Ueber die Anziehung,

welche ein materieller Punkt von Seiten einer begrenzten geraden Linie erleidet, deren Dichtigkeit von dem einen zum anderen Ende gleichförmig zunimmt.

Das Gesetz der Anziehung sei das Newton'sche. Bezeichnet dann f die Kraft, mit welcher zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung einander anziehen, so ist die Wirkung zweier Massenpunkte m und μ in der Entfernung r:

$$\frac{fm\mu}{r^2}.$$

Die räumlichen rechtwinkeligen Coordinaten von m seien a, b und c, sowie x, y und z die des Punktes μ, dann ist:

$$r = \sqrt{(c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2}.$$

Die Componenten der Anziehung nach den drei Axen aber sind:

$$Z = \frac{fm\mu(c-z)}{r^3}; \quad Y = \frac{fm\mu(b-y)}{r^3}; \quad X = \frac{fm\mu(a-x)}{r^3}.$$

Sind der Punkte m viele, und a_1, b_1, c_1 die Coordinaten von m_1; a_2, b_2, c_2 die von m_2 u. s. w., so ist:

$$r_1 = \sqrt{(c_1-z)^2 + (b_1-y)^2 + (a_1-x)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(c_2-z)^2 + (b_2-y)^2 + (a_2-x)^2}.$$

Die Componenten der auf μ ausgeübten Gesammtanziehung sind dann:

$$Z = f\mu\left[\frac{m_1(c_1-z)}{r_1^{\,3}} + \frac{m_2(c_2-z)}{r_2^{\,3}} + \cdots\right] = f\mu\,\Sigma\frac{m(c-z)}{r^3},$$

$$Y = f\mu\left[\frac{m_1(b_1-y)}{r_1^{\,3}} + \frac{m_2(b_2-y)}{r_2^{\,3}} + \cdots\right] = f\mu\,\Sigma\frac{m(b-y)}{r^3},$$

$$X = f\mu\left[\frac{m_1(a_1-x)}{r_1^{\,3}} + \frac{m_2(a_2-x)}{r_2^{\,3}} + \cdots\right] = f\mu\,\Sigma\frac{m(a-x)}{r^3}.$$

Werden der Massenpunkte m unendlich viele, und bilden sie die Elemente eines zusammenhängenden Körpers, so werden jene Summen zu Integralen, welche sich über den ganzen Körper erstrecken. Dann ist:

$$m = \varrho\, da\, db\, dc,$$

wo a, b und c die Coordinaten eines Punktes des Körpers bezeichnen, und ϱ die in dem Elemente $da\, db\, dc$ herrschende Dichtigkeit. Ferner ist:

$$Z = f\mu\iiint\frac{(c-z)\varrho\, da\, db\, dc}{r^3},$$

$$Y = f\mu\iiint\frac{(b-y)\varrho\, da\, db\, dc}{r^3},$$

$$X = f\mu\iiint\frac{(a-x)\varrho\, da\, db\, dc}{r^3}.$$

In der Folge wollen wir $f = 1$ und $\mu = 1$ setzen. Dann kann man diese nämlichen Ausdrücke aus:

$$\iiint\frac{\varrho\, da\, db\, dc}{r^3} = V$$

durch partielle Differentiation nach z, y und x, den Coordinaten des angezogenen Punktes, erhalten. Diese wichtige Funktion V, nach Gauß *) Potential genannt, besitzt noch viele andere ausgezeichnete Eigenschaften. Eine derselbe ist folgende: Setzt man V gleich einer willkürlichen Constante:

$$V = constans,$$

*) Untersuchungen über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte. 1840.

und sieht in dieser Gleichung die Coordinaten des Punktes μ als veränderlich an, so wird durch dieselbe eine Oberfläche dargestellt. Wo sich nun auch der Punkt μ auf dieser Fläche befinden mag, stets wird die Richtung der auf μ ausgeübten Gesammtanziehung die Fläche normal schneiden, so daß, wenn dieselbe in der Richtung der Normale hinreichenden Widerstand leistet, der Punkt sich überall auf ihr im Gleichgewicht befindet. Man hat sie daher Gleichgewichts- oder Niveaufläche genannt. Offenbar stellt aber obige Gleichung, je nach den verschiedenen Werthen, welche man der Constante beilegt, unendlich viele solcher Flächen dar.

In der Elektrostatik*) wird die Frage aufgeworfen, wie eine bestimmte Menge etwa positiver Elektricität, auf einen isolirten Conductor gebracht, sich an dessen Oberfläche vertheilt, resp. welches die Dichtigkeit in jedem Elemente der Oberfläche ist, wenn Gleichgewicht eingetreten. Für einen Conductor von beliebiger Gestalt ist die Beantwortung dieser Frage sehr schwierig, während an jedem Conductor von der Gestalt einer Niveaufläche sich diese Verhältnisse leicht erörtern lassen.

Hiernach würden wir die Behandlung unserer Aufgabe in drei Theile theilen können:

1) Berechnung und Untersuchung der Componenten der Anziehung.
2) Betrachtung der Niveauflächen.
3) Berechnung der Dichtigkeit der Elektricität auf einem bestimmten Elemente einer Niveaufläche, wenn eine gewisse Menge von Elektricität an der Oberfläche so vertheilt ist, daß das Gleichgewicht Statt findet.

I.

Um die Componenten der Anziehung zu berechnen, welche eine gerade Linie, deren Dichtigkeit von dem einen zum anderen Ende gleichförmig zunimmt, auf einen materiellen Punkt ausübt, machen wir folgende Voraussetzungen: Da die Gerade und der Punkt in einer Ebene liegen, so muß in dieser auch die Richtung der Gesammtanziehung enthalten sein. Diese Ebene nehmen wir zur Ebene der ZX und lassen die Axe der Z mit der anziehenden Linie zusammenfallen; den Ursprung aber legen wir dahin, wo die Dichtigkeit der Linie Null sein würde, wenn dieselbe, gleichförmig an Dichtigkeit abnehmend, bis zu diesem Punkte reichte. Die Coordinaten der Endpunkte unserer Linie seien z_1 und z_2; die Dichtigkeit nehme in der Einheit der Entfernung um die Größe k zu. Bezeichnen wir ferner das Element der Linie mit da, die Coordinaten des angezogenen Punktes μ mit x und z, so sind die Componenten der von dem Elemente da ausgeübten Anziehung:

---

*) *Green.* An essay on the application of mathematical Analysis to the theories of electricity and magnetisme.

Inzwischen ist auch erschienen:

A. Beer: Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik; herausgegeben nach dem Tode des Verfassers von J. Plücker. Braunschweig, 1865.

$$\frac{k(a-z)a\,da}{\sqrt{x^2+(a-z)^2}^3} \text{ und } -\frac{k\,x\,a\,da}{\sqrt{x^2+(a-z)^2}^3},$$

wo diejenige Kraft als positiv gerechnet ist, welche die Coordinaten ihres Angriffspunktes zu vergrößern strebt.

Bezeichnet man die Gesammtmasse der anziehenden Linie mit Q, so ist

$$Q = \int_{z_1}^{z_2} k\,a\,da = k\frac{z_2{}^2 - z_1{}^2}{2}$$

$$k = \frac{2Q}{z_2{}^2 - z_1{}^2}.$$

Für die Componenten der Gesammtanziehung findet man jetzt:

$$Z = k\int_{z_1}^{z_2}\frac{(a-z)a\,da}{\sqrt{x^2+(a-z)^2}^3} = \frac{2Q}{z_2{}^2-z_1{}^2}\left[-\frac{z_2}{r_2}+\frac{z_1}{r_1}+\log\frac{r_2+z_2-z}{r_1+z_1-z}\right],$$

$$X = -kx\int_{z_1}^{z_2}\frac{a\,da}{\sqrt{x^2+(a-z)^2}^3} = \frac{2Q}{z_2{}^2-z_1{}^2}\left[x\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)-\frac{z}{x}\left(\frac{z_2-z}{r_2}-\frac{z_1-z}{r_1}\right)\right].$$

Hier ist

$$r_2 = \sqrt{x^2+(z_2-z)^2} \text{ und } r_1 = \sqrt{x^2+(z_1-z)^2}.$$

Es ist also r_2 die Entfernung des Punktes μ von dem Ende z_2 und r_1 die von dem Ende z_1 der anziehenden Linie.

Dieselben Ausdrücke werden gefunden, wenn man zuerst das Potential der anziehenden Linie berechnet und dann noch z und x partiell derivirt. Man findet:

$$V = k\int_{z_1}^{z_2}\frac{a\,da}{\sqrt{x^2+(a-z)^2}} = \frac{2Q}{z_2{}^2-z_1{}^2}\left[r_2-r_1+z\log\frac{r_2+z_2-z}{r_1+z_1-z}\right]$$

$$\frac{\delta V}{\delta z} = Z \text{ und } \frac{\delta V}{\delta x} = X.$$

Für $\frac{\delta V}{\delta x}$ findet man zunächst:

$$\frac{\delta V}{\delta x} = kx\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{z}{r_2(r_2+z_2-z)} - \frac{z}{r_1(r_1+z_1-z)}\right].$$

Dieser Ausdruck aber ist, wie sich leicht zeigen läßt, mit dem für X gefundenen identisch.

Betrachten wir jetzt zuerst die Z-Componente näher, wobei wir $k = 1$ gesetzt denken. So lange x von Null verschieden ist, kann Z nicht unendlich werden; denn in

$$log\,\frac{r_2+z_2-z}{r_1+z_1-z} = log\,\frac{r_2-(z-z_2)}{r_1-(z-z_1)}$$

kann weder Zähler noch Nenner verschwinden, was in unserm Falle allein ein Unendlichwerden bewirken könnte. Es sind nämlich r_2 und r_1 Hypotenusen in rechtwinkeligen Dreiecken, in welchen (z_2-z) und (z_1-z) als Katheten vorkommen.

Für $x = 0$ muß man drei Fälle unterscheiden:

1) $z < z_1$:

$$Z = -\frac{z_2}{z_2-z} + \frac{z_1}{z_1-z} + log\,\frac{z_2-z}{z_1-z}.$$

Dieser Ausdruck wird für $z = -\infty$ Null und bleibt für wachsende z stets positiv, wie man erkennt, wenn man den Logarithmus in eine Reihe entwickelt; für

$$z = 0 \text{ ist } Z = log\,\frac{z_2}{z_1},$$

$$z = z_1 \text{ ist } Z = +\infty.$$

2) $z > z_2$:

$$Z = -\frac{z_2}{z-z_2} + \frac{z_1}{z-z_1} + log\,\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

Hier verschwindet Z für $z = +\infty$; für fallende Werthe von z bleibt Z negativ, an absoluter Größe zunehmend; für $z = z_2$ wird es unendlich groß. Denn es ist

$$Z = \frac{-z_2 + \frac{z_1(z-z_2)}{z-z_1} + (z-z_2)\,log\,\frac{z-z_1}{z-z_2}}{z-z_2},$$

$$lim\,(z-z_2)\,log\,\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0,$$

wenn nämlich $z = z_2$ wird. Es ist also

$$Z = lim\left[-\frac{z_2}{z-z_2}\right] = -\infty.$$

3) $z_2 > z > z_1$:

$$Z = -\frac{z_2}{z_2 - z} + \frac{z_1}{z - z_1} + log\,\frac{2(z_2 - z)}{0} = +\infty.$$

Für alle Punkte der anziehenden Linie ist also Z unendlich groß und zwar positiv; im Endpunkte z_2 aber ist es sowohl positiv, als auch negativ unendlich, je nachdem man sich diesem Punkte von der einen oder der anderen Seite nähert. Für alle anderen Punkte des Raumes aber hat Z einen endlichen Werth und verschwindet für unendlich ferne Punkte.

Wenn wir jetzt den für die X-Componente gefundenen Ausdruck näher betrachten, nämlich:

$$X = x\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) - \frac{z}{x}\left(\frac{z_2 - z}{r_2} - \frac{z_1 - z}{r_1}\right),$$

so finden wir, daß derselbe stets mit x entgegengesetztes Vorzeichen hat; er verschwindet für $x = 0$, wenn $z < z_1$ oder $z > z_2$ ist.

Wenn aber $x = 0$ und $z_1 < z < z_2$, so wird X unendlich groß. Denn alsdann ist:

$$X = lim\left[x\left(\frac{1}{z_2 - z} - \frac{1}{z - z_1}\right) - \frac{z}{x}\left(\frac{z_2 - z}{z_2 - z} + \frac{z - z_1}{z - z_1}\right)\right] = lim\left[-\frac{2z}{x}\right] = -\infty.$$

Hätte man sich von der Seite der negativen x genähert, so hätte man gefunden: $X = +\infty$. Auch X verschwindet für unendlich ferne Punkte.

Wenn die Dichtigkeit an dem einen Ende der anziehenden Linie verschwindet, also $z_1 = 0$ ist, so sind die Componenten der Anziehung:

$$Z = -\frac{z_2}{r_2} + log\,\frac{r_2 + z_2 - z}{r_1 - z},$$

$$X = x\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) - \frac{z}{x}\left(\frac{z_2 - z}{r_2} + \frac{z}{r_1}\right),$$

wo $r_2 = \sqrt{x^2 + (z_2 - z)^2}$ und $r_1 = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Von diesen Ausdrücken gilt im Allgemeinen das früher Gesagte. Für $x = 0$ sind wieder drei Fälle zu unterscheiden:

1) $z < 0$:

$$Z = -\frac{z_2}{z_2 - z} + log\,\frac{z_2 - z}{-z}.$$

2) $z > z_2$:

$$Z = -\frac{z_2}{z - z_2} + log\,\frac{z}{z - z_2}.$$

3) $0 < z < z_2$:

$$Z = -\frac{z}{z_2 - z} + \log\frac{z_2 - z}{0} = +\infty.$$

Es geht hieraus hervor, daß für Punkte der anziehenden Linie selbst $Z = +\infty$ ist; nur für den Punkt z_2 findet man sowohl Plus als auch Minus Unendlich, je nachdem man sich diesem Punkte von der einen oder der anderen Seite nähert.

Eben so wird X für Punkte der anziehenden Linie unendlich groß; für den Coordinaten-Anfangspunkt aber wird X unbestimmt. Läßt man nämlich den Punkt μ auf einer Linie

$$x = az$$

in den Anfangspunkt rücken, so findet man als Grenzwerth:

$$X = -\sqrt{1 + \frac{1}{a}} - \frac{1}{a}.$$

Für verschiedene a hat dieser Ausdruck verschiedene Werthe. Für $a = 0$ ist $X = -\infty$, für $a = \infty$ $X = -1$. In dem Falle also, wo der Punkt μ sich dem Coordinaten-Anfangspunkte auf einer Curve nähert, welche die Axe der Z in diesem Punkte berührt, wird X unendlich groß.

II.

Unter einer Gleichgewichtsfläche verstehen wir, wie schon gesagt wurde, eine Fläche von der Beschaffenheit, daß sie von der Richtung der Gesammtanziehung, welche ein auf ihr befindlicher Punkt erleidet, normal getroffen wird. Sind also wieder x, y, z die Coordinaten des angezogenen Punktes μ, und X, Y und Z die Componenten der Anziehung, so ist für jeden Punkt der Niveaufläche:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Ist V das Potential einer Masse im Punkte μ, so wird diese Gleichung:

$$\frac{\delta V}{\delta x}dx + \frac{\delta V}{\delta y}dy + \frac{\delta V}{\delta z}dz = 0,$$

woraus als Gleichung der Fläche folgt:

$$V = constans.$$

Für den Fall unserer anziehenden Linie wird also die allgemeine Gleichung der Niveauflächen:

$$V = \frac{2Q}{z_2^{\,2} - z_1^{\,2}} \left[r_2 - r_1 + z \log \frac{r_2 + z_2 - z}{r_1 + z_1 - z} \right] = C, \qquad \text{(I.)}$$

wo die Axen der X und Y in einer zur Z-Axe senkrechten Ebene angenommen sind und mithin:

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z_2 - z)^2},$$
$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z_1 - z)^2}.$$

Hiernach hat V die Gestalt:

$$V = kf(x^2 + y^2, z) = C,$$

welches die allgemeine Gleichung einer Rotationsfläche ist, deren Axe die Axe der Z ist. Um die Gestalt dieser Flächen kennen zu lernen, braucht man nur die Meridian-Curve zu untersuchen, in welcher eine jede derselben etwa von der Ebene der XZ geschnitten wird. Die allgemeine Gleichung dieser Meridian-Curven ist aber die Gleichung (I.), wenn man

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (z_2 - z)^2},$$
$$r_1 = \sqrt{x^2 + (z_1 - z)^2}$$

gesetzt denkt.

Um zunächst die Lage der verschiedenen Curven, welche verschiedenen Werthen von C entsprechen, kennen zu lernen, ist es nöthig, den Verlauf des Potentials zu betrachten, wenn der Punkt μ seine Lage im Raume ändert; dabei wollen wir

$$k = \frac{2Q}{z_2^{\,2} - z_1^{\,2}} = 1$$

setzen.

Für Punkte der anziehenden Linie selbst ist:

$$V = z_2 - 2z + z_1 + z \log \frac{z_2 - z}{0} = \infty.$$

Schreitet man von einem Punkte der anziehenden Linie auf einer Geraden, deren Gleichung

$$x = az + b,$$

fort, so nimmt V stetig ab. Im Unendlichen wird $V = 0$. Denn man findet:

$$V = \mp \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{a^2 + 1}} \pm \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{a^2 + 1}} = 0.$$

Es fällt also für $V = \infty$ die Meridian-Curve ganz mit der anziehenden Linie zusammen; für kleinere Werthe der Constante rückt die zugehörige Curve in immer größere Entfernung; für $V = 0$ liegt sie ganz im Unendlichen.

Um die Durchschnitte der verschiedenen Curven mit der Axe der Z zu finden, setzen wir $x = 0$. Dann sind wieder drei Fälle zu unterscheiden:

1) $z < z_1$:

$$V = z_2 - z_1 + z \log \frac{z_2 - z}{z_1 - z}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $z = -\infty$; für wachsende Werthe von z wächst er stetig;

$$\text{für } z = 0 \text{ ist } V = z_2 - z_1,$$
$$z = z_1 \text{ ist } V = +\infty.$$

2) $z_1 < z < z_2$:

$$V = +\infty.$$

3) $z > z_2$:

$$V = -(z_2 - z_1) - z \log \frac{z_2 - z}{z_1 - z}.$$

Es ist für:

$$z = +\infty \quad V = 0,$$
$$z = z_2 \quad V = +\infty.$$

Diejenige Curve also, welche dem Werthe:

$$V = z_2 - z_1$$

zugehört, geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten; sie schneidet die Axe der Z in einem zweiten Punkte, welcher bestimmt wird durch die Gleichung:

$$z \log \frac{z - z_1}{z - z_2} = 2(z_2 - z_1).$$

Für die Durchschnitte mit der Axe der X hat man:

$$\sqrt{x^2 + z_2^{\,2}} + \sqrt{x^2 + z_1^{\,2}} = C,$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{(z_2^{\,2} - z_1^{\,2})^2 - C^2[2(z_2^{\,2} + z_1^{\,2}) - C^2]}}{2C}.$$

Mit abnehmendem C wächst also x stetig; für $C = z_2 - z_1$ aber wird $x = 0$.

Die Betrachtung des ersten Differential-Quotienten:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{-\frac{z_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1} + \log\frac{r_2 + z_2 - z}{r_1 + z_1 - z}}{x\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) - \frac{z}{x}\left(\frac{z_2 - z}{r_2} - \frac{z_1 - z}{r_1}\right)}$$

zeigt, daß derselbe für $x = 0$ unendlich groß wird. Es schneiden also alle Curven die Axe der Z unter einem rechten Winkel. Für außerhalb der Z-Axe gelegene Punkte behält aber $\frac{dx}{dz}$ stets einen endlichen Werth, da weder der Nenner verschwinden, noch der Zähler unendlich groß werden kann.

Die Berechnung des Krümmungs-Halbmessers führt auf ziemlich complicirte Formeln. Aus denselben ersieht man, daß die Krümmung überall eine endliche ist. Für Punkte der Z-Axe ist, wenn der Krümmungs-Halbmesser mit ϱ bezeichnet wird:

1) $z < z_1$:

$$\varrho = \frac{-\frac{z_2}{z_2 - z} + \frac{z_1}{z_1 - z} + \log\frac{z_2 - z}{z_1 - z}}{-\frac{1}{z_2 - z} + \frac{1}{z_1 - z} - \frac{z}{2(z_2 - z)^2} + \frac{z}{2(z_1 - z)^2}}.$$

2) $z > z_2$:

$$\varrho = \frac{-\frac{z_2}{z - z_2} + \frac{z_1}{z - z_1} - \log\frac{z - z_2}{z - z_1}}{\frac{1}{z - z_2} - \frac{1}{z - z_1} + \frac{z}{2(z - z_2)^2} - \frac{z}{2(z - z_1)^2}}.$$

Diese beiden Ausdrücke behalten endliche Werthe, so lange $z < z_1$ oder $z > z_2$. Wird $z = 0$, so ist:

$$\varrho = \frac{z_2 z_1}{z_2 - z_1} \log\frac{z_2}{z_1}.$$

Die durch die allgemeine Gleichung (I.) dargestellten Curven haben also keine im Unendlichen liegenden Theile; jede derselben liegt symmetrisch zu beiden Seiten der Z-Axe und ist rings geschlossen, auch hat keine mit einer anderen Punkte gemeinsam. Um die Gestalt dieser Curven näher kennen zu lernen, kann man für eine, etwa diejenige, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, eine Anzahl Ordinaten berechnen. Setzt man:

$$z_2 = 10, \quad z_1 = 1, \quad \text{so ist } V = 9.$$

Dann findet man:

zur Abscisse	$z = 0$	die Ordinate	$x = 0,$
" "	$z = 1$	" "	$x = 2{,}3,$
" "	$z = 3$	" "	$x = 3{,}7,$
" "	$z = 5$	" "	$x = 4{,}8,$
" "	$z = 6$	" "	$x = 5,$
" "	$z = 7$	" "	$x = 5{,}1,$
" "	$z = 8$	" "	$x = 5,$
" "	$z = 10$	" "	$x = 4{,}4,$
" "	$z = 12$	" "	$x = 2{,}9,$
" "	$z = 12{,}5$	" "	$x = 1{,}9,$
" "	$z = 13$	" "	$x = 0.$

Wenn man die Curve hiernach construirt, so sieht man, daß sie eine eiförmige Gestalt hat; das spitzere Ende ist nach der Seite der negativen z gerichtet. Die Gestalt derjenigen Curven, welche anderen Werthen der Constante zugehören, ist von der betrachteten nicht wesentlich verschieden.

Fassen wir jetzt den Fall ins Auge, wo die Dichtigkeit an dem einen Ende der anziehenden Linie verschwindet. Dann ist die allgemeine Gleichung der Meridian-Curven:

$$r_2 - r_1 + z \log \frac{r_2 + z_2 - z}{r_1 - z} = C,$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (z_2 - z)^2}, \quad r_1 = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Auch in diesem Falle liegt für $C = 0$ die ganze Curve im Unendlichen; für wachsende Werthe von C rückt sie immer näher an die anziehende Linie heran. Für $x = 0$ sind abermals drei Fälle zu unterscheiden:

1) $z < 0$:

$$V = z_2 + z \log \frac{z_2 - z}{-z}.$$

2) $z > z_2$:

$$V = -z_2 - z \log \frac{z - z_2}{z}.$$

3) $0 < z < z_2$:

$$V = z_2 - 2z + z \log \frac{z_2 - z}{0} = \infty.$$

Nimmt man im Falle 1) $z = -\infty$, so wird $V = 0$; für steigende Werthe von z wächst zugleich V; für $z = 0$ findet man $V = z_2$. Im Falle 2) wird für $z = \infty$ wieder $V = 0$; für fallende z wächst V stetig; für $z = z_2$ wird wieder $V = \infty$. Aus 3) ersieht man, daß für alle Punkte der anziehenden Linie $V = \infty$ wird. Nur im Coordinaten-Anfangspunkte nimmt V, wenn man sich diesem Punkte von der Seite der anziehenden Linie nähert, einen unbestimmten Werth an. In diesem Punkte kann V jeden Werth größer als z_2 haben. Es gehen also auch diejenigen Curven durch den Ursprung, für welche $C > z_2$ ist. Für den ersten Differential-Quotienten findet man folgenden Ausdruck:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{-\frac{z_2}{r_2} + \log\frac{r_2 + z_2 - z}{r_1 - z}}{x\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right] - \frac{z}{x}\left[\frac{z_2 - z}{r_2} + \frac{z}{r_1}\right]},$$

wo $r_2 = \sqrt{x_2 + (z_2 - z)^2}$ und $r_1 = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Für $x = 0$ und $z < 0$ oder $z > z_2$ findet man:

$$\frac{dx}{dz} = \pm\infty.$$

Für Punkte der anziehenden Linie selbst wird:

$$\frac{dx}{dz} = 0.$$

Im Ursprung aber wird $\frac{dx}{dz}$ unbestimmt, da sowohl der Zähler als auch der Nenner unendlich groß wird.

Der Krümmungs-Halbmesser ϱ ist für Punkte der Z-Axe:

1) $z < 0$:

$$\varrho = \frac{-\frac{z_2}{z_2 - z} + \log\frac{z_2 - z}{-z}}{\frac{1}{z_2 - z} + \frac{1}{2z} + \frac{z}{2(z_2 - z)2}}.$$

2) $z > z_2$:

$$\varrho = \frac{-\frac{z_2}{z - z_2} - \log\frac{z - z_2}{z}}{\frac{1}{z - z_2} - \frac{1}{2z} + \frac{z}{2(z - z_2)^2}}.$$

Im Falle 1) bewahrt ϱ stets einen endlichen Werth und verschwindet zugleich mit z. Es ist also für alle Curven, welche durch den Ursprung gehen, der Krümmungs-Halbmesser gleich Null. Im Falle 2) bleibt ϱ endlich, so lange $z > z_2$.

Aus dem Gesagten folgt, daß alle diejenigen Curven, welche Werthen der Constante kleiner als z_2 zugehören, ebenfalls eine eiförmige Gestalt haben, wie in dem allgemeinen Falle.

Berechnet man für diejenige Curve, für welche $C = z_2$ ist, eine Anzahl Ordinaten, so findet man, wenn, wie früher, $z_2 = 10$ angenommen wird:

zur Abscisse	$z = 0$	die Ordinate $x = 0$,
" "	$z = 1$	" " $x = 1{,}8$,
" "	$z = 3$	" " $x = 3{,}4$,
" "	$z = 5$	" " $x = 4{,}25$,
" "	$z = 6$	" " $x = 4{,}45$,
" "	$z = 7$	" " $x = 4{,}5$,
" "	$z = 8$	" " $x = 4{,}45$,
" "	$z = 10$	" " $x = 3{,}8$,
" "	$z = 12$	" " $x = 1{,}8$,
" "	$z = 12{,}6$	" " $x = 0$.

Wenn man diese Curve construirt, so sieht man, daß dieselbe nirgendwo eine Aenderung in der Krümmung erleidet; letztere aber ist im Ursprunge unendlich groß.

Setzen wir ferner $z_2 = 10$ und $V = 20$, so finden wir

zur Abscisse	$z = 10{,}65$	die Ordinate $x = 0$,
" "	$z = 10$	" " $x = 1$,
" "	$z = 9$	" " $x = 1{,}59$,
" "	$z = 8$	" " $x = 1{,}75$,
" "	$z = 7$	" " $x = 1{,}76$,
" "	$z = 6$	" " $x = 1{,}55$,
" "	$z = 5$	" " $x = 1{,}37$,
" "	$z = 4$	" " $x = 1{,}1$,
" "	$z = 3$	" " $x = 0{,}65$,
" "	$z = 2$	" " $x = 0{,}24$,
" "	$z = 1$	" " $x = 0{,}025$.

Diese Curve hat also zwei Wendepunkte; beide Aeste derselben vereinigen sich im Anfangspunkte der Coordinaten und berühren in diesem Punkte die Axe der Z.

III.

Bringt man auf einen isolirten Conduktor von beliebiger Gestalt eine bestimmte Menge etwa positiver Elektricität, so vertheilt sich dieselbe auf der Oberfläche des Conduktors, da sich die Theilchen des elektrischen Fluidums nach dem Newton'schen Gesetze abstoßen. Aus den von Gauß und von Green in den oben genannten Schriften aufgestellten Lehrsätzen folgt nun als nöthige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes, daß das Potential der über die Oberfläche des Conduktors vertheilten Elektricität in allen Punkten der Oberfläche einen und denselben constanten Werth aufweist.

Für einen Conduktor von der Gestalt einer Niveaufläche läßt sich dieser Bedingung leicht genügen. Denn wenn Q die Menge etwa positiver Elektricität bezeichnet, welche auf eine leitende Niveaufläche von der vorhin betrachteten Gestalt gebracht werden soll, so denke man zuerst diese Elektricität so auf eine begrenzte gerade Linie gelegt, daß ihre Dichtigkeit von dem einen Ende der Linie zum anderen gleichförmig zunimmt. Diese so mit Elektricität belegte Linie erzeugt nun das Potential V, und

$$V = constans$$

ist die Gleichung einer der vorhin betrachteten Niveauflächen. Es wird nun ferner in den oben genannten Schriften gezeigt, daß, wenn man diese Niveaufläche mit Elektricität von der Dichtigkeit

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dN}$$

belegt, wo ϱ die Dichtigkeit in dem Elemente dS der Oberfläche und dN das Element der nach außen gerichteten Normale bezeichnet, daß alsdann das Potential dieser über die Oberfläche vertheilten Elektricität für alle Punkte der Fläche constant und gleich dem Potential der elektrischen Linie ist. Die Quantität der Elektricität auf der Niveaufläche ist ferner gleich Q, der Quantität der auf der Linie befindlichen, und kein Theil der Fläche kann unbelegt sein; auch ist diese dem Gleichgewichte entsprechende Vertheilung eine einzige.

Wenn wir nun die früher gemachten Voraussetzungen beibehalten, so ist das Potential der elektrischen Linie:

$$V = Q\left[r_2 - r_1 + z \log \frac{r_2 + z_2 - z}{r_1 + z_1 - z}\right],$$

wo $r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z_2 - z)^2}$ und $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z_1 - z)^2}$.

Ferner ist:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dN} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck die früher für $\frac{\delta V}{\delta x}$, $\frac{\delta V}{\delta y}$ und $\frac{\delta V}{\delta z}$ gefundenen Werthe ein, so sieht man, daß in dem allgemeinen Falle, wo z_1 nicht verschwindet, ϱ für den ganzen Raum einen endlichen Werth behält; doch muß man die Punkte der anziehenden Linie selbst ausnehmen. Im Anfangspunkte der Coordinaten ist:

$$\varrho = \frac{Q}{4\pi} \log \frac{z_2}{z_1}.$$

In dem besondern Falle, in welchem z_1 verschwindet, in welchem also die Dichtigkeit an dem einen Ende der mit Elektricität belegten Linie Null ist, wird ϱ in dem Coordinaten-Anfangspunkte unendlich groß. Es gehen aber durch diesen Punkt alle Niveauflächen, welche Werthen der willkürlichen Constante gleich oder größer als z_2 entsprechen. Auf allen diesen Flächen wird also in dem genannten Punkte die Dichtigkeit unendlich groß, während sie auf allen anderen Niveauflächen, welche kleineren Werthen der Constante zugehören, einen endlichen Werth bewahrt.

H. Konen.