





Sind die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben und soll man außer den Funktionswerten der einzelnen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  auch die Funktionswerte der Summe und Differenz dieser Winkel  $\alpha \pm \beta$  am neuen Transporteur bestimmen, so stellt man den Transporteurzeiger auf die Winkelgrößen  $(\alpha + \beta)$  und  $(\alpha - \beta)$  ein und kann dann sofort aus den veränderlichen rechtwinkligen Dreiecken mit der konstanten Kathete  $a$ , den veränderlichen Katheten  $x$  und  $y$  und der veränderlichen Hypotenuse  $z$  (siehe Fig. 1) die Funktionswerte von  $\sin(\alpha \pm \beta)$ ,  $\cos(\alpha \pm \beta)$ ,  $\text{tang}(\alpha \pm \beta)$  und  $\text{cotg}(\alpha \pm \beta)$  als Quotienten je zweier entsprechender Seiten dieser rechtwinkligen Dreiecke direkt vom Transporteur ablesen und niederschreiben. In den folgenden Formeln bedeuten  $a, x, y$  und  $z$  die Maßzahlen der nach Millimeteereinheiten geteilten Seiten dieser veränderlichen rechtwinkligen Dreiecke. Dabei kommt, je nach der Größe des Winkels  $(\alpha \pm \beta)$  in den einzelnen Quadranten jedesmal dasjenige rechtwinklige Dreieck zur Verwendung, dessen Hypotenuse mit der jeweiligen Lage der Transporteurzeigerrichtung (Fig. 1, 2 u. 3) zusammenfällt. Man erhält dann aus den folgenden Gleichungen ohne weiteres die gesuchten Funktionswerte: (Fig. 2  $\angle \alpha > \angle \beta$ )

Zu Fig. 1.  $\angle CGO = \angle(\alpha + \beta)$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \frac{OC}{OG} = \frac{a}{z} = \frac{Y}{Z} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \frac{CG}{OG} = \frac{x}{z} = \frac{a}{Z} \\ \text{tang}(\alpha + \beta) &= \frac{OC}{CG} = \frac{a}{x} = \frac{Y}{a} \\ \text{cotg}(\alpha + \beta) &= \frac{GC}{OC} = \frac{x}{a} = \frac{a}{Y}\end{aligned}$$

Zu Fig. 2.  $\angle OHC = \angle(\alpha - \beta)$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \frac{OC}{OH} = \frac{a}{z} = \frac{Y}{Z} \\ \cos(\alpha - \beta) &= \frac{CH}{OH} = \frac{x}{z} = \frac{a}{Z} \\ \text{tang}(\alpha - \beta) &= \frac{OC}{CH} = \frac{a}{x} = \frac{Y}{a} \\ \text{cotg}(\alpha - \beta) &= \frac{CH}{OC} = \frac{x}{a} = \frac{a}{Y}\end{aligned}$$

In den Figuren 1) 2) und 3) bedeuten im Vergleich zu  $x, y, z$  die Buchstaben  $X, Y$  und  $Z$  die Seiten derjenigen großen rechtwinkligen Dreiecke, welche über die Grenzen des Quadrats  $OABC$  hinausgehen und sich, je nach der Lage des Drehzeigers, bis in die Unendlichkeit erstrecken können. Dabei ist:  $\triangle OAR \sim \triangle OCP$  (Fig. 1) also:  $y : a : z = a : X : Z$ ;  $\triangle OCG \sim \triangle OAQ$  (Fig. 1) also:  $x : a : z = a : Y : Z$ .

Es sollen nun die Beziehungen der Funktionen der Summe und Differenz zweier Winkel  $(\alpha \pm \beta)$  zu den Funktionen der einzelnen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , also die Formeln (Additionstheorem):

$$\begin{aligned}1) \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & 2) \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ 3) \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & 4) \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

im Anschluß an die Figur des neuen Transporteur abgeleitet werden. (Fig. 1 und 2)

**Zu 1)** Dreht man den Transporteurzeiger aus der Anfangslage (Nullgrad) erst um den Winkel  $\alpha$ , dann im gleichen Sinne um den Winkel  $\beta$  weiter, so erhält man die Zeigerrichtungen  $OD$  und  $OG$ . Für den Winkel  $(\alpha + \beta)$  (Fig. 1) liest man vom Transporteur aus  $\triangle COG$  die Beziehung  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{OC}{OG} = \frac{a}{z}$  direkt ab. Um nun die Gleichung  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  am Transporteur zu entwickeln, verlängere man die Zeigerrichtungen  $OG$  und  $OD$ , ferner  $AB$  über  $B$  hinaus, zeichne  $QF \perp OF$ ,  $FE \perp AQ$  und  $FS \perp OA$ . Dabei wird  $CB$  über  $B$  hinaus und  $OA$  über  $A$  hinaus verlängert. Nun ist aber  $\triangle OCG \sim \triangle OAQ$ , demnach erhält man:  $OC : OG = a : z = \sin(\alpha + \beta) = AQ : OQ$ .

$$\begin{aligned}\text{Also: } \sin(\alpha + \beta) &= \frac{AQ}{OQ} = \frac{AE + EQ}{OQ} = \frac{FS + EQ}{OQ} = \frac{OF \sin \alpha + QF \cos \alpha}{OQ}, \text{ (Fig. 1)} \\ &= \frac{OF}{OQ} \sin \alpha + \frac{QF}{OQ} \cos \alpha = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Folglich:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ .



Aus diesen ersten 4 Gleichungen des Additionstheorems können nun durch Division die übrigen 4 Gleichungen für  $\tan(\alpha \pm \beta)$  und  $\cotg(\alpha \pm \beta)$  desselben sofort gefunden werden. In dieser Abhandlung sollen aber die Grundgleichungen des Additionstheorems für die Tangens- und Kotangensfunktion:

$$\begin{aligned} 5) \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} & 7) \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\ 6) \cotg(\alpha + \beta) &= \frac{\cotg \alpha \cotg \beta - 1}{\cotg \beta + \cotg \alpha} & 8) \cotg(\alpha - \beta) &= \frac{\cotg \alpha \cotg \beta + 1}{\cotg \beta - \cotg \alpha} \end{aligned}$$

am neuen Transporteur für Winkelfunktion direkt aus der Figur desselben rein geometrisch zur Darstellung gelangen.

Zu diesem Zwecke stelle man den drehbaren Transporteurzeiger wie die Figuren 1) 2) und 3) zum neuen Transporteur zeigen, beziehungsweise auf die Winkelgrößen  $(\alpha + \beta)$  und  $(\alpha - \beta)$  ein, dann ergeben sich aus diesen Figuren folgende einfache Beziehungen:

**Zu 5)** Aus Dreieck OGC, Fig. 1, liest man vom Transporteur ab:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{OC}{CG} = \frac{a}{x}; \text{ da nun } \frac{a}{x} = \frac{QA}{OA} \text{ ist, so erhält man} \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{QA}{OA} = \frac{QE + EA}{OS - AS} = \frac{QE + FS}{OS - AS} = \frac{(QE : OS) + (FS : OS)}{1 - (AS : OS)} \end{aligned}$$

wobei man den Zähler und Nenner des vorletzten Bruches mit OS dividiert hat.

Ferner ist  $\triangle QEF \sim \triangle OSF$ , folglich:  $\frac{QE}{QF} = \frac{OS}{OF}$  oder:  $\frac{QE}{OS} = \frac{QF}{OF} = \tan \beta$

Also:  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \beta + \tan \alpha}{1 - (AS : OS)}$ . Da nun  $DA \parallel FS$  ist, so erhält man aus ähnlichen

Dreiecken  $\frac{AS}{OS} = \frac{DF}{OF} = \frac{DF : QF}{OF : QF} = \frac{\tan \alpha}{\cotg \beta} = \tan \alpha \cdot \tan \beta$ . Folglich:  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

**Zu 6)** Vom Transporteur (Fig. 1) entnimmt man aus  $\triangle OGC$  die Gleichung:

$$\cotg(\alpha + \beta) = \frac{CG}{OC} = \frac{x}{a} = \frac{OA}{AQ} = \frac{OS - AS}{AE + EQ} = \frac{OS - AS}{SF + EQ}$$

und indem man den letzten Bruch durch AS kürzt, erhält man:

$\cotg(\alpha + \beta) = \frac{(OS : AS) - 1}{(SF : AS) + (EQ : AS)}$ ; nun ist aber  $\triangle OSF \sim \triangle QEF$  und  $AS = EF$ ,

folglich:  $\frac{SF}{OF} = \frac{AS}{QF}$  oder  $\frac{SF}{AS} = \frac{OF}{QF}$ , nun ist:  $\frac{OF}{QF} = \cotg \beta$ , also auch:  $\frac{SF}{AS} = \cotg \beta$ ; ferner ist

$$\frac{OS}{AS} = \frac{OF}{DF}, \text{ da } AD \parallel SF \text{ ist, (Fig. 1)}$$

also:  $\cotg(\alpha + \beta) = \frac{(OF : DF) - 1}{\cotg \beta + \cotg \alpha}$ , ferner:  $\frac{OF}{DF} = \frac{OF : QF}{DF : QF} = \frac{\cotg \beta}{\tan \alpha} = \cotg \beta \cdot \cotg \alpha$

$$\text{Folglich: } \cotg(\alpha + \beta) = \frac{\cotg \alpha \cdot \cotg \beta - 1}{\cotg \beta + \cotg \alpha}$$

**Zu 7)** Aus Dreieck OCH, Fig. 2, liest man vom Transporteur ab:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{OC}{CH} = \frac{a}{x} = \frac{QA}{OA} = \frac{EK - EF}{OK + AK} = \frac{(EK : OK) - (EF : OK)}{1 + (AK : OK)}$$

Es ist  $\triangle EFQ \sim \triangle OEK$ , also:  $\frac{EF}{EQ} = \frac{OK}{OE}$  oder:  $\frac{EF}{OK} = \frac{EQ}{OE}$ , nun ist  $\frac{EQ}{OE} = \tan \beta$ , (Fig. 2)

also  $\frac{EF}{OK} = \tan \beta$ . Ferner ist, weil  $KE \parallel AQ$  ist,  $\frac{AK}{OK} = \frac{EQ_1}{OE} = \frac{EQ_1 : EQ}{OE : EQ} = \frac{\tan \alpha}{\cotg \beta} = \tan \alpha \cdot \tan \beta$ ,

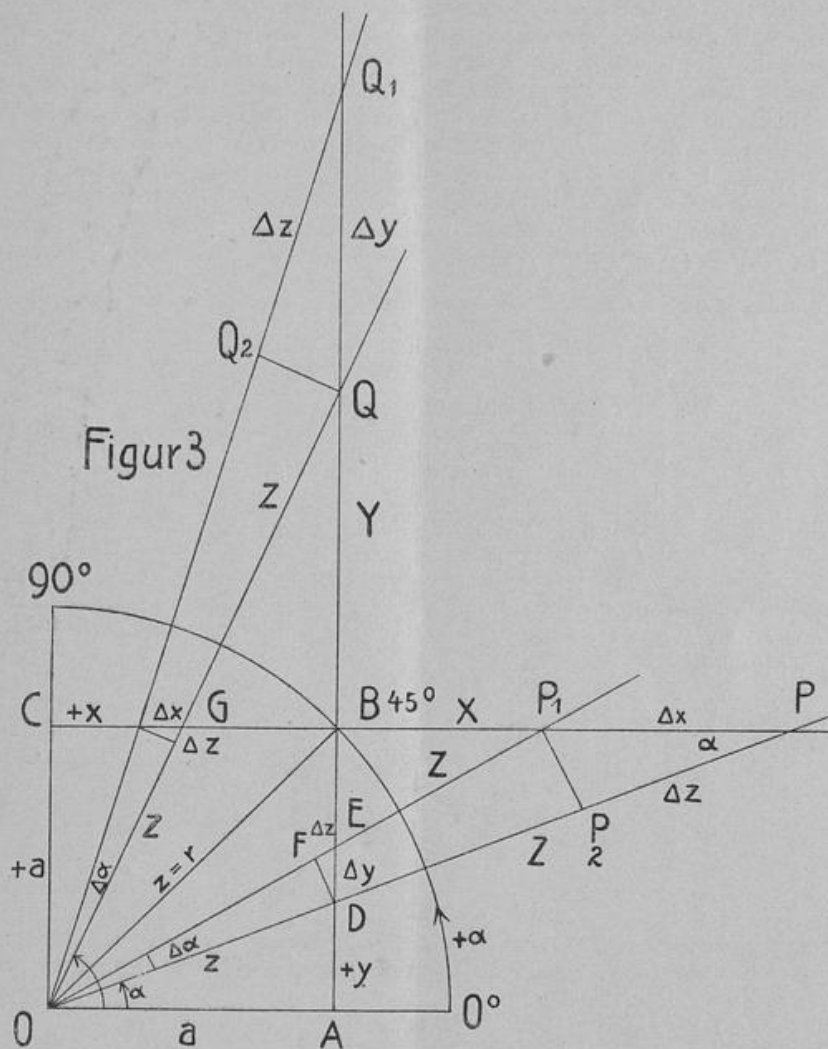
$$\text{Folglich: } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Zu 8) Ebenso ist im  $\triangle OCH$  am Transporteur, Fig. 2,

$$\cotg(\alpha - \beta) = \frac{CH}{OC} = \frac{x}{a} = \frac{OA}{AQ} = \frac{OK + AK}{KE - EF} = \frac{(OK : AK) + 1}{(KE : AK) - (EF : AK)}$$

Nun ist:  $\frac{KE}{OE} = \frac{AK}{EQ}$  oder  $\frac{KE}{AK} = \frac{OE}{EQ} = \cotg \beta$ , nun ist  $KE \parallel AQ_1$ , (Fig. 2)

also:  $\frac{OK}{AK} = \frac{OE}{EQ_1} = \frac{OE : EQ}{EQ_1 : EQ} = \frac{\cotg \beta}{\tan \alpha} = \cotg \beta \cdot \cotg \alpha$ . Folglich:  $\cotg(\alpha - \beta) = \frac{\cotg \alpha \cdot \cotg \beta + 1}{\cotg \beta - \cotg \alpha}$



## II. Änderungen der Winkelfunktionswerte mit dem sich ändernden Argument am neuen Transporteur.

Wächst im ersten Quadranten der Winkel  $\alpha$ , so wachsen auch die Sinus- und Tangensfunktionen, die Kosinus- und Kotangensfunktionen dagegen nehmen ab. Zunahme und Abnahme der Funktionswerte erfolgen aber nicht proportional der Änderung der Winkel. (Fig. 3)

Beim Drehen des Transporteurzeigers im ersten Quadranten wachse der Winkel  $\alpha$  ( $\alpha$  der Bogen für den Radius 1) um die kleine Winkelgröße  $\Delta\alpha$ , wobei man sich  $\Delta\alpha$ , die Änderung des Arguments, beliebig klein denken kann. Dabei nehme die veränderliche Kathete  $y$  um  $\Delta y$  und die veränderliche Hypotenuse  $z$  um  $\Delta z$  zu. Der Drehung um den kleinen Winkel  $\Delta\alpha$  entsprechend entsteht (Fig. 3) das kleine rechtwinklige Dreieck DEF. In demselben ist DF ein kleiner Kreisbogen, beschrieben mit  $OD = z$  als Radius um den Punkt O als Mittelpunkt. Je kleiner der Zuwachs  $\Delta\alpha$  gewählt wird, um so mehr nähert sich das Bogenelement FD der Strecke oder Sehne zwischen F und D und um so kleiner wird das Bogenelement FD, ebenso  $\Delta y$  und  $\Delta z$ . Das kleine Dreieck EFD ist bei F rechtwinklig, weil das Bogenelement stets senkrecht zum Radius steht. Da  $\alpha$  der Bogen für den Radius 1 ist, so ist  $\Delta\alpha$  die Zunahme des Bogens für den Radius 1, also  $FD : \Delta\alpha = z : 1$ , mithin  $FD = z \cdot \Delta\alpha$ . In dem kleinen rechtwinkligen Dreieck EFD ist  $\Delta y$  die Hypotenuse, während  $\Delta z$  und  $FD = z \cdot \Delta\alpha$  die Katheten sind. Von dem willkürlich gewählten Winkel-Zuwachs  $\Delta\alpha$  sind  $\Delta y$  und  $\Delta z$  abhängig und außerdem an die Gleichung:  $(\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (z \cdot \Delta\alpha)^2$  des rechtwinkligen Dreiecks FDE gebunden.

Für den Winkel  $\alpha$  des I. Quadranten findet man aus Dreieck OAD: (Fig. 3)

$$\sin \alpha = \frac{y}{z}, \text{ (Funktion mit den zwei Veränderlichen } y \text{ und } z)$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{z}, \text{ (Funktion mit nur einer Veränderlichen } z)$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{y}{a}, \text{ (Funktion mit nur einer Veränderlichen } y)$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{a}{y}, \text{ (Funktion mit nur einer Veränderlichen } y)$$

In diesen Gleichungen ist  $\alpha$  die unabhängige Veränderliche,  $y$  und  $z$  dagegen sind von  $\alpha$  abhängige Veränderliche und an die Gleichung  $z^2 - y^2 = a^2$  gebunden, worin  $a$  eine Konstante ist.

Wächst nun  $\alpha$  um  $\Delta\alpha$ , so wächst  $y$  um  $\Delta y$  und  $z$  um  $\Delta z$  und man erhält aus  $\Delta OAE$  die Gleichungen: (Fig. 3)

$$1) \sin(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z} \text{ (Zähler und Nenner veränderlich)}$$

$$2) \cos(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{a}{z + \Delta z} \text{ (Zähler konstant, Nenner veränderlich)}$$

$$3) \text{tang}(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{y + \Delta y}{a} \text{ (Zähler veränderlich, Nenner konstant)}$$

$$4) \text{cotg}(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{a}{y + \Delta y} \text{ (Zähler konstant, Nenner veränderlich)}$$

Denkt man sich  $\Delta\alpha$  kleiner und kleiner werdend, schließlich  $\Delta\alpha = 0$ , so werden damit auch  $\Delta y$  und  $\Delta z$  zu Null und man erhält aus obigen Gleichungen die früheren Gleichungen für  $\sin \alpha = \frac{y}{z}$ ,  $\cos \alpha = \frac{a}{z}$ ,  $\text{tang } \alpha = \frac{y}{a}$  und  $\text{cotg } \alpha = \frac{a}{y}$ . In den Fällen 2) 4) und 3) erkennt man sofort, daß im ersten Quadranten mit wachsendem Winkel der Kosinus und die Kotangente abnehmen und die Tangente dagegen wächst. Im Fall 1) werden mit wachsendem Winkel Zähler und Nenner gleichzeitig größer, aber so, daß  $\Delta y > \Delta z$  (Grenzfall  $\Delta y = \Delta z$ ) bleibt. Wenn aber in einem echten Bruche der Zähler stärker als der Nenner wächst oder im Grenzfall Zähler und Nenner dieses Bruches um gleich viel wachsen, so wächst auch nach einer Bruchregel der Wert des echten Bruches. Demnach nimmt im ersten Quadranten mit wachsendem





Daß im ersten Quadranten die Sinusfunktion  $\sin \alpha = \frac{y}{z}$  mit wachsendem Winkel zunimmt, kann man auf analytischem Wege in folgender Weise dartun: (Fig. 3)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist: } \sin(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z} \\ \text{„} \quad \sin \alpha = \frac{y}{z} \end{array} \right\} \text{ durch Subtraktion erhält man:}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin \alpha &= \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z} - \frac{y}{z} = \frac{z(y + \Delta y) - y(z + \Delta z)}{z(z + \Delta z)} \\ &= \frac{yz + z\Delta y - yz - y\Delta z}{z(z + \Delta z)} = \frac{z\Delta y - y\Delta z}{z(z + \Delta z)} \end{aligned}$$

Das kleine Dreieck EFD ist bei F rechtwinklig, also:

$$\frac{\Delta y}{z} > \frac{\Delta z}{y} \quad (\text{Hypotenuse größer als die Kathete})$$

folglich:  $z\Delta y > y\Delta z$ , mithin  $z\Delta y - y\Delta z$  stets positiv. Da nun der Nenner des letzten Bruches  $z(z + \Delta z)$  immer positiv ist, so muß der Wert des Bruches  $\frac{z\Delta y - y\Delta z}{z(z + \Delta z)}$ , also auch  $\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin \alpha$  stets positiv sein. Mithin ist  $\sin(\alpha + \Delta\alpha) > \sin \alpha$ , d. h. mit wachsendem Winkel nimmt im ersten Quadranten die Sinusfunktion zu. (Fig. 3)

Eine Bemerkung hierzu ist jedoch noch zu machen. Läßt man die veränderlichen Größen des Transporteurs d. h. die veränderlichen Seiten der rechtwinkligen Dreiecke  $x$ ,  $y$  und  $z$  immer größer und größer werden, indem Punkt D über B und Q hinaus wandert, schließlich unendlich groß werden, so ergibt sich (Figur 3 aus  $\triangle OAQ$ ) für den Winkel zum Beispiel  $\alpha = 90^\circ$  folgendes:

$$1) \sin 90^\circ = \frac{y}{z} = \frac{\infty}{\infty}, \quad 2) \cos 90^\circ = \frac{x}{z} = \frac{0}{\infty} = 0, \quad 3) \tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\infty}{0} = \infty, \quad 4) \cotg 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

Da nun wegen der Winkelübereinstimmung  $\triangle OAQ \sim \triangle OCG$  ist, also die einander entsprechenden Seitenverhältnisse beider Dreiecke gleich sind, so ergibt sich folgendes: Für  $\angle \alpha = \angle QOA = \angle CGO = 90^\circ$  gelangt Punkt Q ins Unendliche und der Punkt G nach C; dabei wird in  $\triangle OCG$   $CG = x = 0$  und  $OG = z = a$ . Für  $\triangle OGC$  mit dem veränderlichen Winkel

$$OGC = \angle QOA = \angle \alpha \text{ erhält man die anderen Formen: (Fig. 3) } 1) \sin 90^\circ = \frac{a}{z} = \frac{a}{a} = 1,$$

$$2) \cos 90^\circ = \frac{x}{z} = \frac{0}{a} = 0, \quad 3) \tan 90^\circ = \frac{a}{x} = \frac{a}{0} = \infty, \quad 4) \cotg 90^\circ = \frac{x}{a} = \frac{0}{a} = 0.$$

Der im allgemeinen unbestimmte Quotient  $\frac{\infty}{\infty}$  aus der vorigen Gleichung  $\sin 90^\circ = \frac{y}{z} = \frac{\infty}{\infty}$  erhält

demnach jetzt den bestimmten Wert  $\frac{a}{z} = \frac{a}{a} = 1$ . (Fig. 3)

Für  $\cos 90^\circ = 0$  geht die Form  $\frac{0}{\infty} = 0$  über in die andere Form  $\frac{0}{a}$  gleich Null

Für  $\tan 90^\circ = \infty$  geht die Form  $\frac{\infty}{a} = \infty$  über in die Form  $\frac{a}{0} = \infty$

Für  $\cotg 90^\circ = 0$  geht die Form  $\frac{a}{\infty} = 0$  über in die Form  $\frac{0}{a} = 0$ .

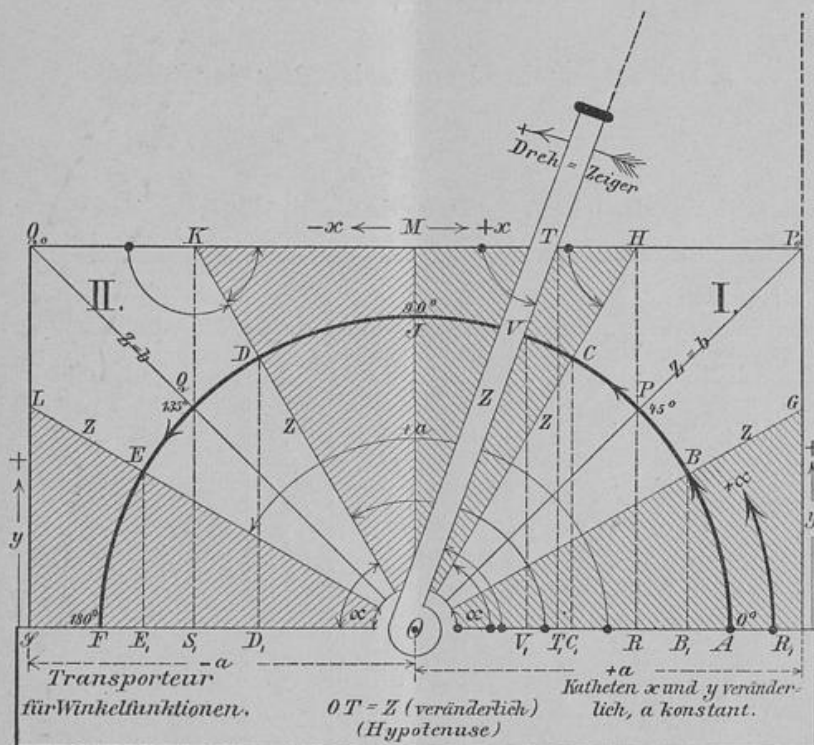
Die Grenzwerte der Funktionen  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  und  $\cotg \alpha$  für die Winkel  $\alpha = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  und  $360^\circ$ , ebenso der Vorzeichenwechsel beim Überschreiten der Quadranten während der Zeigerdrehung sind in den früheren Abhandlungen erledigt worden. (Fig. 3 und 4)

Zum Schluß ist noch folgende Betrachtung hier am Platze. Die beiden Dreiecke OAD und FDE sind ähnlich, denn es ist  $FD \perp OD$  und  $ED \perp OA$ , also  $\angle FDE = \angle DOA$  und  $\angle EFD = \angle DAO = 90^\circ$ . Beide Dreiecke stimmen also in den Winkeln überein. Man erhält demnach:  $ED : EF = OD : AD$  oder  $\Delta y : \Delta z = z : y$ , mithin  $y \cdot \Delta y = z \cdot \Delta z$ , d. h. das Rechteck

aus der Kathete  $y$  und ihrer Zunahme  $\Delta y$  ist dem Rechteck aus der Hypotenuse  $z$  und ihrer Zunahme  $\Delta z$  gleich. Die Gleichung  $\Delta y : \Delta z = z : y$  besagt auch, daß die Zunahmen der Veränderlichen  $y$  und  $z$  sich umgekehrt wie diese Veränderlichen verhalten. (Fig. 3)

Bemerkung: Dieselben Resultate erhält man durch Differenzieren der Gleichung:  $z^2 - y^2 = a^2$ ;  $2z dz - 2y dy = 0$ , also  $z dz - y dy = 0$ ,  $y \cdot dy = z dz$  oder  $dy : dz = z : y$ .

Figur 5



Für ganze Winkelgrade und einfache Bruchteile derselben ermöglicht der neue Transporteur für Winkelfunktionen (Schüler-Handexemplar der Lehrmittelanstalt Ehrhard, Bensheim-Hessen) nicht nur das Bestimmen der Funktionswerte von spitzen Winkeln [S. die 8 Beispiele in den Lehrproben von Fries, 1908, Heft 2, Seite 86 und 87], sondern auch solcher von stumpfen Winkeln, mit der für praktische Beispiele ausreichenden Genauigkeit von 2 Dezimalstellen. Bei Benutzung größerer Transporteur-Formen oder von Metalltransporteuren mit Präzisionsteilungen wird eine noch größere Genauigkeit auf 3 und mehr Dezimalstellen erzielt. Gleichzeitig ist auch dieser Transporteur wie jeder andere beim Zeichnen von Winkeln nach Graden, beim Übertragen solcher Winkel und bei allen geometrischen Konstruktionen auch in den unteren Klassen praktisch zu verwenden.

In der fünften Auflage meiner Bearbeitung des Lehrbuchs von Lackemann, Teil II, Trigonometrie (Ferdinand Hirt-Breslau, Universitäts-Verlagsbuchhandlung) haben für die Zwecke des propädeutischen Unterrichts in der Mathematik der neue Transporteur und außerdem noch der Universal-Winkelmeßapparat in einem besonderen Anhang Aufnahme gefunden.