2.

Die Minnelieder des Burggrafen von Regensburg

erläutert und ins Neuhochdeutsche übertragen.

Von Oberlehrer R. Schneider.

I. Quellen:

1. Deutsche Liederdichter des 12. bis 14. Jahrhunderts. Eine Auswahl von Karl Bartsch. 2. Aufl. Stuttgart. G. J. Göschen'sche Verlagshandlung 1879.
2. Deutsche Studien. II. Die Anfänge des Minnesanges. Von Wilhelm Scherer. Wien 1874. In Kommission von Karl Gerold's Sohn.

II. Abkürzungen:

MF. = Des Minnesangs Frühling, herausgegeben von Karl Lachmann und Moriz Haupt. Leipzig. Verlag von S. Hirzel. 1857. 1. Aufl. mhd. = mittelhochdeutsch; nhd. = neuhochdeutsch; Z. = Zeile, Vers.

Einleitung.

Der Burggraf von Regensburg, der in MF. (S. 17 und 18) als Minnesänger erscheint, gehört zu jener Gruppe von Dichtern, die auf den Burgen an der Donau zwischen Regensburg und dem Marktflecken Donaustauf bis zu den Vorbergen des bayrischen Waldes im 12ten Jahrhundert ansässig waren. Auf die Erblichkeit der Burggrafschaft Regensburg in dem Geschlechte der Grafen von Steveningen und Rietenburg gründet Hagen seine Meinung, es sei der Burggraf von Regensburg mit dem Burggrafen von Rietenburg (MF. S. 18 und 19) identisch.

Aber schon in der äusseren Form der Dichtung findet sich zwischen beiden ein bedeutsamer Unterschied. Der Burggraf von Rietenburg bietet künstlichere Strophenformen und überschlagende Reime, während der Burggraf von Regensburg nur gepaarte Reime in seinen Weisen braucht, die sich ziemlich eng an die Nibelungenstrophe anschmiegen. Ferner zeigt auch der innere Gehalt der Liebespoesie beachtenswerte Unterschiede: Der Rietenburger steht im Dienste seiner angebeteten Frau und bewegt sich höfisch „conventionell nach provenzalischer Sitte"; bei dem Regensburger liegt die Dame in den Fesseln des Dichters und spricht dies gleich in den beiden ersten Zeilen unverhohlen aus. Von den vier Strophen gehen hier drei von der Frau, nur eine — die dritte — von dem geliebten Ritter aus.

Abgesehen von anderen, hier nicht zu erörternden, Gründen möchte ich daher beide Dichter mit Wilhelm Scherer nach der handschriftlichen Überlieferung getrennt wissen. Hiernach ist der Regensburger unter die volkstümlichen Dichter oder Spielleute zu zählen. In der Zeit von 1161—1176 war Heinrich von Stevening und Rietenburg Burggraf von Regensburg, der mit unserem Minnesänger identisch sein dürfte.

Für den vorliegenden Zweck — auch grössere Kreise des gebildeten Publikums für unsere mhd. Poesie zu interessieren — begnüge ich mich mit einer möglichst wortgetreuen Übertragung in das Nhd. und mit einigen Anmerkungen sachlichen und sprachlichen Inhalts, indem ich hierbei auf meine beiden früheren Arbeiten hinzuweisen Veranlassung nehme: 1. Spervogels Lieder für die Schule erklärt und mit einem Glossar versehen. Osterprogramm 1876.*) 2. Die namenlosen Lieder aus Minnesangs Frühling erläutert und ins Neuhochdeutsche übertragen. Berlin, 1885. Verlag von Friedberg & Mode.

Möge der kleine Beitrag die Liebe zu unserer vaterländischen Litteratur fördern helfen!

Text.

DER BURCGRAVE VON REGENSBURG.

»Ich bin mit rehter staetekeit
eim guoten rîter undertân.
wie sanfte ez mînem herzen tuot,
swenn ich in umbevangen hân!
der sich mit manegen tugenden guot
gemachet al der werlte liep,
der mac wol hôhe tragen den muot.«

»Sin mugen alle mir benemen
den ich mir lange hân erwelt
ze rehter staete in mînen muot,
der mich vil meneges liebes went.
und laegen si vor leide tôt,
ich wil im iemer wesen holt.
si sint betwungen âne nôt.«

Ich lac den winter eine:
wol getrôste mich ein wîp
für daz mir fröide kunten
die bluomen und diu sommerzît.
daz nîdent merkaere:
des ist mîn herze wunt.
ezn heile mir ein frowe mit ir minne,
ez enwirdet niemer mê gesunt.

»Nu heizent si mich mîden
einen ritter, ine mac,
swenn ich dar an gedenke
daz ich sô güetlîchen lac
verholne an sînem arme.
des tuot mir senede wê.
von im ist ein alse unsenftez scheiden:
des mac sich mîn herze wol entstên.«

Übertragung.

Der Burggraf von Regensburg.

»Ich bin mit echter Treue
Einem guten Ritter zugethan.
Wie wohl es meinem Herzen thut,
Wenn ich in seinen Armen ruh'!
Wer sich mit vieler Tugend
Bei allen lieb gemacht,
Der kann auch stolzen Sinnes sein.«

»Sie alle können mir nicht rauben,
Den ich mir längst erwählet habe
Zu rechter Treu in meinem Sinn,
Der mich gewöhnt an viele Freuden.
Und stürben sie vor grossem Leid,
Ich bleibe ihm doch stetig hold.
Sie machen Not sich ohne Not.«

Einsam war ich im Winter:
Ein Weib gab süssen Trost,
Mehr als mich freuen konnten
Die Blumen und die Sommerzeit.
Aufpasser sind drum neidisch:
Weshalb mein Herze krankt.
Heilt es nicht Frauenliebe,
Wird's nimmer mehr gesund.

»Nun heissen sie mich fliehen
Einen Ritter, ich kann's nicht,
Wenn ich daran gedenke,
Wie ich so herrlich lag
In seinen Armen heimlich,
Das thut mir schmerzlich weh.
Schwer fällt die Trennung mir:
Mein Herz versteht es wohl.«

*) Wieder abgedruckt in der Zeitschrift für den deutschen Unterricht. Herausgegeben von Dr. Otto Lyon. 1. Jahrgang. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1887. S. 289—320.

Anmerkungen.

Z. 1—7. Klar und bestimmt bekennt sich hier die Dame ihrem Ritter unterthan und macht kein Hehl von ihrer Liebe zu ihm, der sich durch männliche Tüchtigkeit einen Anspruch auf das Liebesglück erworben hat. — Im Reim ist dieser erste Ton rein und bewegt sich in jambischer Gangart, den zweisilbigen Auftakt hat Lachmann in der zweiten Zeile durch die Umwandlung von »*einem*« in »*eim*« beseitigt.

Z. 8—14. Die Dame rühmt sich ihrer Treue und Beständigkeit zu dem erwählten Liebhaber, den ihr niemand entreissen soll. — Auch dieser zweite Ton gründet sich auf die regelmässige vierzeilige Reimstrophe. Ungenauer Reim findet sich bei »*erwelt*« : »*went*« = assuefacit d. h. »gewohnt macht«.

Z. 14. »*betwungen*« »bedrückt«, »bekümmert«; »*unbetwungen*« »froh«.

Z. 15—22. Dieser dritte Ton ist aus dem Munde des Ritters zu verstehen: In der Einsamkeit des Winters tröstet ihn die Geliebte mit ihrer Huld und versetzt ihn in die schöne Sommerzeit. Gegen die neidischen Aufpasser findet er allein in der Gunst des Weibes die heilende Arznei. — Ungenauer Reim findet sich hier bei »*wîp*« : »*summerzît*«.

Z. 17. »*für daz*«, contrahiert in »*fürz*«, erscheint häufig in temporalem Sinne: »von dem Zeitpunkte an«, »über einen Zeitpunkt hinaus«. An unserer Stelle ist es nach Lachmann graduell: »mehr als das«; also: aber ein Weib tröstet mich mehr als Sommerzeit und Blumen mir Freude verschaffen. Diese Stelle hat Dr. Fr. Pfaff in seiner Ausgabe: »Der Minnesang des 12. bis 14. Jahrhunderts« Abteilung 1 S. 14 (Stuttgart, Union Deutsche Verlagsgesellschaft. Kürschners Deutsche National-Litteratur Bandausgabe 186)« unrichtig erklärt, da er die Bedeutung von »*fürz*« und »*kunten*« verkennt, wodurch zugleich der logische Zusammenhang gestört wird.

Z. 23—30. In diesem letzten Tone beklagt die Dame die drohende Trennung von dem geliebten Ritter, mit dem sie manche süsse Stunde verlebt hat. Das gestörte Liebesglück bereitet ihr schweren Kummer. — Ungenauer Reim erscheint hier bei »*wê*« : »*entstên*«.

Z. 28. »*senede*«, eigentlich Participium, ist hier substantivisch zu nehmen = »Liebesschmerz«.

Ein eigentlicher Fortschritt ist in den Tönen nicht zu entdecken, so dass sich alle auf ein und denselben Zeitpunkt beziehen können. Eine gewisse Entwickelung liegt höchstens darin, dass sich die Dame ihres Verhältnisses zu dem Ritter in dem ersten Tone rühmt und dieses im folgenden gegen alle Störenfriede und Aufpasser aufrecht zu erhalten sucht.

3.

Zum Betrieb der englischen Sprechübungen auf dem Realgymnasium.

Von Professor Dr. K. Lange.

Seit Jahrzehnten ist ein erbitterter Kampf über die methodische Behandlung der neueren Sprachen geführt worden. Die energischen, unermüdlichen Vorstösse der Reformer gegen die gedeckte Position der Anhänger des alten Systems haben den Erfolg gehabt, dass die Unterrichtsverwaltung sich in den neuen Lehrplänen für eine gemässigte Reform erklärt hat. Die gelinderen Saiten, die seitdem von den Gegnern der neuen Methode angeschlagen worden sind, haben naturgemäss auch im andern Lager den scharfen Ton herabgestimmt, und es ist zu hoffen, dass dieser gemässigtere, sachliche Ton im Kampfe um eine gute Sache auch fernerhin in Geltung bleiben werde. Was bis jetzt erreicht wurde, ist nur eine Etappe auf dem Wege nach dem Endziel. Der Kampf wird weiter gehn, aber unter wesentlich günstigeren Bedingungen für die Reformer. Die Notwendigkeit einer Reform ist anerkannt. Heute heisst es nicht mehr: »Muss der Sprachunterricht umkehren?«, unter welcher Flagge Tanger eine Gegenschrift gegen die bekannte mit »Posaunenton« eine Reform fordernde Schrift von Quousque tandem (Vietor): »Der Sprachunterricht muss umkehren« s. Zeit in die Welt gesandt hat, sondern es handelt sich darum den passiven Widerstand der Gegner der Reform zu besiegen, sie durch die günstigen Resultate der neuen Methode von ihrem Irrtum zu bekehren und sie zu thätiger, unverdrossener Mitarbeit an dem Reformwerk zu veranlassen. Auf eine allseitige, freudige, nicht erzwungene Ausführung der neuen Bestimmungen kommt es an, soll anders der gehoffte Erfolg eintreten.

Die Unterrichtsverwaltung hat die Pflicht, jähe Übergänge in der methodischen Behandlung eines Lehrgegenstandes zu verhüten. Sie hat denjenigen Forderungen der Reformer, die, ohne dass vorher der Boden zu fruchtbringender Durchführung bestellt ist, mit Recht als zu weit gehend erscheinen mögen, kein Gehör gegeben. Aber sie hat doch nunmehr ein Verfahren amtlich gutgeheissen, welches bis 1892 da stillschweigend geduldet wurde, wo es bereits von den betreffenden Fachleuten in Anwendung gebracht wurde. Denn die Bestimmungen der neuen Lehrpläne bezüglich der Behandlung der neueren Sprachen sind ein Ergebnis der praktischen Erfahrungen beim Unterricht, nicht ein Ergebnis theoretischer Erwägungen seitens der Schulbehörde.

Die neuen Lehrpläne bestimmen, dass in Zukunft die Lektüre und der praktische mündliche und schriftliche Gebrauch der Sprache in den Vordergrund gestellt werden, während die Grammatik nur noch Mittel zum Zwecke sein soll. Diesen letzteren Punkt besonders hervorzuheben, war von Wichtigkeit, und geschah in der bewussten Absicht, vor einer übertriebenen Wertschätzung der Grammatik ausdrücklich zu warnen. Die Übertragung der Methode des altsprachlichen Unterrichts auf die neueren Sprachen, die s. Zeit aus bekannten Gründen erklärlich war, hat die Unterrichtserfolge in hohem Grade beeinträchtigt. Eine lebendige, lebenswarme, fortwährendem Wandel unterworfene Sprache wie die Englische sträubt sich gegen eine Einzwängung in starre Regeln. Am frischen Born der Sprache sollen wir schöpfen, nicht mit Hilfe der toten Regeln eine Sprache konstruieren. An der Sprache und durch die Sprache sollen wir lernen, uns das Idiomatische derselben zu eigen zu machen, und wir erreichen das in einer Weise wie es keine systematische Zusammenstellung uns zu geben vermag. Auch die neue Methode achtet die Grammatik keineswegs gering, aber sie will sie nicht in der früheren Weise lehren, sie will nicht, dass das tote Wissen vor dem Können in unberechtigter Weise bevorzugt wird.

Wir sind der Unterrichtsverwaltung zu Dank verpflichtet, dass sie durch die Bestimmungen der neuen Lehrpläne eine gemässigte Reform gebilligt hat, wir bedauern aber, dass sie mit der einen Hand genommen, was sie mit der andern gegeben hat. Während die Endziele im übrigen nicht im mindesten ermässigt, im Gegenteil durch die Forderung der planmässigen Sprechübungen erheblich erhöht sind, ist eine Verminderung der Stundenzahl in III eingetreten, was die Absolvierung des für diese Klasse in erster Linie stehenden Pensums, Erreichung einer korrekten Aussprache, sehr erschwert. Es wird in den Lehrplänen die Hoffnung ausgedrückt, dass bei fortschreitender Durchbildung der sogen. neueren Methode das Lehrziel zu erreichen sei. Die Anerkennung, die damit der neuen Methode gezollt wird, ist zwar sehr erfreulich, aber ich kann meine Bedenken gegen die Verkürzung der Unterrichtszeit nicht unterdrücken und nur die Hoffnung aussprechen, es möge die ursprüngliche Stundenzahl im Englischen wieder hergestellt werden. Dass eine solche Änderung im Bereich der Möglichkeit liegt, dafür liefert das Latein einen Präcedenzfall. *Where there is a will, there is a way.* Eine Sprache, wie die Englische, die ein bedeutendes Mass von praktischer Übung verlangt, wenn in derselben erspriessliches geleistet werden soll, kommt m. E. mit 3 Stunden im Anfangsunterricht nicht zu ihrem Recht. Denn neben der Einübung der regelmässigen und unregelmässigen Formenlehre soll in der untersten Klasse durch Erwerbung einer korrekten Aussprache und mündliche Übungen im praktischen Gebrauch der Sprache eine Grundlage gelegt werden, welche die Bedingung für einen erfolgreichen Ausbau dieser Seite der Übungen für die höheren Stufen bildet. Ohne ausgiebige praktische Bethätigung der Schüler ist diese Aufgabe aber nicht zu bewältigen, und diese Praxis ist nur bei hinreichender Stundenzahl möglich. Vorläufig haben wir mit den gegebenen Verhältnissen zu rechnen und müssen danach streben, auch unter ungünstigen Bedingungen uns dem vorgesetzten Ziel möglichst zu nähern.

Die Erfolge der veränderten Unterrichtsweise werden ohne Zweifel wenigstens relativ günstige sein. Aber diese Erfolge werden nicht von heute zu morgen in die Erscheinung treten, und es scheint mir etwas verfrüht, wenn auf der Direktorenversammlung der Provinz Posen vom Jahre 1895 bereits das Thema verhandelt ist: »Welche Erfahrungen sind beim französischen Unterricht mit der neuen Lehrmethode gemacht worden?« Gut Ding will Weile haben. Nicht nur viele Lehrer müssen sich erst in die veränderten Verhältnisse einleben, auch unser Schülermaterial muss erst an die veränderte Methode gewöhnt werden. Der Schüler muss wissen, dass der Schwerpunkt seiner Thätigkeit in die Unterrichtsstunde fällt, er muss einsehn, dass das neue Verfahren eine ganz besonders gespannte Aufmerksamkeit und ein energisches Ankämpfen gegen geistige Trägheit erfordert, er muss wissen, dass seine Leistungen im mündlichen Gebrauch der Sprache von wesentlichem Einfluss auf seine Censur bzw. Versetzung sind. Dieser letzte Punkt, der selbstverständlich erscheinen mag, bedarf doch einer besonderen Hervorhebung. Das alteingebürgerte Vorurteil, dass die schriftlichen Leistungen von ausschlaggebender Bedeutung für die Beurteilung seien, ist aus den Köpfen unserer Schüler — der Schüler allein? — noch immer nicht entfernt; die üblen Erfahrungen, die sie infolge dieser unberechtigten Meinung machen, werden sie allein davon heilen können.

Die neue Methode hat ihren Einzug in unsere Schulen gehalten; es handelt sich darum sie so auszubauen, dass sie segensreich wirken kann. Zu diesem Zweck ist es wünschenswert, dass ein reger Austausch der Erfahrungen seitens der Fachleute stattfinde. Durch diese Mitteilungen aus der Praxis des Unterrichts werden manche Anregungen gegeben, manche Vorurteile zerstreut werden, und es wird auf diese Weise mehr und mehr zu einer Klärung der Ansichten kommen, die sich zum Teil noch schroff gegenüberstehn. Vor einem unruhigen Hin- und Hertasten kann nicht nachdrücklich genug gewarnt werden. Aber jeder Lehrer muss nach Vervollkommnung streben und nicht müde werden die bessernde Hand anzulegen, wo es notthut. Eine bewährte Methode giebt es nicht, in keinem Unterrichtsfache, auch wenn die Länge der Zeit, seit welcher eine Methode in unbestrittener Geltung war, eine solche Bezeichnung mochte erklärlich erscheinen lassen. »Das Alte stürzt, es ändert sich die Zeit, und neues Leben blüht aus den Ruinen.«

Die folgenden Ausführungen, die sich auf den Betrieb der englischen Sprechübungen auf dem Realgymnasium beschränken, verzichten ausdrücklich auf eine systematische Vollständigkeit; sie wollen nur auf eine Reihe von Gesichtspunkten hinweisen, die sich dem Verfasser im Laufe der Jahre[1]) beim Unterricht aufgedrängt haben. Es wird zunächst über die Stellung der Sprechübungen innerhalb des englischen Gesamtunterrichts und über den Umfang derselben gehandelt werden, woran sich einige Bemerkungen über die Verteilung des Stoffes auf die verschiedenen Stufen und die methodische Behandlung der Sprechübungen anschliessen werden.

Stellung der Sprechübungen innerhalb des englischen Gesamtunterrichts.

Welche Stellung die Sprechübungen, namentlich der Lekture gegenüber einzunehmen haben, kann nicht zweifelhaft sein. Eine höhere Schule hat in erster Linie eine allgemeine geistige Durchbildung der Schüler zum Ziele, der praktische Nutzen kommt erst an zweiter Stelle. So wird auch das Englische zunächst seines allgemeinen Bildungswertes wegen auf den höheren Schulen gelehrt, die Einführung in die englische Litteratur ist und bleibt Hauptsache. Wäre der einzige Zweck der Übungen, welche darauf hinzielen, die Schüler zur praktischen Handhabung der Sprache zu befähigen, nur der, dass einer oder der andere derselben das Erworbene möglicherweise einmal verwerten könne, so dürfte diesen Übungen ein erhebliches Mass an Zeit und Kraft nicht gewidmet werden, denn dieser Zweck tritt aus dem Rahmen der einer höheren Schule obliegenden Ziele heraus. Aber die Sprechübungen haben m. E. einen viel höheren Zweck. Sie bilden eine notwendige Ergänzung der übrigen Zweige des englischen Unterrichts. Sie sind von hohem Wert wegen der geistigen Anstrengung, welche sie erfordern, sie befördern ein tieferes Eindringen in die Phraseologie und Synonymik, sie befestigen und

---

[1]) Meine Erfahrung in der jetzt sogen. neuen Methode erstreckt sich auf einen Zeitraum von 24 Jahren. Auf der Realschule (ohne Latein) in Bremen, an der ich von Ostern 1872—1875 thätig war, wurde dem mündlichen Gebrauch in den neuen Sprachen grosser Wert beigelegt und Dank der reichlichen Stundenzahl recht gutes geleistet. Das Englische bzw. Französische wurden Unterrichtssprache, sobald es unbeschadet des Verständnisses möglich war. Seitdem habe ich mit besonderem Interesse, auch nach meinem Übergang in den preussischen Schuldienst, die Sprechübungen gepflegt, soweit es der Lehrplan gestattete.

erweitern den Wortschatz, sie führen zu einer sicheren Kenntnis der wesentlichen grammatischen Gesetze durch häufige Anwendung derselben, sie fordern eine gespannte Aufmerksamkeit, um das gesprochene Englisch richtig aufzufassen, Schlagfertigkeit und Geistesgegenwart, um nach Inhalt und Form korrekt zu antworten. Aus allen diesen Gründen, namentlich auch ihres erziehlichen Wertes wegen, sind diese Übungen ein ausgezeichnetes Bildungsmittel. Gegen die vielbeklagte Schreibseligkeit der Deutschen werden die Sprechübungen ein schätzbares Gegengewicht bilden. So wertvoll nun auch aus den angeführten Gründen diese Übungen sein werden, so möchte ich doch davor warnen, sie in einer Weise in den Vordergrund zu stellen, namentlich auf den höheren Stufen, die geeignet wäre, den Hauptzweck des Unterrichts, Einführung in den Geist des fremden Volkes durch die Lektüre, wesentlich zu beeinträchtigen.

Umfang der Sprechübungen.

Es liegt auf der Hand, dass bei der beschränkten Unterrichtszeit für das Englische überhaupt, bei gefüllten Klassen, bei den sonstigen nicht zu vernachlässigenden Zielen des englischen Unterrichts der Umfang der Sprechübungen nur ein mässiger sein kann. Aber es ist auch gar nicht danach zu trachten, den Kreis dieser Übungen besonders weit zu ziehn; nicht vieles ist oberflächlich, sondern weniges gründlich zu betreiben. Innerhalb eines beschränkten Gebietes ist vollständige Geläufigkeit des Ausdrucks zu erstreben und zu erreichen — soweit die Unbeholfenheit der Schüler, die auch im deutschen Ausdruck bis in die obersten Klassen so oft zu Klagen Anlass giebt, es erlaubt. Der Umfang des Sprechstoffes lässt sich nur annähernd bestimmen. Dem Geschick des Lehrers bleibt es überlassen die Grenzen zu ziehn, die je nach Schülerzahl, Güte des Jahrgangs etc. verschieden sein werden. Es kommt für ihn besonders darauf an, vorsichtig in der Auswahl des Gesprächsstoffs über Vorkommnisse des täglichen Lebens zu sein. Das Streben nach Vollständigkeit wäre hier durchaus unangebracht. Es giebt eine gewisse Anzahl von Worten und Wendungen, die, fortwährend in der Unterhaltung wiederkehrend, gewissermassen den eisernen Bestand jeder Unterhaltung bilden. Dieser Bestand muss immer präsent sein, abseits liegende Gesprächsthemata sind zu vermeiden. Über die Verteilung des Sprechstoffes, soweit es sich um Vorkommnisse des täglichen Lebens handelt, auf die einzelnen Klassen bezw. Stufen muss zwischen den einzelnen englischen Lehrern der Anstalt eine Verständigung stattfinden. Sollen die Sprechübungen einen Erfolg haben, so müssen sie planvoll betrieben werden; jede Stufe hat ein bestimmtes Pensum zu erledigen.

Methodische Behandlung der Sprechübungen.

Es liegt nicht in meiner Absicht, in erschöpfender Weise die methodische Behandlung der Sprechübungen zu erörtern. Die Persönlichkeit des Lehrers spielt, wie bei jedem Unterricht, so namentlich bei der Behandlungsweise der praktischen Übungen im mündlichen Gebrauch einer neueren Sprache, eine zu grosse Rolle, als dass ins einzelne gehende Vorschläge über das einzuschlagende Verfahren am Platze wären. Ich beschränke mich auf Hervorhebung einiger Punkte, die erfahrungsmässig eine besondere Berücksichtigung verlangen. Wenn es mir nicht gelungen ist, meinen Darlegungen diejenige Durchsichtigkeit und Vollständigkeit zu geben, die ich gewünscht hätte, so möge mir als Entschuldigung dienen, dass unvorhergesehene Umstände mir die Ruhe und Sammlung zur Erledigung meiner Aufgabe erheblich beeinträchtigt haben

Erste Bedingung für einen erfolgreichen Betrieb der Sprechübungen ist eine korrekte Aussprache. Man hat dieser rein technischen Seite des Sprechens früher nicht die gebührende

Bedeutung beigelegt, wie bei dem Mangel an geeigneten Lehrkräften nicht zu verwundern ist. Als Trautmann s. Zeit die Schulaussprache des Englischen und Französischen grauenvoll nannte, erhob sich ein Sturm der Entrüstung gegen eine solche Behauptung. Ich meine mit Unrecht. Vielen war es noch gar nicht zum Bewusstsein gekommen, wie fehlerhaft die Aussprache war, die sie, wenn nicht lehrten, so doch duldeten. Wie ist es nun heute in dieser Beziehung bestellt? Dank der Benutzung der Hilfsmittel, die uns jetzt in grösserer Zahl wie früher zur Verfügung stehen, ist in letzter Zeit eine Besserung eingetreten. Aber wir sind noch weit entfernt von dem Ideal, das uns vorschwebt. Wir werben noch immer vergeblich um die Hilfe von Bundesgenossen, die wir nicht entbehren können, ich meine die Hilfe sämtlicher Lehrer der Schule. Solange der lautlichen Seite der Muttersprache in unsern Schulen noch nicht allgemein die gebührende Sorgfalt gewidmet wird, stehen wir vor einer unlösbaren Aufgabe. Es ist auffallend, dass eine Nation, die sich auf ihre Gründlichkeit und Sorgfalt in allen Dingen etwas zu gute thut, die rühmend den wohlthätigen Einfluss des Militärdienstes auf den Sinn für Ordnung, Accuratesse etc. hervorhebt, in der Behandlung der Muttersprache anderen Nationen so sehr nachsteht. Hier kann und muss noch viel geschehn. Dialektische Eigenheiten und nachlässige, undeutliche Aussprache sollten in der Schule nicht geduldet werden. Es ist das eine pädagogische Forderung ersten Ranges. Man versucht seit einigen Jahren dem mangelhaften schriftlichen Ausdruck im Deutschen dadurch abzuhelfen, dass man in fast allen Unterrichtsfächern freie Ausarbeitungen im Deutschen anfertigen lässt; man denke endlich auch einmal daran, dem Mangel im mündlichen Ausdruck abzuhelfen, und räume dem gesprochenen Wort den gebührenden Platz ein; geschrieben wird mehr als genug in Deutschland.[1])

Unterstufe (IIIB — IIB).

Die Hauptaufgabe des Anfangsunterrichts ist die Übermittelung einer korrekten Aussprache. Um diese schwierige Aufgabe zu lösen, wird der Lehrer alle Mittel anwenden, die ihm zu Gebote stehen. Dass die Phonetik in den Dienst des Unterrichts gestellt wird, steht ausser Frage. Es kann sich nur darum handeln, in welchem Masse dieselbe heranzuziehen sei. Die verschiedenen Ansichten hier anzuführen, von der extremsten, die eine theoretische Einführung der Schüler in die allgemeine Phonetik will, bis zur Ansicht Derer, welche sich jeder Verwertung der Phonetik gegenüber ablehnend verhalten, und das pro und contra derselben zu erwägen, kann nicht meine Absicht sein. Ich beschränke mich darauf zu erklären, dass unter den augenblicklichen Verhältnissen die Resultate der Phonetik nur soweit berücksichtigt werden sollten, als sie zu richtiger Hervorbringung schwieriger Laute — und deren giebt es viele im Englischen — notwendig sind. Langsam aber sicher wird der Boden geebnet werden, der die Heranziehung derselben in grösserem Umfang ermöglicht. Aber es wird immer zu berücksichtigen sein, dass die Phonetik nur Mittel zum Zweck bleiben muss.

Die Frage, ob eine Lautschrift zu verwenden sei, ist nicht brennend. Die neuen Lehrpläne verbieten sie geradezu. Es hat etwas bestechendes an die Stelle der historischen Orthographie, die unzweifelhaft der Erwerbung einer guten Aussprache im Wege steht, für den Anfangsunterricht eine Lautschrift zu setzen; aber die Bedingungen für eine erfolgreiche

[1]) Das wird allgemein anerkannt. Noch in der Sitzung des preuss. Abgeordnetenhauses vom 28. Januar d. J. wurde von verschiedenen Seiten Klage über das übermässige Schreibwerk in der Verwaltung erhoben. Bei dieser Gelegenheit erklärte der Abgeordnete v. Erffa unter allgemeiner Heiterkeit des Hauses, ein Oberpräsident habe ihm einmal einen grossen Schrank gezeigt, der voll war von Aktenstücken, die über die Verminderung des Schreibwerks handelten.

allgemeine Anwendung sind noch nicht vorhanden. Es wird eine in mässigen Grenzen sich haltende Umschreibung einzelner Laute und Lautverbindungen augenblicklich genügen, aber auch notwendig sein. Dass die Lautschrift eine Zukunft hat, scheint mir ausser Frage zu sein.

Das Englische ist die dritte Fremdsprache, die auf dem Realgymnasium gelehrt wird. Die Schüler beginnen sie zu einer Zeit, wo ihrem Verständnis schon etwas zugemutet werden kann und auf ihr Alter Rücksicht zu nehmen ist. Den Unterricht mit zusammenhangslosen Sätzen zu beginnen, wird wohl nur noch wenigen einfallen. Vom zusammenhängenden Lesestück wird ausgegangen, nach vorhergehender lautlicher Schulung, bei welcher die in den ersten Lesestücken vorkommenden Wörter nach Möglichkeit heranzuziehen sind. Dass langsam vorgegangen und der Stoff namentlich auch nach der lautlichen Seite hin sorgfältig durchgearbeitet wird, ist selbstverständlich. Die ersten Sprechübungen beginnen naturgemäss sofort mit dem ersten Satze des Lesestückes. Die Fragen werden zunächst vom Lehrer gestellt und in zusammenhängendem Satz beantwortet. Die Antwort wird den grössten Teil der Frage des Lehrers enthalten. Das Mechanische wird vom Schüler, da es sich um eine Fremdsprache handelt, nicht empfunden. Es muss mit allen Mitteln darauf hingewirkt werden, den Schüler zum Sprechen zu bringen, weshalb die Formulierung der Antwort ihm keine Schwierigkeiten machen darf. Leseübungen, Gehörübungen, Nacherzählungen, Chorsprechen, Wandbilder thun auf der Unterstufe gute Dienste. — Alles wird in der Unterrichtsstunde erledigt, Fehler in der Aussprache müssen verhütet werden. Eine häusliche Aufgabe würde nur zu einer fehlerhaften Aussprache führen, die zu vermeiden Pflicht des Lehrers ist. —

Im 2ten und 3ten Jahre gestalten sich die Sprechübungen im Anschluss an den Schriftsteller immer freier. Die Schüler lernen unter Anleitung des Lehrers die Frage selbst stellen; denn sie sollen nicht einseitig nur antworten, sie sollen auch selbst fragen lernen. Gedruckte Fragen im Anschluss an das Lesebuch oder gar an den Schriftsteller sind nicht empfehlenswert. Ein Lehrer, der sie für nötig hielte, würde sich ein testimonium paupertatis ausstellen und seine Aufgabe verkennen. Zu mechanischer Thätigkeit sind die Schüler schon reichlich verdammt; weshalb ihnen die Gelegenheit zu einer gewissen Selbstständigkeit zu gelangen, verkümmern? Kurze Inhaltsangaben engbegrenzter Abschnitte sind hier am Platz, es wird durch sie auch den schriftlichen Arbeiten in die Hände gearbeitet. Alle diese Übungen waren auch früher schon üblich und wurden im ganzen in der angedeuteten Weise erledigt. Schwieriger ist es, den Gesprächen über Vorkommnisse des täglichen Lebens ihre Stelle im Unterricht anzuweisen. Es ist klar, das wir zu nichtssagenden Alltagsgesprächen keine Zeit haben, und dass dieselben nicht in die Schule gehören. Es ist also die nicht leichte Aufgabe des Lehrers, diese Art von Gesprächen gehaltreich zu gestalten und mit dem übrigen Unterricht in Verbindung zu bringen, denn in der Luft dürfen sie nicht schweben. Ich habe immer gefunden, dass derartige Gespräche inhaltlich wertvoll gemacht werden können, indem den Schülern dabei die Verschiedenheit der Lebensgewohnheiten der Engländer von den unsrigen vor Augen geführt wird. Es wird sich dann herausstellen, dass unbedingt vom Englischen auszugehn ist, und nicht vom Deutschen. Wollten wir unsere Lebensgewohnheiten zum Ausgangspunkt machen, so würden wir bald merken, dass wir auf Schritt und Tritt gezwungen wären, eine Menge Dinge in einem unechten englischen Gewand vorzuführen. Ich erwähne die Begrüssungsformeln, Mahlzeiten etc. etc. Es ist natürlich, dass der Lehrer die englischen Verhältnisse aus eigener Anschauung genau kennen muss — denn er wird dann den Unterricht lebendiger und interessanter gestalten können — oder sich doch, wenn ihm ein Aufenthalt in England nicht möglich war, aus den vorhandenen Hilfsmitteln die nötige Kenntnis verschaffen. Ein systematisches Vocabularium zu verwenden halte ich für bedenklich, es würde zu gedächtnismässiger Einprägung von zusammenhangslosen Vocabeln führen und dazu verleiten, fernliegendes mit heranzuziehn. Dass jeder einsichtige Leser gelegentlich Wörter und Wendungen nach Gruppen geordnet Revue passiern lassen wird, bedarf kaum der Erwähnung.

Es ist erforderlich, dass die Schüler auch mit den ihrem Standpunkt entsprechenden historischen Thatsachen und bedeutenden Persönlichkeiten aus der englischen Geschichte bekannt gemacht werden. Die historische Lektüre darf nur der englischen Geschichte entnommen sein. Die Zeiten, wo es für nötig gehalten wurde den altsprachlichen Unterricht zu unterstützen, und wo Schriften wie *Alexander the Great* und andere gelesen wurden, sind für immer vorbei. Das Lesebuch muss Abschnitte enthalten, welche den Einfall Cäsars in Britanien behandeln, die Eroberung des Landes durch die Angelsachsen, Alfred den Grossen, Wilhelm den Eroberer, Richard Löwenherz. Anknüpfungspunkte aus dem übrigen Unterricht sind reichlich vorhanden. Soweit das Lesebuch und der Schriftsteller den Stoff nicht bieten, hat der Lehrer einzutreten. Bedingung bei allen Sprechübungen muss sein, dass der Schüler sich immer auf einem Gebiet bewegt, das ihm durch den Unterricht hinlänglich bekannt gemacht worden ist, und innerhalb eines Wort- und Phrasenschatzes, der ihm geläufig ist. Nur so kann erzielt werden, was gefordert werden muss, Geläufigkeit des Ausdrucks. Ein Stottern und Radebrechen werden wir nicht Sprechen nennen wollen. Vollständige Gleichmässigkeit aller Schüler zu erreichen wird ebenso unmöglich sein, wie bei jedem andern Unterrichte. Aber der Lehrer muss immer imstande sein zu beurteilen, was er von den Schülern verlangen kann. Macht man dem Lehrer mit Recht Vorwürfe, wenn die schriftlichen Klassenarbeiten in überwiegender Zahl ungenügend sind, so wird man ihn auch dafür verantwortlich machen können, wenn die mündlichen Leistungen nicht bei der Mehrzahl der Schüler genügen.

Wir können nicht von dem mündlichen praktischen Gebrauch der Sprache reden, ohne nicht auch der schriftlichen Arbeiten zu gedenken. Man hätte, nachdem die Lehrpläne den Sprechübungen einen so hervorragenden Platz eingeräumt haben, annehmen sollen, dass man als schriftliche Abschlussarbeit in IIB nicht eine Übersetzung, sondern eine freie Arbeit verlangt hätte. Das ist nicht geschehn, offenbar, weil man sich von der Meinung noch nicht frei machen kann, dass nur diese Übersetzungen ein sicheres Urteil über die Beherrschung der Grammatik zulassen. Ich meine, das liesse sich durch freie Arbeiten ebenso gut erreichen. Eine derartige Arbeit enthält eine ebensolche Menge von Möglichkeiten gegen die Grammatik zu verstossen, wie eine Übersetzung in die fremde Sprache, es sei denn, dass der zu übersetzende Text in der Absicht zusammengestellt ist — und die Gefahr liegt nahe — möglichst viel Fussangeln zu legen. Was dabei für ein Englisch herauskommt, ist jedem Einsichtigen klar. Auf die grammatisch-logische Schulung dürfen wir den gesamten englischen Unterricht nicht aufbauen. Dabei würde der Wert, den der Betrieb der neueren Sprachen für unsere Schulen haben sollte, den Schüler von dem Gängelband der Übersetzungsmethode zu befreien und ihn zu grösserer Selbständigkeit des Denkens zu erziehen, nicht hinlänglich berücksichtigt werden. Eine freie Arbeit verlangt eine ganz andere Anspannung sämtlicher Geisteskräfte als die doch immerhin mechanische Arbeit der Übersetzung eines gegebenen Textes in die fremde Sprache. Es ist aber Pflicht der Schule kein Mittel unbenutzt zu lassen, um die übermässige mechanische Thätigkeit unserer Schüler einzuschränken. — Ich bin nicht so sanguinisch zu glauben, dass man von der Abschlussübersetzung so bald abgehen wird, aber eine andere Forderung hat vielleicht mehr Aussicht auf Berücksichtigung, nämlich die, dass in der mündlichen Abschlussprüfung in IIB der Prüfling sich darüber auszuweisen hat, dass er die nötige mündiche Fertigkeit im Englischen besitzt. Geschähe das, so würden die Schüler den Sprechübungen eine ganz andere Bedeutung beimessen, als sie es jetzt thun.

Oberstufe (II A—I A.)

Auf der Oberstufe dominiert die Lektüre. Es wäre nicht zu rechtfertigen, sie ohne zwingenden Grund durch andere Übungen beschränken zu wollen. Unser Ziel muss doch sein Shakespeare, Byron etc. wirklich lesen zu lassen. Bis jetzt sind wir, wenn wir offen sein wollen, von diesem Ziel noch weit entfernt. Wir werden dasselbe auch immer nur als ein ideales ansehn dürfen, so lange die Stundenzahl für das Englische nicht erhöht wird, aber wir dürfen uns deshalb nicht abhalten lassen danach zu streben, uns demselben möglichst zu nähern. Solange die Aussprachefehler von Klasse zu Klasse mitgenommen wurden — als ein unvermeidliches Übel — und nur wenige Schüler erträglich lasen, konnte das Lesen der englischen Klassiker nur eine Qual für den Lehrer sein, vorausgesetzt, dass er ein empfindliches Ohr hatte, eine Qual, derjenigen zu vergleichen, welche ein Musikverständiger empfinden müsste, der verurteilt wäre, Jahraus Jahrein von schülerhafter Hand ein verstimmtes Klavier bearbeiten zu hören. Die Übungen im Sprechen sollen neben andern doch auch besonders den Zweck haben, eine bessere Aussprache zu übermitteln, damit nicht die englischen Klassiker in so schmählicher Weise behandelt werden wie früher.

Treten die Sprechübungen auf der Oberstufe auch naturgemäss zurück, so wird doch deshalb nicht weniger englisch gesprochen werden. Im Gegenteil, ich denke wir werden, wie das jetzt schon z. Teil geschieht, den Unterricht vollständig in englischer Sprache geben können. Die historische Lektüre wird Anlass geben, die wichtigsten Epochen der englischen Geschichte eingehender zu besprechen, und manches andere wissenswerte über englische Verhältnisse wird sich zwanglos anschliessen lassen. Es wird unter anderm auch Gelegenheit genommen, die einseitige Beurteilung des englischen Volkscharakters, wie sie sich durch das Auftreten der Engländer in der Politik und auf Reisen in Deutschland gebildet hat, zu berichtigen und zu ergänzen, indem man denjenigen Eigenschaften derselben gerecht zu werden sucht, die man nur im Verkehr mit ihnen in ihrem eigenen Heim kennen lernen kann. — Wir werden daneben auch ab und zu einen Abstecher in das Gebiet des Gesprächsstoffs über Vorkommnisse des täglichen Lebens machen, um das früher erworbene zu erhalten. Erweitern wollen wir den Stoff, soweit er bis II B verarbeitet war, nach dieser Seite hin nicht. Wir wollen uns wirklich an die täglichen Vorkommnisse halten, an das, was alle gebildeten Menschen thun und treiben, denken und fühlen, nicht uns auf entlegene oder gar technische Gebiete begeben. *Non multa, sed multam* sei unser Grundsatz.[1])

Ich fasse die Ergebnisse meiner Erörterungen in folgende Sätze zusammen:

1. Die Sprechübungen bilden einen wesentlichen Bestandteil des englischen Unterrichts und eine notwendige Ergänzung der übrigen Zweige desselben.
2. Ziel der Sprechübung ist Gewandheit im mündlichen Gebrauch der Sprache.

---

[1]) Dass ein junger Mensch mit dem, was ihm die Schule bietet, in England ohne Mühe auskommt, habe ich selbst beobachtet. Im Sommer 1893 hatte ich meinen Sohn, der damals Obersecundaner war, mit nach England genommen. Wir waren zunächst der Einladung eines mir befreundeten Herrn nach seinem Landsitz gefolgt und verbrachten den zweiten Teil der Ferien in London. Mein Sohn führte schon am ersten Abend mit seiner Tischdame eine lebhafte Unterhaltung und musste nur einmal seine Zuflucht zu mir nehmen, als seine Nachbarin die Frage an ihn richtete: Are you a good sailor? [zu deutsch etwa: Werden Sie nicht seekrank?], eine Frage, deren Beantwortung manchem meiner Leser Schwierigkeiten gemacht haben würde. In London überliess ich meinen Sohn für die Zeit, wo ich auf dem britischen Museum arbeitete, sich selbst; er fand sich überall anstandslos zurecht.

3. Da dieses Ziel eine lange und ständige Übung zur Voraussetzung hat, so ist dasselbe bei der dem Unterrichte zugemessenen knappen Zeit nur innerhalb eines beschränkten, abgeschlossenen Kreises erreichbar.

4. Der zu behandelnde Stoff der Sprechübungen ist planvoll in einer dem Gesichtskreise des Schülers angemessenen Weise auf die verschiedenen Stufen zu verteilen.

5. Erste Bedingung für einen gedeihlichen Betrieb der Sprechübungen ist eine korrekte Aussprache.

6. Diese technische Seite des Sprechens ist im ersten Jahre des Unterrichts im wesentlichen zu erledigen.

7. Die Phonetik ist in massvoller Weise zur Bewältigung dieser Aufgabe heranzuziehen.

8. Sobald und soweit es ohne Schädigung der übrigen Ziele des Unterrichts geschehen kann, tritt das Englische als Unterrichtssprache ein.

9. Um den Schülern eine höhere Meinung von der Wichtigkeit der Sprechübungen beizubringen, sollte in der mündlichen Abschlussprüfung, ähnlich wie in der Abiturientenprüfung, der Nachweis der erlangten Geübtheit im mündlichen Gebrauch der Sprache gefordert werden.

10. »Bei der unbedingten Gleichgiltigkeit, mit der in Deutschland die Muttersprache nach ihrer lautlichen Seite behandelt zu werden pflegt«, und bei der Sprödigkeit, mit der unsere Schüler sich jeder freien mündlichen Leistung gegenüber verhalten, haben die Sprechübungen einen nicht zu unterschätzenden erziehlichen Wert.

11. Um die Erfolge in den Sprechübungen zu sichern, ist die Erhöhung der Stundenzahl für den englischen Unterricht geboten.

12. Aus demselben Grunde wäre es wünschenswert, die Maximalzahl der Schüler in den untern und mittleren Klassen auf 30, in den obern auf 20 festzusetzen.

4.

Zur Behandlung der inneren Kräfte im physikalischen Unterricht der Prima.

Ein synthetisches Kapitel aus der Mechanik.

Von Professor Dr. M. Nordmann.

Nach Erledigung der elementaren Dynamik des materiellen Punktes sind die einfachsten Fälle der Bewegung ausgedehnter Massen (des »starren Systems«) zu behandeln. Soll die systematische Einheit des Lehrganges gewahrt bleiben, so sind die inneren Kräfte unentbehrlich. Ihre Behandlung ist jedoch meist eine recht stiefmütterliche. Nach ihrer Existenzberechtigung, ihrer besonderen Grösse und Richtung wird fast niemals gefragt, sondern in der Regel ohne weiteres vorausgesetzt, dass sie paarweise gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind. In der That genügt diese Relation — für den, der die Sache schon kennt, denn es ergeben sich ohne Verzug die Arbeitssumme Null für die inneren Kräfte und damit der Satz von der lebendigen Kraft, das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, das d'Alembertsche Princip, der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes, kurz all das unentbehrliche Handwerkszeug, ohne welches auch nicht der einfachste Fall einwandfrei erledigt werden kann. Nur der Lernende erhält natürlich keine Anschauung, weder von den inneren Kräften selbst, noch von der Richtung, in welcher der weitere Fortschritt der mechanischen Methoden allein liegen kann. Ich lege im folgenden eine Reihe von einfachen Beispielen vor, in denen die inneren Kräfte nach Grösse und Richtung ermittelt werden, und schlage eine passende Auswahl dieser Beispielchen als die natürliche Brücke zur Dynamik ausgedehnter Massen vor. Die Beschränkung auf die Bewegung des ebenen Systems in seiner Ebene erscheint wohl selbstverständlich.

Das einfachste »starre System« wird vorgestellt durch zwei Massenpunkte m_1 und m_2 von unveränderlichem Abstande; die beiden Kräfte P_1 und P_2 mögen zunächst die Richtung der Verbindungslinie haben (Fig. 1). Wäre m_1 frei, so würde seine Beschleunigung $p_1 = P_1/m_1$ sein, ebenso die von m_2: $p_2 = P_2/m_2$. Wegen der Willkürlichkeit der 4 Zahlen m_1, m_2, P_1, P_2 und wegen der Unbestimmtheit des Sinnes von P_1 um P_2 werden p_1 und p_2 (die »virtuellen« Beschleunigungen) im allgemeinen nach Grösse und Richtung verschieden ausfallen, wegen der vorgeschriebenen unveränderlichen Länge der Strecke $m_1 m_2$ wird aber keines von beiden eintreten, sondern beide

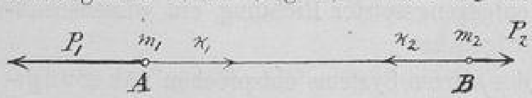

Fig. 1

Punkte werden in demselben Zeitelemente immer nur gleiche Wege in gleichem Sinne zurücklegen können. Eben deshalb müssen die Punkte in jedem Moment dieselbe Geschwindigkeit, also auch während eines beliebig kleinen Zeitteilchens denselben Geschwindigkeitszuwachs, d. h. in jedem Moment dieselbe Beschleunigung erhalten. Setzt man

$$p = p_1 + \pi_1 \text{ und } p = p_2 + \pi_2,$$

so stellen π_1 und π_2 die Zusatzbeschleunigungen vor, die zu p_1 und p_2 hinzukommen müssen, um die gemeinschaftliche Beschleunigung p zu ergeben. Ist diese (z. B. durch Beobachtung) bekannt, so ist

$$p - p_1 = \pi_1,$$
$$p - p_2 = \pi_2,$$

und da Beschleunigungen nur durch Kräfte bestimmt (gesetzt) werden, so hat man sich π_1 und π_2 vorzustellen als das Ergebnis von zwei Kräften

$$\varkappa_1 = m_1\pi_1 \text{ und } \varkappa_2 = m_2\pi_2,$$

die je auf m_1 und m_2 wirken. Da ursprünglich nur die beiden Kräfte P_1 und P_2 gesetzt waren (»äussere Kräfte«), so hat die Annahme der Starrheit der Strecke m_1m_2 indirekt zwei neue Kräfte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ erfordert (»innere Kräfte«). Die Möglichkeit der Bewegung von m_1m_2 als starres Gebilde (als ganzes) erheischt also das Auftreten innerer Kräfte, die die Beschleunigungen p_1 und p_2 ausgleichen, die m_1 und m_2 sonst jedes für sich erhalten würden, oder noch genauer: die einzige Möglichkeit, die Bedingung der Starrheit, d. h. der unveränderlichen Länge von m_1m_2 in die Sprache der Mechanik zu übertragen, bietet die Setzung von »inneren« Kräften, die nach Art der Widerstände niemals selbst Bewegungen hervorbringen, sondern die automatisch allemal nur dann einspringen, wenn ohne sie eine Veränderung des Abstandes m_1m_2 eintreten würde, die dann aber auch sofort mit derjenigen Intensität auftreten, die ausreicht, um den ursprünglichen Abstand genau zu erhalten.

Wenn nun auch diese Übersetzung »die Starrheit von m_1m_2 besteht in der Wirkung von inneren Kräften« die einzige ist, die die Begriffssprache der Mechanik gestattet, so ist sie doch zunächst keineswegs eindeutig. Sind nämlich p_1 und p_2 bekannt, so lässt der gesuchte gemeinschaftliche Wert von p:

$$p_1 + \pi_1 = p_2 + \pi_2$$

die Zusatzbeschleunigungen π_1 und π_2, also auch die inneren Kräfte (und p) vollkommen unbestimmt, da die Gleichung durch unendlich viele Wertepaare π_1 und π_2 erfüllt wird, sodass nur in ganz besonderen Fällen (z. B. bei bekanntem p) π_1 und π_2 eindeutig gegeben sind. Es bedarf daher noch eines Erfahrungssatzes oder besser Axiomes, welches einer Erfahrungsthatsache nachgebildet ist. Man kann sich vorstellen, dass $\varkappa_1$, welches in unserm Falle auf m_1 zurückhaltend wirkt und nach m_2 gerichtet ist, auch physikalisch von m_2 ausgeht, und demgemäss $\varkappa_2$ als die von m_1 ausgehende Gegenwirkung ansehn. Wir nehmen an, dass Wirkung und Gegenwirkung, die zwischen verschiedenen Körpern ja erfahrungsgemäss gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, auch hier an den einzelnen Massenteilchen desselben Körpers das gleiche Verhalten zeigen, d. h. wir setzen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung, ein wissenschaftlicher Versuch, der sich durch den Erfolg zu rechtfertigen hat.

Der eben entwickelten abstrakten Vorstellung des starren Systems entsprechen näherungsweise die festen Körper des täglichen Lebens. Die genauere Beobachtung lehrt nämlich, dass die Festigkeit keine absolute ist; es widersetzen sich zwar innere Widerstände sofort jeder relativen Verschiebung der Massenteilchen, aber die Grösse dieser Widerstände reicht nicht sogleich aus, die Abstandsänderung ganz zu verhindern. Erst mit der fortschreitenden Dehnung (Verkürzung) wachsen diese inneren Kräfte ausserordentlich schnell zu einer Höhe an, die eine weitere Gestaltsveränderung ausschliesst. Die elastischen Kräfte hinken also gegen die inneren Kräfte des idealen starren Systems ein wenig nach, indem sie erst nach einer gewissen Deformation denjenigen Betrag erreichen, der von Anfang an zur Verhütung der entstehenden Formänderung erforderlich gewesen wäre. Dabei ist der Gesamtbetrag der Deformation vollkommen unscheinbar gegen alle sonst vorkommenden Längengrössen, sodass die »festen« Körper thatsächlich elastische Körper von sehr grossem Modulus sind. Das starre System erscheint somit auch als die Grenze, der ein elastischer Körper sich unbeschränkt nähert, wenn der Modulus über alle Massen wächst. Je nach Umständen wird die eine oder andere Darstellungsweise mehr behagen.

1. Beispiel. Es sei nur P_1 vorhanden (Fig. 2). P_1 wirkt unmittelbar nur auf m_1; wäre m_1 frei, so würde seine Beschleunigung $p_1 = P_1/m_1$ sein, d. h. der Punkt m_1 würde versuchen (wenn er in Ruhe war), eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der Richtung von P_1 anzutreten, während m_2 in Ruhe bleiben würde. Der hierdurch drohenden Dehnung von AB widerstreben aber die gleichen und entgegengesetzt gerichteten inneren Kräfte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sofort und erfolgreich, d. h. m_1 und m_2 erhalten die gleiche Beschleunigung p und behalten deshalb ihren Abstand.

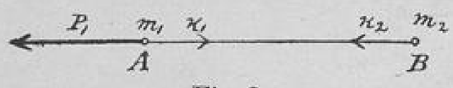

Fig. 2.

Nicht so einfach, aber anschaulicher ist die Auffassung von AB als einer pseudoelastischen Strecke. Hiernach tritt m_1 seine Bewegung in der Richtung von P_1 wirklich an, die Dehnung von AB tritt thatsächlich ein. Sofort erwachen die elastischen Widerstände und wachsen nach verschwindend kleiner Dehnung von AB derart an, dass ein weiteres Fortschreiten der Dehnung unterbleibt. Schliesslich wirkt, wenn die verschwindend kleine Dehnung vollendet ist, m_2 auf m_1 zurückhaltend mit der Kraft $\varkappa_1$ (hier dem Trägheitswiderstande) und erleidet also von m_1 die entgegengesetzt gleiche Einwirkung $\varkappa_2$; der gemeinschaftliche Wert $\varkappa$ heisst in diesem Falle die Zugspannung von AB. Das allmähliche Anwachsen der elastischen Widerstände, die natürlich in jedem Augenblick der Dehnung gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, bis zum Schluss- und Maximalwert $\varkappa$ der Zugspannung, wo nach vollendeter Dehnung die Beschleunigungen von m_1 und m_2 gleich werden, soll weiter unten noch näher gewürdigt werden.

Jedenfalls erhalten, mit oder ohne Dehnung von AB, die beiden Punkte m_1 und m_2 die gleiche Beschleunigung p (nach links), die nunmehr, nach Einführung der inneren Kräfte, wie die Beschleunigung vollkommen freier Punkte zu berechnen ist. Werden die Kräfte absolut genommen, so ist die Beschleunigung von m_2: $p = \pi_2 = \varkappa_2/m_2$, die von m_1: $p = (P_1 - \varkappa_1)/m_1$, also ist

$$\frac{\varkappa_2}{m_2} = \frac{P_1 - \varkappa_1}{m_1}, \text{ woraus}$$

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \frac{m_2 P_1}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$\varkappa$ und P_1 sind also proportional. Daraus ergiebt sich die gemeinschaftliche Beschleunigung

$$p = \frac{\varkappa_2}{m_2} = \frac{P_1}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die Formel (2) würde man unmittelbar erhalten haben durch die Annahme, dass beide Massen zu einer einzigen zusammengeballt, als einheitlicher Massenpunkt der Wirkung von P_1 unterliegen, dass also bei einem festen Körper eine Kraft P_1 samt ihrem materiellen Angriffspunkte m_1 in der Richtung der Kraft beliebig verlegbar sei, z. B. nach m_2. Es würde dann aus dieser

Voraussetzung die Gleichheit von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sich als Folgerung ergeben; beide Annahmen sind also gleichwertig. Es folgt z. B. aus $p = P_1/(m_1 + m_2)$ wegen $p_1 + \pi_1 = p$

$$\frac{P_1}{m_1} + \pi_1 = \frac{P_1}{m_1 + m_2},$$

$$\text{woraus } \pi_1 = -P_1 \frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)},$$

$$\text{also } \varkappa_1 = m_1 \pi_1 = -P_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Ferner ist

$$p_2 + \pi_2 = p,$$

$$0 + \pi_2 = p = \frac{P_1}{m_1 + m_2},$$

$$\text{also } \varkappa_2 = m_2 \pi_2 = P_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = -\varkappa_1,$$

d. h. $\varkappa_2$ und $\varkappa_1$ sind von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung.

Wiegt m_1 100 kg, m_2 50 kg, und ist $P_1 = 27$ kg, so ist nach Formel 1) $\varkappa_1 = \varkappa_2 = = P_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 27 \cdot \frac{50/9{,}81}{(100+50)/9{,}81} = 9 \text{ kg} = \frac{1}{3} P_1$. Die Spannung eines gewichtslosen Fadens, den man zur Verbindung von m_1 und m_2 benutzen würde, beträgt also 9 kg.

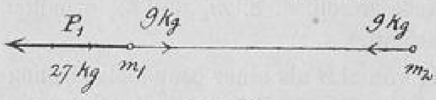

Fig. 3.

Es ergeben sich nunmehr die wirklichen Beschleunigungen von m_1 und m_2

$$p_1' = \frac{27 - 9}{100/9{,}81} = \frac{18 \,.\, 9{,}81}{100} = 0{,}18 \,.\, 9{,}81 \; ms^{-2},$$

$$p_2' = \frac{9}{50/9{,}81} = \frac{9 \,.\, 9{,}81}{50} = 0{,}18 \,.\, 9{,}81 \; ms^{-2},$$

also gleich, wie es sich gehört, da $p_1' = p_2' = p = \frac{P_1}{m_1 + m_2} = \frac{27 \,.\, 9{,}81}{150} = 0{,}18 \,.\, 9{,}81 \; ms^{-2}$ sein muss.

Für $m_1 = m_2 = 100/9{,}81$ erhält man $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \frac{27 \,.\, 100}{200} = 13{,}5$ kg etc. etc.

Wie steht es in diesem Falle mit der geleisteten Arbeit? Bewegen sich die beiden Massen (das starre Gebilde) um das Stück s vorwärts, so ist die Summe der an m_1 und m_2 geleisteten Arbeiten

$$(P_1 - \varkappa_1)s + \varkappa_2 s = P_1 s - \varkappa_1 s + \varkappa_2 s = P_1 s \; mkg,$$

d. h. die gesamte Arbeit wird von der äusseren Kraft geleistet, die inneren Kräfte leisten zusammen die Arbeitssumme Null.

Als Ergänzung dieses ersten und einfachsten Falles diene die Betrachtung des entsprechenden elastischen Systemes. Zwei gleiche Massen m_1 und m_2 vom Abstande a sind elastisch mit einander verbunden, auf m_1 wirke P in der Richtung von a. Wäre m_1 allein, so würde seine Beschleunigung $p_1 = P/m_1$ sein, die Beschleunigung der anderen Masse wäre Null. Durch die Beschleunigung der vorderen Masse tritt eine Vergrösserung des Abstandes, eine Dehnung $\triangle a$ ein. Zugleich mit derselben erwachen die (gleichen) elastischen Widerstände, die auf m_1 hemmend, auf m_2 fördernd einwirken. Die Grösse dieser inneren Kräfte wächst stetig, wie $\triangle a$ wächst und ist $\triangle a$ annähernd proportional. Also wird die ursprüngliche Beschleunigung von m_1 (P/m_1) stetig verkleinert, die von m_2 in demselben Masse vergrössert.

Fig. 4.

Dies dauert an, bis die Beschleunigung von m_1 auf die Hälfte reduziert ist, während die von m_2 auf denselben Wert $(P/2m)$ ansteigt. Von nun an (gleiche Beschleunigung!) hört die weitere Vergrösserung des Abstandes auf, damit aber auch das Wachsen der inneren Kräfte, dieselben haben ihr Maximum erreicht. Wir haben also in dem Moment, wo P zu wirken beginnt, folgendes Schema:

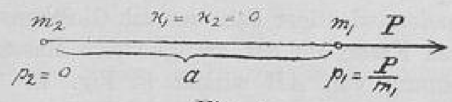

Fig. 5.

schliesslich nach Beendigung der Dehnung:

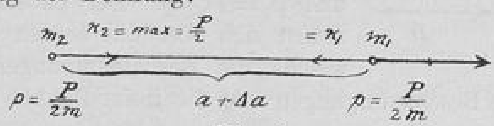

Fig. 6.

Da auch im Schlussmoment ($\varkappa_1 = \varkappa_2 = max.$), wie in jedem andern Augenblick die elastische Zugspannung $\varkappa$ proportional $\triangle a$ ist, also $\varkappa = f.\triangle a$ gesetzt werden muss, so wächst $\varkappa$ während des Entstehens von $\triangle a$ von 0 auf $\varkappa = f.\triangle a$, wo f die Kraft bedeutet, die eine Masse auf die andere ausüben würde, wenn $\triangle a = 1m$ wäre. Demnach ist die Kraft, die auf m_1 schliesslich einwirkt, $P - \varkappa_{\max} = P - f.\triangle a$, und da die Beschleunigung von m_1 zuletzt $P/2m$ ist, so haben wir nach der allgemeinen Gleichung

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

$$P - f.\triangle a = m.\frac{P}{2m},$$

$$\triangle a = \frac{P}{2f},$$

womit auch die Dehnung von a durch P und einen bestimmten Koëffizienten ausgedrückt ist.

Bei den starren d. h. sehr wenig formveränderlichen Körpern geschieht die ganze Bildung von $\triangle a$ und demgemäss das Anwachsen der elastischen Widerstände bis zum Schlusswert $\varkappa = P/2$ in ausserordentlich kurzer Zeit, sodass der neue Abstand $a + P/2f$ statt des alten Abstandes a fast plötzlich eintritt.

Übrigens ist die ganze Betrachtung nur dann vollkommen genau, wenn die beiden Massen in dem Augenblick, wo die Kraft P zu wirken beginnt, 1) die gleiche Anfangsgeschwindigkeit z. B. 0, 2) die Entfernung $a + P/2f$ schon besitzen, wie man bei sehr harten Körpern mit grosser Annäherung voraussetzen kann. In jedem anderen Falle (bei den eigentlich elastischen Körpern) erfolgt, wie die höhere Rechnung lehrt, neben der gleichförmig beschleunigten Bewegung ($p = P/2m$) des Schwerpunktes der beiden Massen noch eine in Bezug auf den Schwerpunkt symmetrisch-schwingende Bewegung derselben, deren Dauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2f}}$, also im allgemeinen sehr gering ist ebenso wie die Amplitude $P/2f = \triangle a$. Bei sehr harten Körpern sind diese Schwingungen wegen der hohen Schwingungszahl und der kleinen Exkursionen unbemerkbar, und auch bei den eigentlich »elastischen« Körpern verschwinden sie in praxi bald unter Wärmebildung infolge irgend welcher Widerstände. Das ganze Beispiel ist durchgeführt bei Mach, die Mechanik in ihrer Entwicklung[1]), pag. 242 ff.; $a + \triangle a = a + P/2f$ wird dann natürlich die dauernde Entfernung nach dem Aufhören der Schwingungen.

[1]) Leipzig, F. A. Brockhaus, 1883.

Schon aus unserer ganz elementaren Betrachtung geht aber bereits eine Bemerkung hervor, die für die Behandlung der elastischen Systeme ausschlaggebend geworden ist, dass nämlich ein elastischer Körper, nachdem die dauernde Verzerrung bei Beginn der Bewegung einmal eingetreten ist, sich weiterhin von einem absolut starren Körper nicht mehr unterscheidet (Stevins hydrostatischer Kunstgriff).

2. Beispiel. Ein besonders wichtiger Fall, der das Gleichgewicht als Unterfall einschliesst, ist die Wirkung zweier äusseren Kräfte auf das zweigliedrige Massensystem. Auch jetzt mögen P_1 und P_2 noch in der Richtung von AB wirken (s. Fig. 7). Hier würden die virtuellen

Fig. 7.

Beschleunigungen der freien Massenpunkte sein $p_1 = P_1/m_1$ und $p_2 = P_2/m_2$. Der bevorstehenden Dehnung widersetzen sich aber die beiden inneren Kräfte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, welche die Beschleunigungen (Geschwindigkeiten) ausgleichen. Nunmehr sind die Beschleunigungen wie die freier Punkte zu berechnen, also die von A zu $\frac{P_1-\varkappa_1}{m_1}$, die von B zu $\frac{\varkappa_2-P_2}{m_2}$ in absoluten Werten. Der Abstand AB darf sich nun nicht mehr ändern, es ist also

$$p=\frac{P_1-\varkappa_1}{m_1}=\frac{\varkappa_2-P_2}{m_2},$$

woraus

$$\varkappa_2=\varkappa_1=\frac{m_2 P_1+m_1 P_2}{m_1+m_2} \quad \ldots\ldots \text{(3)}$$

Die gemeinschaftliche Beschleunigung von m_1 und m_2 ist also

$$p=\frac{P_1-\varkappa_1}{m_1}=\frac{P_1-\dfrac{m_2P_1+m_1P_2}{m_1+m_2}}{m_1}=\frac{P_1-P_2}{m_1+m_2} \quad \ldots . \text{(4)}$$

Die Formel (4) würde man unmittelbar erhalten haben durch die Annahme, dass es erlaubt ist, jede der beiden Kräfte (P_1) samt ihrem materiellen Angriffspunkte (m_1) beliebig in der Kraftrichtung zu verlegen (z. B. nach m_2). Die geleistete Arbeit ist hier

$$(P_1-\varkappa_1)s+(\varkappa_2-P_2)s=P_1s-P_2s,$$

es ist also wiederum die Arbeitssumme der inneren Kräfte $= 0$, d. h. die gesamte Arbeit wird lediglich von den äusseren Kräften verrichtet.

Zahlenbeispiel. Es sei $m_1=100/9{,}81$, $m_2=50/9{,}81$, $P_1=36$ kg, $P_2=9$ kg (vergl. oben); dann wird

$$\varkappa_1=\varkappa_2=\frac{50.36+100.9}{150}=18 \text{ kg},$$

die Zugspannung ist also doppelt so gross wie im 1. Beispiel. Die wirklichen Beschleunigungen von m_1 und m_2 werden

$$p'=\frac{P_1-\varkappa_1}{m_1}=\frac{36-18}{100/9{,}81}=0{,}18.9{,}81\ ms^{-2},$$

$$p''=\frac{\varkappa_2-P_2}{m_2}=\frac{18-9}{50/9{,}81}=0{,}18.9{,}81\ ms^{-2},$$

also beide gleich

$$p=\frac{P_1-P_2}{m_1+m_2}=\frac{36-9}{150/9{,}81}=0{,}18.9{,}81\ ms^{-2}.$$

Die Punkte bewegen sich also in der That wie vollkommen freie Massen; eben deshalb ist auch die Betrachtung unabhängig von etwa schon vorhandenen Geschwindigkeiten von m_1 und m_2, die natürlich der Starrheit des Gebildes nicht widersprechen dürfen.

Ein besonders wichtiger Fall ist die Annahme $P_1 = P_2$ (die Richtungen wie oben). Die Gleichung (3) liefert

$$\varkappa_2 = \varkappa_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} P_1 = P_1 = P_2,$$

und die gemeinschaftliche Beschleunigung ist

$$p = p' = p'' = \frac{P_1 - \varkappa_1}{m_1} = 0.$$

Da jetzt jeder der beiden Massenpunkte die Beschleunigung 0 hat (im Gleichgewicht ist), so sagt man, das System sei im Gleichgewicht. Wir haben also Ruhe des Systems (jedes Punktes) oder gleichförmige geradlinige Bewegung des Systems nach einer beliebigen Richtung. Das letztere gilt wegen der Beschleunigung 0 zunächst für jeden einzelnen Systempunkt, wegen der Starrheit des Gebildes können aber die Punkte nur kongruente Geschwindigkeiten haben, die blosse Trägheit genügt in diesem Falle zur Erhaltung des Ganzen; auch die krummlinige Bewegung eines Systempunktes ist hierdurch ausgeschlossen.

Die Zug- oder Druckspannung ist jetzt gleich den äusseren Kräften.

Der oben gefundene Wert für die Gesamtarbeit war $P_1 s - P_2 s = (P_1 - P_2)s$. Da im Falle des Gleichgewichts $P_1 = P_2$ ist, so ist die Gesamtarbeit der äusseren Kräfte jetzt Null für jede willkürliche Verschiebung des Systems AB (Sonderfall des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten).

Zur besonderen Beleuchtung der Formeln (3) und (4) dienen noch die Fälle 1) $P_1 = P_2$ und beide Kräfte in demselben Sinne wirkend, hier wird $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$! 2) $P_2 = 0$, liefert Beispiel 1 noch einmal. 3) $m_1 = m_2$ mit oder ohne Gleichheit von P_1 und P_2. Der Gleichgewichtsfall (P_1 und P_2 gleich aber entgegengesetzt gerichtet) lässt sich auch direkt, ohne voraufgegangene dynamische Betrachtungen erledigen wie bei Ritter, technische Mechanik[1]), pag. 149 ff.

3. Beispiel. Das Massensystem sei dreigliederig, alle drei Massen auf einer Geraden; sowohl zwischen A und B, wie zwischen B und C seien starre Verbindungen, während zwischen A und C keine starre Verbindung besteht (Charnier bei B); die einzige Kraft P wirke auf m_1 in der Richtung AB. Der gemeinsame Wert der Beschleunigung der drei Massen ist

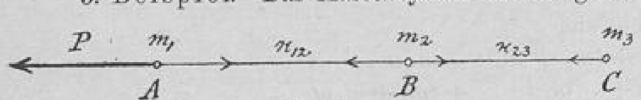

Fig. 8.

$$\frac{P - \varkappa_{12}}{m_1} = \frac{\varkappa_{12} - \varkappa_{23}}{m_2} = \frac{\varkappa_{23}}{m_3}.$$

Durch Kombination der drei Werte zu zweien ergiebt sich

$$\begin{aligned} m_2 P &= \varkappa_{12}(m_1 + m_2) - m_1 \varkappa_{23} \\ m_3 P &= \varkappa_{12} \cdot m_3 \qquad\quad + m_1 \varkappa_{23} \\ \hline (m_2 + m_3) P &= \varkappa_{12}(m_1 + m_2 + m_3) \\ \varkappa_{12} &= \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} P = \frac{m_2 + m_3}{M} P \end{aligned}$$

unter leicht verständlicher Abkürzung.

Ferner erhält man durch Einsetzen des gefundenen Wertes von $\varkappa_{12}$

$$\frac{P - \dfrac{m_2 + m_3}{M} P}{m_1} = \frac{\varkappa_{23}}{m_3},$$

woraus

$$\varkappa_{23} = \frac{m_3 P}{M}.$$

[1]) Leipzig, Baumgärtner, 1884.

Mithin ist die gemeinschaftliche Beschleunigung der drei Massen

$$p = \frac{P - \varkappa_{12}}{m_1} = \frac{P - \dfrac{m_2 + m_3}{M} P}{m_1} = \frac{P}{M},$$

wie zu erwarten stand. Denselben Wert liefern die Quotienten $(\varkappa_{12} - \varkappa_{23})/m_2$ und $\varkappa_{23}/m_3$. Für $m_1 = m_2 = m_3$ ist die gemeinschaftliche Beschleunigung $\dfrac{P}{3m} = \dfrac{P/3}{m}$ etc. Das Beispiel ist leicht auf beliebig viele Massen zu erweitern, auch in dem Falle, dass an den Massen ausser P noch andere äussere Kräfte (etwa Reibungswiderstände) wirken (Kette, Eisenbahnzug).

Ist ausserdem noch A mit C starr verbunden, so wird die Beanspruchung der einzelnen Strecken unbestimmt (überbestimmt). Bezeichnen wir die Spannung längs AB mit x, längs AC mit y, längs BC mit z, so ist die gemeinschaftliche Beschleunigung der drei Massen

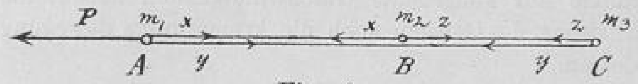

Fig. 9.

$$\frac{P - (x + y)}{m_1} = \frac{x - z}{m_2} = \frac{z + y}{m_3}.$$

Die Kombinationen (12) und (13) dieser 3 Quotienten liefern:

$$\begin{aligned} m_2 P &= (m_1 + m_2)x + m_2 y - m_1 z \\ m_3 P &= m_3 x + (m_1 + m_3) y + m_1 z \\ \hline (m_2 + m_3) P &= (m_1 + m_2 + m_3)(x + y) \\ x + y &= \frac{(m_2 + m_3)P}{M} (= \varkappa_{12} \text{ von vorhin}). \end{aligned}$$

Durch Kombination von (23) und (12) ergiebt sich

$$\begin{aligned} 0 &= -m_3 x + (m_2 + m_3) z + m_2 y \\ m_3 P &= m_3 x + m_1 z + (m_1 + m_3) y \\ \hline m_3 P &= (y + z) M \\ z + y &= \frac{m_3 P}{M} (= \varkappa_{23} \text{ von vorhin}). \end{aligned}$$

Aus den beiden Gleichungen

$$x + y = \frac{(m_2 + m_3) P}{M}$$

$$y + z = \frac{m_3 P}{M}$$

folgt zwar durch Subtraktion sofort $x - z = \dfrac{m_2 P}{M}$, doch ist dies natürlich keine unabhängige Relation zwischen x und z, vielmehr folgt aus der Doppelgleichung der 3 Quotienten

$$\frac{P - (x + y)}{m_1} = \frac{x - z}{m_2} = \frac{z + y}{m_3}$$

schon ohne jede Rechnung die Unbestimmtheit der 3 Zugspannungen x, y, z (3 Unbekannte, aber nur 2 unabhängige Gleichungen). Nimmt man x willkürlich an, so ist $y = P(m_2 + m_3)/M - x$ und $z = m_3 P/M - y$, und so giebt es unzählige Wertedrillinge, wohl aber sind die Summen $x + y$, $y \quad z$ und $x - z$ vollkommen bestimmte Grössen.

Der erledigte Fall von Überbestimmung ist typisch für eine Reihe von Aufgaben.

4. Beispiel. Um den Fall zu erledigen, wo bei einem System von zwei Massenpunkten die äusseren Kräfte nicht mehr in der Richtung der Verbindungslinie wirken, bedarf es eines Hilfssatzes über das rechtwinklige Dreieck: »Ist eine Kathete unscheinbar klein gegen die übrigen Seiten, so ist der Unterschied der Hypotenuse und der anderen Kathete unendlich klein von der zweiten Ordnung«. Ist δ die kleine Kathete, r' und r die beiden anderen Seiten, so ist

$$r_1^2 - r^2 = \delta^2$$

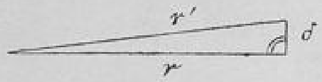

Fig. 10.

$$(r_1 + r)(r_1 - r) = \delta^2$$

$$r_1 - r = h = \frac{1}{r_1 + r} \cdot \delta^2$$

$$\lim_{\delta = 0} \left(\frac{h}{\delta}\right) = \frac{\delta}{2r} = 0,$$

d. h. h verschwindet gegen δ.[1])

Wirken nun die beiden Kräfte auf unser zweigliedriges Massensystem nicht in der Richtung der Verbindungslinie, so zerlegen wir jede in zwei Komponenten, eine in der Richtung von AB, die andere senkrecht dazu, z. B. P_1 in die beiden Komponenten $P_1 cos\alpha$ und $P_1 sin\alpha$. P_1 wirkt unmittelbar nur auf m_1 und würde m_1 in dem nächsten Zeitteilchen von A nach A' entführen, wenn nicht sofort die inneren Kräfte dazwischenträten.

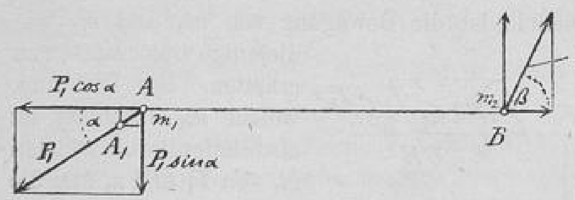

Fig. 11.

Diesen virtuellen (gar nicht zur Ausführung kommenden) Transport von m_1 längs AA_1 und die hierdurch drohende Dehnung von AB um das Stück $(A_1B - AB)$ können wir uns in zwei Akten erfolgt denken: 1) Verschiebung von m_1 in der Richtung BA (durch die Kraft $P_1 cos\alpha$) um das Stück $AA'.\, cos\alpha$, 2) Verschiebung aus dieser Lage nach A_1 (durch die Komponente $P_1 sin\alpha$) um das Stück $AA_1 .\, sin\alpha$. Man kann die beiden Verschiebungen natürlich auch als gleichzeitig erfolgend vorstellen. Durch die erste Verschiebung würde eine direkte Dehnung von AB erfolgen u. zw. um das Stückchen $AA_1\, cos\, \alpha$, und diese Dehnung muss also durch das sofortige Einspringen der inneren Kräfte verhindert werden. Die zweite Verschiebung (um das Stückchen $AA_1 sin\alpha \perp AB$) würde indirekt eine weitere Dehnung veranlassen, weil die Hypotenuse A_1B länger ist als die Kathete $(AB + AA_1\, cos\alpha)$. Diese Dehnung ist aber nach dem voraufgegangenen Satze unendlich klein gegen den Betrag $AA_1 .\, sin\alpha$ der zweiten Verschiebung, also auch verschwindend klein gegen den Betrag $AA_1\, cos\alpha$ der ersten Dehnung, die mit $AA_1\, sin\alpha$ von gleicher Grössenordnung ist. Die zweite (indirekte) Dehnung ist also gegen die erste mit jedem Grade der Annäherung zu vernachlässigen, d. h. aber, die zu AB senkrechte Komponente $P_1 sin\alpha$ von P_1 trägt zur Dehnung von AB gar nichts bei, sie könnte eben so gut fehlen; die virtuelle Dehnung der Strecke AB ist also ganz allein auf Rechnung der zweiten Komponente $P_1 cos\alpha$ zu setzen. Mithin braucht man zur Ermittelung der inneren Widerstände, die ja die Veränderung des Abstandes $m_1 m_2$ verhüten sollen (S. 22), lediglich die Projektion von P_1 auf AB zu kennen, und es ist für die Spannung von AB ganz gleich, ob P_1

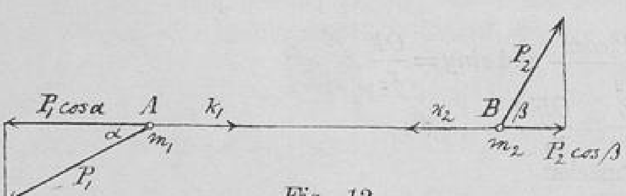

Fig. 12.

[1]) Entnommen aus Seeger, die Elemente der algebraischen Analysis, Wismar 1894, pag. 31.

vorhanden ist oder nur $P_1 cos\alpha$. Da für m_2 ganz dieselben Erwägungen gelten, so ist nach S. 26 die gemeinschaftliche Beschleunigungskomponente längs AB

$$p = \frac{P_1 cos\alpha - \varkappa_1}{m_1} = \frac{\varkappa_2 - P_2 cos\beta}{m_2},$$

woraus die Grösse der Zugspannung

$$\varkappa_2 = \varkappa_1 = \frac{m_2 P_1 cos\alpha + m_1 P_2 cos\beta}{m_1 + m_2}$$

und die gemeinschaftliche Beschleunigungskomponente längs AB

$$p_{AB} = \frac{P_1 cos\alpha - P_2 cos\beta}{m_1 + m_2}$$

sich ohne weiteres ergiebt.

In Bezug auf die wirklich erfolgende Bewegung von AB ist es natürlich gar nicht gleichgültig, ob P_1 vorhanden ist oder nur seine Projektion $P_1 cos\alpha$; die Bewegung bleibt hier nicht eine einfach fortschreitende.

Nach Hinzufügung der elastischen Widerstände ist die Bewegung von m_1 und m_2 wie diejenige freier Massen zu erhalten. Die Richtung, welche m_1 einschlägt, ist also die der Resultierenden R_1 von P_1 und $\varkappa_1$ und die anfängliche Beschleunigung von m_1 ist $p_1 = \frac{R_1}{m_1}$. Entsprechendes gilt von der Bewegung der Masse m_2, und es lässt sich nachweisen, dass die beginnende Bewegung beider Massen aufgefasst werden kann als eine sehr kurze (gleichförmig beschleunigte) Drehung des ganzen Systems um den Punkt O (wenn $AO \perp R_1$, $BO \perp R_2$), das sogenannte Momentanzentrum.

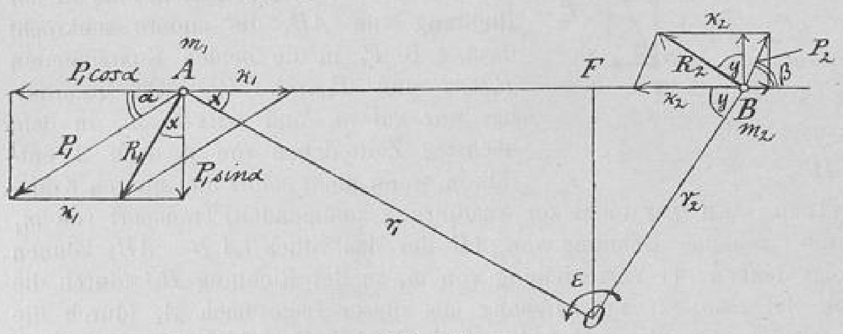

Fig. 13.

Bezeichnet man den Winkel $(R_1 / P_1 sin\,\alpha)$ mit x, so ist

$$sin\,x = \frac{P_1 cos\alpha - \varkappa_1}{R_1}.$$

Ebenso ist in dem zunächst beliebig grossen rechtwinkligen Dreieck AOF $(AO \perp R_1)$

$$sin\ x = \frac{OF}{r_1},$$

also

$$\frac{P_1 cos\alpha - \varkappa_1}{R_1} = \frac{OF}{r_1} \quad \ldots\ldots (5)$$

Entsprechend ergiebt sich aus

$$sin y = \frac{\varkappa_2 - P_2 cos\beta}{R_2} \text{ und } sin y = \frac{OF}{r_2}$$

$$\frac{\varkappa_2 - P_2 cos\beta}{R_2} = \frac{OF}{r_2} \quad \ldots\ldots (6)$$

Dividiert man (5) durch (6), so erhält man zunächst

$$\frac{(P_1 cos\alpha - \varkappa_1)\ R_2}{(\varkappa_2 - P_2 cos\beta)\ R_1} = \frac{r_2}{r_1} \quad \ldots\ldots (7)$$

Führt man in die Klammern der linken Seite den oben erhaltenen Wert

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \frac{m_2 P_1 \cos\alpha + m_1 P_2 \cos\beta}{m_1 + m_2}$$

ein, so erhält man für die Zählerklammer

$$P_1 \cos\alpha - \frac{m_2 P_1 \cos\alpha + m_1 P_2 \cos\beta}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(P_1 \cos\alpha - P_2 \cos\beta)$$

und entsprechend für die Klammer im Nenner

$$\frac{m_2 P_1 \cos\alpha + m_1 P_2 \cos\beta}{m_1 + m_2} - P_2 \cos\beta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(P_1 \cos\alpha - P_2 \cos\beta).$$

Setzt man die erhaltenen Werte in (7) ein, so ergiebt sich

$$\frac{m_1 . R_2}{m_2 . R_1} = \frac{\left(\frac{R_2}{m_2}\right)}{\left(\frac{R_1}{m_1}\right)} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{r_2}{r_1} \quad \ldots\ldots (8)$$

Denkt man sich das System in augenblicklicher Drehung um den Punkt O mit der Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \frac{p_1}{r_1} = \frac{p_2}{r_2}$ begriffen, so erhalten m_1 bezw. m_2 die linearen Beschleunigungen $r_1 \varepsilon = p_1$ und $r_2 \varepsilon = p_2$, also dieselben Werte, die ihnen durch die Resultierenden R_1 und R_2 einzeln erteilt werden. Der anfängliche Bewegungszustand ist also in der That identisch mit einer sehr kurzen gleichförmig beschleunigten Drehung um O. Die Äquivalenz der beiden Bewegungen gilt natürlich nur für ein so kurzes Zeitteilchen, dass man während desselben von jeglicher Veränderung der Kräfte absehen kann, also streng genommen nur für einen unteilbaren Augenblick, woher die Bezeichnung von O als Momentanzentrum. Mit der Lage O des Momentanzentrums und der Grösse der Winkelbeschleunigung ε ist aber u. a. die Geschwindigkeit sämtlicher Punkte der Verbindungsstrecke AB, z. B. die des Schwerpunktes S der beiden Massen m_1 und m_2, nach Grösse und Richtung gegeben. So übersieht man sofort, dass nur F sich in der ursprünglichen Richtung von AB bewegt, während alle übrigen Punkte aus dieser Richtung heraustreten. Ferner ist der Weg von S in dem Zeitteilchen τ senkrecht zu OS und der Länge nach $\sigma = \frac{OS . \varepsilon}{2} . \tau^2$, da $OS . \varepsilon$ die lineare Beschleunigung von S vorstellt u. s. w.

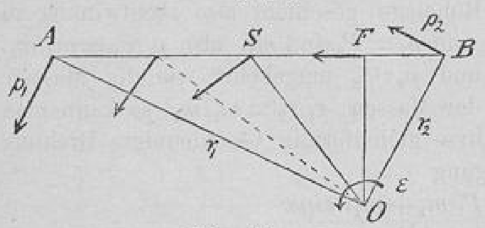

Fig. 14.

Auch rechnerisch lassen sich alle in Frage kommenden Grössen leicht ermitteln. So war die gemeinschaftliche Beschleunigungskomponente von m_1 und m_2 in der Richtung von AB (S. 30)

$$p_{AB} = \frac{P_1 \cos\alpha - P_2 \cos\beta}{m_1 + m_2}.$$

Dazu kommt die Beschleunigung, die von $P_1 \sin\alpha$ herrührt und $\perp AB$ steht, im Betrage von $P_1 \sin\alpha / m_1$, also ist die wirkliche Beschleunigung von m_1

$$p_1 = \sqrt{\left(\frac{P_1 \cos\alpha - P_2 \cos\beta}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{P_1 \sin\alpha}{m_1}\right)^2}$$

und R_1 davon das m_1-fache. Ebenso ist die resultierende Beschleunigung von m_2

$$p_2 = \sqrt{\left(\frac{P_1 \cos\alpha - P_2 \cos\beta}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{P_2 \sin\beta}{m_2}\right)^2}$$

und $R_2 = m_2 p_2$. r_1 und r_2 berechnen sich aus den beiden Gleichungen $r_1/r_2 = p_1/p_2$ (S. 31) und $r_1 cos x + r_2 cos y = AB = l$, worin $cos x = P_1 sin \alpha / R_1$ und $cos y = P_2 sin \beta / R_2$ sind. Daraus folgt schliesslich $\varepsilon = p_1/r_1 = p_2/r_2$. Alle diese Werte gelten natürlich nur für den allerersten Beginn der Bewegung. Für das nächstfolgende Zeitteilchen sind die weiter erfallenden Beschleunigungen schon mit den Endgeschwindigkeiten $r_1 \omega_1 = r_1 \varepsilon \tau$ etc. des ersten Zeitteilchens zu kombinieren, sodass leicht einzusehen ist, dass ein etwa vorhandenes Momentanzentrum für das zweite Zeitteilchen nicht mit O zusammenfallen wird, auch dann nicht, wenn P_1 und P_2 nach Grösse und (zu AB relativer) Richtung konstant sind. Wüsste man aber, wie die Kräfte sich mit der Zeit ändern (bezw. nicht ändern), so könnte man die Bewegung auch für das zweite und alle folgenden Zeitteilchen genau verfolgen, ohne irgend ein anderes Hülfsmittel als die ganz elementaren Newtonschen Sätze über die Bewegung des Punktes und die inneren Kräfte.[1] Die Schwierigkeiten, die sich hier ergeben würden, sind lediglich mathematische und nicht etwa mechanische (prinzipielle), und es ist von Wichtigkeit sich einzugestehen, dass all die schönen und bequemen Sätze, die »Prinzipien« der lebendigen Kraft, der virtuellen Verschiebungen, der Bewegung des Schwerpunktes etc. keine eigentlichen Prinzipien, d. h. nicht etwas grundsätzlich neues sind, sondern nur geschickte Eliminationsmethoden, die an einem Generalbeispiel zeigen, wie man die Wirkung der inneren Kräfte ganz umgehen kann.

Als anschauliche Spezialfälle unseres 4. Beispieles (S. 29) empfehlen sich folgende.

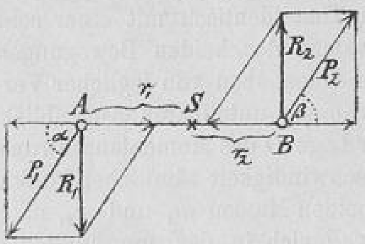

Fig. 15.

1) P_1 und P_2 sind gleich und parallel, aber von entgegengesetzter Richtung; das gleiche gilt dann auch von ihren Komponenten. Längs AB wirken $P_1 cos \alpha = P_2 cos \beta$, erzeugen also nach S. 27 die Zugspannung $\varkappa_1 = \varkappa_2 = P_1 cos \alpha = P_2 cos \beta$, sodass in der Richtung von AB Gleichgewicht herrscht. Dagegen wirken $\perp AB$ die beiden Komponenten (das Paar!) $P_1 sin \alpha$ und $P_2 sin \beta$, die in diesem Falle gleichzeitig die Resultierenden (aus P_1 und $\varkappa_1$) sind, wie aus der Figur unmittelbar hervorgeht. Die Anfangsbewegung von A und B (aus der Ruhelage) geschieht also rechtwinklig zu AB, und zwar sind die Beschleunigungen $p_1 = P_1 sin \alpha / m_1$ und $p_2 = P_2 sin \beta / m_2$, also $p_1/p_2 = m_2/m_1$, d. h. es verhalten sich auch die Anfangswege $p_1 \tau^2/2$ und $p_2 \tau^2/2$ umgekehrt wie die Massen. Teilt man also AB in S im umgekehrten Verhältnis der Massen: $r_1/r_2 = m_2/m_1$, so kann man die angestrebte Bewegung auch auffassen als eine sehr kurze gleichförmig beschleunigte Drehung um den (Schwer-) Punkt S mit der Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = \frac{p_1}{r_1} = \frac{P_1 sin \alpha}{m_1 r_1} = \frac{P_1 sin \alpha}{m_1 \left(\frac{AB \, . \, m_2}{m_1 + m_2} \right)} = \frac{P_1 (m_1 + m_2) \, sin \alpha}{AB \, . \, m_1 m_2}.$$

Noch einfacher wird die Sache, wenn P_1 und P_2 ausserdem noch rechtwinklig auf AB stehen. Hier fällt mit den fehlenden Komponenten $P . cos \alpha$ jegliche Zugspannung $\varkappa$ weg, die anfängliche Bewegung der beiden Punkte (Drehung um den Schwerpunkt S) ist von der Bewegung absolut freier Punkte nicht zu unterscheiden.

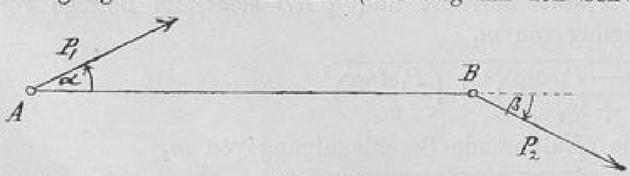

Fig. 16.

2) Sehr symmetrische Resultate liefert der durch Figur 16 veranschaulichte Fall, wo $P_1 = P_2$ und $\alpha = \beta$ sein mögen, der Sinn der Drehungen aber ein abweichender ist. — 3) Ist $P_2 = 0$, P_1 und α aber

[1] Vgl. Mach a. a. O. S. 239 u. f.

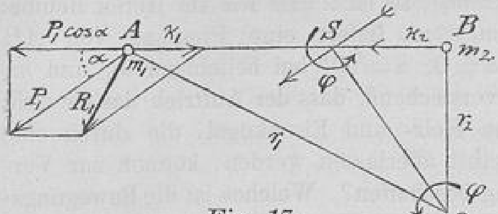

Fig. 17.

beliebig (Fig. 17), so wirkt in der Richtung von AB nur die äussere Kraft $P_1 \cos\alpha$, also ist die Zugspannung

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \frac{m_2 P_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Es wirkt in B nur $\varkappa_2$, die Beschleunigung von m_2 is also $p_2 = \varkappa_2/m_2$ und hat die Richtung BA; in A wirken P_1 und $\varkappa_1$, die R_1 als Resultierende ergeben, sodass $p_1 = R_1/m_1$ die Richtung von R_1 hat. Das Momentanzentrum O ist also der Schnittpunkt der Lote $BO \perp AB$ und $AO \perp R_1$. An diesem Beispiel etwa lässt sich leicht der Nachweis führen, dass die (unendlich) kleine Drehung um das Momentanzentrum O auch ersetzt werden kann durch eine eben so grosse und gleichsinnige Drehung um den beliebigen Punkt S (der natürlich auch der Schwerpunkt sein kann), wenn demselben gleichzeitig die lineare Verschiebung $OS.\varphi \perp OS$ erteilt wird. Lässt man beide Bewegungen nach einander vor sich gehen, so liefert die Drehung φ um S den Weg $AA_1 = AS.\varphi$, die nachfolgende Verschiebung von S um den Betrag $SS_{\prime\prime} = OS.\varphi$ den gleichgrossen Weg $A_{\prime}A_{\prime\prime}$, und es müsste also die Schlussstrecke $AA_{\prime\prime}$ die Drehung um das Momentanzentrum im Betrage von $r_1\varphi$ vorstellen, d. h. es müsste im Sinne der Streckentheorie

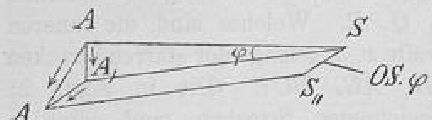

Fig. 18.

$$[r_1\varphi] \cong [OS.\varphi] + [AS.\varphi]$$

oder

$$[r_1] \cong [OS] + [AS]$$

sein, was die Figur 17 auf den ersten Blick bestätigt.

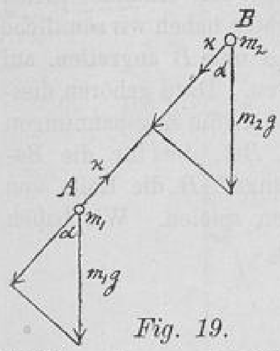

Fig. 19.

4) Besonders lehrreich ist die Bewegung eines Massensystems unter dem Einfluss der Schwere. Im leeren Raume haben wir längs $m_1 m_2$ die gleichen Beschleunigungskomponenten

$$\frac{m_1 g \cos\alpha - \varkappa}{m_1} = \frac{\varkappa + m_2 g \cos\alpha}{m_2},$$

also $\varkappa = 0$,

d. h. es existiert keinerlei Zug- oder Druckspannung (vgl. damit das eigentümliche Gefühl während des freien Falles des eigenen Körpers). Die Beschleunigung von m_1 ist also einfach g wie die Beschleunigung von m_2, also haben wir aus der Ruhelage heraus für beide Massen gleiche Wege und gleiche Geschwindigkeiten. Da diese ausserdem parallel sind, so bleibt auch $m_1 m_2$ dauernd sich selbst parallel. Leicht auf 3 und mehr Massenpunkte zu erweitern (s. u.).

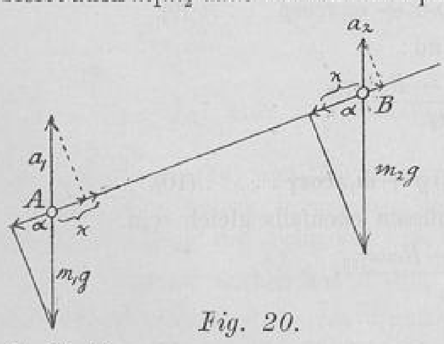

Fig. 20.

In der Atmosphäre (im Wasser) kommt noch der hydrostatische Auftrieb dazu (a_1 bezw. a_2), sodass wir längs AB die gleichen Beschleunigungskomponenten haben:

$$\frac{m_1 g \cos\alpha - \varkappa - a_1 \cos\alpha}{m_1} = \frac{m_2 g \cos\alpha + \varkappa - a_2 \cos\alpha}{m_2}$$

$$\text{woraus } \varkappa = \frac{m_1 a_2 - m_2 a_1}{m_1 + m_2} \cos\alpha.$$

Wir haben also, je nachdem $m_1 a_2 - m_2 a_1$ positiv oder negativ ist, Zug- oder Druckspannung. Sind beide Kugeln m_1 und m_2 gleich gross, ist also $a_1 = a_2 = a$, so ist die Spannung

$$\varkappa = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot a \cos\alpha.$$

Sind sie ausserdem aus gleichem Materiale ($m_1 = m_2$), so ist $\varkappa = 0$ wie im leeren Raume; ist $m_1 > m_2$, so wird AB auf Zug beansprucht, $m_1 < m_2$ liefert eine Pressung von AB. Weitere Sonderfälle ergeben sich aus den Annahmen $\alpha = 0$, $\alpha = 90^0$ bei beliebigen m_1 und m_2 u. s. w. Der Fall im Wasser ist dadurch besonders hervorstechend, dass der Auftrieb das Gewicht $m_1 g$ leicht erreichen und sogar übertreffen kann. Eine Holz- und Eisenkugel, die durch eine dünne feste Stange verbunden und im Wasser sich selbst überlassen werden, können zur Veranschaulichung dienen. Wie ist die beginnende Bewegung beschaffen? Welches ist die Bewegungsrichtung des Schwerpunktes? Welches ist die Winkelbeschleunigung? Vom Widerstande des Mittels ist natürlich überall abzusehen.

(3)

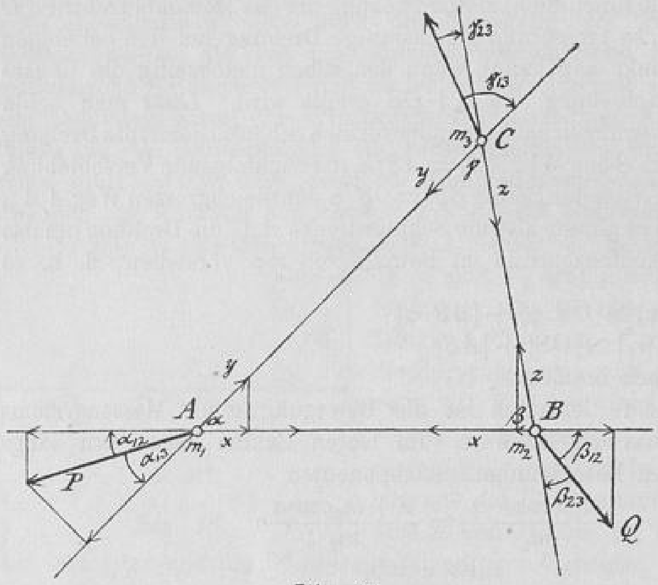

Fig. 21.

5. Beispiel. In den Ecken des starren Dreiecks ABC sind die Massen m_1, m_2, m_3 angebracht und unterliegen bzw. der Wirkung der 3 Kräfte P, Q, R. Welches sind die inneren Kräfte x, y, z längs der starren Strecken AB, AC, BC? (Die in Figur 21 gezeichneten Strecken sind sämtlich absolut zu nehmen.)

Zunächst müssen wegen des unveränderlichen Abstandes von A und B die Beschleunigungskomponenten von m_1 und m_2 längs AB einander gleich sein. Zu dem Ende haben wir sämtliche Kräfte, die an A und B angreifen, auf AB zu projizieren. Dazu gehören diesmal auch y und z, die Zugspannungen längs AC und BC, die für die Beschleunigung längs AB die Rolle von äusseren Kräften spielen. Wir haben dann längs AB die gleichen Beschleunigungskomponenten von m_1 und m_2:

$$\frac{P\cos\alpha_{12} - x - y\cos\alpha}{m_1} = \frac{x + z\cos\beta - Q\cos\beta_{12}}{m_2},$$

oder

$$m_2 P\cos\alpha_{12} + m_1 Q\cos\beta_{12} = (m_1 + m_2)\,x + m_2 y\cos\alpha + m_1 z\cos\beta \;.\;.\;.\;.\;.\; (9).$$

Die Beschleunigungen von m_1 und m_3 längs AC sind:

$$\frac{P\cos\alpha_{13} - y - x\cos\alpha}{m_1} = \frac{y + z\cos\gamma - R\cos\gamma_{13}}{m_3},$$

woraus.

$$m_3 P\cos\alpha_{13} + m_1 R\cos\gamma_{13} = m_3 x\cos\alpha + (m_1 + m_3)\,y + m_1 z\cos\gamma \;.\;.\;.\;.\;.\; (10).$$

Die Beschleunigungen von m_2 und m_3 längs BC müssen ebenfalls gleich sein:

$$\frac{Q\cos\beta_{23} - z - x\cos\beta}{m_2} = \frac{z + y\cos\gamma - R\cos\gamma_{23}}{m_3},$$

also

$$m_3 Q\cos\beta_{23} + m_2 R\cos\gamma_{23} = m_3 x\cos\beta + m_2 y\cos\gamma + (m_2 + m_3)\,z \;.\;.\;.\;.\;.\; (11),$$

sodass wir zur Bestimmung der 3 Spannungen x, y, z die folgenden Gleichungen haben:

$$\begin{aligned} m_2 P\cos\alpha_{12} + m_1 Q\cos\beta_{12} &= (m_1 + m_2)\,x + m_2\cos\alpha\,.\,y + m_1\cos\beta\,.\,z, \\ m_3 P\cos\alpha_{13} + m_1 R\cos\gamma_{13} &= m_3\cos\alpha\,.\,x + (m_1 + m_3)\,y + m_1\cos\gamma\,.\,z, \\ m_3 Q\cos\beta_{23} + m_2 R\cos\gamma_{23} &= m_3\cos\beta\,.\,x + m_2\cos\gamma\,.\,y + (m_2 + m_3)\,z. \end{aligned}$$

Die allgemeine Auflösung dieser Gleichungen, die noch die Berücksichtigung von $\alpha_{12} + \alpha_{13} = \alpha$ u. s. w. erfordern würde, lässt sich mit Hilfe der Determinanten leicht hinschreiben, doch ist damit für die Übersicht nichts gewonnen, und es ist kürzer, jeden einzelnen Fall besonders zu erledigen.

1. Aufgabe. Das Dreieck ABC sei gleichschenklig, ferner $m_1 = m_2 = m_3$, endlich wirke nur auf A (die Spitze des Dreiecks) eine Kraft P in der Richtung der Höhe und zwar nach aussen (s. Fig. 22).

Die Beschleunigungskomponenten längs AB sind, da die Spannungen der Schenkel offenbar gleich werden,

$$\frac{P\cos{}^{\alpha}/_{2} - y - y\cos\alpha}{m_1} = \frac{y - z\cos\beta}{m_2},$$

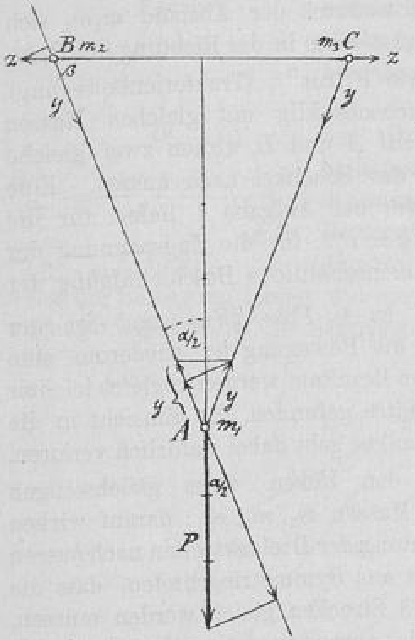

Fig. 22.

und wegen $m_1 = m_2$

$$P\cos{}^{\alpha}/_{2} = -z\cos\beta + y\,(2 + \cos\alpha)\;.\;.\;.\;.\;.\;(12).$$

Längs BC haben wir die Beschleunigungen:

$$\frac{z - y\cos\beta}{m_2} = \frac{y\cos\beta - z}{m_3},$$

also wegen $m_2 = m_3$

$$z = y\cos\beta\;.\;.\;.\;.\;.\;(13).$$

(z ist hier gleich nach aussen als Druckspannung genommen, um eine nochmalige Umkehrung des Zeichens zu vermeiden. Die als gleich vorausgesetzte Zugspannung der Schenkel würde sich natürlich auch rechnungsmässig ergeben, wenn die Spannung längs AC etwa mit x bezeichnet und besonders ausgewertet würde, nur hätte man dann 3 Gleichungen zu berücksichtigen). Setzt man den Wert von z aus (13) in (12) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} P\cos{}^{\alpha}/_{2} &= -y\,.\,\cos\beta^2 + 2y + y\cos\alpha \\ &= y(1 - \cos\beta^2) + y\,(1 + \cos\alpha) \\ &= y\sin\beta^2 + 2y\cos{}^{\alpha}/_{2}{}^2 = 3y\cos{}^{\alpha}/_{2}{}^2, \\ y &= \frac{P/3}{\cos{}^{\alpha}/_{2}}\;.\;.\;.\;.\;.\;(14) \end{aligned}$$

$$\text{also}\quad z = y\,.\,\cos\beta = \frac{P/3}{\cos{}^{\alpha}/_{2}}\cdot\sin{}^{\alpha}/_{2} = \frac{P}{3}\cdot\tan{}^{\alpha}/_{2}\;.\;.\;.\;.\;.\;(15).$$

Die Gleichungen (14) und (15) gestatten eine leichte Konstruktion von y und z: zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Kathete $P/3$ der Winkel $\alpha/2$ anliegt, so ist die Hypotenuse die Zugspannung des Schenkels, die andere Kathete die Druckspannung der Basis (Fig. 23).

Nunmehr wirken auf A drei Kräfte, P und die Schenkelspannungen. Die Resultierende der beiden letzteren ist $2y : \cos{}^{\alpha}/_{2} = 2P/3$ und hat die Richtung der Höhe, die auf A wirkende Gesamtkraft ist also $P - 2P/3 = P/3$ und hat ebenfalls die Richtung der Höhe.

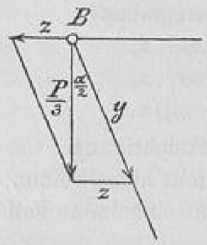

Fig. 23.

In B wirkt die Resultierende aus der Schenkelspannung y und der Basisspannung z, laut obiger Konstruktion also wiederum $P/3$ und parallel der Höhe. Die drei Massenpunkte erhalten also gleiche und parallele Beschleunigungen im Werte von $P/3m$, die Bewegung ist der Höhe parallel, also eine rein fortschreitende. Es ist so, als ob die 3 Massen zu einer einzigen Masse $3\,m$ zusammengeballt wären und nun der Wirkung von P unterlägen. Leichte Kontrolle durch die bekannten Schwerpunktssätze.

Man variiere in unserem Beispielchen den Winkel α bis zu 180^0 hinauf und bis zur Null hinunter; der letzte Fall $\alpha = 0$ führt direkt auf Beispiel 1 S. 23 zurück. Auch kann man $m_2 = m_3$ aber von m_1 verschieden annehmen etc.

Lohnend ist eine kleine Abänderung der Aufgabe dahin, dass die starre Verbindung zwischen m_2 und m_3 fehlt, in A vielmehr ein Charnier vorausgesetzt wird. Die Schenkelspannung ergiebt sich hier zu $y = \frac{P\cos{}^{\alpha}\!/_2}{2 + \cos\alpha}$; die Beschleunigung von m_2 und m_3 ist nicht mehr der Höhe parallel, sondern hat die Richtung des betreffenden Schenkels, wodurch der Abstand $m_2 m_3$ sich fortwährend vermindert. Dagegen wirkt auf A die Kraft $R = P/(2 + \cos\alpha)$ in der Richtung der Höhe, sodass die Beschleunigungen von m_1 und m_2 sich verhalten wie $1 : \cos{}^{\alpha}\!/_2$ (Traktorienbewegung).

2. Aufgabe. Das Dreieck ABC sei wiederum gleichschenklig mit gleichen Massen m_1, m_2, m_3 in den Ecken; auf A und B wirken zwei gleiche Kräfte P in der Richtung der Schenkel nach aussen. Eine ganz ähnliche Rechnung wie bei Aufgabe 1 liefert für die Zugspannung der Schenkel $y = P/3$, für die Zugspannung der Basis $x = {}^2\!/_3\,P\cos\alpha$; die gemeinschaftliche Beschleunigung der drei Massen ergiebt sich zu ${}^2\!/_3\,P\cos{}^{\gamma}\!/_2 : m$ und ist der Höhe des Dreiecks parallel, die Bewegung ist wiederum eine rein fortschreitende. Dieselben Resultate werden ungleich leichter mit Hilfe der Schwerpunktssätze gefunden, die Einsicht in die Einzelheiten des Zusammenhanges geht dabei natürlich verloren.

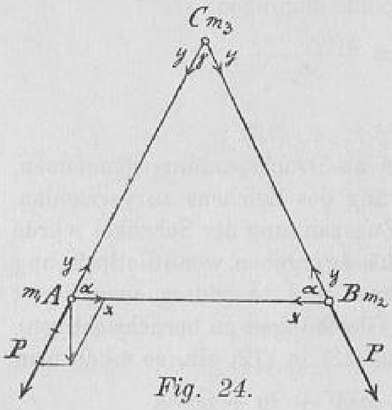

Fig. 24.

3. Aufgabe. In den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sitzen drei gleiche Massen m_1, m_2, m_3; darauf wirken drei gleiche Kräfte in der Richtung der Dreiecksseiten nach aussen (Fig. 25). Man sieht sofort aus Symmetriegründen, dass die inneren Kräfte x, y, z aller 3 Strecken gleich werden müssen, doch soll jetzt nicht einmal dies vorausgesetzt werden, da es sich im Laufe der Rechnung so wie so herausstellen muss. Es ist längs AB die gemeinschaftliche Beschleunigungskomponente

$$\frac{P - x - y/2}{m_1} = \frac{x + z/2 - P/2}{m_2},$$

$$3P = 4x + y + z \;\ldots\ldots\; (1).$$

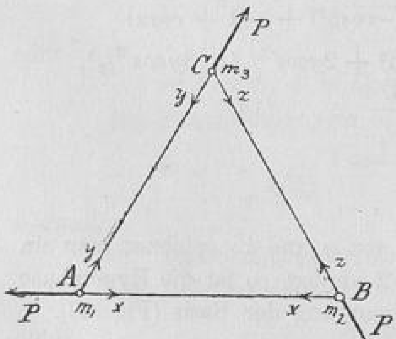

Fig. 25.

Längs AC ist

$$\frac{P/2 - y - x/2}{m_1} = \frac{y + z/2 - P}{m_3},$$

$$3P = x + 4y + z \;\ldots\ldots\; (2).$$

Ebenso ergiebt sich

$$3P = x + y + 4z \;\ldots\ldots\; (3).$$

Subtrahiert man (2) von (1), so erhält man $0 = 3x - 3y$,

also $x = y (= z)$,

mithin laut (1) $3P = 6x$,

$$x = y = z = \frac{P}{2}.$$

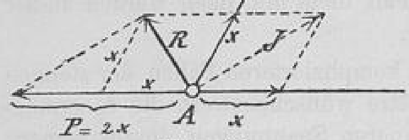

Fig. 26.

Auf A wirken also 3 Kräfte, nach links $P = 2x$, nach rechts x, schräg nach oben noch einmal x. Statt die beiden x zur inneren Gesamtkraft $J = x\sqrt{3}$ zu vereinigen und nun aus J und P die Resultierende R zu bilden, vereinigen wir $P = 2x$ und das x entgegengesetzter Richtung zur Komponente x, welche mit der Zugspannung x der schrägen Dreiecksseite die Resultierende $R = x = P/_2$ ergiebt. Dieses R steht $\perp J$, also auf der Halbierungslinie des Winkels α. Da an den anderen Dreiecksecken dieselben Verhältnisse herrschen, so lässt sich die beginnende Bewegung auffassen als eine kurze gleichförmig beschleunigte Drehung des Dreiecks um seinen Mittelpunkt O mit der Winkelbeschleunigung $\varepsilon = p/AO = R/m.AO$.

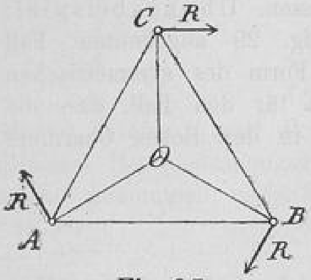

Fig. 27.

Stehen die drei gleichen Kräfte P, bei gleichen Massen m in den Dreiecksecken, von vorn herein senkrecht auf den Winkelhalbierenden, so ist $x = y = z = 0$, d. h. in diesem Falle treten Spannungen in den Dreiecksseiten nicht auf, und die anfängliche Bewegung von A, B, C geschieht wie die Bewegung vollkommen freier Punkte. Die Bewegung ist dieselbe wie im Hauptfalle; natürlich treten, wenn die Bewegung länger wie ein Zeitdifferential dauert, wenn also O dauerndes Zentrum der Bewegung bleiben soll, die Zentripetalkräfte in Gestalt von Zugspannungen der Dreiecksseiten hinzu.

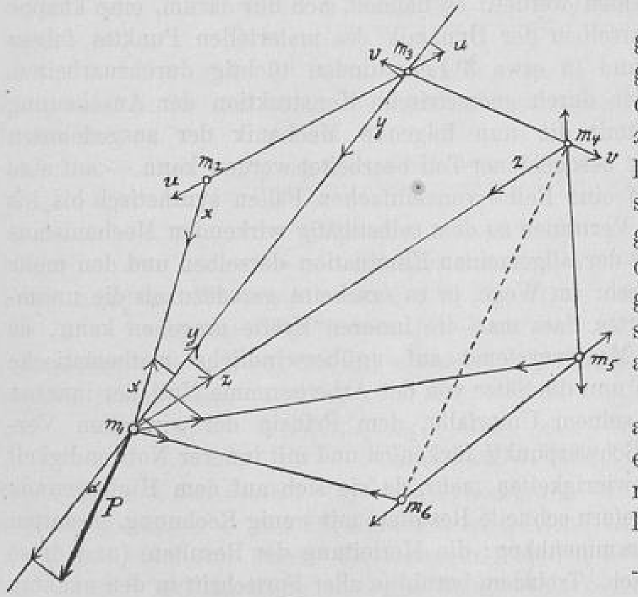

Fig. 28.

Haben wir endlich in den Ecken des gleichseitigen Dreiecks gleiche Massen m und gleiche Kräfte in der Richtung der Höhen mit dem Sinne nach aussen, so ergiebt sich $x = y = z = P/\sqrt{3}$, also ist die gemeinschaftliche Beschleunigung längs $AB\,(AC, BC) = O$, sodass jeder der Punkte A, B, C sich im Gleichgewicht befindet. Das Dreieck ist also in Ruhe, oder bewegt sich als ganzes geradlinig und gleichförmig, was auch aus Symmetriegründen sofort einleuchtet. Vgl. übrigens unten den allgemeinen Fall des Gleichgewichts.

6. Beispiel. Besteht das Massensystem aus mehr als 3 Punkten, so ist das Verfahren entsprechend zu erweitern. So hat man, wenn nur auf m_1 der Zug P ausgeübt wird (Fig. 28), längs $\overline{13}$ die Teilbeschleunigungen

$$\frac{P\cos\alpha - x\cos 213 - y - z\cos 314 \ldots\ldots}{m_1}$$

$$= \frac{y + v\cos(v/y) - u\cos(u/y)}{m_3}.$$

In derselben Weise liefert jede einzelne Verbindungsstrecke eine Gleichung, und man hat sich nur vor einer Überbestimmung des Systems zu hüten; man darf also nicht mehr starre Verbindungen zwischen den einzelnen Massenpunkten annehmen, als zur eindeutigen Lagenbestimmung derselben Punkte von irgend einem Ausgangspunkte aus (z. B. von m_1 aus) hinreichend sind, was am einfachsten nach den vier Kongruenzfällen für die Dreiecke zu entscheiden ist. So könnte statt der »Stange« $\overline{15}$ auch die Stange $\overline{46}$ eintreten, um die Punkte 5 und 6 eindeutig festzulegen; sind beide Stangen vorhanden, so werden die Spannungen in denselben vieldeutig, vergl. S. 28. Nur für elastische (wirklich deformierbare) Systeme tritt dieser Fall nicht ein, doch werden ausser ür den Gleichgewichtsfall die Rechnungen fast undurchführbar.

Hier und in den noch komplizierteren Fällen der stetigen Massenverteilung erscheinen Sätze wünschenswert, die es ermöglichen, ohne Kenntnis der inneren Spannungen auszukommen; die gänzliche Elimination der inneren Kräfte ist also das nächste Ziel für die Dynamik ausgedehnter Massen. Übungsbeispiel: Glatte Rechnung liefert der in Fig. 29 angedeutete Fall des viergliedrigen Massensystems in Form des symmetrischen Vierecks (Deltoïdes), namentlich auch für den Fall, dass die Stange $m_1 m_3$ (oder $m_2 m_4$) fehlt und in den Ecken Charniere angebracht sind.

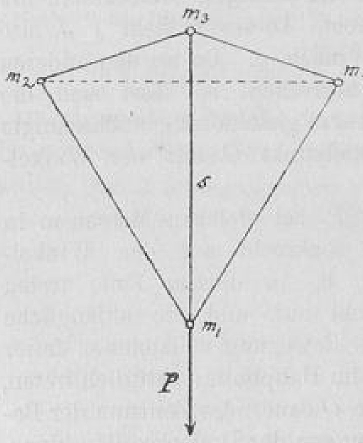

Fig. 29.

Die bisher aufgeführten Beispiele sind direkt zur Verwertung im Unterricht ausgewählt. Selbstredend sollen weder alle Beispiele noch jedes in der gleichen Ausführlichkeit wie hier durchgenommen werden; es handelt sich nur darum, eine knappe Auswahl derselben der Dynamik des materiellen Punktes folgen zu lassen und in etwa 3 Lehrstunden tüchtig durchzuarbeiten, die Resultate sind durch Zahlenbeispiele oder durch geometrische Konstruktion der Anschauung möglichst nahe zu bringen. Man stellt damit die nun folgende Mechanik der ausgedehnten Massen — auch wenn hiervon nur ein sehr bescheidener Teil bearbeitet werden kann — auf eine ganz andere Grundlage. Nun erst, nachdem eine Reihe von einfachen Fällen synthetisch bis ins Innerste durchschaut sind, und nachdem das Vertrauen zu dem selbstthätig wirkenden Mechanismus der inneren Kräfte sich eingestellt hat, steht der allgemeinen Elimination derselben und den mehr analytischen Methoden pädagogisch nichts mehr im Wege, ja es erscheint geradezu als die unumgängliche Bedingung des weiteren Fortschrittes, dass man die inneren Kräfte umgehen kann, da ihre Auswertung für beliebige (stetige!) Massensysteme auf unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten stösst. Hier schliessen sich nun die Sätze von der Arbeitssumme Null der inneren Kräfte, der Satz der lebendigen Kraft mit seinem Unterfalle, dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen, die Sätze d'Alemberts und vom Schwerpunkte lückenlos und mit innerer Notwendigkeit an und bereiten dem Verständnis keine Schwierigkeiten mehr, da sie sich auf dem Hintergrunde konkreter Fälle spiegeln. Alle diese Sätze liefern schnelle Resultate mit wenig Rechnung, gestatten aber keinen Einblick mehr in den Einzelzusammenhang; die Herleitung der Resultate (und diese selbst) sind demgemäss nicht mehr anschaulich. Trotzdem beruht ja aller Fortschritt in den exakten

Wissenschaften darauf, möglichst zahlreiche Sonderfälle in dem einzigen Generalfalle zu erfassen und mit einem Schlage zu erledigen; das gilt von $(a+b)^2$ so gut, wie von den Lagrangeschen Differentialgleichungen der Bewegung.

Ich schliesse hier noch einige weniger einfache Beispiele an, die aus anderen Gründen einiges Interesse beanspruchen dürften. Fast von selbst drängt sich der Fall eines idealen Hebels auf, dessen (gänzlich abweichende) Behandlung bei Mach, die Mechanik in ihrer Entwickelung, S. 246 u. ff. mir nicht einwandfrei erscheint. In den Ecken eines beliebigen (als ruhend vorausgesetzten) Dreiecks ABC sind die 3 Massen m_1, m_2 und $m_3 = \infty$ angebracht (oder m_3 in starrer Verbindung mit einer unendlich grossen Masse); Kräfte P_1 und P_2 wirken in A und B, beide $\perp AC$. Dann haben wir längs AB die gleichen Beschleunigungskomponenten von m_1 und m_2 (z ist als Druckspannung wieder nach aussen genommen, vergl. S. 35):

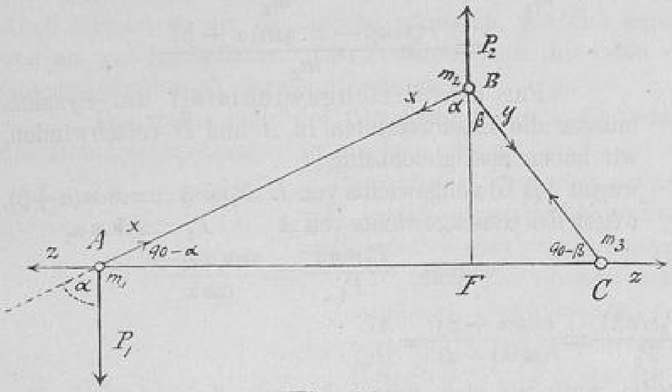

Fig. 30.

$$\frac{x\cos(90-\alpha)+P_1\cos\alpha-x}{m_1}=\frac{x-P_2\cos\alpha-y\cos[180-(\alpha+\beta)]}{m_2},$$

und nach gehöriger Reduktion

$$(m_1P_2+m_2P_1)\cos\alpha=(m_1+m_2)x+m_1y\cos(\alpha+\beta)-m_2z\sin\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Längs AC haben wir die gleichen Beschleunigungskomponenten

$$\frac{z-x\cos(90-\alpha)}{m_1}=\frac{y.\cos(90-\beta)-z}{\infty}=0,$$

also

$$z=x.\sin\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Längs AC findet also keine Beschleunigungskomponente statt; ebensowenig längs BC, denn wir haben dort

$$\frac{P_2\cos\beta+x\cos[180-(\alpha+\beta)]-y}{m_2}=\frac{y-z\cos(90-\beta)}{\infty}=0,$$

$$P_2\cos\beta-x.\cos(\alpha+\beta)-y=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)',$$

oder

$$P_2\cos\beta=x.\cos(\alpha+\beta)+y \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3).$$

Führt man den Wert von z aus (2) in (1) ein, so erhält man

$$(m_1P_2+m_2P_1)\cos\alpha=(m_1+m_2\cos\alpha^2)x+m_1y\cos(\alpha+\beta) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4).$$

Subtrahiert man von (4) die mit $m_1\cos(\alpha+\beta)$ multiplizierte Gleichung (3), so erhält man nach einigen Reduktionen

$$x=\frac{(m_1P_2+m_2P_1)\cos\alpha-m_1P_2\cos\beta\,.\cos(\alpha+\beta)}{m_1\sin(\alpha+\beta)^2+m_2\cos\alpha^2} \;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

und daraus $z=x.\sin\alpha$ (2) und $y=P_2\cos\beta-x.\cos(\alpha+\beta)$ (3). Obgleich demnach eine Resultierende von y und z vorhanden ist, ist doch die Beschleunigung von C Null wegen $m_3=\infty$. C ist also ein fester Punkt, die Bewegung besteht in einer Drehung um C. Die Beschleunigung von A ist $\perp AC$, da längs AC keine Komponente vorhanden ist ($z=x.\sin\alpha$); diese Beschleunigung von A ist $(P_1-x\cos\alpha)/m_1$. Endlich ist die Beschleunigung von B ebenfalls $\perp BC$, da längs

BC ebenfalls keine Komponente vorhanden ist (3'); die Grösse dieser Beschleunigung beträgt (s. Fig. 31)

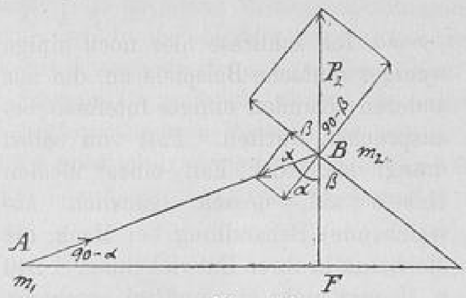

Fig. 31.

$$\frac{R}{m_2}=\frac{P_2cos(90-\beta)-xsin[180-(\alpha+\beta)]}{m_2}$$

$$=\frac{P_2sin\beta-x\,.\,sin(\alpha+\beta)}{m_2}.$$

Für den Gleichgewichtsfall des Systems müssen die Resultierenden in A und B verschwinden, wir haben also gleichzeitig

wegen des Gleichgewichts von B $P_2sin\beta=x\,.\,sin(\alpha+\beta)$,

wegen des Gleichgewichts von A $P_1=x\,.\,cos\,\alpha$,

woraus $\frac{P_2sin\beta}{P_1}=\frac{sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha}$

oder $\frac{(P_2sin\beta)}{P_1}=\frac{sin(\alpha+\beta)}{sin(90-\alpha)}=\frac{AC}{BC}$,

d. h. die zu BC und AC senkrechten Kräfte verhalten sich umgekehrt wie ihre »Arme«. Das gleiche Hebelgesetz erhält man auch durch die Umsetzung

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{AC}{BC.sin\,\beta}=\frac{AC}{CF};$$

die Proportion bleibt natürlich auch für $\alpha=\beta=90^0$ bestehen.

Man sieht hier gewissermassen hinter die Kulissen des Hebelgesetzes; dasselbe erscheint als das Kennzeichen des Gleichgewichtsfalles eines ebenfalls schon sehr spezialisierten dynamischen Systems, und hat als solches zwar eine hervorragend praktische Bedeutung als Schlüssel für zahlreiche Gleichgewichtsaufgaben, ist aber nicht selbst ein Grundfall und Anfangssatz, sondern hat seine letzten Wurzeln in den Newtonschen dynamischen Prinzipien.

Übrigens erhalten wir das Hebelgesetz auch, indem wir für A allein Gleichgewicht fordern, denn das Gleichgewicht von B ist ja hierdurch schon bedingt.

Die Beschleunigung von A war (s S. 39)

$$\frac{P_1-xcos\alpha}{m_1};$$

soll Gleichgewicht stattfinden, so ist

$$P_1=x\,.\,cos\alpha,$$

und mit Berücksichtigung von Gleichung (5) S. 39:

$$\frac{P_1}{cos\alpha}=\frac{(m_1P_2+m_2P_1)cos\alpha-m_1P_2cos\beta cos(\alpha+\beta)}{m_1sin(\alpha+\beta)^2+m_2cos\alpha^2}$$

$$\text{oder } P_1sin(\alpha+\beta)^2=P_2cos\alpha^2-P_2cos\alpha cos\beta\,.\,cos(\alpha+\beta)\;\ldots\ldots *$$

Auch hier sind, wie vorhin, die Massen von der Bildfläche verschwunden, sobald Gleichgewicht gefordert wird (s. w. u.); es ist also gleichgiltig, welche Massen als Angriffspunkte der Kräfte gedacht werden. Dies gilt nicht nur für unsern idealen Hebelfall, sondern das Gleichgewicht eines Kräftesystems hängt ganz allgemein nur von der Konfiguration der Kräfte selbst ab und ist unabhängig von der Massenverteilung. Man erkennt dies sofort aus dem Beispiel 6 (S. 37), wenn man bedenkt, dass das Gleichgewicht eines Systems im Gleichgewicht der einzelnen Massenpunkte besteht, dass also mit der resultierenden Beschleunigung 0 eines jeden Massenpunktes auch jegliche Komponente längs der Abstände verschwinden muss. Also nur weil die sämtlichen Teilbeschleunigungen $\dfrac{P.\cos\alpha - x.\cos 213 - y - z\cos 314\ \ldots\ldots}{m_1}$ etc.

Null werden, verschwindet der Einfluss des Nenners, und die Grösse der Massen wird belanglos. Auch hier ist wieder deutlich zu erkennen, wie viel tiefer die dynamischen Sätze gegründet sind, und an was für schattenhaften Pseudokörpern mit ihren masselosen Angriffspunkten die statischen Gesetze gewöhnlich abgeleitet werden. —

Die rechte Seite der Gleichung * auf S. 40 bedarf noch einer geringen Umformung, um das Hebelgesetz sichtbar zu machen. Es ist

$$\begin{aligned} & P_2\cos\alpha^2 - P_2\cos\alpha.\cos\beta\cos(\alpha+\beta) \\ = & P_2(\cos\alpha^2 - \cos\alpha.\cos\beta\,[\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta]) \\ = & P_2(\cos\alpha^2 - \cos\alpha^2.\cos\beta^2 + \sin\alpha.\cos\alpha.\sin\beta\cos\beta) \\ = & P_2(\cos\alpha^2\sin\beta^2 + \sin\alpha\cos\alpha.\sin\beta\cos\alpha) \\ = & P_2\cos\alpha.\sin\beta(\cos\alpha.\sin\beta + \sin\alpha.\cos\beta) \\ = & P_2\cos\alpha.\sin\beta.\sin(\alpha+\beta), \end{aligned}$$

also $$P_1\sin(\alpha+\beta)^2 = P_2.\cos\alpha.\sin\beta.\sin(\alpha+\beta)$$

oder $$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\sin.\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(90-\alpha)\sin\beta},$$

also (Fig. 31 S. 40) $$\frac{P_2}{P_1} = \frac{AC}{BC.\sin\beta} = \frac{AC}{FC}$$

wie oben S. 40. Eine letzte Herleitung des Hebelfalles s. u.

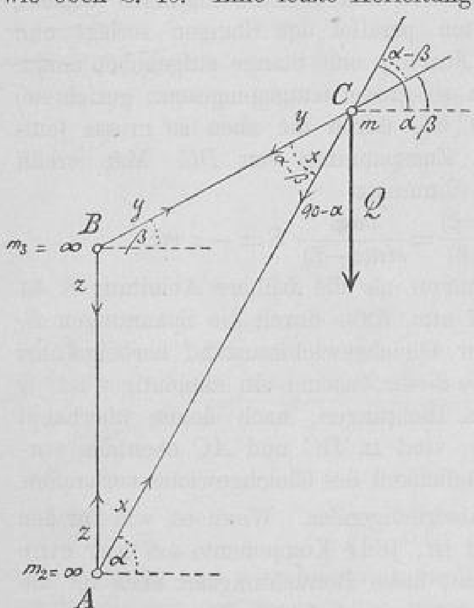

Fig. 32.

Die Vielseitigkeit unserer synthetischen Betrachtung zeigt auch die folgende Aufgabe. In A und B (Fig. 32) seien unendlich grosse Massen, oder es sei A und B starr mit einer unendlich grossen Masse verbunden; in C die Masse m und die Kraft $Q \# AB$ (Beanspruchung eines Gerüstes durch ein Gewicht). Führen wir für die Massen zunächst allgemeine Zeichen ein, so erhalten wir längs AC wegen des unveränderlichen Abstandes mm_2 gleiche Teilbeschleunigungen

$$\frac{x + z.\cos(90-\alpha)}{m_2} = \frac{-x - y\cos(\alpha-\beta) - Q\cos(90-\alpha)}{m}$$

oder

$$\frac{x + z.\sin\alpha}{m_2} = \frac{-x - y.\cos(\alpha-\beta) - Q\sin\alpha}{m}.$$

Aus dieser dynamischen Gleichung erhalten wir die statische, wenn wir $m_2 = \infty$ setzen, also

$$x + y\cos(\alpha-\beta) + Q.\sin\alpha = 0\ \ldots\ldots (1),$$

m erhält also in der Richtung AC keine Teilbeschleunigung.

Ebenso folgt parallel BC

$$\frac{-y - x\cos(\alpha-\beta) - Q.\cos(90-\beta)}{m} = \frac{y - z.\cos(90-\beta)}{m_3} = 0$$

wegen $m_3 = \infty$, also $$y + x.\cos(\alpha-\beta) + Q.\sin\beta = 0\ \ldots\ldots (2).$$

Die Elimination von x aus (1) und (2) liefert

$$y.\sin(\alpha-\beta)^2 = Q(\sin\alpha.\cos(\alpha-\beta) - \sin\beta)$$

$$= Q(\sin\alpha \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha^2 . \sin\beta - \sin\beta)$$
$$= Q(\sin\alpha . \cos\alpha . \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha^2)$$
$$= Q . \cos\alpha \sin(\alpha - \beta),$$

also
$$y . \sin(\alpha - \beta)^2 = Q . \cos\alpha . \sin(\alpha - \beta),$$
$$y = \frac{Q . \cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3).$$

Der Wert ist positiv, wir haben also längs BC eine Zugspannung. Führen wir den erhaltenen Wert in (1) ein, so kommt
$$x + \frac{Q\cos\alpha \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = -Q\sin\alpha$$
$$x = -Q\left[\sin\alpha + \frac{\cos\alpha . \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}\right]$$
$$x = -Q\frac{\sin\alpha^2 . \cos\beta + \cos\alpha^2 . \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$
$$x = -\frac{Q . \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4).$$

x ist negativ, wir haben also längs AC eine Druckspannung, sodass die Pfeilrichtung von x umzukehren ist. Sind BC und AC nicht blosse Kraftstrecken, sondern wirkliche Stangen, so ist Q um die halbe Summe der Stangengewichte zu vermehren.

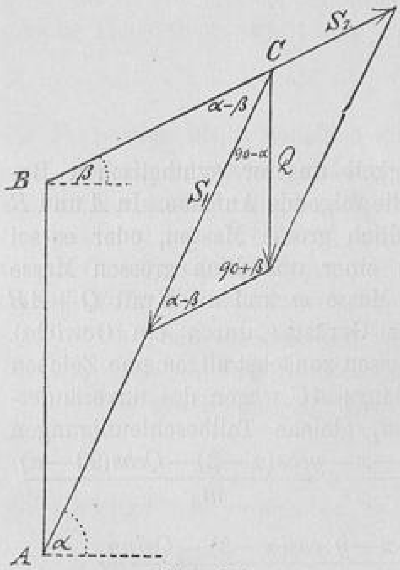

Fig. 33.

Die Gleichungen (3) und (4) erhält man ganz direkt, indem man von allen Massen und Beschleunigungen absieht, Q in zwei Komponenten parallel den Stangen zerlegt und jede Komponente nur durch je eine Stange aufgehoben denkt, also S_1 durch die eben so grosse (entgegengesetzt gerichtete) Druckspannung von AC, S_2 durch die eben so grosse (entgegengesetzt gerichtete) Zugspannung von BC. Man erhält dann einfach nach dem Sinussatz
$$\frac{S_1}{Q} = \frac{\sin(90 + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)},\ S = -x \text{ etc.}$$

Das ist nun erheblich kürzer als die frühere Ableitung S. 41 ff., und man sieht nicht nur, dass durch die Spannungen S_1 und S_2 thatsächlich der Gleichgewichtszustand herbeigeführt wird, sondern auch, dass dieser Zustand ein eindeutiger ist: Q ist gegeben, die beiden Richtungen, nach denen überhaupt Kräfte auftreten können, sind in BC und AC ebenfalls vorgeschrieben, da bleibt keine Wahl, es ist nur diese eine Möglichkeit des Gleichgewichts vorhanden.

Dennoch hat diese Ableitung etwas theoretisch unbefriedigendes. Wenn es, wie für den Gleichgewichtsfall eben nachgewiesen, thatsächlich gestattet ist, jede Komponente auf nur eine Stange wirkend vorzustellen, so liegt die Versuchung nahe, diese Betrachtungsart auch für die Bewegung von ABC unter dem Einfluss von Q zu verwenden. Auf den allgemeinsten Fall, Dreieck ABC mit beliebigen Massen in den Ecken (Fig. 34), angewendet, würde das heissen: man zerlege P und Q längs den Dreiecksseiten in die Komponenten P_{12}, P_{13} und Q_{23}, Q_{12}, und berechne die Spannung von AB nach Formel (3) auf S. 26, also
$$x = \frac{m_1 Q_{12} + m_2 P_{12}}{m_1 + m_2},$$
und entsprechend für die übrigen Dreiecksseiten.

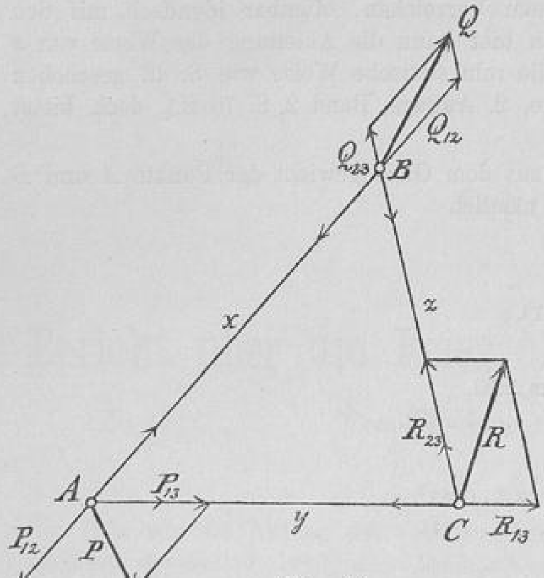

Fig. 34.

Man braucht diese Formeln nur auf einen beliebigen, recht symmetrischen Spezialfall, etwa die Aufgabe S. 35 anzuwenden, um zu entdecken, dass sie grimmig falsch sind. Nur für die Drehbeispielchen S. 36 ff. (freie Axe des Schwerpunktes) erhält man die richtigen Spannungen. Die Sache erklärt sich leicht durch die Unsicherheit des Schlusses vom besonderen auf das allgemeine, und eben hierin, in der statischen Spezialisierung und Isolierung des Falles liegt das mangelhafte der sonst kurzen und auch logisch einwandfreien Ableitung (S. 42); man sieht nicht, wieso die beiden Komponenten von Q (Fig. 33), von denen im Bewegungsfalle j e d e Komponente b e i d e Stangen beansprucht, sich jetzt plötzlich mit der Zerrung bzw. Pressung je einer Stange begnügen müssen. Diese Einsicht gewährt nur die Herleitung S. 41 und noch mehr der folgende, allgemeinere Fall. In den Ecken des Dreiecks ABC seien beliebige Massen m_1, m_2, m_3 postiert, auf welche bez. die Kräfte P, Q, R wirken. Wann ist das Dreieck im Gleichgewicht? Für den Fall des Gleichgewichts darf keine Masse eine Beschleunigung besitzen, es muss also auch längs AB die Beschleunigungskomponente von A (m_1) Null sein:

$$P\cos\alpha_{12} - x - y \,.\, \cos\alpha = 0 \;.\;.\; (1).$$

Desgleichen muss längs AC sein:

$$P\cos\alpha_{13} - y - x \,.\, \cos\alpha = 0 \;.\;.\; (2).$$

Der Vergleich der Formeln (1) und (2) mit den allgemeinen Formeln (9), (10) und (11) auf S. 35 lehrt deutlich, wie der Punkt A durch seine Nullbeschleunigung und n u r hierdurch von den Punkten B und C mechanisch i s o l i e r t wird, sodass zur Berechnung der Spannungen schon zwei Gleichungen ausreichen. Die Elimination liefert

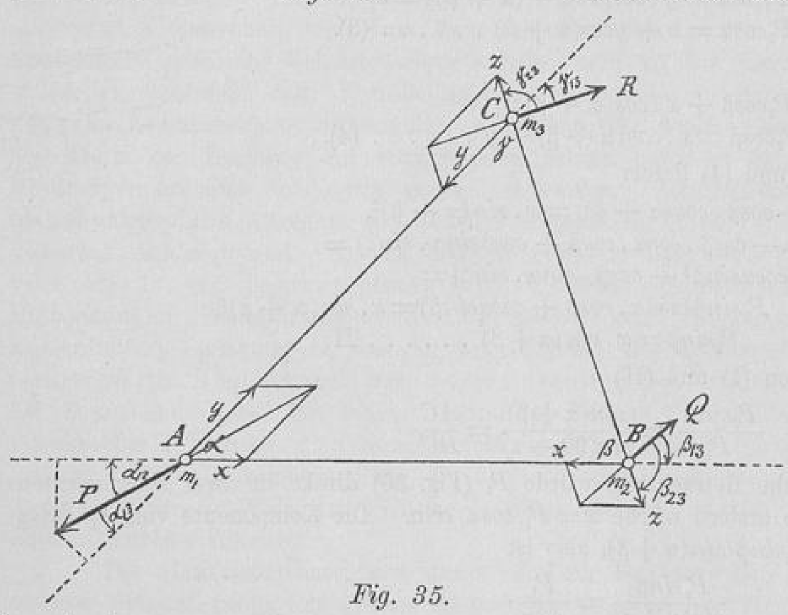

Fig. 35.

($\alpha_{13} = \alpha - \alpha_{12}$)

$$y\sin\alpha^2 = P[\cos(\alpha - \alpha_{12}) - \cos\alpha \,.\, \cos\alpha_{12}]$$

$$= P\sin\alpha \,.\, \sin\alpha_{12},$$

$$y = \frac{P \,.\, \sin\alpha_{12}}{\sin\alpha}$$

und entsprechend

$$x = \frac{P \,.\, \sin\alpha_{13}}{\sin\alpha}.$$

Die Werte von x und y sind, abgesehen vom Vorzeichen, offenbar identisch mit den Komponenten von P längs AB und AC usw. Auch hier kann die Ableitung der Werte von x und y kürzer, aber mit geringerer Einsicht, auf die rein statische Weise wie S. 42 geschehen (vgl. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Auflage, Band 2, S. 70 ff.), doch bietet die weitere Entwickelung nichts neues.

Es mag zum Schluss noch das Hebelgesetz aus dem Gleichgewicht der Punkte A und B (Fig. 30 auf S. 39) hergeleitet werden. Wir haben nämlich

I) a) längs AC bei A:

$$z - x cos(90 - \alpha) = 0,$$

$$\text{also} \quad z = x . sin\alpha \;\ldots\ldots\; (1).$$

b) längs AB bei A:

$$z cos(90 - \alpha) + P_1 cos\alpha - x = 0,$$

$$P_1 cos\alpha = x - z sin\alpha \;\ldots\ldots\; (2).$$

Die Kombination von (1) und (2) ergiebt

$$P_1 cos\alpha = x - x sin\alpha^2 = x . cos\alpha^2,$$

$$P_1 = x . cos\alpha \;\ldots\ldots\; (\mathrm{I}).$$

II) a) längs AB bei B:

$$x - P_2 cos\alpha - y . cos[180 - (\alpha + \beta)] = 0,$$

$$P_2 cos\alpha = x + y cos(\alpha + \beta) \;\ldots\ldots\; (3).$$

b) längs BC bei B:

$$y - P_2 cos\beta + x . cos(\alpha + \beta) = 0,$$

$$P_2 cos\beta = x . cos(\alpha + \beta) + y \;\ldots\ldots\; (4).$$

Die Elimination von y aus (3) und (4) liefert

$$P_2 (cos\alpha - cos\beta . cos(\alpha + \beta)) = x . sin(\alpha + \beta)^2,$$

$$P_2 (cos\alpha - cos\beta . cos\alpha . cos\beta + cos\beta sin\alpha . sin\beta) =$$

$$P_2 (cos\alpha sin\beta^2 + cos\beta . sin\alpha . sin\beta) =$$

$$P_2 sin\beta (sin\alpha . cos\beta + cos\alpha sin\beta) = x . sin(\alpha + \beta)^2,$$

$$P_2 sin\beta = x . sin(\alpha + \beta) \;\ldots\ldots\; \mathrm{II};$$

und nun durch Vergleichung von (I) und (II)

$$\frac{P_2 sin\beta}{P_1} = \frac{sin(\alpha + \beta)}{sin(90 - \alpha)} = \frac{AC}{BC}$$

wie auf S. 40. Die rein statische Betrachtung würde P_1 (Fig. 30) direkt in zwei Komponenten längs AB und AC zerlegen; die erstere würde $x = P_1/cos\alpha$ sein. Die Komponente von P_2 längs AB würde dagegen sein $x = P_2 sin\beta / sin(\alpha + \beta)$, also ist

$$\frac{P_2 sin\beta}{sin(\alpha + \beta)} = \frac{P_1}{cos\alpha},$$

oder

$$\frac{P_2 sin\beta}{P_1} = \frac{sin(\alpha + \beta)}{cos\alpha} = \frac{AC}{BC}$$

wie oben.