Wenn wir darauf verzichten, das Verhältnis in ganzen Zahlen auszudrücken, und Brüche zu Hilfe nehmen, um gleich das erste Verhältnis recht genau zu bestimmen, so wird die obere von Zeile zu Zeile sich verstärkende Ungenauigkeit so gut wie ganz vermieden. Nehmen wir die ursprüngliche Strecke gleich 1000 an, so werden die Teile 618,033 9887 und 381,966 0113. Alle folgenden erhalten wir durch einfache Subtraktion, und immer stehen drei aufeinander folgende zueinander im Verhältnis der stetigen Proportion. Die Reihe dieser Zahlen ist:

1000,000 0000	55,728 0904	3,105 6272
618,033 9887	34,441 8531	1,919 3671
381,966 0113	21,286 2373	1,186 2601
236,067 9774	13,155 6158	0,733 1070
145,898 0339	8,130 6215	0,453 1531
90,169 9435	5,024 9943	0,279 9539

Runden wir bei den letzten drei Zahlen ab auf:

0,733 0,453 0,28,

so bekommen wir: als Produkt der äußeren Glieder 0,20 524,

als Quadrat des mittleren Gliedes 0,20 540 9.

Wir erkennen: es ist auch in den letzten Zahlen noch eine ziemliche Genauigkeit.

Die stetige Teilung in Geometrie und Stereometrie.

Doch zurück von der abstrakten Welt der Zahlen zu den anschaulichen geometrischen Gebilden! Wir wollen das weitere Vorkommen dieser so besonderen Teilung, die die Alten darum schon als den Schnitt schlechthin „ἡ τομή" bezeichneten, in der Geometrie des näheren erörtern. Da ist ja zunächst die Konstruktion des regelmäßigen Zehnecks und Fünfecks mit Hilfe des Goldenen Schnittes allgemein bekannt. Auch diese Kenntnis reicht zurück bis auf die Alten, Euklid behandelt diese Konstruktion der ein- und umbeschriebenen Vielecke im IV. Buche.

Denke ich mir ein regelmäßiges Zehneck vom Mittelpunkt aus in die 10 Teildreiecke zerlegt, so ist jeder der Winkel an der Spitze M dieses gleichschenkligen Teildreiecks MAB gleich $\frac{360}{10} = 36^0$, jeder der Basiswinkel also $\frac{180-36}{2} = 72^0$. Ziehe ich daher von A die Winkelhalbierende AC, so wird ein neues gleichschenkliges Dreieck ABC abgeschnitten, das wegen der Gleichheit der Winkel dem ganzen ähnlich ist. Da in ähnlichen Dreiecken die gleichliegenden Seiten proportional sind, so erhalte ich infolgedessen die Proportion

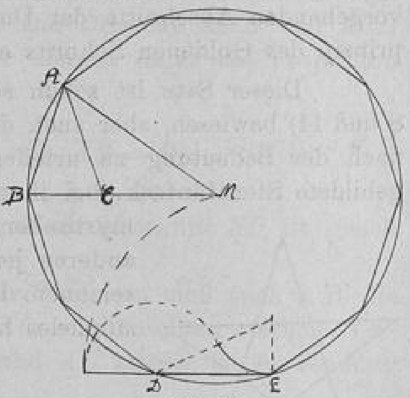

Fig. 10.

$$MB : AB = AB : BC.$$

Da $AB = AC = MC$ ist:

$$MB : MC = MC : BC.$$

C teilt also MB stetig, und der größere Abschnitt dieses Radius ist gleich der Seite des regelmäßigen Zehnecks. Ich kann also einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges Zehneck dadurch einbeschrieben, daß ich den Radius z. B. MB stetig teile und den größeren Abschnitt MC als Sehne bzw. Seite des regelmäßigen Zehnecks zehnmal in dem Kreise abtrage. Wenn mir aber die Seite des regelmäßigen Zehnecks gegeben ist, so kann ich dieses selbst dadurch zeichnen, daß ich zunächst den Radius des Umkreises konstruiere. Dieser Radius muß die Strecke sein, zu der die gegebene Seite der in stetiger Teilung gewonnene größere Abschnitt ist, er wird daher leicht dadurch erhalten, daß ich die Seite selbst stetig teile und sie um ihren größeren Abschnitt verlängere. In der Figur ist dies an der Seite DE ausgeführt.

Wie das Zehneck, so ist dann auch das regelmäßige Fünfeck durch stetige Teilung des Radius dem Kreise einzubeschreiben. Ich brauche nur, um die Seiten des Fünfecks zu erhalten, zwei durch einen Eckpunkt getrennte Eckpunkte des regelmäßigen Zehnecks miteinander zu verbinden.

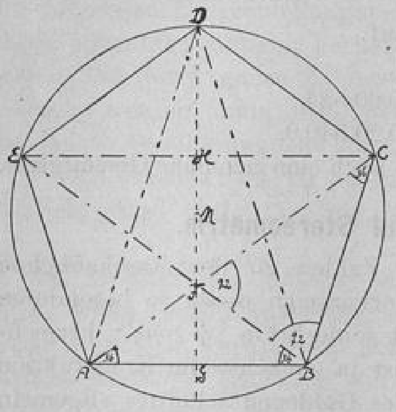

Fig. 11.

Dieses regelmäßige Fünfeck kann man beinahe als Idealfigur für den Goldenen Schnitt bezeichnen. Denn ziehe ich in ihm die Diagonalen oder, wie ich auch sagen kann, verbinde ich die Eckpunkte so, daß ich ein sogenanntes „gekreuztes“ Fünfeck erhalte, so stehen diese Diagonalen (oder auch „sekundäre Seiten“) des Fünfecks zu dessen „primären“ Seiten im Verhältnis der Abschnitte einer stetig geteilten Strecke, und diese Seiten schneiden sich teils untereinander, teils mit den aus ihren Eckpunkten zu ziehenden Durchmessern des umbeschriebenen Kreises dergestalt, daß die daraus hervorgehenden Abschnitte der Diagonalen wie der Halbmesser sämtlich dem Teilungsprinzip des Goldenen Schnitts entsprechen.

Dieser Satz ist schon seinem Hauptinhalte nach bei Euklid (Elemente XIII, 8 und 11) bewiesen, aber auch den Pythagoräern muß er schon bekannt gewesen sein, nach der Bedeutung zu urteilen, die das „Pentagramm“, das aus den Diagonalen gebildete Sternfünfeck, bei ihnen hatte. Und welche Bedeutung diese Figur in der mystischen Mathematik weiter behalten hat, zeigt uns unter anderen jene Stelle des Faust, wo das auf die Türschwelle gezeichnete Pentagramm den als Pudel hineingeschlüpften Mephistopheles hindert, wieder hinauszukommen.

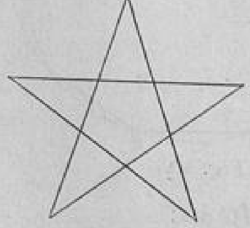

Fig. 12.

Mephistopheles:

Gesteh ich's nur: Daß ich hinausspaziere,
Verbietet mir ein kleines Hindernis,
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle —

Faust:

Das Pentagramma macht dir Pein?
Ei sage mir, du Sohn der Hölle,
Wenn das dich bannt, wie kamst du denn herein?
Wie ward ein solcher Geist betrogen?

Mephistopheles:

Beschaut es recht! es ist nicht gut gezogen;
Der eine Winkel, der nach außen zu,
Ist, wie du siehst, ein wenig offen.

Faust:

Das hat der Zufall gut getroffen!

Welch treffliche Mahnung empfangen wir hier für exaktes Zeichnen, es hätte dem Teufel den Eintritt verwehrt!

Von den oben angedeuteten Sätzen des Fünfecks möchte ich hier nur zwei ausführlich beweisen, da wir sie später zu anderen Zwecken nötig haben. Das ist zunächst der, daß zwei benachbarte Diagonalen sich stetig teilen und der größere Abschnitt der Diagonale gleich der Seite des regelmäßigen Fünfecks ist, und dann, daß auch die Höhe des Fünfecks von der Diagonale stetig geteilt wird. Wir nehmen in unserer Fig. 11 die Diagonale AC, die von der anderen BE in F geschnitten wird. Dann können wir zunächst die Winkelwerte der Dreiecke ABC und ABF bestimmen. Denn der Peripheriewinkel über der Fünfeckssehne ist gleich $\frac{360}{5} : 2$ oder gleich 36^0. Mithin ist

$$\begin{aligned} &< CAB = 36^0 \\ &< FBA = 36^0 \\ &< ACB = 36^0. \end{aligned}$$

Als Außenwinkel ist also $< CFB = 72^0$ und auch für CBF bleibt nach dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck 72^0 übrig. Die Dreiecke AFB und ACB sind also gleichschenklig und einander ähnlich. Wir können daher die Proportion aufstellen:

$$AC : AB = AB : AF$$

oder da auch $AB = BC = CF$ ist:

$$AC : FC = FC : AF.$$

F ist also der stetige Teilpunkt von AC und der größere Abschnitt FC ist gleich der Seite des Fünfecks.

Teilen sich aber sämtliche Diagonalen in dieser Weise, so muß auch z. B. die Höhe DG des Fünfecks in H durch die Diagonale EC in demselben stetigen Verhältnis geteilt werden, denn die Parallelität von EC und AB macht die Anwendnng des Proportionallehrsatzes möglich.

Der Goldene Schnitt setzt uns auch in den Stand, an einer einzigen recht einfachen Figur die Seiten der einfachsten und ursprünglichsten unter den einem Kreise einzubeschreibenden regulären Polygone zu konstruieren. Zeichnen wir nämlich ein Rechteck, dessen kürzere Seite gleich dem größeren Abschnitte der nach stetiger Proportion geteilten längeren Seite ist, und teilen in diesem Rechteck $ABCD$ die Seiten wieder nach dem Goldenen Schnitt in den Punkten E, F, G, H und ziehen durch diese Punkte die Parallelen zu den Seiten, die sich in I schneiden mögen, dann ist, wenn wir AE als Radius betrachten:

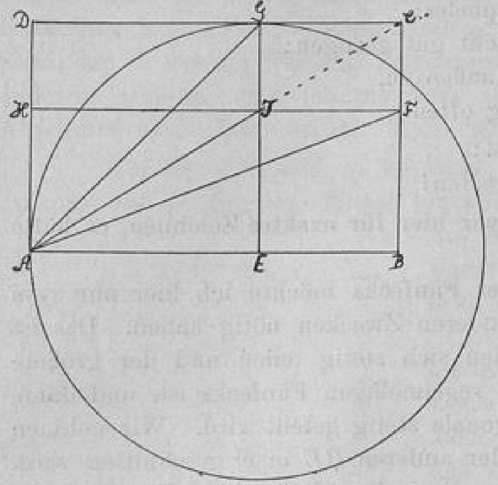

Fig. 13.

1. AF die Seite des regulären Dreiecks,
2. AG „ „ „ „ Vierecks,
3. AI „ „ „ „ Fünfecks,
4. AE „ „ „ „ Sechsecks,
5. BE „ „ „ „ Zehnecks.

Beweis zu 1:

$$\overline{AF}^2 = \left[r + \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2$$

$$= \left(\frac{r}{2}\right)^2 [(\sqrt{5}+1)^2 + (\sqrt{5}-1)^2]$$

$$= \left(\frac{r}{2}\right)^2 . 12$$

$$= 3\,r^2$$

$$AF = r\sqrt{3};$$

zu 2:

$$AG^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2$$

$$AG = r\sqrt{2};$$

zu 3:

$$\overline{AI}^2 = r^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2$$

$$= \frac{r^2}{4}(4 + 6 - 2\sqrt{5}$$

$$AI = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

zu 4:

$$AE = r;$$

zu 5:

BE würde, auf AE abgetragen, AE stetig teilen.

Schließlich sei noch eine Figur gegeben, die sich durch die Fülle stetig geteilter Linien auszeichnet. Man zerlegt ein Quadrat mit der Seite $2a$ in 4 Teilquadrate mit der Seite a, zieht die Diagonalen der Quadrate und Rechtecke und trägt auf den Rechtecksdiagonalen vom Mittelpunkte der Quadratseite eine Strecke gleich der halben Quadratseite ab, z. B. $GI = GD = a$. Diesen Teilpunkt verbindet man mit den Ecken des Quadrates und verlängert die Verbindungslinie bis zum Schnitt mit den Quadratseiten. Dann werden Seiten und Diameter und Diagonalen und Transversalen durch einander in Abschnitte zerlegt, die in ihrem Verhältnis zueinander auf die eine oder andere Weise dem Gesetze des Goldenen Schnittes entsprechen.

Von allen den Fällen seien nur folgende bewiesen:

1. K teilt AB nach dem Goldenen Schnitt,

denn $AG = \sqrt{5\,a^2} = a\sqrt{5}$

und $AI = a\sqrt{5} - a$

$$= a(\sqrt{5}-1) = \frac{2\,a}{2}(\sqrt{5}-1),$$

da nun $\triangle\, AIK \sim GID$ ist, so ist

$$AI : AK = GI : GD$$
$$= 1 : 1$$

folglich auch $AK = AI = \frac{2\,a}{2}(\sqrt{5}-1)$.

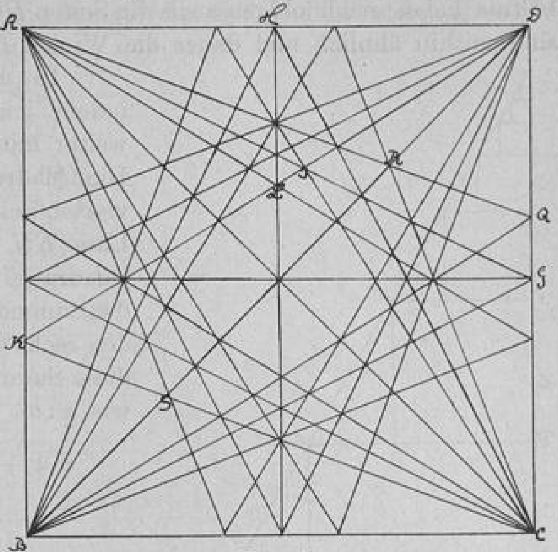

Fig. 14.

2. L ist der stetige Teilpunkt der halben Seite.

Denn nach dem Proportionalsatz verhält sich:

$$HL : HD = AK : AD$$
$$HL = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

3. CK schneide die Diagonale des Quadrates BD in S; dann ist $\triangle\, KBS \sim DCS$; es verhält sich also

$$BS : DS = KB : DC$$
$$= \frac{2\,a}{2}(3-\sqrt{5}) : 2a,$$

d. h. wie der **kleinere** Abschnitt zur ganzen Strecke.

Wenn ich aber auf der Diagonale BD von D aus das gleiche Stück $DR = BS$ abtrage, was ja schon durch die CK symmetrische Linie AQ geschieht, so wird BR in S stetig geteilt, ebenso natürlich DS in R.

Ein Satz, den wir bei unseren späteren stereometrischen Konstruktionen gebrauchen, möge die Anwendung der stetigen Teilung in der Geometrie beschließen. Dieser Satz lautet:

Zeichne ich ein Quadrat $ABCD$ mit der Seite a und verlängere die von A ausgehenden Seiten um b so, daß sie AE und AF in B und D stetig geteilt sind, und zeichne nun mit der Seite b über dem gegebenen Quadrat ein neues Quadrat $DGHF$, so liegt der Eckpunkt C auf der Verbindungslinie EH. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt sofort aus unserem oben bewiesenen Satze, daß der größere Abschnitt einer stetig geteilten Strecke wieder dadurch stetig geteilt wird, daß der kleinere Abschnitt darauf abgetragen wird. Im Dreieck CBE stellt also das Verhältnis $CB : BE = a : b$ das Verhältnis von Major zu Minor einer stetig geteilten Strecke dar und das gleiche Verhältnis haben nach obigen auch die Seiten HG und GC. Die Dreiecke HGC und CBE sind mithin ähnlich und daher die Winkel HCG und CEB einander gleich.

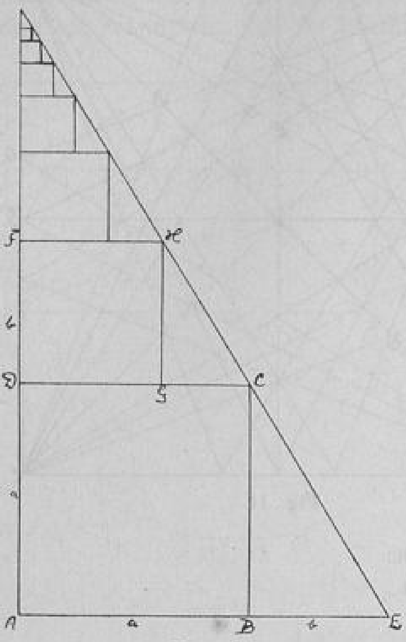

Fig. 15.

In dieser Weise könnte ich nun fortfahren, indem ich immer mit dem Rest, also zunächst weiter mit GC, ein neues Quadrat darüber zeichne. Die Quadrate werden dann immer kleiner und ihre vierten Ecken werden immer in der Verlängerung der Linie EH liegen. Bilde ich die Summe aller dieser Quadratseiten $a, b \ldots$, so muß ich als Grenzwert der Summe eine Strecke erhalten, die der Kathete AW des rechtwinkligen Dreiecks AEW gleich ist. Und diese Summe muß sich zu $(a+b)$ genau so verhalten wie $a : b$. Bilde ich diese Summe, so ist der Quotient

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \text{also}$$

$$s = \frac{a}{1-q}$$

$$= \frac{a}{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$= \frac{2a}{3-\sqrt{5}} = \frac{a}{2}(3+\sqrt{5}).$$

Es ist aber

$$a + b = a + \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$$

$$= \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Also

$$\frac{s}{a+b} = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-1)}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

und ebenso verhält sich auch

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{5}-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Es ist also von der ganzen Strecke AW die Strecke AF der größere Abschnitt und die ganze Strecke kann gewonnen werden, indem ich immer den größeren Abschnitt der letzten stetig geteilten Strecke antrage. Wir finden also durch die Betrachtungen unsere früheren Sätze bestätigt und ergänzt.

Man kann schließlich auch noch die Summe dieser unendlich vielen Quadrate aus den Abschnitten stetiger Teilung bestimmen und erhält so:

Da
$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
so ist
$$q = \frac{b^2}{a^2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
folglich
$$s = \frac{a^2}{1-q} = \frac{a^2}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a^2}{2-3+\sqrt{5}} = \frac{2a^2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2a^2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{a^2}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Man kann also die Gesamtheit aller Quadrate auffassen als ein Quadrat, dessen Inhalt sich zu dem unseres ursprünglichen verhält wie der größere zum kleineren Teil einer stetig geteilten Größe.

Die Anwendung des Goldenen Schnittes in der Stereometrie möge hier nur an der Konstruktion des regelmäßigen Ikosaeders und Dodekaeders gezeigt werden. Auch diese Anwendung war bereits den Mathematikern des Altertums bekannt. Ja dieser Bekanntschaft mit der von uns jetzt „stetig“ genannten Teilung ist es hauptsächlich zu verdanken, wenn es ihnen gelang, die Theorie der regulären Körper schon so früh bis zu jenem Grade der Vollständigkeit auszubilden, von dem uns andeutungsweise die Fragmente des Pythagoräers Philolaos und der Timäos des Plato, in ausführlicher Darstellung aber die Elemente Euklids und die ihnen angehängten Bücher Zeugnis ablegen. Wir geben hier in aller Kürze die Konstruktion des Ikosaeders:

Man zeichnet das Achsenkreuz und nimmt senkrecht zu den Achsen a die Seite des das Ikosaeder begrenzenden gleichseitigen Dreiecks an, die Länge dieser Seite $2b$ macht man gleich dem größeren Abschnitt der nach stetiger Proportion geteilten vollen Achse $2a$.

Beweis. Ich beweise, daß $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck ist
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = AD^2 + CE^2 + DE^2 = b^2 + a^2 + c^2$$

wo c der kleinere Abschnitt der stetig geteilten Strecke a ist, deren größerer b ist.

Wegen des stetigen Verhältnisses ist nun

$$a = \frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

$$c = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$AC^2 = b^2 + \frac{b^2}{4}(6 + 2\sqrt{5}) + \frac{b^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})$$
$$= 4\,b^2$$

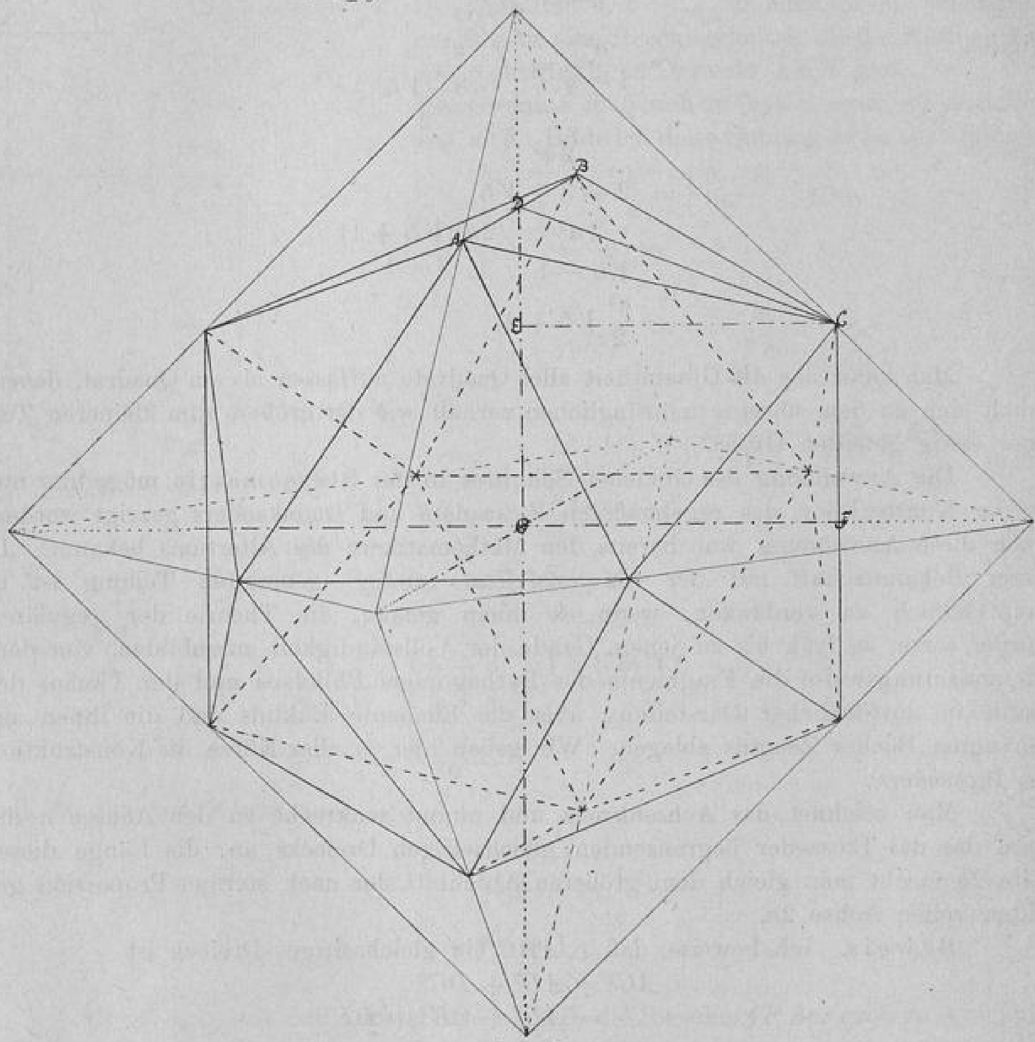

Fig. 16.

und daher ist

$$AC = 2b.$$

Dasselbe läßt sich auf gleichem Wege von allen anderen Seiten beweisen.

Man kann auch von einer anderen Ausgangsfigur mit Hilfe des Goldenen Schnitts zum Ikosaeder kommen. Denn verlängert man die Achsen um den größeren Abschnitt, so gehen die Verbindungslinien der Endpunkte durch die Eckpunkte des Ikosaeders. Daraus folgt: Teilt man die Halbachsen eines Oktaeders nach dem Goldenen Schnitte, und zwar so, daß der größere Teil vom Mittelpunkte des Achsenkreuzes O ausgeht, und zieht man durch die Teilpunkte jeder vollen Achse paarweise

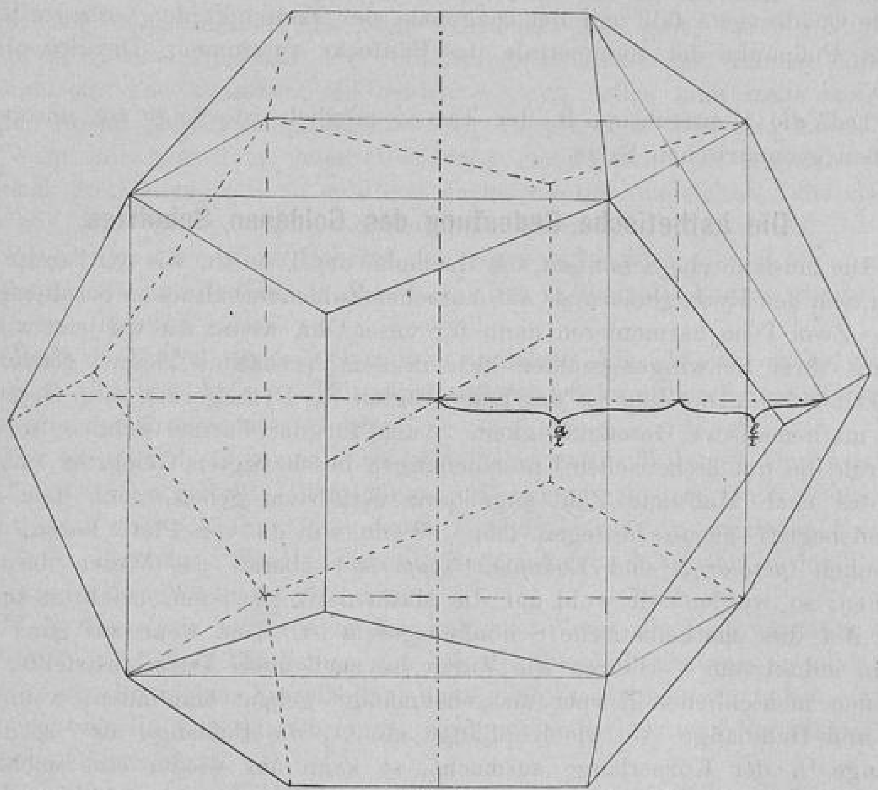

Fig. 17.

Parallele bis zu den Kanten, aber so, daß alle drei Achsenrichtungen zur Geltung kommen, so werden die Kanten in den Punkten eines Ikosaeders getroffen. Das Oktaeder wird abgestumpft, von jeder Abstumpfungsfläche aber wird nur die Hälfte der Ecken benutzt.

Auch die Konstruktion des regelmäßigen Dodekaeders beruht auf den Sätzen der stetigen Teilung. Das Dodekaeder wird von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt. Man zeichne nun einen Würfel, dessen Kante gleich der Diagonale des regelmäßigen Fünfecks ist. Im Würfel zeichne man das Achsenkreuz und verlängere jede Halbachse, die wir wieder, als halbe Würfelkante, gleich $\frac{a}{2}$ annehmen wollen, um ihren durch stetige Teilung gewonnenen größeren Abschnitt $\frac{b}{2}$. Dieser Teil ist ja dann, nach dem oben bewiesenen Satze vom regelmäßigen Fünfeck, gleich der halben Seite des das Dodekaeder begrenzenden regelmäßigen Fünfecks. Verbindet man nun den so erhaltenen Endpunkt einer Achse mit dem zugehörigen Halbierungspunkt einer Quadratseite, so ist durch diese Verbindungslinie und die Quadratseite die Ebene bestimmt, in die man die begrenzende Seitenfläche des Dodekaeders zu legen hat. Die Quadratseite fällt mit der Diagonale, der Endpunkt der vorliegenden Achse mit dem Fußpunkt der Symmetrale des Fünfecks zusammen. Die Seitenlänge ist gleich b.

Daß die Konstruktion in der Tat so möglich ist, folgt aus unserem oben bewiesenen geometrischen Satze.

Die ästhetische Bedeutung des Goldenen Schnittes.

Die musikalische Schönheit, die Harmonie der Töne ist, wie wir bereits oben erwähnten, von den Pythagoräern als auf einfachen Zahlenverhältnissen beruhend erkannt worden. Zwei Töne harmonieren dann für unser Ohr, wenn, wie wir jetzt wissen, das Verhältnis ihrer Schwingungszahlen sich in dem Verhältnis kleiner ganzer Zahlen ausdrücken läßt. „Die Zahl ist das Sein“ sagten die Pythagoräer, alles Gesetzmäßige ist eine mathematische Gesetzmäßigkeit. Auch für das Formal-Schöne, so glaubten schon früh die mit ästhetischen Untersuchungen beschäftigten Gelehrten, muß es ein bestimmtes nach Maß und Zahl angebbares Kriterium geben, nach dem sich der Schönheitsbegriff genau festlegen läßt. Wenn wir da von Plato hören, daß Abgemessenheit (*μετριότης*) und Ebenmaß (*ξυμμετρία*) überall das Wesen des Schönen ausmachen, so werden wir wohl auf die Mathematik gewiesen, erfahren aber nicht, welcher Art dies mathematische Schönheitsgesetz ist. Und wenn auf ganz anderem Wege, in induktivem Verfahren wie Vitruv, so auch unser Dürer feststellte, daß wir dann einen menschlichen Körper als „ebenmäßig“ gebaut empfinden, wenn die Gesichts- und Handlänge $^1/_{10}$, die Kopflänge als $^1/_8$, die Fußlänge als $^1/_6$, die Ellenbogenlänge $^1/_4$ der Körperlänge ausmacht, so kann uns wieder eine solche mathematische Präzision des Schönen nicht befriedigen. Wir vermissen hierin ein inneres einheitliches Gesetz, nach dem etwa ein Maß aus dem anderen hervorginge, alle Zahlenverhältnisse sind einzeln gefunden als Abstraktion einer Fülle von Abmessungen. Da hat nun ein Mathematiker aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts, Adolph Zeising (* 1810 zu Ballenstedt, † 1876 zu München), in einer Fülle von Schriften darzutun sich bemüht, daß die Teilung einer Strecke dann den befriedigendsten Eindruck auf unser Auge macht, wenn sie stetig geteilt ist. Und er verallgemeinerte, daß jeder irgendwie in zwei Teile gespaltene Gegenstand dann dem ästhetischen Prinzip unterliege, wenn das Ganze zum größeren Teile wie dieser zum kleineren sich verhalte.