Indem ich diese Arbeit der Oeffentlichkeit übergebe, halte ich mich zugleich verpflichtigt, über die Entstehung und den Zeitpunkt derselben noch etwas zu erwähnen. Diese Arbeit wurde mir von Herrn Professor Richelot im Herbste 1857 aufgetragen, nachdem er die leitenden Grundsätze der Transformation in einer seiner damaligen Vorlesungen angegeben hatte. Ich muß hinzufügen, daß es hienach keine besondern Schwierigkeiten mehr hatte, die Transformation auszuführen. Ehe ich aber an die Arbeit ging, erschien in den ersten Heften der comptes rendus des Jahres 1858 eine Notiz von Hermite, in der das Resultat dieser Transformationen in einer eleganten Form, mit etwas abweichender Bezeichnungsweise, angegeben war. Da der Beweis von Hermite nicht angegeben war, so übertrug mir nun Herr Professor Richelot die Uebereinstimmung meiner Formeln mit denen Hermite's nachzuweisen. Dieses führte ich auch aus; meine Arbeit wurde im Mai 1858 beendigt. Im vergangenen Jahre erschien über denselben Gegenstand eine Inauguralabhandlung von Dr. Gordan in Gießen, der indessen die Abhandlung des Hermite gar nicht erwähnt. Seine Methode der Transformation ist von der meinigen ganz verschieden. Der Stützpunkt seiner Transformation ist ein Satz, der wesentlich derselbe ist, wie ein von Hermite in seiner „Uebersicht der Theorie der elliptischen Functionen" angegebener. In der Uebersetzung von Natani steht er pag. 24. Uebrigens gestattet die Form seines Resultates keine directe Vergleichung mit der Hermite'schen. —

Da der Hauptzweck ist, die Hermite'sche Formel zu beweisen, so wird es gut sein, dieselbe nebst einigen nothwendigen Erklärungen und Bemerkungen zunächst hier anzugeben.

„Der allgemeine Ausdruck der 4 Functionen ϑ, auf denen die Theorie der elliptischen Functionen beruht, ist folgender:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m\nu}\, e^{i\pi\left\{(2m+\mu)x + \frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2\right\}}$$

wo μ und ν zunächst 0 und 1 bedeuten, und ω eine imaginäre Constante ist, so daß wenn man setzt:

$$\omega = \omega_0 + i\omega_1$$

ω_1 von o verschieden und positiv ist. — Ich will hier zugleich den Zusammenhang zwischen diesen und den von Jacobi (Richelot) eingeführten Functionen angeben:

$$\vartheta_{11}\,(x,\omega) = i\,\vartheta_1\left(\pi x,\ e^{\,i\pi\omega}\right)$$
$$\vartheta_{01}\,(x,\omega) = \ \vartheta\ \left(\pi x,\ e^{\,i\pi\omega}\right)$$
$$\vartheta_{10}\,(x,\omega) = \ \vartheta_2\left(\pi x,\ e^{\,i\pi\omega}\right)$$
$$\vartheta_{00}\,(x,\omega) = \ \vartheta_3\left(\pi x,\ e^{\,i\pi\omega}\right)$$

Hermite giebt dann noch folgende Relationen an, die leicht aus ihrer Definition abgeleitet werden können:

$$\Theta_{\mu,\nu}\,^{(-x)} = (-1)^{\mu\nu}\ \ \Theta_{\mu,\nu}\,^{(x)}$$
$$\Theta_{\mu+2,\,\nu}\,^{(x)} = (-1)^{\nu}\ \ \Theta_{\mu,\nu}\,^{(x)}$$
$$\Theta_{\mu,\,\nu+2.}\,^{(x)} = \qquad\ \ \Theta_{\mu,\nu}\,^{(x)}$$
$$\Theta_{\mu+\mu^1,\,\nu+\nu^1}\,^{(x)} = \Theta_{\mu^1,\nu^1}\left(x + \frac{\mu\omega+\nu}{2}\right).\,e^{\,i\pi\left(\mu x + \frac{\mu^2\omega}{4} - \frac{\nu\mu^1}{2}\right)}$$

Die erste dieser Relationen zeigt, daß von den 4 Functionen eine einzige, die nämlich $\mu = 1$, $\nu = 1$ ungerade ist. Die beiden folgenden zeigen, daß man für ganz beliebige Werthe von μ und ν doch immer nur 4 verschiedene Functionen erhält. Man erhält die entsprechende Function mit den Indices 0 und 1, indem man statt der Zahlen μ und ν die nimmt, welcher sie in Bezug auf 2 congruent sind. Ist ν ungerade, so muß man noch zuerst sehen, ob μ der 0 oder 1 in Bezug auf 4 congruent ist oder nicht. Im zweiten Fall muß man noch das Zeichen der Function verändern, um die Function mit dem Inder 0 oder 1 zu erhalten. — Die letzte Relation zeigt, daß alle Functionen sich auf eine reduciren lassen.

Es seien nun a, b, c, d irgend welche positive oder negative ganze Zahlen, welche der Bedingung genügen

$$ad - bc = +1$$

ferner

$$\Omega = \frac{c + d\omega}{a + b\omega}$$
$$\mathfrak{m} = a\mu + b\nu + ab$$
$$\mathfrak{n} = c\mu + d\nu + cd$$
$$T = \delta \sum_{0}^{b-1}{}_{\varrho}\ e^{\,\frac{i\pi a}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2} : \sqrt{-ib\,(a + b\omega)}$$
$$\delta = e^{\,-\frac{i\pi}{4}\left(ac\mu^2 + 2bc\mu\nu + bd\nu^2 + 2abc\mu + 2abd\nu + ab^2c\right)}$$

Dann ist:

$$\Theta_{\mu,\nu}\left\{(a + b\omega)\,x,\omega\right\}e^{\,i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2} = T\Theta_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}\,(x,\Omega).\text{“}$$

Der Vergleichung wegen wähle ich hier die Hermite'sche Form der Bezeichnung. Der Gedankengang bei der Transformation ist überall derselbe. Es wird nicht schwer sein, die Transformation auszuführen, wenn man dieselbe bei einer Function ausgeführt hat. Es wird sich zeigen, daß es hauptsächlich darauf ankommt, nachzuweisen, daß eine Summe von einem unter dem Summenzeichen stehenden Index unabhängig ist. Außerdem würden wir dann noch für unsern Zweck die Uebereinstimmung des Hermite'schen Factors δ mit einem entsprechenden zeigen müssen.

In Bezug auf die Transformationen muß nun zunächst bemerkt werden, daß im Ganzen 6 Fälle unterschieden werden müssen, die aus der Bedingung

$$ad - bc = 1$$

entstehen. Wir unterscheiden nämlich, ob diese Zahlen a, b, c, d gerade oder ungerade sind, oder anders ausgedrückt, ob sie der 0 oder 1 in Bezug auf 2 congruent sind.

Diese Fälle sind:

	a	b	c	d
I	1	0	0	1
II	1	0	1	1
III	1	1	0	1
IV	1	1	1	0
V	0	1	1	0
VI	0	1	1	1

Wir haben 4 verschiedene Functionen, somit 24 verschiedene Transformationsformeln, welche Zahl bekanntlich in der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen eine wichtige Rolle spielt.

A) Transformation von Θ_{11}. Diese soll genau durchgeführt werden; dieselbe Methode gilt für dieandern. Es ist:

$$\Theta_{11}\,(\xi, \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h \, e^{i\pi \left\{ (2h+1)\,\xi + \frac{\omega}{4}(2h+1)^2 \right\}}$$

Wir setzen nun $\xi = (a + b\omega)\,x$, und führen Ω ein:

$$\Omega = \frac{c + d\omega}{a + b\omega}\,,\ \text{also}\ \omega = -\,\frac{c - a\Omega}{d - b\Omega}$$

$$\text{also}\quad a + b\omega = \frac{1}{d - b\,\Omega}\,,\ \frac{c - a\Omega}{d - b\Omega} = \frac{a}{b} - \frac{1}{b\,(d - b\,\Omega)}$$

also:

$$\Theta_{11}\,(\xi, \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h \, e^{i\pi \left\{ (2h+1)\,\frac{x}{d - b\Omega} + \frac{(2h+1)^2}{4b\,(d - b\,\Omega)} - \frac{a}{4b}\,(2h+1)^2 \right\}}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h \, e^{i\pi \left\{ \left(\frac{2h+1}{2} \cdot \frac{1}{b} + x \right)^2 \frac{b}{d - b\Omega} - \frac{x^2 b}{d - b\,\Omega} - \frac{a}{4b}\,(2h+1)^2 \right\}}$$

Bringen wir also den Factor $e^{\frac{-i\pi b x^2}{d-b\Omega}} = e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}$ auf die linke Seite, so erhalten wir die Gleichung:

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{11}\left\{(a+b\omega)\,x,\omega\right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^h\, e^{i\pi\left\{\left(\frac{2h+1}{2}\cdot\frac{1}{b}+x\right)^2\frac{b}{d-b\Omega}-\left(\frac{2h+1}{2}\right)^2\frac{a}{b}\right\}}$$

Wir entwickeln nun jedes Glied der rechten Seite nach dem Fourier'schen Theorem:

$$e^{i\pi\left\{\left(\frac{2h+1}{2}\cdot\frac{1}{b}+x\right)^2\frac{b}{d-b\Omega}-\left(\frac{2h+1}{2}\right)^2\frac{a}{b}\right\}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\int_{-1}^{+1} e^{i\pi\left\{\left(\frac{2h+1}{2}\cdot\frac{1}{b}+\alpha\right)^2\frac{b}{d-b\Omega}-\left(\frac{2h+1}{2}\right)^2\frac{a}{b}+\varkappa(x-\alpha)\right\}}.\,d\alpha$$

Hierin setzen wir $\quad 2h+1 = 4b\,H+r$

wo r den positiven oder negativen kleinsten Rest in Bezug auf $4b$ bedeutet, also von $-(2b-1)$ bis $2b-1$ durch alle ungeraden Zahlen hindurchgeht. Dadurch verwandelt sich die rechte Seite in:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\int_{-1}^{+1} e^{i\pi\left\{\left(2H+\frac{r}{2b}+\alpha\right)^2\frac{b}{d-b\Omega}-\frac{r^2 a}{b}+\varkappa(x-\alpha)\right\}}.\,d\alpha$$

Indem wir nun links nach h summiren, ist rechts nach H und r zu summiren; für den Factor $(-1)^h$ schreiben wir dann rechts $(-1)^{\frac{r-1}{2}}$. Indem dann für die Exponentialfunction $e^{i\pi\varkappa x}$ die trigonometrischen Functionen $cos.$ und $sin.$ eingeführt werden, sieht man sofort, daß man eine Reihe erhält, die nach den $cos.$ und $sin.$ der Vielfachen von πx fortschreitet. Wir weisen nun zunächst nach, daß nur die ungeraden Vielfachen dieses Arguments vorkommen. Diese Behauptung ist offenbar erwiesen, wenn gezeigt ist, daß durch die Substitution von $x+1$ an Stelle von x der ganze Ausdruck das entgegengesetzte Zeichen annimmt. Wir substituiren also $x+1$ in die linke Seite. Dies giebt:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+b}\, e^{i\pi\left\{\left(\frac{2(h+b)+1}{2}\cdot\frac{1}{b}+x\right)^2\frac{b}{d-b\Omega}-\left(\frac{2(h+b)+1}{2}\right)^2\frac{a}{b}\right\}}.(-1)^b\, e^{i\pi a(2h+b+1)}$$

$$(-1)^b\, e^{i\pi a(2h+b+1)} = e^{i\pi(ab+a+b)} = -\,e^{i\pi(a+1)(b+1)}$$

Da aber wegen der Gleichung $ad-bc=1$ entweder a oder b ungerade sein muß, so ist $(a+1)(b+1)$ stets eine gerade Zahl, also der letzte Factor -1. Indem man dann statt $h+b$ etwa h' einführt, erhält man im Uebrigen die frühere Summe. Aehnlich läßt sich zeigen, daß, wenn man $-x$ an Stelle von x setzt, das entgegengesetzte Resultat herauskommt. Hieraus folgt, daß die $cos.$ in der Summe fortgehen. Aus dem ersten Resultat folgt nun, daß wir $2\varkappa+1$ an Stelle von $\varkappa$ setzen können. Dies soll geschehen, ferner aber wollen wir statt der Variabeln α eine andere β mittelst der Gleichung:

$$2H+\frac{r}{2b}+\alpha=\beta$$

einführen. Dies liefert uns die Gleichung:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-)^h e^{i\pi\left\{\left(\frac{2h+1}{2}\cdot\frac{1}{b}+x\right)^2\frac{b}{d-b\Omega}-\left(\frac{2h+1}{2}\right)^2\frac{a}{b}\right\}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\mathop{\mathrm{S}}_{r,\frac{1}{2}H}(-1)^{\frac{r-1}{2}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\int\limits_{2H+\frac{r}{2b}-1}^{2H+\frac{r}{2b}+1} e^{i\pi\left\{\beta^2\frac{b}{d-b\Omega}-\frac{r^2a}{4b}+(2\varkappa+1)\left(x-\beta+\frac{r}{2b}\right)\right\}}\,.\,d\beta$$

Die Summe S bezeichnet eine Doppelsumme nach H und r. Die nach H läßt sich sofort ausführen. Es verwandelt sich durch die Ausführung das Integral in dasjenige mit den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$. Dieses aber läßt sich integriren. Es ist nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\beta^2}{R}-i\varkappa\beta}\,d\beta=\sqrt{-\pi R}\;e^{R\frac{\varkappa^2}{4}}$$

Hiebei gilt die Voraussetzung, daß der reelle Theil von R negativ ist; das Zeichen der Wurzel muß erner so genommen werden, daß der reelle Theil positiv ist. Bei uns trifft die erste Voraussetzung zu; es ist:

$$\frac{ib}{d-b\Omega}=ib\,(a+b\omega)=-b^2\,\omega_1+i(ab+b^2\,\omega_0).$$

Nach der angegebenen Formel ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\beta^2 b\,(a+b\omega)-i\pi\beta\,(2\varkappa+1)}\,d\beta=\frac{1}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\;e^{\left(\frac{2\varkappa+1}{2}\right)^2\frac{\pi}{ib\,(a+b\omega)}}$$

Indem wir dies substituiren, erhalten wir folgende Formel:

$$\frac{e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2}}{\Theta_{11}\left\{(a+b\omega)\,x,\omega\right\}\cdot\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\varkappa}\,e^{i\pi\left\{(2\varkappa+1)\,x+\frac{\Omega}{4}(2\varkappa+1)^2\right\}}\mathop{\mathrm{S}}_r(-1)^{\varkappa+\frac{r-1}{2}}e^{-\frac{i\pi}{4b}\left(ar^2-2r\,(2\varkappa+1)+d(2\varkappa+1)^2\right)}$$

Es soll nun nachgewiesen werden, daß die Summe S_r von $\varkappa$ ganz unabhängig ist. Wir werden dabei aber die Fälle sondern müssen, ob a gerade oder ungerade ist.

Es sei zunächst 1) a ungerade.

Da a und b relative Primzahlen sind, so werden sich 2 Zahlen f und g bestimmen lassen, so daß

$$2\varkappa + 1 = 4bg - af,$$

wonach also f eine ungerade Zahl sein muß. Den hieraus folgenden Werth von $\varkappa$ substituiren wir in die letzte Summe, wobei wir noch bedenken, daß

$$(-1)^{\varkappa + \frac{r-1}{2}} = e^{\frac{\pi i}{2}\left(2\varkappa + r - 1\right)} = e^{\frac{\pi i}{2}\left(4bg - af + r - 2\right)} = e^{\frac{\pi i}{2}\left(r - af - 2\right)}$$

oder da $\quad -af \equiv a + f + 1 \pmod 4$

$$= e^{\frac{\pi i}{2}(r + f + a - 1)}.$$

Ferner ist:

$$e^{-\frac{i\pi}{4b}\left(ar^2 - 2r\,(2\varkappa+1) + d\,(2\varkappa+1)^2\right)} = e^{-\frac{i\pi}{4b}\left(ar^2 + 2arf + a^2df^2\right)}$$

und setzen wir $ad = bc + 1$, so giebt das:

$$e^{-\frac{\pi i a}{4b}(r+f)^2 - i\frac{\pi ac}{4}f^2}$$

Aber f^2 ist von der Form $8\mu + 1$, also:

$$e^{-\frac{i\pi ac}{4}f^2} = e^{-\frac{i\pi ac}{4}}.$$

Die angegebene Summe wird somit

$$e^{-\frac{\pi i}{4}(ac - 2a + 2)}\ \mathbf{S}_r\ e^{-\frac{i\pi a}{4b}(r+f)^2 + \frac{\pi i}{2}(r+f)}.$$

Da ferner sowohl r als f ungerade, so ist $r + f$ gerade, also $r + f$ hat die Form:

$$r + f = 2.\,2^{\alpha}.\,q, \text{ wo } q \text{ ungerade und } \alpha \text{ eine ganze Zahl von 0 an.}$$

$$(r+f)^2 = 4.\,2^{2\alpha}\,q^2$$

$$2(r+f) = 4.\,2^{\alpha}.\,q$$

also sind $(r+f)^2$ und $2\,(r+f)$ einander in Bezug auf 8 congruent; demnach:

$$e^{\frac{\pi i}{2}(r+f)} = e^{\frac{\pi i}{4}(r+f)^2}$$

Wir erhalten somit

$$e^{-\frac{\pi i}{4}(ac - 2a + 2)}\ \mathbf{S}_r\ e^{-\frac{i\pi}{4b}(a-b)(r+f)^2}$$

Von dieser Summe läßt sich nun leicht zeigen, daß sie von f, also auch von $\varkappa$ unabhängig ist. Setzen wir nämlich

$$\frac{r+f}{2} = 2b\,H + \varrho$$

wo ϱ den kleinsten positiven Rest in Bezug auf $2b$ bedeutet, so sind alle ϱ für irgend einen Werth von f verschieden. Wäre nämlich noch für ein 2tes r, etwa r' dasselbe ϱ, so hätte man:

$$\frac{r'+f}{2} = 2b\,H' + \varrho$$

$$\text{also} \quad \frac{r-r'}{2} = 2b\,(H - H')$$

Dies steht im Widerspruche mit den Werthen von r, die sich zwischen den Werthen $\pm(2b-1)$ bewegen, so daß also $\frac{r-r'}{2}$ höchstens $2b-1$ sein kann. Da die ϱ also alle verschieden sind, und die Anzahl derselben $2b$, so sind es die Zahlen $0, 1, 2 \ldots 2b-1$. Statt der letzten Summe können wir sonach schreiben

$$\sum_{\varrho\,0}^{2b-1} e^{-\pi i \frac{(a-b)}{b} \varrho^2}$$

Obgleich wir somit die Unabhängigkeit der vorher bezeichneten Summe von $\varkappa$ nachgewiesen haben, so wollen wir doch noch eine kleine Veränderung mit derselben vornehmen, um uns der Formel von Hermite zu nähern. Es ist:

$$\sum_{0}^{2b-1} e^{-\pi i \frac{(a-b)}{b} \varrho^2} = \sum_{0}^{2b-1} e^{-\pi i \frac{a}{b} \varrho^2 + \pi i \varrho^2}$$

Da a eine ungerade Zahl ist, so ist:

$$e^{\pm \pi i \varrho^2} = e^{\pi i a \varrho}$$

also
$$e^{-\frac{\pi i a}{b} \varrho^2 + \pi i \varrho^2} = e^{-\frac{\pi i a}{b}(\varrho^2 - b\varrho)} = e^{\frac{\pi i a b}{4}} \cdot e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2}$$

Endlich ist noch:

$$e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2} = e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho + \frac{b}{2}\right)^2}$$

dadurch wird die letzte Summe:

$$2.\, e^{\frac{\pi i a b}{4}} \sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2}$$

Die ganze Summe S, die vorher unter dem Summenzeichen nach $\varkappa$ stand, nimmt also endlich folgenden Werth an:

$$2.\, e^{-\frac{\pi i}{4}(ac - ab + 2a - 2)} \sum_{\varrho\,0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2}$$

Bezeichnen wir nun diese Größe mit $2\,T.\,\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}$ so ergiebt sich die Formel:

$$\Theta_{11}\left\{(a+b\omega)x,\omega\right\}\; e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2} = T\,\Theta_{11}\,(x,\,\Omega)\,.$$

Wir nehmen nun 2) a gerade, also b ungerade. Es kommt wiederum auf die Untersuchung von folgender Größe an:

$$e^{\frac{\pi i}{2}\,(2\varkappa+r-1)}\,.\,e^{-\frac{i\pi}{4b}\left(ar^2-2r\,(2\varkappa+1)\,+\,d\,(2\varkappa+1)^2\right)}$$

Wir setzen hier:

$$2\varkappa+1=bg-af$$

Hier muß g ungerade sein, wir können aber auch f stets ungerade wählen. Sind nämlich f und g irgend welche Werthe, welche der Gleichung genügen, denn findet dasselbe mit den Werthen $g+a$ und $f+b$ statt. Durch diese Substitution wird jene Größe:

$$e^{\frac{\pi i}{2}\,(bg-af+r-2)-\frac{\pi i}{4b}\left(ar^2-2r\,(bg-af)+d\,(bg-af)^2\right)}$$

$$=e^{\frac{\pi i}{4}\,(2bg-2af-4+2r+2rg-bdg^2+2adgf)-\frac{\pi ia}{4b}\left(r^2+2rd+adf^2\right)}$$

$$=e^{\frac{\pi i}{4}\,(2bg-2af-4+2r+2rg-bd+2ad-ac)-\frac{\pi ia}{4b}\,(r+f)^2}$$

$$2bg+2rg=2g\,(b+r)\equiv 2\,(b+r)\ (mod\ 8).$$

$$2af\equiv 2a\,(mod\ 8).$$

Der erste Factor bis zum Ende der Klammer wird also:

$$e^{\frac{\pi i}{4}\,(2b+4r-4-2a-bd+2ad-ac)}$$

oder da $4r-4=4\,(r-1)\equiv o\,(mod\,8)$ und $2ad=2bc+2$ ist.

$$=e^{\frac{\pi i}{4}\,(2b\,(c+1)\,-\,2a+2\,-\,bd\,-\,ac)}$$

$$=e^{-\frac{\pi i}{4}\,(ac\,+\,bd\,-\,2a\,-\,2c\,+\,4)}$$

Die Summe S nach r wird also durch diese Substitution

$$e^{-\frac{\pi i}{4}\,(ac+bd-2a-2c+4)}\,\mathrm{S}_r\;e^{-\frac{\pi ia}{4b}\,(r+f)^2}$$

Diese Summe ist offenbar wiederum eine von f unabhängige Größe. Es ist

$$\mathrm{S}\;e^{-\frac{\pi ia}{4b}\,(r+f)^2}=\sum_{o}^{2b-1}e^{-\frac{\pi ia}{b}\,r^2}=2\,e^{\frac{\pi iab}{4}}\sum_{o}^{b-1}e^{-\frac{\pi ia}{b}\left(r-\frac{b}{2}\right)^2}$$

Setzen wir also jetzt:

$$e^{-\frac{\pi i}{4}\,(ac+bd-ab-2a+4)}\sum_{o}^{b-1}e^{-\frac{\pi ia}{b}\,(r-\frac{b}{2})^2}=T\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}$$

so erhalten wir wiederum die Formel:

$$\Theta_{11} \left\{(a+b\omega)\, x,\, \omega\right\} e^{i\pi b\, (a+b\omega)\, x^2} = T\Theta_{11}\ (x, \Omega).$$

(*B*) Wir gehen nun zur Transformation der Function $\Theta_{00}\ (\xi, \omega)$ über; doch wollen wir uns dabei kürzer fassen.

$$\Theta_{00}\ (\xi, \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\ (2h\xi + h^2\omega)}$$

Durch Einführung von x und Ω erhalten wir nach einigen Reductionen

$$e^{i\pi b\, (a+b\omega)\, x^2}\ \Theta_{00}\left((a+b\omega)\, x, \omega\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi \left\{\frac{b}{d-b\Omega}\left(x+\frac{h}{b}\right)^2 - \frac{a}{b}h^2\right\}}$$

Indem wir nun in der Summe rechts $x - 1$ mit x vertauschen, erhalten wir dieselbe Summe multiplicirt mit $e^{i\pi ab}$. Wir erhalten also dasselbe, wenn nur eine der Zahlen a und b gerade ist, und nur dann das umgekehrte, wenn beide ungerade sind.

Wir haben also zunächst zu unterscheiden

1) a ungerade, b gerade.

Wir erhalten nur gerade Vielfache von x, also statt $\varkappa$ können wir sofort $2\varkappa$ einführen. Wir machen nun die frühere Entwickelung, und setzen dann:

$$h = 2b\ H + r$$

Wir erhalten dann:

$$\frac{1}{\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\ e^{\pi i \left\{2\varkappa x + \Omega\varkappa^2\right\}} \mathop{\mathrm{S}_r}_{-b}^{b-1} e^{-\frac{\pi i}{b}\,(ar^2 - 2\varkappa r + d\varkappa^2)}$$

Wir setzen dann $\varkappa = bg - af$. Die Summe S_r geht dann über in

$$\mathrm{S}_r\ e^{-\frac{\pi ia}{b}\,(r+f)^2} \cdot e^{-\pi iacf^2}$$

Wir haben hienach diesen Fall noch in 2 Theile zu theilen, nämlich

α) c gerade, β) c ungerade.

Im Falle (α) wird die Summe

$$\mathrm{S}_r\ e^{-\frac{\pi ia}{b}\,(r+f)^2}$$

welche von f unabhängig ist. Wir können setzen $f = -\frac{b}{2}$, und erhalten

$$\sum_{0}^{b-1}{}_{r}\ e^{-\frac{\pi ia}{b}\,\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2} = 2\sigma$$

Wir erhalten also die Formel:

$$e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2}\,\Theta_{00}\left(\{a+b\omega\}\,x,\omega\right)=\frac{\sigma}{\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}}\,\Theta_{00}\,(x,\,\Omega).$$

Im Falle (β) wird die Summe:

$$(-1)^f\,\mathrm{S}_r\,e^{-\frac{\pi i a}{b}(r+f)^2}$$; oder da $(-1)^f=(-1)^\varkappa$, so erhalten wir, indem wir diesen Factor zur ersten Summe ziehen:

$$e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2}\,\Theta_{00}\,\{(a+b\omega)\,x,\omega\}=\frac{\sigma}{\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}}\,\Theta_{01}\,(x,\,\Omega).$$

Es sei nun 2) a gerade, b ungerade.

Wir erhalten wieder nur gerade Vielfache von x. Die zu untersuchende Summe heißt wieder:

$$\mathrm{S}_r\,e^{-\frac{\pi i}{b}\,(ar^2-2\varkappa+d\varkappa^2)}$$

Wir setzen wieder $\varkappa=bg-af$, und wählen f ungerade. Diese Substitution verwandelt diese Summe in:

$$\mathrm{S}_r\,e^{-\frac{\pi i a}{b}\,(r+f)^2}\,.\,e^{-\pi i b d g^2}$$

Ist nun (α) d gerade, so fällt der 2te Factor fort; ist (β) d ungerade, so wird

$$e^{-\pi i b d g^2}=(-1)^g=(-1)^\varkappa.$$

Ferner $\mathrm{S}_r\,e^{-\frac{\pi i a}{b}(r+f)^2}=2.\sum_0^{b-1}e^{-\frac{\pi i a}{b}r^2}=2e^{\frac{\pi i a b}{4}}\sum_0^{b-1}e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho-\frac{b}{2}\right)^2}$

Es ist also

$$(\alpha)\qquad e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2}\,\Theta_{00}\,\{(a+b\omega)\,x,\omega\}=\frac{\sigma}{\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}}\,e^{\frac{\pi i a b}{4}}\,\Theta_{00}\,(x,\,\Omega)$$

$$(\beta)\qquad e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2}\,\Theta_{00}\,\{(a+b\omega)\,x,\omega\}=\frac{\sigma}{\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}}\,e^{\frac{\pi i a b}{4}}\,\Theta_{01}\,(x,\,\Theta)$$

Es sei (3) a und b ungerade.

Wir erhalten dann ungerade Vielfache von x, also statt $\varkappa$ ist in der Fourier'schen Formel $2\varkappa+1$ einzuführen.

Die gewöhnliche Reduction liefert:

$$\frac{1}{2\sqrt{-ib\,(+b\omega)}}\,\sum_\varkappa e^{i\pi\left\{(2\varkappa+1)\,x+\frac{\Omega}{4}(2\varkappa+1)^2\right\}}\,\mathrm{S}_r\,e^{-\frac{\pi i}{b}\left(ar^2-(2\varkappa+1)r+\frac{d}{4}(2\varkappa+1)^2\right)}.$$

Wir setzen hier:

$2\varkappa+1=4bg-af$, wo also f ungerade ist. Dadurch verwandelt sich diese Summe in:

$$2 \,.\, e^{-\frac{\pi i a c}{4}} \sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{4b}(2r+f)^2}$$

Diese Summe ist von f unabhängig. Setzen wir also $f = -b$, das gestattet ist, da beide Zahlen ungerade sind, so wird dieselbe

$$2\, e^{-\frac{\pi i a c}{4}} \sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2}$$

Wir erhalten also:

$$e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2}\, \Theta_{00} \left\{(a+b\omega)\,x, \omega\right\} = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}}\, e^{-\frac{\pi i a c}{4}}\, \Theta_{00}(x, \Omega).$$

(C) Transformation der Function Θ_{01}.

$$\Theta_{01}\,(\xi, \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h\, e^{-i\pi\,(2h\xi + h\omega^2)}$$

Mit Einführung der frühern Größen erhalten wir dadurch:

$$e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2}\, \Theta_{01}\,(\xi, \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h\, e^{i\pi \left\{(x+\frac{h}{b})^2 \frac{b}{d-b\Omega} - \frac{a}{b}\, h^2\right\}}.$$

Vertauschen wir rechts x mit $x-1$, so erhalten wir zu derselben Summe noch den Factor $e^{i\pi b\,(a+1)}$.

Wir unterscheiden also: 1. b gerade, a ungerade.

Dies giebt:

$$\frac{1}{2\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}} \sum_{\varkappa} e^{i\pi\,(2\varkappa + \Omega\,\varkappa^2)}\, \mathbf{S}_r\, (-1)^r\, e^{-\frac{\pi i}{b}(ar^2 - 2r\varkappa + d\varkappa^2)}$$

Wir setzen hier $\varkappa = 2bg - af$, und finden, wenn (α) c gerade ist, für die letzte Summe:

$$\mathbf{S}_r\, (-1)^r\, e^{-\frac{\pi i a}{b}(r+f)^2} = (-1)^f\, \mathbf{S}_r\, (-1)^{r+f}\, e^{\frac{-\pi i a}{b}(r+f)^2}$$

Es ist aber $(-1)^f = (-1)^\varkappa$. Diesen Factor nehmen wir zur ersten Summe. Die andere ist wieder von f unabhängig. Es läßt sich ferner leicht diese Summe in:

$$2\, e^{\frac{\pi i a b}{4}} \sum_{0}^{b-1} e^{\frac{-\pi i a}{b}(\varrho - \frac{b}{2})^2}$$

transformiren. Wir erhalten also die Formel:

$$e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2}\, \Theta_{01} \left((a+b\omega)\,x, \omega\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\, e^{\frac{\pi i a b}{4}}\, \Theta_{01}\,(x, \Omega)$$

Ist (β) c ungerade, so wird die Summe

$$\mathbf{S}_r\, (-1)^{r+f}\, e^{-\frac{\pi i a}{b}(r+f)^2} = 2\, e^{\frac{\pi i a b}{4}} \sum_{0}^{b-1} e^{\frac{-\pi i a}{b}(\varrho - \frac{b}{2})^2}$$

also

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{01}\left\{(a+b\omega)x,\omega\right\} = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,e^{\frac{\pi i a b}{4}}\,\Theta_{00}(x,\Omega)$$

Es sei (2) b und a ungerade. Wir erhalten dann genau dasselbe.

Es sei (3) b ungerade, a gerade. Wir erhalten in diesem Falle ungerade Vielfache von x, wir haben also in der Fourier'schen Formel $2\varkappa+1$ einzuführen. Wir wenden dann die Substitution

$$2\varkappa+1 = bg - af$$

an, wo f und g ungerade genommen werden. Die Endformel lautet dann:

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{01}\left((a+b\omega)x,\omega\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,e^{-\frac{\pi i}{4}(ac+bd-2ad)}\,\Theta_{10}(x,\Omega)$$

(D) Transformation der Function Θ_{10}.

$$\Theta_{10}(\xi,\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\left\{(2h+1)\xi+\frac{\omega}{4}(2h+1)^2\right\}}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\left\{\frac{(2h+1)x}{d-b\Omega} - \frac{a}{b}\frac{(2h+1)^2}{4} + \frac{(2h+1)^2}{4}\frac{1}{b(d-b\Omega)}\right\}}$$

woraus:

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{10}\left((a+b\omega)x,\omega\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\left\{\left(x+\frac{2h+1}{2b}\right)^2\frac{b}{d-b\Omega} - \frac{(2h+1)^2}{4}\right\}}.$$

$x-1$ an Stelle von x substituirt, liefert für die Summe den Factor $e^{\pi i a(b+1)}$.

Es sei also 1) b gerade, a ungerade.

Wir erhalten dann nur ungerade Vielfache. Das Fourier'sche Theorem liefert also:

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{S}_{H,r}\sum\nolimits_{\varkappa}\int_{-1}^{+1} e^{i\pi\left\{\left(\alpha+2H+\frac{r}{2b}\right)^2\frac{b}{d-b\Omega} - \frac{a}{b}\frac{r^2}{4} + (2\varkappa+1)(x-\alpha)\right\}}\,.\,d\alpha$$

r nimmt hier nur ungerade Werthe an:

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\sum\nolimits_{\varkappa} e^{i\varkappa\left\{(2\varkappa+1)x+\frac{\Omega}{4}(2\varkappa+1)^2\right\}}\,\mathbf{S}_r\, e^{-\frac{\pi i}{4b}\left(ar^2-2r(2\varkappa+1)+d(2\varkappa+1)^2\right)}$$

Wir substituiren: $\quad 2\varkappa+1 = 4\,bg - af$

und erhalten für die letzte Summe:

$$2\,e^{-\frac{\pi i a c}{4}}\sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}r^2} = 2\,e^{-\frac{\pi i a c}{4}}\sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho-\frac{b}{2}\right)^2}$$

also:

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{10}\left\{(a+b\omega)x,\omega\right\} = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,e^{-\frac{\pi i a c}{4}}\,\Theta_{10}(x,\Omega).$$

Es sei 2) b ungerade und a ungerade.

Wir erhalten ungerade Vielfache. Nach einigen Reductionen erhält man:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa} e^{i\pi\left\{2\varkappa\varkappa + \Omega\,\varkappa^2\right\}}\ \mathrm{S}_r\, e^{-\frac{\pi i}{4b}\,(ar^2 - 4r\varkappa + 4\varkappa^2 d)}.$$

Wir setzen $\varkappa = 2bg - af$.

Die Summe wird dann:

$$e^{-\pi i a c f^2}\ \mathrm{S}_r\, e^{-\frac{\pi i a}{4b}\,(r+2f)^2}.$$

Ist (α) c gerade, so geht der erste Factor fort. Wir setzen dann:

$$2f + r \equiv 2\varrho - b\ (mod\ 4b)$$

dann nimmt ϱ alle Werthe von 0 bis $2b-1$ an. Wir bekommen also:

$$\sum_{0}^{2b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho-\frac{b}{2}\right)^2} = 2\sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho-\frac{b}{2}\right)^2}$$

Ist (β) c ungerade, so wird

$$e^{-\pi i a c f^2} = (-1)^f = (-1)^{\varkappa}.$$

Alles Uebrige verändert sich nicht. Es ist also:

$$(\alpha)\quad e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2}\,\Theta_{10}\left\{(a+b\omega)\,x,\,\omega\right\} = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}}\ \Theta_{00}\,(x,\Omega).$$

$$(\beta)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}}\ \Theta_{01}\,(x,\Omega).$$

Es sei also 3) b ungerade und a gerade.

Wir erhalten nur gerade Vielfache von x. Die zu untersuchende Summe wird:

$$\mathrm{S}_r\ e^{-\frac{\pi i}{4b}\,(ar^2 - 4r\varkappa + 4d\varkappa^2)}.$$

Wir setzen $\varkappa = bg - af$, wo f ungerade gewählt wird. Die Summe wird dann:

$$\mathrm{S}_r\ e^{-\frac{\pi i a}{4b}\,(r+2f)^2}\,.\,e^{-\pi i g\,(bdg - r)}.$$

Ist nun (α) d gerade, so wird der 2te Factor

$$(-1)^g = (-1)^{\varkappa}$$

Ist aber (β) d ungerade, so wird der 2te Factor $+1$. Wir erhalten also:

$$(\alpha)\quad e^{i\pi b\,(a+b\omega)\,x^2}\,\Theta_{10}\,(a+b\omega)\,x,\,\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}}\ \Theta_{01}\,(x,\Omega)$$

$$(\beta)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib\,(a+b\omega)}}\ \Theta_{00}\,(x,\Omega)$$

Wir wollen nun der Uebersicht halber die Formeln so aufstellen, daß wir die Functionen für jeden der 6 Fälle zusammen haben:

Ister Fall.

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{11}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}(ac-ab+2a-2)}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{11}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{00}(\xi,\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{00}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{01}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi iab}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{01}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{10}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi iac}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{10}(x,\Omega)$$

IIter Fall.

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{11}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}(ac-ab+2a-2)}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{11}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{00}(\xi,\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{01}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{01}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi iab}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{00}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{10}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi iac}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{10}(x,\Omega)$$

IIIter Fall.

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{11}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}(ac-ab+2a-2)}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{11}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{00}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi iac}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{10}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{01}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi iab}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{01}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{10}(\xi,\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{00}(x,\Omega)$$

IVter Fall.

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{11}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}ac-ab+2a-2)}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{11}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{00}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi iac}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{10}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{01}(\xi,\omega) = e^{\frac{\pi iab}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{00}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{10}(\xi,\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{01}(x,\Omega)$$

Vter Fall.

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{11}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}(ac+bd-ab-2(a+c)+4)}\,\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{11}(x.\,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{00}(\xi,\omega) = e^{\frac{\pi iab}{4}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{00}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{01}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}(ac+bd-2ad)}\,\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{10}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{10}(\xi,\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{01}(x,\Omega)$$

VIter Fall.

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{11}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}(ac+bd-ab-2(a+c)+4)}\,\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{11}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{00}(\xi,x) = e^{\frac{\pi iab}{4}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{01}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{01}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}(ac+bd-2ad)}\,\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{10}(x,\Omega)$$

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{10}(\xi,\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{00}(x,\Omega)$$

Wir haben nun noch nachzuweisen, daß die eben angegebenen Formeln mit den Hermite'schen in Uebereinstimmung stehen. Da die Schlußfolgen sich im Allgemeinen wiederholen würden, so wird es genügen, den Nachweis für den ersten Fall etwa zu führen.

Nach Hermite lautet nun die erste Formel:

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{11}(\xi,\omega) = e^{-\frac{i\pi}{4}(ac+bd+2bc+2abc+2abd+ab^2c)}\,\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta_{m,n}(x,\Omega).$$

Es ist aber:

$$m = a+b+ab = (a+1)(b+1)-1$$
$$n = c+d+cd = (c+1)(d+1)-1$$

m und n sind also der 1 in Bezug auf 2 congruent.

Es ist ferner

$$\vartheta_{\mu+2,1} = -\vartheta_{\mu,1}$$

Daraus folgt, daß wenn

(a) von der Form $4K+1$,

$$e^{-\frac{\pi i}{4}(ac-ab+2a-2)} = e^{-\frac{\pi i}{4}(ac+bd+2bc+2abc+2abd+ab^2c)}$$

(a) von der Form $4K-1$

$$e^{-\frac{\pi i}{4}(ac-ab+2a-2)} = -e^{-\frac{\pi i}{4}(ac+bd+2bc+2abc+2abd+ab^2c)}$$

sein muß.

1) Es ist nun:

$$e^{-\frac{\pi i}{4}(2a-2)} = 1,\quad e^{-\frac{\pi i}{4}(2bc+2abc)} = e^{-\frac{\pi i}{2}bc(1+a)} = 1.$$

Es ist also nur nachzuweisen:

$$e^{-\frac{\pi i a b}{84}} = e^{-\frac{\pi i}{4}(bd+2abd+ab^2c)}$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{4}(bd+2abd)} = e^{-\frac{\pi i}{4}(bd(ad-bc)+2abd)}$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{4}(ab+2abd)} = e^{-\frac{\pi i}{4}(ab+2ab)} = e^{-\frac{3\pi i}{4}ab}.$$

Diese Gleichung findet aber für ein gerades b statt.

Im 2ten Fall ist $e^{-(2a-2)} = -1$. Alles Uebrige bleibt ebenso. Die Gleichung ist also für diesen Fall ebenfalls richtig. —

Nach Hermite lautet die 2te Formel:

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{00}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}ab^2c}\,\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta\mathfrak{m},\mathfrak{n}(x,\Omega)$$

$$\mathfrak{m} = ab,\ \mathfrak{n} = cd$$

Beide Zahlen sind aber in unserm Falle der 0 congruent.

Da ferner $e^{-\frac{\pi i}{4}ab^2c} = 1$, so ist die Uebereinstimmung bewiesen.

Nach Hermite lautet die 3te Formel:

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{01}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}(bd+2abd+ab^2c)}\,\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta\mathfrak{m},\mathfrak{n}(x,\Omega)$$

$$\mathfrak{m} = b + ab,\ \mathfrak{n} = d + cd$$

$\mathfrak{m}$ ist von der Form $4K$, dagegen $\mathfrak{n}$ der 1 in Bezug auf 2 congruent. Es ist also nachzuweisen, daß

$$e^{\frac{\pi i a b}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{4}(bd+2abd+ab^2c)}$$

Dies ist schon vorher geschehen.

Endlich lautet nach Hermite die 4te Formel:

$$e^{i\pi b(a+b\omega)x^2}\,\Theta_{10}(\xi,\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}(ac+2abc+ab^2c)}\,\frac{\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}\,\Theta\mathfrak{m},\mathfrak{n}(x,\Omega)$$

$$\mathfrak{m} = a + ab \equiv 1\ (mod\ 2)$$
$$\mathfrak{n} = c = cd \equiv 0\ (mod\ 2)$$

Es ist also nachzuweisen, daß

$$e^{-\frac{\pi i a c}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{4}(ac + 2abc + ab^2c)}$$

Dies ist aber der Fall, da $e^{-\frac{\pi i}{4}(2abc + ab^2c)} = 1$ ist.

Ich habe den Nachweis der Uebereinstimmung für alle Fälle auf analoge Weise streng nachgewiesen. Es wird überflüssig sein, diese Beweise hier noch zu geben.

Es würde jetzt noch übrig bleiben, die Summe σ zu bestimmen. Diese Summe ist indessen von Gauß, später von Lebesgue (Liouville: Journal XII) und Dirichlet (Crelle) im Wesentlichen ausgeführt, und von Hermite ist auch darauf Bezug genommen. Wenn es nun zwar nicht dieselbe Summe ist, die wir hier haben, so läßt sich doch unsere Summe leicht auf die Gauß'sche reduciren.

Ist zuerst b gerade, so ist offenbar:

$$\sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2} = \sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\varrho^2}$$

und dies ist die Gauß'sche Summe.

Ist aber b ungerade, dann giebt Hermite folgendes Resultat an. Man bestimme 2 Zahlen m und n mittelst der Gleichung:

$$a = mb - 8n$$

dann ist $\sigma = e^{-\frac{m i \pi}{4}} \left(\frac{n}{b}\right) i^{\left(\frac{b-1}{2}\right)^2} \sqrt{b}.$

In der That führt man mittelst dieser Substitution die angegebene Summe auf die Gauß'sche zurück.

$$e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2} = e^{-\frac{\pi i (mb - 8n)}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2}$$

$$= e^{-\pi i m\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2} \cdot e^{\frac{\pi i 8n}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2}$$

$$e^{-\pi i m\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2} = e^{-\frac{\pi i m b^2}{4}} \cdot e^{-\pi i m \varrho(\varrho - b)} = e^{-\frac{\pi i m}{4}}.$$

$$e^{\frac{n 8 \pi i}{b}\left(\varrho - \frac{b}{2}\right)^2} = e^{\frac{8 \pi i n}{b}\varrho^2}, \text{ also}$$

$$\sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho-\frac{b}{2}\right)^2} = e^{-\frac{m i \pi}{4}} \sum_{0}^{b-1} e^{\frac{8\pi i n}{b}\varrho^2},$$

woraus das angegebene Resultat folgt.

Es läßt sich jedoch noch auf einem andern Wege die genannte Reihe auf die Gauß'sche transformiren.

$$\sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho-\frac{b}{2}\right)^2} = e^{-\frac{\pi i a b}{4}} \sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\varrho^2} \cdot e^{-\frac{\pi i a b}{b}\varrho}$$

Ist nun a gerade, so ist $e^{-\frac{\pi i a b}{b}\varrho} = 1$, und die Summe reducirt. Ist aber a ungerade, so ist:

$$e^{-\frac{\pi i a b}{b}\varrho} = e^{-\pi i a \varrho^2} = e^{\pm \pi i \varrho^2} = e^{+\frac{\pi i b}{b}\varrho^2}$$

und

$$e^{-\frac{\pi i a}{b}\varrho^2} \cdot e^{\frac{\pi i b}{b}\varrho^2} = e^{-\pi i \frac{(a-b)}{b}\varrho^2},$$

also

$$\sum_{0}^{b-1} e^{-\frac{\pi i a}{b}\left(\varrho-\frac{b}{2}\right)^2} = e^{-\frac{\pi i a b}{4}} \sum_{0}^{b-1} e^{-\pi i \frac{(a-b)}{b}\varrho^2}$$

Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir noch die Aufmerksamkeit der Leser auf eine Formel zu richten, welche vielleicht deshalb als nicht unwichtig erscheinen dürfte, weil sie die Entwickelung einer Function nach den in der Mathematik so wichtigen Kugelfunctionen giebt. Obgleich die Entwicklung einer Function nach Kugelfunctionen bereits der Gegenstand von Untersuchungen gewesen ist, so habe ich doch bisher diese Formel noch nicht gefunden. Ich habe nämlich die Entwickelung einer beliebigen ungeraden Potenz von $\frac{1}{\sqrt{1-2ru+r^2}}$ durch Induction gefunden, deren Richtigkeit sich leicht nach der bekannten Methode erweisen läßt. Diese Formel heißt:

$$\frac{1}{(1-2r\mu+r^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}} =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{P^{(n)}}{1.3.5\ldots(2\lambda-1)(1-r^2)^{2\lambda-1}} \sum_{0}^{\lambda-1}{}_{x} (-1)^{x} B_{x}\, r^{(\lambda-1)n+2x} \left\{ \begin{array}{c} (2n+2\lambda-1)(2n+2\lambda-3)\ldots \\ (2n+2x+3)(2n+1)(2n-2\lambda+2x+1) \\ (2n-2\lambda+2x+3)\ldots(2n-2\lambda+3) \end{array} \right\}$$

$B_{\varkappa}^{(\lambda-1)}$ bedeutet den Binomialcoefficienten.

z. B. $$\frac{1}{(1-2r\mu+r^2)^{\frac{13}{2}}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{P^{(n)}}{1.3.5.7.9.11.(1-r^2)^{11}}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} (2n+11)(2n+9)(2n+7)(2n+5)(2n+3)(2n+1)\,r^{n} \\ -\,5(2n+11)(2n+9)(2n+7)(2n+5)(2n+1)(2n-9)\,r^{n+2} \\ +\,10(2n+11)(2n+9)(2n+7)(2n+1)(2n-7)(2n-9)\,r^{n+4} \\ -\,10(2n+11)(2n+9)(2n+1)(2n-5)(2n-7)(2n-9)\,r^{n+6} \\ +\,5(2n+11)(2n+1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)\,r^{n+8} \\ -\,(2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)\,r^{n+10} \end{array} \right\}$$

W. Fuhrmann.