Die stetige Teilung.

Ist mir die Aufgabe gestellt, eine Strecke in zwei Teile zu teilen, so muß ich, um die Aufgabe zu lösen, wissen, in welchem Verhältnis die Teile zur ganzen Strecke oder die Teile zu einander stehen sollen. Von diesen Teilungen nimmt selbstverständlich die Halbierung, von den Teilungspunkten der Mittelpunkt eine bevorzugte Stellung ein. Der naive Verstand des Kindes identifiziert sogar, sehr zum Leidwesen des mathematisch geschulten Lehrers, häufig Halbieren und Teilen, wie er sich unter einem Viereck auch immer gleich ein Quadrat vorstellt. Ja manchem logisch denkenden Kopf noch sind zwei „ungleiche Hälften" nicht sehr rätselhaft. Abgesehen von dieser Halbierung gibt es natürlich unendlich viele Möglichkeiten, eine Strecke zu teilen. Das folgt einerseits aus der geometrischen Vorstellung, denn eine noch so kleine Strecke enthält doch stets unendlich viele Punkte, die Anzahl der Möglichkeiten für die Lage des Teilungspunktes ist also unbegrenzt groß; andrerseits kann ich mir das Verhältnis der Teile im Verhältnis zweier Zahlengrößen ausdrücken und habe auch so eine nie erschöpfte Mannigfaltigkeit. Im Verhältnis von Zahlen, am bequemsten von ganzen Zahlen, stellen wir uns auch meistens die Teilung einer Strecke vor. Umgekehrt können wir, wenn das Zahlenverhältnis gegeben ist, leicht mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre die Teilung ausführen, so sei z. B. AB in C im Verhältnis $2:5$ geteilt. Der so gefundene Punkt C ist jedoch nicht der einzige, für den sich die Proportion der Strecke

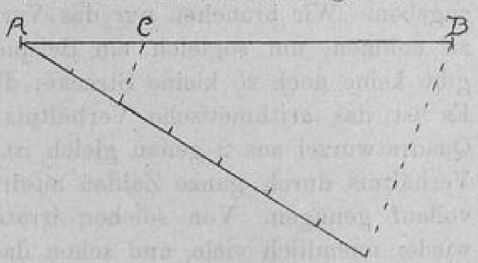

Fig. 1.

$$CA:CB = 2:5$$

aufstellen läßt. Es gibt noch eine zweite Lage des Punktes C, bei der auch das Verhältnis der Abstände von den gegebenen Punkten A und B den vorgeschriebenen Wert annimmt. Allerdings liegt dann C nicht wie oben auf der Strecke selbst, sondern auf der Verlängerung. Die Konstruktion beider Punkte C kann ebenfalls mit Hilfe des Proportionallehrsatzes leicht ausgeführt werden: auf zwei durch A und B gezogenen Parallelen sind Einheitsstrecken in der dem Verhältnis entsprechenden Anzahl aufzutragen (siehe Fig. 2). Auch der Punkt außerhalb der Strecke kann als „äußerer" Teilpunkt der Strecke angesehen werden; nicht die absolute, sondern die algebraische Summe der Teile gibt die gegebene Strecke. Wir werden bei unseren mathematischen Betrachtungen immer auf diesen zweiten Teilpunkt geführt werden, während ihm naturgemäß in der Praxis oft keine Bedeutung zukommt.

Da unser Zahlensystem ein dekadisches ist, so ist die Zehntelteilung für uns von besonderer Bedeutung. Der zehnmillionste Teil der Strecke, die die Länge des Erdquadranten hat, sollte nach der damaligen Messung genau das Meter sein, und auf unseren Metermaßstäben haben wir im Zentimeter diese Zehntelteilung. Da die alten Babylonier die 12 als die Grundzahl ihres Zahlensystems hatten und auf sie unsere ganze astronomische und mathematische Weisheit zurückgeht, so ist diese Zwölferteilung, wie bei der Sonnenbahn die Teilung in die 12 Tierkreise, der die 12 Monate entsprechen, wie die Teilung des Umkreises in 360 Teile, auch noch bei uns in Geltung. Aber es sind nicht Strecken, die wir in diesem Verhältnis geteilt denken. Denn Rute, Fuß und Zoll, die im Zwölferverhältnis stehen, gehören bei uns schon der Vergangenheit an.

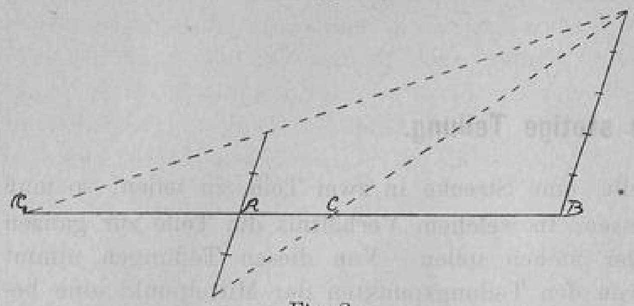

Fig. 2.

Wenn es auch für ein so in ganzen Zahlen ausgedrücktes Verhältnis zweier Strecken unendlich viele Möglichkeiten gibt, so kommen wir doch damit nicht aus, wenn es gilt, das Verhältnis zweier geometrisch konstruierter Strecken in Zahlen anzugeben. Wir brauchen nur das Verhältnis von Diagonale und Seite eines Quadrates zu nehmen, um sogleich ein Beispiel für diesen „irrationalen" Fall zu haben. Es gibt keine noch so kleine Strecke, die ganzzahlig in Diagonale und Seite aufginge. Es ist das arithmetische Verhältnis $\sqrt{2}:1$, und wir wissen, daß kein Bruch der Quadratwurzel aus 2 genau gleich ist. Mit Annäherung können wir aber auch dieses Verhältnis durch ganze Zahlen ausdrücken, und häufig wird uns dies für die Praxis vollauf genügen. Von solchen irrationalen Verhältnissen haben wir natürlich auch wieder unendlich viele, und schon das obige Beispiel zeigt, daß schon die einfachsten geometrischen Konstruktionen diese irrationalen Beziehungen bringen. Daher wird man gut tun, den Ausdruck des Streckenverhältnisses durch ein Zahlenverhältnis als das meist bequemste, aber nicht als das natürliche anzusehen. Zwar lehrt uns die Akustik, daß, wenn wir die Saite eines Monochords im Verhältnis der kleinsten ganzen Zahlen abteilen, wir so die mit dem Grundton der Saite harmonierenden Obertöne bekommen. Aber diese schon von den Pythagoräern erkannte grundlegende Bedeutung der Zahl für die Harmonie darf uns nicht veranlassen, ihr für die Teilung der Strecke die Vorherrschaft zuzuerkennen. Beim Monochord teilen wir zwar die sich als Strecke darbietende gespannte Saite, aber wir tun es nur, um andere Schwingungszahlen der Töne zu erhalten. Die Teilung der Strecke ist hier also nur ein Mittel zum Zweck, die Schwingungen selbst werden als zueinander harmonisch oder nicht harmonisch vom Ohr aufgenommen. Bei der Strecke brauchen, ja dürfen wir nicht das einfachste Streckenverhältnis mit dem einfachsten Zahlenverhältnis identifizieren. Wollen wir den geometrisch natürlichsten Teilpunkt haben, so müssen wir von jeder doch stets vorhandenen Willkür eines Zahlenverhältnisses absehen und den Punkt wählen, der zwischen den so entstandenen Strecken selbst das richtige Verhältnis herstellt. Wir haben aber die ganze Strecke und ihre Teile. Oben sahen wir, daß das Halbieren eine wichtige Teilung ist: dadurch ist das Verhältnis der Teile zueinander das idealste, sie sind einander gleich. Aber gerade der Mittelpunkt gibt den Fall, daß beide Teile zur ganzen Strecke möglichst große Verschiedenheit zeigen. Die Teilung aber kann mit Recht als die natürliche bezeichnet werden, bei

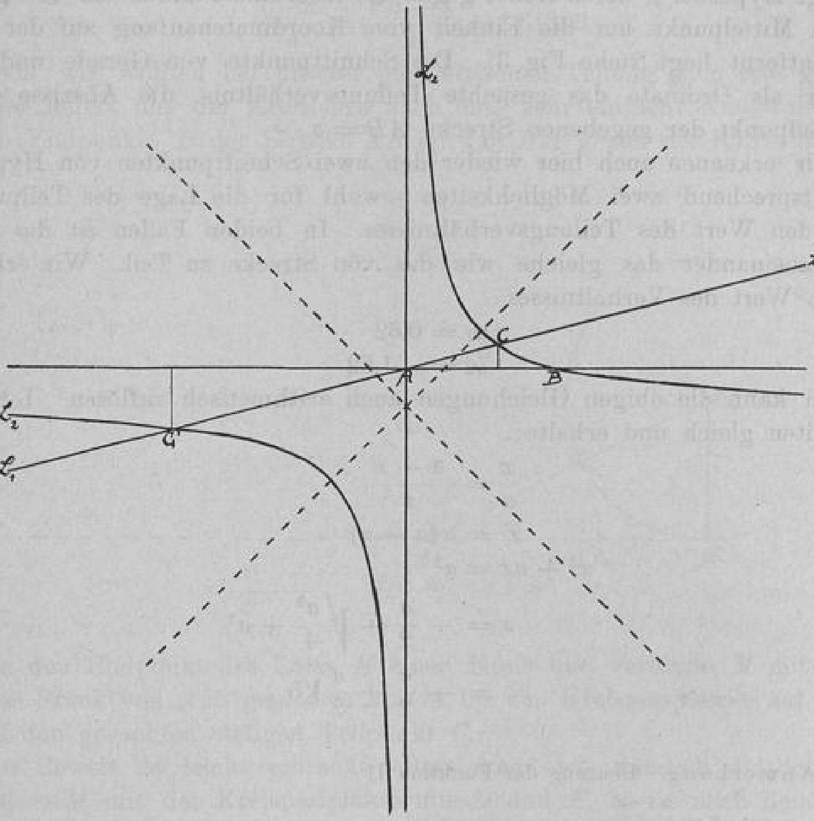

Fig. 3.

der das Verhältnis eines Teiles zum Ganzen das gleiche ist wie das Verhältnis der Teile zueinander. Da aber ein Teil stets kleiner ist als die ganze Strecke, so kann ich diese Teilung genauer bestimmen: Bei ihr verhält sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt wie der größere Abschnitt zum kleineren. Es ist die sogenannte „stetige Teilung", die Teile bilden zusammen mit der Strecke selbst eine stetige Proportion. Bezeichne ich den größeren Teil der Strecke a mit x, so ist der kleinere Teil $(a—x)$, und es steht also a zu x genau in dem gleichen Verhältnis wie x zu $(a—x)$. Welche Teilung genügt dieser Bedingung?

Ich stelle mir sowohl das Verhältnis des größeren Teiles zum Ganzen, also die Funktion:

$$\text{I)}\; y = x : a$$

als auch das Verhältnis der Teile zueinander, d. i. die Funktion:

$$\text{II)}\; y = (a - x) : x$$

graphisch dar. Dann bekomme ich graphisch für die Funktion I eine durch den Nullpunkt meines Koordinatensystems gehende Gerade, für die Funktion II eine gleichseitige Hyperbel*), deren Achse gegen das Koordinatenkreuz um 45^0 gedreht ist und deren Mittelpunkt um die Einheit vom Koordinatenanfang auf der negativen y-Achse entfernt liegt (siehe Fig. 3). Die Schnittpunkte von Gerade und Hyperbel liefern mir als Ordinate das gesuchte Teilungsverhältnis, die Abszisse selbst den stetigen Teilpunkt der gegebenen Strecke $AB = a$.

Wir erkennen auch hier wieder den zwei Schnittpunkten von Hyperbel und Gerade entsprechend zwei Möglichkeiten sowohl für die Lage des Teilpunktes wie auch für den Wert des Teilungsverhältnisses. In beiden Fällen ist das Verhältnis der Teile zueinander das gleiche wie das von Strecke zu Teil. Wir erkennen als ungefähren Wert des Verhältnisses

$$y_1 = 0{,}62$$
$$y_2 = -1{,}62$$

Ich kann die obigen Gleichungen auch arithmetisch auflösen. Ich setze die rechten Seiten gleich und erhalte:

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$$
$$x^2 = a(a - x)$$
$$x^2 + ax = a^2$$
$$x = -\frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$
$$= -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

*) Anmerkung. Deutung der Funktion II:

$$y = \frac{a - x}{x}$$
$$xy = a - x$$
$$x = \xi \cos\varphi - \eta \cdot \sin\varphi$$
$$y = \xi \sin\varphi + \eta \cdot \cos\varphi$$
$$\xi^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \eta^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \xi\eta \cos 2\varphi + \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi = a$$
$$\cos 2\varphi = 0$$
$$\varphi = 45^0$$
$$\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\xi^2 - \eta^2 + \xi \cdot \sqrt{2} - \eta \cdot \sqrt{2} = 2a$$
$$\left(\xi + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\eta + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 2a + 1.$$

$$x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$x_2 = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Wir bekommen hier also das Verhältnis genau

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}61803$$

oder

$$\frac{-x}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1{,}61803.$$

Doch wir wollten bei unserer geometrischen Teilung auch rein geometrisch bleiben. Da liefert uns die Kreislehre auch eine sehr einfache Konstruktion. Man errichte im Endpunkte B der Strecke AB ein Lot BM gleich der Hälfte der Strecke,

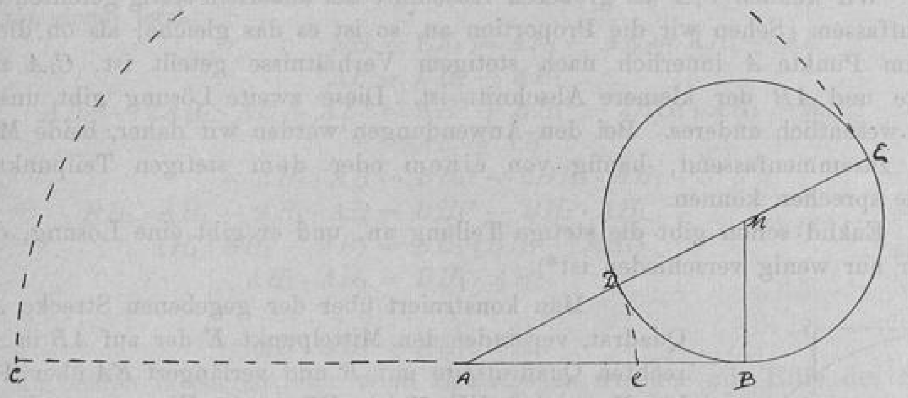

Fig. 4.

schlage um den Endpunkt des Lotes M einen Kreis und verbinde M mit A. Trage ich nun das Stück von AM, gemessen von A bis zur Kreisperipherie, auf AB ab, so erhalte ich den gesuchten stetigen Teilpunkt C.

Der Beweis ist leicht erbracht. Bezeichnen wir nämlich die Schnittpunkte der Zentrale AM mit der Kreisperipherie mit D und E, so ist nach dem Sekantensatz die Tangente mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Sekante

$$AE : AB = AB : AD.$$

Wenden wir auf diese Proportion korrespondierende Subtraktion an, so erhalten wir

$$(AE - AB) : AB = (AB - AD) : AD.$$

Es ist aber $AB = DE$ nach unserer Konstruktion, also

$$AE - AB = AD.$$

Berücksichtigen wir ferner, daß $AD = AC$ ist, so erhalten wir

$$AC : AB = BC : AC$$

oder nach Vertauschung der Glieder:

$$AB : AC = AC : BC.$$

Auch die arithmetisch gefundene zweite Lösung des äußeren Teilpunktes können wir auf diese Weise erhalten, indem wir nämlich mit dem größeren Sekantenabschnitt AE um A den Kreis schlagen, der die Verlängerung von AB über A hinaus in C_1 trifft. Auch hier ist jetzt C_1A die mittlere Proportionale zwischen C_1B und AB. Denn wenn wir wieder vom Sekantensatz ausgehen, so haben wir wie oben

$$AE : AB = AB : AD.$$

Auf diese Proportion wenden wir jetzt die korrespondierende Addition an und bekommen

$$(AE + AB) : AE = (AB + AD) : AB$$

Da $AE + AB = C_1B$

und $AB + AD = C_1A$ nach Konstruktion,

so folgt: $C_1B : C_1A = C_1A : AB.$

Wir können C_1A als größeren Abschnitt der äußerlich stetig geteilten Strecke AB auffassen. Sehen wir die Proportion an, so ist es das gleiche, als ob die ganze C_1B im Punkte A innerlich nach stetigem Verhältnisse geteilt ist, C_1A also der größere und AB der kleinere Abschnitt ist. Diese zweite Lösung gibt uns daher nichts wesentlich anderes. Bei den Anwendungen werden wir daher, beide Möglichkeiten zusammenfassend, häufig von einem oder dem stetigen Teilpunkt einer Strecke sprechen können.

Euklid schon gibt die stetige Teilung an, und er gibt eine Lösung, die von unserer nur wenig verschieden ist*).

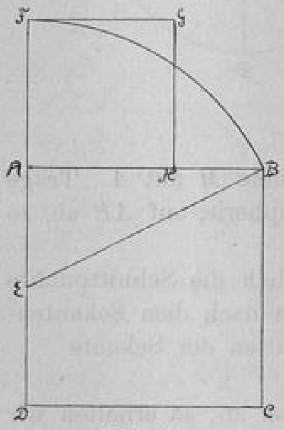

Fig. 5.

Man konstruiert über der gegebenen Strecke AB ein Quadrat, verbindet den Mittelpunkt E der auf AB in A senkrechten Quadratseite mit B und verlängert EA über A hinaus bis F, so daß EF gleich EB wird. Wenn man dann über AF das Quadrat errichtet, so erhalten wir in H den gesuchten Teilpunkt.

Beweis: Im $\Delta\ ABE$ ist nach Pythagoras

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

es ist nun $EB = EF = AE + AH$

und $AB = AH + BH$

folglich erhalten wir

$$AE^2 + 2AE \cdot AH + AH^2 = AE^2 + 2AH \cdot BH + AH^2 + BH^2$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten AE^2 und AH^2, und setzen $2AE = AB$, so behalten wir:

$$AB \cdot AH = 2AH \cdot BH + BH^2$$

oder:

$$AB \cdot AH - AH \cdot BH = AH \cdot BH + BH^2$$
$$AH\,(AB - BH) = BH\,(AH + BH)$$
$$AH \cdot AH = BH \cdot AB$$

---

*) 11. Satz der Elemente. Wir geben die Figur nach Zeising, Der Goldene Schnitt.

wenn wir die Gleichung als Proportion schreiben, so erhalten wir die uns gebräuchliche Form:

$$AB : AH = AH : BH.$$

Auch die Konstruktion des Euklid läßt sich auf den äußeren Teilpunkt erweitern. Ich verlängere nämlich AD über D hinaus, so daß EF_1 gleich EB wird und errichte über AF_1 das Quadrat. Dieses liefert uns durch seinen Eckpunkt in der Verlängerung von AB den Punkt H_1, der AB äußerlich nach dem Goldenen Schnitt teilt. Der Beweis geht ebenfalls vom rechtwinkligen Dreieck ABE aus

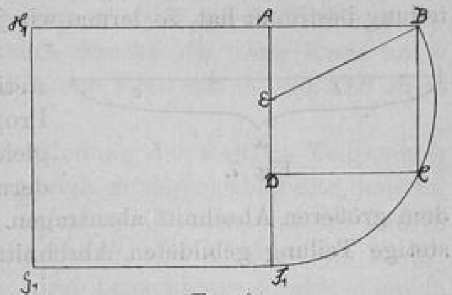

Fig. 6.

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

wir setzen darin jetzt

$$EB = EF_1 = AF_1 - AE = AH_1 - AE$$
$$AB = BH_1 - AH_1$$
$$AH_1{}^2 - 2AH_1 \cdot AE + AE^2 = AE^2 + BH_1{}^2 - 2BH_1 \cdot AH_1 + AH_1{}^2$$
$$2AE = AB$$
$$-AH_1 \cdot AB = BH_1{}^2 - 2BH_1 \cdot AH_1$$
$$BH_1 \cdot AH_1 - AH_1 \cdot AB = BH_1{}^2 - BH_1 \cdot AH_1$$
$$AH_1 (BH_1 - AB) = BH_1 (BH_1 - AH_1)$$
$$AH_1 \cdot AH_1 = BH_1 \cdot AB$$

oder:

$$AB : AH_1 = AH_1 : BH_1.$$

In beiden Lösungen, der alten Euklidschen wie der mit Hilfe des Kreises, mußten wir ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, dessen größere Kathete gleich der gegebenen Strecke und dessen kleinere Kathete gleich der Hälfte der gegebenen Strecke ist. Dann ist die Differenz der Hypotenuse und der kürzeren Kathete gleich dem gesuchten größeren Abschnitt der in stetiger Proportion geteilten Strecke. Das gibt arithmetisch, wenn wir die gegebene Strecke gleich 1 setzen, für die Hypotenuse die Länge

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\, 2{,}236067$$
$$= 1{,}118033.$$

Daher erhalten wir, wenn wir den größeren Abschnitt der stetig geteilten Strecke genau wie oben x nennen:

$$x = 1{,}118033 - 0{,}500$$
$$= 0{,}618033$$

und für den kleineren Abschnitt

$$a - x = 0{,}381966.$$

Von zwei Strecken aber werden wir sagen können, daß sie zu einander im stetigen Verhältnis stehen, wenn sie sich verhalten ungefähr wie 618 : 382

oder wie 1,618 : 1.

Hatten wir oben unsere Teilung als die für die Strecke „natürliche“ kennen gelernt, insofern bei ihr das Verhältnis der Teile zueinander dasselbe ist wie das des größeren Teiles zum Ganzen und weil kein willkürlich gesetztes Zahlenverhältnis die Einteilung bestimmt hat, so lernen wir jetzt erst den Namen „stetige“ Teilung verstehen*).

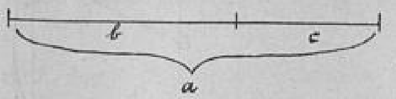

Fig. 7.

Gilt es nämlich, den größeren Abschnitt einer stetig geteilten Strecke wiederum nach stetiger Proportion zu teilen, so hat man nicht nötig, die gleiche Konstruktion von neuem vorzunehmen, sondern man braucht nur den kleineren Abschnitt auf dem größeren Abschnitt abzutragen. Nenne ich nämlich die Strecke a und die durch stetige Teilung gebildeten Abschnitte b und c, so gilt ja

$$a : b = b : c.$$

Wenden wir hierauf korrespondierende Subtraktion an, so erhalten wir

$$b : (a - b) = c : (b - c).$$

Da $a - b = c$ ist:

$$b : c = c : (b - c).$$

Es wird also damit der kleinere Abschnitt c für den größeren Abschnitt b, was der größere Abschnitt für die ganze Strecke a war. Daher können wir auch die ganze Strecke wieder als größeren Abschnitt einer stetig geteilten Strecke auffassen, deren Länge $(a + b)$ ist. Oder wenn wir wie oben beweisen und auf die Proportion

$$a : b = b : c$$

jetzt korrespondierende Addition anwenden, so erhalten wir:

$$(a + b) : a = (b + c) : b,$$

Da $b + c = a$ ist, erhalten wir:

$$(a + b) : a = a : b.$$

Anm. Wir haben ja schon bei unserer Konstruktion der stetigen Teilung eigentlich diesen Satz angewandt. Denn die zunächst stetig geteilte Strecke war die Zentrale, und wir trugen auf dem größeren Abschnitte, Durchmesser $= AB$: den kleineren Abschnitt ab und bewiesen durch korrespondierende Subtraktion, daß dann auch AB stetig geteilt ist.

Dieses Verfahren kann ich nun nach oben und unten „stetig“ fortsetzen. Habe ich einmal die Teilung ausgeführt, so kann ich durch einfaches Ab- und An-

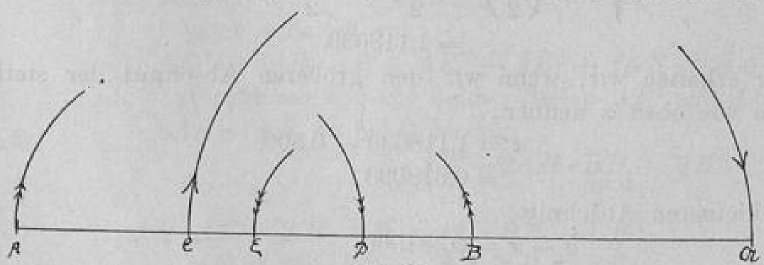

Fig. 8.

*) Diese Bezeichnung (nach Schwab) zuerst in einer deutschen Euklidausgabe von Lorenz aus dem Jahre 1781.

tragen stets neue „stetig geteilte" Strecken bekommen. Jede so geteilte Gerade kann aufgefaßt werden als ein Glied einer unendlich langen dadurch eindeutig bestimmten Kette. In Fig. 8 ist diese Konstruktion einige Male ausgeführt. AB ist die ursprüngliche Strecke, C ihr stetiger Teilpunkt. Dann gewinnen wir $\mathfrak{A}$ durch Verlängerung von AB um BC und dadurch die in B stetig geteilte Strecke $A\mathfrak{A}$. Der Kreis um C mit CA liefert in D den stetigen Teilpunkt von BC, der Kreis um D mit DB in E den stetigen Teilpunkt von DC.

Wir können auch an der Figur, die zur Auffindung des stetigen Teilpunktes die gebräuchlichste ist, diese Konstruktion für den jeweils größeren Abschnitt dauernd fortsetzen. Alle Kreismittelpunkte M liegen dann auf einer Geraden und die Radien sind als die in den Teilpunkten errichteten Lote bestimmt. So erhalten wir in geordneter Aufeinanderfolge stetig geteilte Strecken, drei benachbarte Punkte nämlich begrenzen stetig geteilte Strecken.

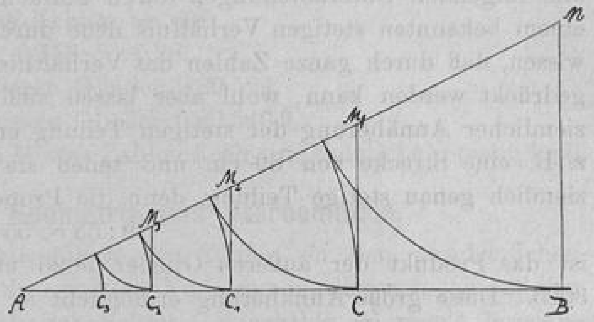

Fig. 9.

Man könnte sich nun fragen, ist die stetige Teilung, für die wir ja oben das Verhältnis der Teile $(1 + \sqrt{5}) : 2$ bestimmt haben, die einzige, bei der eine solche additive bzw. subtraktive Fortsetzung möglich ist?

Stelle ich mir daher allgemein folgende Aufgabe:

Eine Strecke a sei im Verhältnis $m : n$ geteilt. Welchen Wert muß dieses Verhältnis haben, damit, wenn ich den kleineren Abschnitt auf den größeren abtrage, dieser in dem gleichen Verhältnis geteilt wird?

Die Abschnitte der Strecke AB sind

$$AC = \frac{m}{m+n} \cdot a$$

und

$$BC = \frac{n}{m+n} \cdot a.$$

Teilt nun D den größeren Abschnitt wieder im Verhältnis $m : n$, so sind die Abschnitte:

$$CD = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot a$$

$$AD = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot a.$$

Der größere Abschnitt der Teilstrecke CD soll nach unserer obigen Annahme gleich dem kleineren Abschnitt der ganzen Strecke sein. Wir erhalten folglich die Gleichung:

$$\left(\frac{m}{m+n}\right)^2 \cdot a = \frac{n}{m+n} \cdot a$$

oder

$$m^2 = (m + n) \cdot n$$
$$m^2 = mn + n^2$$
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 - \left(\frac{m}{n}\right) - 1 = 0$$
$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$
$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Das ist aber das Teilungsverhältnis des Goldenen Schnittes.

Übersetze ich nun die Fortsetzbarkeit der stetigen Teilung durch Abtragen und Antragen aus dem Geometrischen ins Arithmetische, so kann ich sagen, sobald ich nur erst das Verhältnis der Teile des primitiven Ganzen gefunden habe, ich alle folgenden Unterabteilungen durch einfache Subtraktion ermitteln oder auch aus einem bekannten stetigen Verhältnis neue durch einfache Addition bilden kann. Wir wissen, daß durch ganze Zahlen das Verhältnis der stetigen Teilung nicht genau ausgedrückt werden kann, wohl aber lassen sich auch ganze Zahlen angeben, die mit ziemlicher Annäherung der stetigen Teilung entsprechend sich verhalten. Haben wir z. B. eine Strecke von 89 cm und teilen sie in 55 und 34 cm ein, so haben wir ziemlich genau stetige Teilung, denn die Proportion*)

$$89 : 55 \sim 55 : 34$$

ist das Produkt der äußeren Glieder 3026 und das Quadrat des mittleren Gliedes 3025. Diese große Annäherung ermöglicht es uns, durch Subtraktion noch eine ganze Reihe derartiger Verhältnisse abzuleiten, ohne daß wir uns — wenigstens bis auf die letzten Glieder — erheblich von den Größenbeziehungen der stetigen Teilung entfernen, trotzdem an sich die Ungenauigkeit sich nicht nur bei der Wiederholung fortsetzt, sondern vergrößert.

In der folgenden Tabelle sei das mittlere Glied immer nur einmal aufgeführt.

	Produkt der äußeren Glieder	Quadrat des Mittelgliedes
89 : 55 : 34	3 026	3 025
55 : 34 : 21	1 155	1 156
34 : 21 : 13	442	441
21 : 13 : 8	168	169
13 : 8 : 5	65	64
8 : 5 : 3	24	25
5 : 3 : 2	10	9
3 : 2 : 1	3	4

* Das Zeichen $\sim$ bedeute „angenähert gleich“.

Wenn wir darauf verzichten, das Verhältnis in ganzen Zahlen auszudrücken, und Brüche zu Hilfe nehmen, um gleich das erste Verhältnis recht genau zu bestimmen, so wird die obere von Zeile zu Zeile sich verstärkende Ungenauigkeit so gut wie ganz vermieden. Nehmen wir die ursprüngliche Strecke gleich 1000 an, so werden die Teile 618,033 9887 und 381,966 0113. Alle folgenden erhalten wir durch einfache Subtraktion, und immer stehen drei aufeinander folgende zueinander im Verhältnis der stetigen Proportion. Die Reihe dieser Zahlen ist:

1000,000 0000	55,728 0904	3,105 6272
618,033 9887	34,441 8531	1,919 3671
381,966 0113	21,286 2373	1,186 2601
236,067 9774	13,155 6158	0,733 1070
145,898 0339	8,130 6215	0,453 1531
90,169 9435	5,024 9943	0,279 9539

Runden wir bei den letzten drei Zahlen ab auf:

0,733   0,453   0,28,

so bekommen wir: als Produkt der äußeren Glieder 0,20 524,
als Quadrat des mittleren Gliedes 0,20 540 9.

Wir erkennen: es ist auch in den letzten Zahlen noch eine ziemliche Genauigkeit.

Die stetige Teilung in Geometrie und Stereometrie.

Doch zurück von der abstrakten Welt der Zahlen zu den anschaulichen geometrischen Gebilden! Wir wollen das weitere Vorkommen dieser so besonderen Teilung, die die Alten darum schon als den Schnitt schlechthin „ἡ τομή" bezeichneten, in der Geometrie des näheren erörtern. Da ist ja zunächst die Konstruktion des regelmäßigen Zehnecks und Fünfecks mit Hilfe des Goldenen Schnittes allgemein bekannt. Auch diese Kenntnis reicht zurück bis auf die Alten, Euklid behandelt diese Konstruktion der ein- und umbeschriebenen Vielecke im IV. Buche.

Denke ich mir ein regelmäßiges Zehneck vom Mittelpunkt aus in die 10 Teildreiecke zerlegt, so ist jeder der Winkel an der Spitze M dieses gleichschenkligen Teildreiecks MAB gleich $\frac{360}{10} =$ 36^0, jeder der Basiswinkel also $\frac{180-36}{2} = 72^0$. Ziehe ich daher von A die Winkelhalbierende AC, so wird ein neues gleichschenkliges Dreieck ABC abgeschnitten, das wegen der Gleichheit der Winkel dem ganzen ähnlich ist. Da in ähnlichen Dreiecken die gleichliegenden Seiten proportional sind, so erhalte ich infolgedessen die Proportion

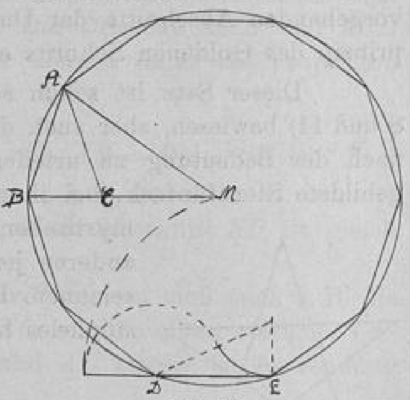

Fig. 10.

$$MB : AB = AB : BC.$$

Da $AB = AC = MC$ ist:

$$MB : MC = MC : BC.$$