, so entsteht:

14) $\frac{a(1-\nu)}{1-y} A + bB + \frac{c\nu}{y} C$ die Form einer Geraden auf der der Punkt D liegt; denn für $\nu = y$ wird: $aA + bB + cC \equiv D$. Es folgt daraus der Satz:

Ist ein Kegelschnitt durch 4 Punkte und 1 Tangente bestimmt, so läßt sich stets ein solcher (und zwar nur einer) hindurchlegen, wenn die Tangente durch einen dieser Punkte geht.

Um die Form dieses Kegelschnitts zu finden, gehe man von dem Ausdruck 12)

$\frac{\alpha(1-m)^2}{1-x} A + \beta B + \frac{\gamma m^2}{x} C$ aus, dieser ändert sich in

$\frac{a(1-m)^2}{(1-y)(1-x)} A + bB + \frac{cm^2}{yx} C$ um; wenn der Punkt D auf der Tangente e liegt.

Für $x = m$ erhält man den Punkt D, daher muß $y = m$ sein und also:

15) $\frac{a(1-m)}{1-x} A + bB + \frac{cm}{1-x} C$ der Kegelschnitt, welcher durch die 3 F.-Punkte geht und die Linie $e \ldots \frac{a(1-\nu)}{1-m} A + bB + \frac{c\nu}{m} C$ im Punkte $D = aA + bB + cC$ berührt.

IV. Der Kegelschnitt geht durch 3 Punkte und berührt 2 Linien.

Sind die 3 Punkte die 3 F.-Punkte und die beiden Linien $(d) \ldots \alpha(1-\nu) A + \beta B + \gamma\nu C$ und $(e) \ldots \alpha_1(1-\nu) A + \beta_1 B + \gamma_1 \nu C$ gegeben, so ist nach 11): $\frac{\alpha(1 m)^2}{1-x} A + \beta B + \frac{\gamma m^2}{x} C$ der Kegelschnitte, welcher durch die 3 F.-Punkte geht und die Gerade (d) berührt, und worin m noch zu bestimmen ist. Die Tangente an diesen Kegelschnitt im Punkte $x = \mu$ wird nach (8):

$\frac{\alpha(1-m)^2(1-\nu)}{(1-\mu)^2} A + \beta B + \frac{\gamma m^2 \nu}{\mu^2} C$. Fällt diese Linie mit

$e) \ldots \alpha_1(1-\nu) A + \beta_1 B + \gamma\nu C$ zusammen, so folgt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{\alpha(1-m)^2}{(1-\mu)^2} : \beta : \frac{\gamma m^2}{\mu^2} = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 \text{ oder}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}(1-m) : \sqrt{\frac{\beta}{\beta_1}} : \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}\,m = 1-\mu : 1 : \mu \text{ oder}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}(1-m) - \sqrt{\frac{\beta}{\beta_1}} + \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}\,m = o,$$ worin die Wurzelgrößen noch das doppelte Zeichen hat, für m also 4 Werthe gefunden werden. Die Gleichung des 4ten Grades, welche die 4 Wurzeln für m giebt ist:

$$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}(1-m) + \sqrt{\frac{\beta}{\beta_1}} + \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}\,m\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}(1-m) + \sqrt{\frac{\beta}{\beta_1}} - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}\,m\right)$$
$$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}(1-m) - \sqrt{\frac{\beta}{\beta_1}} + \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}\,m\right)\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}(1-m) + \sqrt{\frac{\beta}{\beta_1}} + \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}\,m\right) = o$$

und der gesuchte Kegelschnitt hat die Form:

16) . . . . $\frac{\alpha(1-m)^2}{1-x}A + \beta B + \frac{\gamma m^2}{x}C.$

Die Anzahl der Kegelschnitte ist 4.

V. Der Kegelschnitt geht durch 3 Punkte und berührt 2 Linien, die durch 2 dieser Punkte gezogen werden.

A. Die gegebenen Punkte sind die F.-Punkte A, B, C, die gegebenen Linien d und e mögen durch A und C gehen, dann ist nach §. 3. d durch $\nu A + \beta B + \gamma A$ und e durch $\alpha_1 A + \beta_1 B + \nu C$ dargestellt.

Der Kegelschnitt, welcher durch die 3 F.-Punkte geht, heißt $\frac{f}{1-x}A + gB + \frac{h}{x}C$. Um die beiden Tangenten zu finden, welche in den Punkten $x = 1$ und $x = o$ gezogen werden können, bilde man nach Anleitung von (7)

$f(x_1 + \omega)A + g\big((1-x_1)x_1 + (1-2x_1)\omega\big)B + h(1 - x_1 - w)C$ als Form der Tangente in $x = x_1$. Für $x = 1$ wird

$f(1+\omega)A - g\omega B - h\omega B$, oder $-\frac{1+\omega}{\omega} = \nu$ gesetzt:

$f\nu A + gB + hC$ als Tangente im Punkte A und ebenso $x_1 = o$ gesetzt: $fA + gB + h\nu C$ als Tangente in C.

Nun fällt

$f\nu A + gB + hC$ mit $\nu A + \beta B + \gamma C$ und

$fA + gB + h\nu C$ mit $\alpha_1 A + \beta_1 B + \nu C$ zusammen; daraus folgt:

$f : g : h = \alpha_1\beta : \beta_1\beta : \beta_1\gamma$, oder der gesuchte Kegelschnitt ist:

17) . . . . $\frac{\alpha_1\beta}{1-x}A + \beta_1\beta B + \frac{\beta_1\gamma}{x}C$, und die Anzahl der möglichen Kegelschnitte wird der Einheit gleich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

B. Sind dagegen die Linien, welche in A und C berührt werden sollen, die F.-Seiten AB und BC und der 3te Punkt $D \equiv aA + bB + cC$, so ist nach (6)

$pA + xB + x^2 C$ der Kegelschnitt, welcher die F.-Seiten AB und BC in A und C berührt. Soll auf diesem sich D befinden, so folgt $a : b : c = p : x : x^2$ für diesen Punkt oder $p = \frac{ac}{b^2}$ und der Kegelschnitt hat die Form: (18) .... $\frac{ac}{b^2} A + xB + x^2 C$.

VI. Der Kegelschnitt geht durch 2 Punkte und berührt die 3 F.-Seiten AB, BC, CA.

Die Punkte seien $D \equiv aA + bB + cC$ und $E \equiv a_1 A + b_1 B + c_1 C$.

Der Kegelschnitt, welcher die 3 F.-Seiten berührt, ist: $f(1-x)^2 A + gB + hx^2 C$. Liegt auf ihm D etwa für $x = m$,

so folgt $f(1-m)^2 : g : hm^2 = a : b : c$ oder

$f : g : h = \frac{a}{(1-m)^2} : b : \frac{c}{m^2}$ und

$\frac{a(1-x)^2}{(1-m)^2} A + bB + \frac{ax^2}{m^2} C$ die Form dieses Kegelschnitts mit der willkürlichen Konstante m. Befindet sich auf diesem noch E, so muß auch dem Verhältnisse

$\frac{a(1-x)^2}{(1-m)^2} : b : \frac{cx^2}{m^2} = a_1 : b_1 : c_1$ genügt werden, wenn x dem Punkte E entspricht. Durch Elimination von x erhält man: $\sqrt{\frac{a_1}{a}}(1-m) - \sqrt{\frac{b_1}{b}} + \sqrt{\frac{c_1}{c}}\, m = o$ zur Bestimmung von m in der Form des verlangten Kegelschnitts:

$$19) \qquad \frac{a(1-x)^2}{(1-m)^2} A + bB + \frac{cx^2}{m^2} C.$$

Auch hier hat m 4 Werthe, welche durch die Gleichung:

$$\left(\sqrt{\frac{a_1}{a}}(1-m) + \sqrt{\frac{b_1}{b}} + \sqrt{\frac{c_1}{c'}}\, m\right)\left(\sqrt{\frac{a_1}{a}}(1-m) + \sqrt{\frac{b_1}{b}} - \sqrt{\frac{c_1}{c}}\, m\right)$$
$$\left(\sqrt{\frac{a_1}{a}}(1-m) - \sqrt{\frac{b'_1}{b}} + \sqrt{\frac{c_1}{c}}\, m\right)\left(-\sqrt{\frac{a_1}{a}}(1-m) + \sqrt{\frac{b_1}{b}} + \sqrt{\frac{c_1}{c}}\, m\right) = o$$

gefunden werden.

VII. Der Kegelschnitt soll 3 Linien berühren und durch 2 Punkte gehen, die auf diesen Linien liegen.

Zwei der Linien seien die F.-Seiten AB und BC, die Punkte seien A und C und die dritte Linie e .... $A + \nu B + (a + b\nu) C$.

Der Kegelschnitt, welcher die Linien AB und BC in den Punkten A und C berüht ist $pA + xB + x^2 C$, die Tangente an ihn im Punkte $x = x_1$ wird $pA + \nu B + (-x_1^2 + 2x_1 \nu) C$, Da dieselbe die F.-Seiten in denselben Punkten schneidet als die Linie (e), so folgt daraus $p = -\frac{b^2}{4a}$ und der verlangte Kegelschnitt ist: $-\frac{b^2}{4a} A + xB + x^2 C$. Es kann immer nur ein Kegelschnitt gezeichnet werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VIII. Der Kegelschnitt berührt 4 Linien und geht durch einen gegebenen Punkt.

Die 4 Linien sind die 3 F.-Seiten AB, BC, CA und die Linie $d \ldots \alpha(1-\nu)A + \beta B + \gamma\nu C$ und der Punkt ist $D \equiv aA + bB + cC$.

Nach VI. ist der Kegelschnitt, welcher die 3 F.-Seiten berührt und durch D geht von der Form:

20) $\frac{a(1-x)^2}{(1-m)^2}A + bB + \frac{cx^2}{m^2}C$. Die Tangente an diesen Kegelschnitt im Punkte $x = x_1$ ist:

$\frac{a(1-x_1)(1-\nu)}{(1-m)^2}A + bB + \frac{cx_1\nu}{m^2}C$; diese soll mit (d) zusammenfallen, daher:

$\frac{a(1-x_1)}{(1-m)^2} : b : \frac{cx_1}{m^2} = \alpha : \beta : \gamma$, oder für m erhält man die quadratische Gleichung

$\frac{\alpha(1-m)^2}{a} - \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma m^2}{c} = o$, so daß entweder zwei Kegelschnitte, ein oder kein Kegelschnitt der Aufgabe genügt.

Die Gleichung $\frac{\alpha(1-m)^2}{a} - \frac{\beta}{a} + \frac{\gamma m^2}{c} = o$ hat aber nur dann gleiche Wurzeln für m, wenn $\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = o$ wird, oder $\frac{a}{1-e} : b : \frac{c}{e} = \alpha : \beta : \gamma$. Dadurch nimmt die Gerade e die Form $\frac{a(1-\nu)}{1-e}A + bB + \frac{c\nu}{e}C$ an; was anzeigt, daß für $\nu = e$ der Punkt D auf dieser Linie liegt.

Wenn daher der Kegelschnitt die 3 F.-Seiten und die Linie $d \ldots \frac{a(1-\nu)}{1-e}A + bB + \frac{c\nu}{e}C$ im Punkte $D \equiv aA + bB + cC$ berührt, so ist der Ausdruck desselben:

21) ..... $\frac{a(1-x)^2}{(1-e)^2}A\, bB + + \frac{cx^2}{e^2}C$ und es giebt stets nur einen Kegelschnitt, der der Aufgabe genügt.

§. 5.

Da bei der Parabel die beiden unendlich entfernten Punkte in einen zusammenfallen, so sind nur noch vier Bedingungen nöthig, um sie zu bestimmen.

IX. Die Parabel gehe durch die 3 F.-Punkte A, B, C, und durch den Punkt $D = aA + bB + cC$.

Der Kegelschnitt, welcher durch die 3 F.-Punkte geht, ist $\frac{f}{1-x}A - gB + \frac{h}{x}C$. Um zu untersuchen, in welchem Falle derselbe eine Parabel wird, setzt man die Summe der Koefficienten gleich Null, und lös't die quadratische Gleichung $\frac{f}{1-x} - g + \frac{h}{x} = o$ für x auf. Nach §. 3. müssen für die Parabel die beiden Werthe für x gleich werden, welches die Bedingung $(g + h - f)^2 - 4\,gh = o$ oder $f = (\sqrt{g} - \sqrt{h})^2$ giebt. Die Parabel hat daher die Form:

$$\frac{(\sqrt{g} - \sqrt{h})^2}{1-x}A - gB + \frac{h}{x}C \text{ oder } \sqrt{\frac{h}{g}} = e \text{ gesetzt:}$$

22) . . . . $\frac{(1-e)^2}{1-x}A - B + \frac{e^2}{x}C$ mit der Summe der Koefficienten $(e-x)^2$, worin nur noch eine Konstante zu bestimmen ist. Soll auf dieser Parabel der Punkt $D \equiv aA + bB + cC$ sich befinden, so folgt für diesen Punkt: $\frac{(1-e)^1}{1-x} : -1 : \frac{e^2}{x} = a : b : c$, oder:

23) . . . . . . $\frac{(1-e)^2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{e^2}{c} = o$, woraus für e zwei Werthe sich ergeben.

Für e erhält man 2 reelle oder unmögliche Werthe, jenachdem $M = -abc\,(a+b+c)$ einen positiven oder negativen Werth hat. Befindet sich D in $\overline{ABC}$, oder in einem der Räume $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, so sind 2 jener Faktoren positiv, die beiden andern negativ, mithin M negativ. Liegt dagegen D in einem der Räume $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, so haben 3 Faktoren dasselbe Zeichen, der 4te das entgegengesetzte, daher M positiv. Es folgt daraus:

Haben 4 Punkte A, B, C, D eine solche Lage, daß einer der Punkte in dem Dreiecke der 3 andern liegt, so kann man durch dieselben keine Parabel legen. Befindet sich dagegen keiner in dem Dreiecke der 3 übrigen, so lassen sich stets 2 Parabeln durch die 4 Punkte beschreiben *).

X. Die Parabel ist durch 3 Punkte gelegt und berührt eine Linie.

Die 3 Punkte seien die F.-Punkte A, B, C und die Linie d . . . $\alpha(1-\nu)A - \beta B + \gamma\nu C$.

Die Parabel, welche durch die Punkte geht, ist:

$$\frac{(1-e)^2}{1-x}A - B + \frac{e^2}{x}C.$$

Die Tangente im Punkte $x = x_1$ wird:

$\frac{(1-e^2)(1-\nu)}{(1-x_1)^2}A - B + \frac{e^2\nu}{x_1{}^2}C$ und, da diese mit d zusammenfällt, erhält man:

$\frac{(1-e)^2}{(1-x_1)^2} : 1 : \frac{e^2}{x_1} = \alpha : \beta : \gamma$, oder die Bestimmungsgleichung für e ist:

$$\frac{1-e}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{e}{\sqrt{\gamma}} = o.$$

Die 4 Werthe von e giebt die Gleichung:

$$\left(\frac{1-e}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{e}{\sqrt{\gamma}}\right)\left(\frac{1-e}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{e}{\sqrt{\gamma}}\right)\left(\frac{1-e}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{e}{\sqrt{\gamma}}\right)\left(-\frac{1-e}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{e}{\sqrt{\gamma}}\right) = o$$

welche stets mögliche Wurzeln hat, sobald α, β, γ dasselbe Zeichen haben, oder die Linie e das F.-Dreieck nicht schneidet.

XI. Die Parabel geht durch 3 Punkte und berührt eine Linie, die durch einen dieser Punkte gezogen ist.

Die 3 Punkte seien die F.-Punkte und die Linie d, welche durch A gehen mag, hat den Ausdruck $\nu A - \beta B + \gamma C$.

---

*) Baryc. Calc. §. 253.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auch hier ist die Parabel, da sie durch die 3 F.-Punkte gelegt wird, von der Form:

$$\frac{(1-e)^2}{1-x} A - B + \frac{e^2}{x} C.$$

Nach V. A ist die Tangente im Punkte A: $(1-e)^2 \, \nu A - B + e^2 \nu C$, und da diese mit d zusammenfällt, so folgt $e = \sqrt{\gamma} : \sqrt{\beta}$ und es können, wenn die durch A gehende Linie das F.-Dreieck nicht schneidet, stets zwei Parabeln gezeichnet werden.

XII. Die Parabel geht durch 2 Punkte und berührt 2 Linien.

Die beiden Linien schneiden sich in B; man lege durch die gegebenen Punkte D und E eine Gerade, welche die Linien in A und C treffen, so sei A, B, C das F.-Dreieck und in Bezug darauf:

$$D \equiv aA + cC \text{ und } E \equiv a_1 A + c_1 C \text{ gegeben.}$$

Der Kegelschnitt, welcher die F.-Seiten BA und BC berührt hat offenbar zum Ausdruck:

$$f(1-y)^2 A + (1-my) B + hy^2 C.$$

Die beiden Durchschnittspunkte desselben mit AC für $y = \infty$ und $y = 1 : m$ sollen mit D und E zusammenfallen, also: $fA + hB \equiv aA + cC$ und $f(1-m)^2 A + hC \equiv a_1 A + c_1 C$,

24) ... $m = 1 \pm \sqrt{\frac{a_1 c}{c_1 a}}$ und $a(1-y)^2 A + q(1-my) B + cy^2 C$ der Kegelschnitt mit der willkürlichen Konstante q. Die Koefficienten-Summe gleich Null gesetzt giebt:

$(2a + qm)^2 = 4(a+c)(a+q)$ als Bestimmungs-Gleichung für q, damit der Kegelschnitt eine Parabel wird. Die Anzahl der Parabeln ist 4.

XIII. Berührt eine Parabel die F.-Seiten AB und BC in den Punkten A und C, so hat sie zum Ausdruck: $\frac{1}{4} A + xB + x^2 C$; denn jeder Kgelschnitt, welcher durch dieselben Stücke bestimmt ist, heißt $aA + xB + x^2$ und für die Parabel $a = \frac{1}{4}$

XIV. Die Parabel berührt 3 Linien und geht durch einen Punkt.

Die 3 Linien sind die 3 F.-Seiten und der Punkt $D \equiv aA - bB + cC$.

Der Kegelschnitt, welcher die 3 F.-Seiten berührt:

$$f(1-y)^2 A + gB + hy^2 C$$

wird eine Parabel, wenn $f(1-y)^2 + g + hy^2 = 0$ für y gleiche Wurzeln hat; dieses ergiebt

$$gh + fh + fg = 0 \text{ oder } f : g : h = \frac{1}{1-x} : -1 : \frac{1}{x}$$

und daher ist die Parabel:

25) ... $\frac{(1-y)^2}{1-e} A - B + \frac{y^2}{e} C.$

Liegt auf derselben der Punkt D, so ist für diesen:

$$\frac{(1-y)^2}{1-e} : 1 : \frac{y^2}{e} = a : b : c \text{ oder } \sqrt{a(1-e)} - \sqrt{b} + \sqrt{ce} = 0,$$

so daß höchstens 2 Parabeln gelegt werden können.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Befindet sich D auf einer der F.-Seiten, etwa auf AC, so ist $b = o$ und also $e = a:(a+c)$; daher die Parabel, welche die 3 F.-Seiten und zwar AC im Punkte $aA + cC$ berührt, hat die Form:

$$26) \ldots \quad \frac{(1-y)^2}{c} A - \frac{1}{a+c} B + \frac{y^2}{a} C.$$

XV. Die Parabel berührt 4 Linien.

Die Linien seien die Seiten des F.-Dreiecks und Linie $d \ldots \alpha(1-\nu)A - \beta B + \gamma C$.
Die Parabel, welche die F.-Seiten berührt und ihre Tangente für $y = y_1$ sind (§. 3)

$$\frac{(1-y)^2}{1-e} A - B + \frac{y^2}{e} C \text{ und } \frac{(1-\nu_1)(1-\nu)}{1-e} A - B + \frac{y_1 \nu}{e} C.$$

Fällt die letztere mit d zusammen, so folgt:

$\frac{1-y_1}{1-e} : -1 : \frac{y_1}{e} = \alpha : -\beta : \gamma$ oder $\alpha(1-e) - \beta + \gamma e = o$, und die verlangte Parabel ist:

$$\frac{(1-y)^2}{\beta-\gamma} A - \frac{1}{\gamma-\alpha} B + \frac{y^2}{\alpha-\beta} C.$$

Es läßt sich stets nur eine Parabel beschreiben, die 4 Gerade berührt.

XVI. Es mögen hier noch einige Ausdrücke folgen, die für den Kreis gelten, wenn a, b, c die Längen der Seiten und α, β, γ die gegenüberstehenden Winkel des F.-Dreiecks ABC bezeichnen.

Für die 4 Kreise, welche die Seiten des F.-Dreiecks berühren hat man:

$$\frac{(1-y)^2}{-a+b+c} A + \frac{B}{a-b+c} + \frac{y^2}{a+b-c} C, \quad tg^2 \frac{\alpha}{2} (1-y)^2 A + tg^2 \frac{\beta}{2} B + tg^2 \frac{\gamma}{2} y^2 C$$

$$-\frac{(1-y)^2}{a+b+c} A + \frac{B}{a+b-c} + \frac{y^2}{a-b+c} C, \quad - tg^2 \frac{\alpha}{2} (1-y)^2 A + cotg^2 \frac{\gamma}{2} B + cotg^2 \frac{\beta}{2} y^2 C$$

$$\frac{(1-y)^2}{a+b-c} A - \frac{B}{b+b+c} + \frac{y^2}{-a+b+c} C, \quad coty^2 \frac{\gamma}{2} (1-y)^2 B - tg^2 \frac{\beta}{2} B + coty^2 \frac{\alpha}{2} y^2 C$$

$$\frac{(1-y)^2}{a-b+c} A + \frac{B}{-a+b+c} - \frac{y^2}{a+b+c}, \quad coty^2 \frac{\beta}{2} (1-y)^2 A + coty^2 \frac{\alpha}{2} B - tg^2 \frac{\gamma}{2} y^2 C.$$

Der Ausdruck für den um das F.-Dreieck beschriebenen Kreis ist:

$$\frac{a^2}{1-x} A - b^2 B + \frac{c^2}{x} C.$$

§. 6.

1. Ueber den Kegelschnitt, der durch 3 Punkte geht und eine Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

Sind A, B, C, D 4 Punkte einer Ebene und liegt D anderswo, als in den Räumen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ des Dreiecks ABC, so haben sie eine solche Lage, daß einer in dem Dreieck der 3 übrigen sich befindet; dann aber lassen sich durch die 4 Punkte nur Hyperbeln legen *), wie man sich leicht durch eine Figur überzeugt. Daher soll nur der Fall näher betrachtet werden, wenn der Punkt D, auf die 3 andern

*) Baryc. Calc. §. 253.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bezogen, in einem der bezeichneten Räume etwa in $\overline{AC}$ liegt, also durch $D \equiv aA - B + cC$ dargestellt wird, worin a und c positiv und $a + c > 1$ ist.

Die durch D gehende Linie e ist dann:

$$\frac{a(1-\nu)}{1-e} A - B + \frac{c\nu}{e} C \text{ und der Kegelschnitt } \frac{a(1-e)}{1-x} A - B + \frac{ce}{e} C,$$

und wenn BC durch die Gerade in F geschnitten wird, hat man: $BF : FC = c : - e$.

Man setze in dem Ausdruck für den Kegelschnitt die Koefficientensumme gleich o und löse diese Gleichung:

$$x^2 - x\left(1 + ce - a(1-e)\right) + ce = o$$

für x auf: dann wird, den Ausdruck unter dem Quadrat-Wurzelzeichen mit M bezeichnet,

$$M = \left(1 - ce + a(1-e)\right)^2 - 4ce$$

in Bezug auf das Zeichen zu untersuchen sein, indem M größer, gleich oder kleiner als o einer Hyperbel, Parabel oder Ellipse entspricht. Nach e geordnet erhält man:

$$M = e^2(a+c)^2 - 2e\left(c + a(a+c-1)\right) + (1-a)^2.$$

Sucht man die Werthe für e, welche $M = o$ zugehören und nennt einen derselben e_1, so wird

$$e_1 = \frac{c + a(a+c-1) - \sqrt{4ac(a+c-1)}}{(a+c)^2} = \frac{c + a(a+c-1)}{(a+c)^2} - p,$$

indem $\sqrt{4ac(a+c-1)} : (a+c)^2$ mit p bezeichnet stets reell bleibt. Dann aber kann $e = e_1 + \varepsilon p$ gesetzt werden, sobald nur ε eine mögliche Zahl bedeutet, und daher:

$$M = (e_1 + \varepsilon p)^2 (a+c)^2 - 2(e_1 + \varepsilon p)\left(c + a(a+c-1)\right) + (1-a)^2 \text{ und}$$

$$o = e_1^2(a+c)^2 - 2e_1\left(c + a(a+c-1)\right) + (1-a)^2.$$

Es folgt aber durch Subtraktion

$$M = (2e_1\varepsilon p + \varepsilon^2 p^2)(a+c)^2 - 2\varepsilon p\left(c + a(a+c-1)\right) = \frac{4\varepsilon(\varepsilon-2)\,ac\,(a+c-1)}{(a+c)^2}.$$

Hierin kann ε jeden möglichen Werth annehmen und man erhält:

für $\varepsilon = o$ und $\varepsilon = 2$, $M = o$ also Parabeln,
... ε zwischen o und 2, $M < o$ .... Ellipsen,
.... $\varepsilon > 2$ und $\varepsilon < o$, $M > o$ .... Hyperbeln.

Da nun e mit ε zu gleicher Zeit wächst und abnimmt und der Durchschnittspunkt F der Linie BC und e also von ε abhängt, so folgt die Richtigkeit der in §. 2, 2 gegebenen Auflösung.

2. Ueber den Kegelschnitt, der 2 Gerade in gegebenen Punkten berührt und durch einen 3ten gegebenen Punkt geht.

1. Es ist die Form dieses Kegelschnitts (§. IV. 18.)

$$\frac{b^2}{ac} A - xB + x^2 C$$

und dieser wird einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel entsprechen, jenachdem

$$b^2 = 4ac,\ b^2 < 4ac \text{ oder } b^2 > 4ac \text{ ist.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Parabel hat daher die Form:

$$\frac{1}{4} A + xB + x^2 C.$$

Man ziehe von dem gegebenen Punkte $D \equiv aA + bB + cC$ an die Parabel eine Tangente, so wird, wenn $x = x_1$ dem Tangirungspunkte entspricht, das Verhältniß:

$$\frac{1}{4} : (x_1 + \nu) : (x_1{}^2 + 2 x_1 \nu) = a : b : c$$

stattfinden müssen, oder nach Elimination von ν

$$x_1{}^2 - \frac{b x_1}{a} + \frac{c}{4a} = o.$$

Diese Gleichung hat aber gleiche, unmögliche oder mögliche Wurzeln; oder, was dasselbe ist, der Punkt D liegt auf, innerhalb oder außerhalb der Parabel, jenachdem $b^2 = 4ac$, $b^2 < 4ac$ oder $b^2 > 4ac$ wird, wie es in §. 2, 3, 1 angegeben ist.

2. Wenn der Kegelschnitt durch die 3 F.-Punkte A, B, C beschrieben ist und die durch A und C gehenden Geraden d und e berührt, so ist der Kegelschnitt offenbar eine Hyperbel, sobald d und e das F.-Dreieck schneiden. Es soll daher nur der Fall betrachtet werden, wenn diese Linien das F.-Dreieck nicht schneiden, sie also die Form $\nu A - B + \gamma C$ und $\alpha A - B + \nu C$ haben, worin α und γ positive Zahlen bedeuten.

Der Kegelschnitt wird dann:

$$\frac{\alpha}{1-x} A - B + \frac{\gamma}{x} C$$

und dieser wird eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, jenachdem $M = \gamma^2 - 2\gamma\,(1+\alpha) - (1-\alpha)$ gleich kleiner oder größer als Null ist. Für $M = o$ habe γ der eine Werth: $\gamma_1 = 1 + \alpha - \sqrt{4\alpha}$, so wird $\gamma = \gamma_1 + \varepsilon \sqrt{4\alpha}$ gesetzt werden können, worin ε eine mögliche Zahl bedeutet. Dann aber wird $M = 4\alpha\varepsilon\,(\varepsilon - 2)$, woraus die Richtigkeit von §. 2, 3, 2 hervorgeht.

3. Ueber den Kegelschnitt, der 3 Gerade und zwar 2 derselben in gegebenen Punkten berührt.

Der Kegelschnitt berühre die F.-Seiten AB und CB in den Punkten A und C und die Gerade e. Wenn e die Gerade AC zwischen A und C schneidet, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel. Man nehme daher an, daß e die Linie AC in den Verlängerungen über A oder C hinaus trifft; es hat dann e die Form: $A + \nu B + (\nu - a)\, C$ (worin a und b positiv) und der Kegelschnitt ist:

$$\frac{b^2}{4a} A + xB + xC^2,$$

bei dem über das Zeichen von $a - b^2$ zu entscheiden ist.

Die Parabel (bei $a = b^2$) hat die Form: $\frac{1}{4} A + xB + xC^2$; sucht man die Durchschnittspunkte der Linie e mit derselben, so findet man für x die Gleichung: $4x^2 - 4bx + a = o$. Die Gerade e berührt oder schneidet die Parabel oder hat keinen Punkt mit derselben gemeinsam, jenachdem $b^2 - a$ gleich größer oder kleiner als Null wird, und somit ist die Richtigkeit von §. 2, 4 bewiesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4, Ueber den Kegelschnitt der 4 Linien und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt.

Drei der Linien seien die Seiten des F.-Dreiecks, der Punkt sei $D \equiv aA + bB + cC$ und die durch ihn gehende Gerade e habe die Form: $\frac{a(1-\nu)}{1-e} A + bB + \frac{c\nu}{e} C$.

Wenn D in dem $\triangle\ ABC$ liegt, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse und wenn D in die Räume $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ fällt, eine Hyperbel. Es bleibt daher nur der Fall zu untersuchen übrig, in dem D in einem der Räume $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ etwa in $\overline{AC}$ sich befindet; dann haben a und c dasselbe Zeichen, welches dem von b entgegengesetzt ist. Es sei $b = 1$, so sind a und c positiv, $a + c > 1$ und der Kegelschnitt wird:

$$\frac{a(1-x)^2}{(1-e)^2} A - B + \frac{cx^2}{e^2} C.$$

Die Art des Kegelschnitts hängt von dem Zeichen des Ausdrucks M ab, wenn man zur Koefficienten-Summe übergehend

$$ae^2 - ae + c(1-e)^2 \text{ oder } c^2(a+c) - 2ce + c(1-a)$$

mit M bezeichnet, worin e jeden möglichen Werth annehmen kann. Ist $M = o$, so entspricht eine der Wurzeln $e_1 = \left(c - \sqrt{ac(a+c-1)}\right) : (a+c)$ einer der Parabeln. Führt man ε statt e ein, so daß wird:

$$e = e_1 + \frac{\varepsilon\sqrt{ac(a+c-1)}}{a+c},$$

dann erhält man:

$$M = \frac{\varepsilon(\varepsilon-2)(a+c-1)ac}{a+c},$$

welcher Ausdruck den Beweis für die Auflösung in §. 2, 5 liefert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf