A.

I. Der Universal-Winkelmessapparat

konstruiert und bearbeitet von Prof. Dr. Kreuschmer, Oberlehrer an der Realschule Barmen.

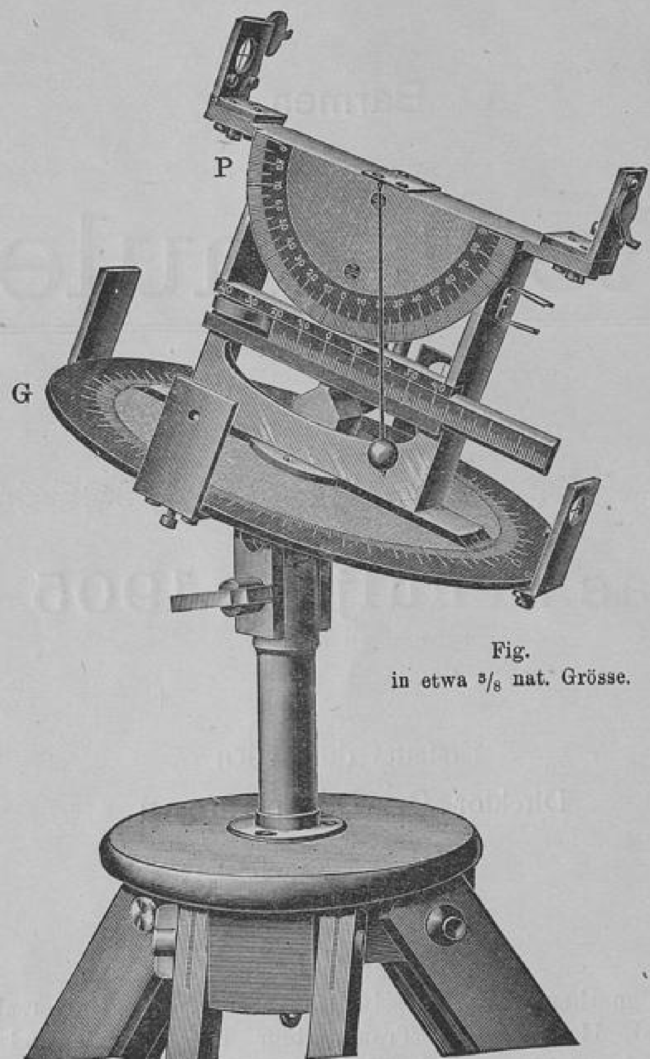


Fig.
in etwa $^5/_8$ nat. Grösse.

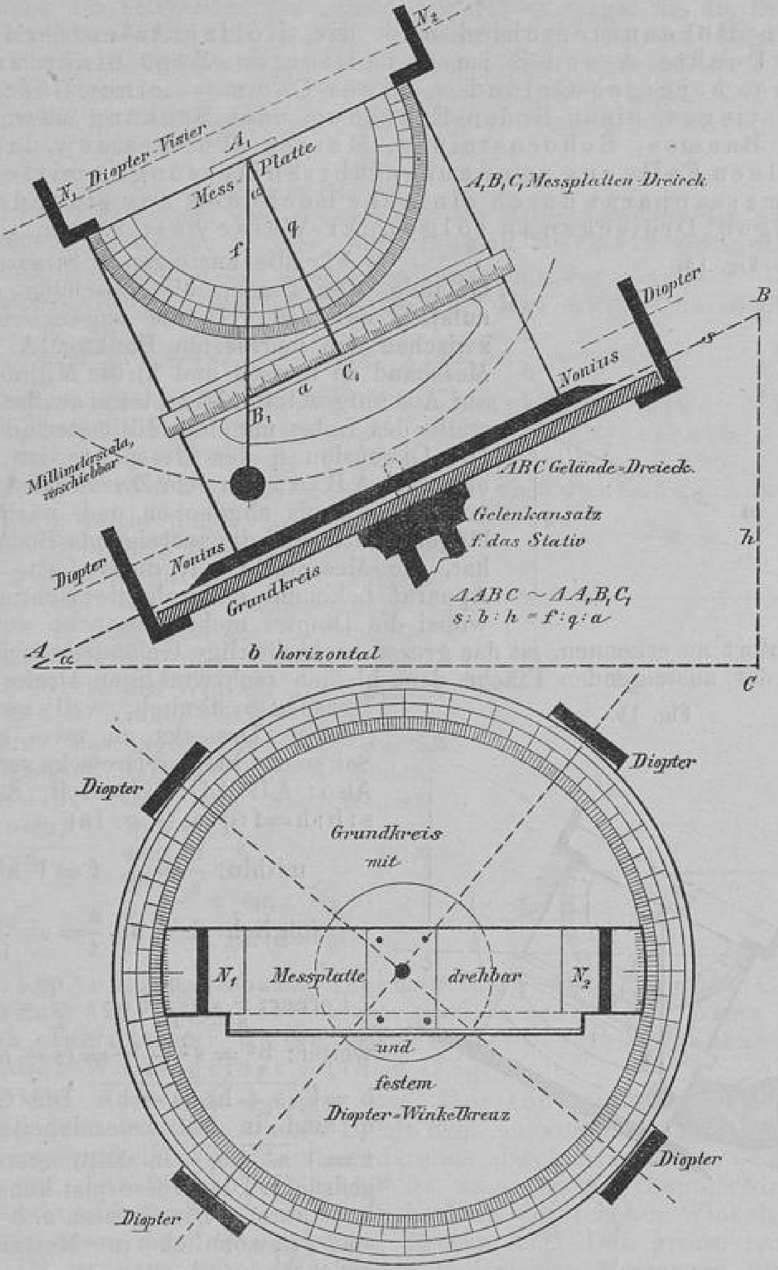
Dimensionen: Durchmesser des Grundkreises G = $17^1/_2$ cm; Höhe der Messplatte P = $9^1/_2$ cm; Diopterweite der Messplatte = 14 cm; Abstand des Mittelpunkts des Kugelgelenks vom Stativ, veränderlich = 10 bis 12 cm.

Dörffel & Faerber, Berlin, Friedrichstrasse 105a,
Fabrik und mechanische Werkstatt für wissenschaftliche Instrumente.

Ein neuer mathematischer Messapparat für die praktischen Aufgaben der Feldmesskunde zur Bestimmung von beliebigen Horizontal- und Vertikalwinkeln ähnlich wie bei einem Theodolit, zum Abstecken von rechten Winkeln, zur Berechnung von Längen-, Höhen- und Tiefendimensionen, des Flächeninhalts von beliebigen Dreiecken, Vierecken, Polygonen des Geländes, zur Ermittlung von Nivellementsbestimmungen, von Boden-Erhebungen und Senkungen im unebenen Gelände, zur Bestimmung von Böschungs-Neigungswinkeln und Böschungsdimensionen und einiger Winkelfunktionen.

Zeichnung des Universal-Winkelmessapparats nach Grund- und Aufriss

(schematische Darstellung in etwa 1/2 natürlicher Grösse.)

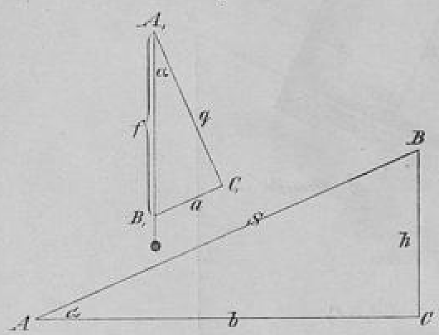


Bezugsquelle: Die Anfertigung und Lieferung des ganz in Metall hergestellten und gut vernickelten Universal-Winkelmessapparats übernimmt die Firma Dörffel & Faerber, Inhaber Julius Faerber und Walther Hammer, Fabrik, optische und mechanische Werkstatt für wissenschaftliche Präzisions-Apparate, Berlin, Friedrichstrasse 105a, in solider und exakter Ausführung. Am Nonius des im Kugelgelenk beweglichen Grundkreises können für alle Horizontal- und Vertikalwinkel noch Zehntelgrade genau abgelesen werden. Anfragen und Versenden von Druckprospekten erledigt diese Firma bereitwilligst. (Preis 90 Mk ohne Stativ.)

Erläuterungen an Beispielen für den Gebrauch des Universal-Winkelmessapparats beim Feldmessen.

1. Der Höhenunterschied und die Horizontalentfernung zweier markierter Punkte A und B im geradlinigen Zuge einer ansteigenden Strasse, eines bergigen Geländes, eines Dammes, einer Böschung, eines Treppenaufstieges, einer Boden-Erhebung oder Senkung usw., ferner die Höhe eines Baumes, Schornsteines, Mastes, Turmes usw. lassen sich in jedem einzelnen Falle aus zwei ausgeführten Messungen mittels Messband und Winkelmessapparat durch einfache Rechnung aus einander ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken in folgender Weise bestimmen.

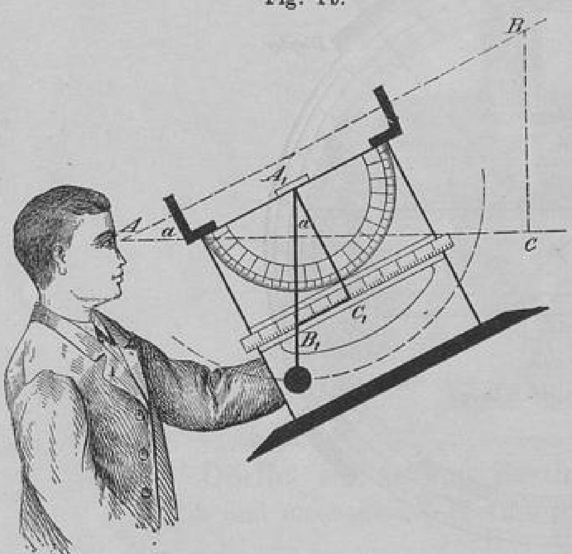
Fig. 1a.



a) Für die ansteigende Strasse, das bergige Gelände, den Damm, die Böschung, den Treppenaufstieg usw. ist: 1) die zugängliche Länge AB zwischen den markierten Punkten A und B mittels Messband zu messen und 2) die Millimeterzahl a der auf AB aufgesetzten Messplatte an der Fadenschnittstelle des Lotes mit der Millimeterteilung abzulesen. Die Dimension q der Messplatte ist in Millimetern bekannt. $AB = s$. Zu dem Zweck wird die Messplatte vom Grundkreis abgehoben und, nachdem man eine längere Latte auf die ansteigende Bodenfläche gelegt hat, die Messplatte auf diese Latte gestellt; der Apparat bekommt dadurch die richtige Einstellung, wobei die Diopter nicht gebraucht werden. (Fig. 1.)

Wie sofort zu erkennen, ist das grosse rechtwinklige Geländedreieck ABC in der Vertikalebene der ansteigenden Fläche dem kleinen rechtwinkligen Dreieck $A_1B_1C_1$ der Messplatte ähnlich, weil zwei Seiten des grossen Dreiecks zu zwei entsprechenden Seiten des kleinen Dreiecks senkrecht stehen. Also: $AB:AC:BC = A_1B_1:A_1C_1:B_1C_1$ oder $s:b:h = f:q:a$, (Fig. 1a)

Fig. 1b.



mithin: $\frac{h}{s} = \frac{a}{f}$, $f = \sqrt{a^2 + q^2}$;

folglich: $h = s \cdot \frac{a}{f} = s \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + q^2}}$.

Ferner: $\frac{b}{s} = \frac{q}{f}$ $b = s \cdot \frac{q}{f} = s \cdot \frac{q}{\sqrt{a^2 + q^2}}$

weiter: $b^2 = s^2 - h^2 = (s + h)(s - h)$;

$b = \sqrt{(s + h)(s - h)}$. Die Grössen a und q sind in Millimetereinheiten, also auch $f = \sqrt{a^2 + q^2}$ in Millimetereinheiten ausgedrückt. Die Grösse q ist konstant (Apparatkonstante). Die Grössen s, b und h dagegen sind gewöhnlich in Metereinheiten ausgedrückt.

b) Zur Ermittlung der Höhe eines Baumes, Hauses, Schornsteins, Mastes, Turmes usf. ist in horizontaler Richtung (Fig. 1b) die zugängliche Länge $AC = b$ zu messen und die Millimeterzahl a an der Messplatte abzulesen, wobei das Dioptervisier

Anmerkung. In der fünften Auflage meiner Bearbeitung der Trigonometrie und Stereometrie von Lackemann im Verlage der Königlichen Universitäts- und Verlagsbuchhandlung Ferdinand Hirt-Breslau haben der Universal-Winkelmessapparat und der neue Transporteur für Winkelfunktionen nebst Anwendungen in einem besonderen Anhang Aufnahme gefunden.

$N_1 N_2$ an der oberen Kante der Messplatte nach dem höchsten Punkt B hin gerichtet wird. Hierbei braucht man die Messplatte nicht vom Teilkreis zu trennen, sondern man dreht im Kugelgelenk des Teilkreises den ganzen Apparat so lange, bis die Dioptervisierlinie nach dem höchsten Punkt hin richtig eingestellt ist. Bei der vorzunehmenden Drehung bewegt sich die Messplatte in vertikaler Ebene, wobei der gespannte Pendelfaden die Messplattenfläche stets lose (ohne fest anzuliegen) berühren muss. Die Augenhöhe am Standort ist hierbei zu berücksichtigen. (Näh. siehe Beisp. 4), (Fig. 1a, 1b.)

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{q}, \qquad h = b \cdot \frac{a}{q}.$$

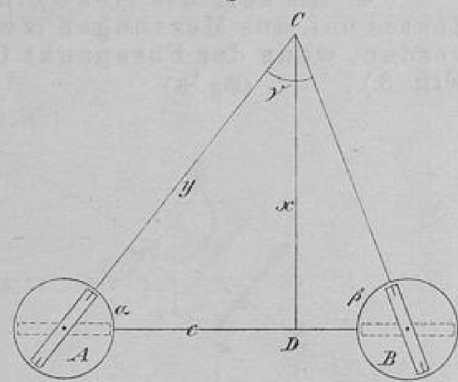
Man wird sofort erkennen, dass da, wo nur die Millimeterskala des Apparats zur Anwendung gekommen ist, keine trigonometrischen Formeln auftreten.

Statt der Millimeterzahl a der Messplatte kann auch der abgelesene Winkel α in Graden an der Halbkreiswinkelteilung benutzt werden. Man erhält dann in diesem Falle:

$$\text{zu a)} \; \frac{h}{s} = \sin\alpha, \; \frac{b}{s} = \cos\alpha. \qquad \text{zu b)} \; \frac{h}{b} = \operatorname{tang}\alpha.$$

2. Gegeben eine durch Fluchtstäbe markierte Standlinie AB und ein unzugänglicher, aber sichtbarer Punkt C ausserhalb derselben. Dreieck ABC liegt in der Horizontalebene des Feldes. Man soll den Abstand des Punktes C von AB aus Messungen durch Rechnung finden. (Fig. 2.)

Fig. 2.



Lösung: Man ermittle durch Messband die Länge der gegebenen Standlinie AB. Alsdann stelle man den Winkelmessapparat mit seinem Grundkreis horizontal in A auf und lese am Messapparat den Winkel $CAB = \angle\alpha$ ab (das Mass der Drehung der Messplatte auf den Teilkreis, der horizontal eingestellt ist, ist die Grösse des Winkels α). Ebenso bestimme man in B den Winkel $CBA = \angle\beta$.

Aus diesen drei Messungen kann man durch Rechnung den Abstand $CD = x$ leicht finden. $\angle\gamma = 180^0 - \angle(\alpha + \beta)$. Nach dem Sinussatz ist:

$$\frac{c}{y} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \qquad y = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma} \qquad \sin\alpha = \frac{x}{y}, \qquad x = y \sin\alpha,$$

$$x = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma} \cdot \sin\alpha, \qquad x = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

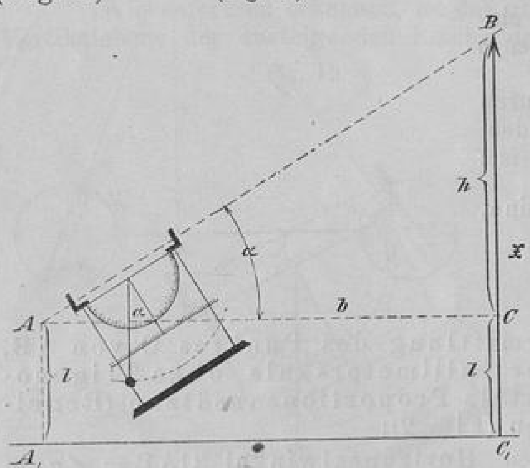
3. Dieselbe Aufgabe (Abstandsermittlung des Punktes C von AB, vorige Figur) kann unter Benutzung der Millimeterskala, ohne Trigonometrie, in ganz elementarer Weise mittels Proportionsansätzen (Regeldetri) in folgender Weise gelöst werden (Fig. 2):

Lösung: Man messe am Apparat den Horizontalwinkel $CAB = \angle\alpha$ in Graden, gehe in der Richtung von A nach B mit dem Apparat und suche mit Hilfe des rechtwinkligen Diopterwinkelkreuzes des Grundkreises durch Einvisieren und Probieren einen Punkt D so auf, dass Winkel $ADC = 90^0$ ist, dass also die Dioptervisierlinien des rechtwinkligen Diopterwinkelkreuzes mit den Schenkeln des rechten Winkels ADC zusammenfallen. Dann messe man die Länge der Strecke AD. Das grosse rechtwinklige Geländedreieck ACD ist dann durch die beiden vollzogenen Messungen für AD und $\angle\alpha$ bestimmt. Nun verschaffe man sich auf experimentellem Wege, an der Messplatte des Apparats, ein kleines rechtwinkliges Dreieck mit dem gleichen Winkel α wie vorhin, in folgender Weise: In einer Vertikalebene drehe man vorsichtig und langsam die Messplatte so lange, bis das gespannte Fadenlot denselben gleichen Winkel α in Graden anzeigt. Gleichzeitig damit markiert der Faden eine bestimmte kleine Strecke von a Millimeter an der Millimeterskala des Apparats. Offenbar ist nun das grosse rechtwinklige Geländedreieck ADC dem so künstlich erzeugten, kleinen rechtwinkligen Messplattendreieck, wegen der Winkelübereinstimmung, ähnlich. Mithin sind die Seitenverhältnisse des grossen Geländedreiecks den entsprechenden Seitenverhältnissen des kleinen Messplattendreiecks gleich. Die gesuchte unbekannte Grösse $CD = x$ findet man dann aus folgendem Proportions- oder Regeldetri-Ansatz: $x : AD = a : q$, also: $x = AD \cdot \frac{a}{q}$. Hierin ist q die Apparatkonstante in Millimetereinheiten, a die Ablesung an der Skala in Millimetereinheiten, AD die gemessene Strecke in Metereinheiten auszudrücken. Mithin erhält man für den gesuchten Abstand des Punktes C von AB — ohne trigonometrische Rechnung — die einfache Gleichung: $x = AD \cdot \frac{a}{q}$ Meter. (Fig. 2.)

Bemerkung: In gleicher Weise kann man durch experimentelle Handhabung der Messplatte, ohne trigonometrische Rechnungen, ganz beliebige Dreiecke usw., die in der horizontalen Feldebene liegen, auf ganz elementarem Wege berechnen. Immer hat man in der horizontalen Geländefigur durch Zerlegung ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck zu bilden, welches einem auf der Messplatte künstlich oder experimentell erzeugten kleinen rechtwinkligen Dreieck infolge der hervorgebrachten Winkelübereinstimmung ähnlich ist. Die entsprechenden, gleichen Seitenverhältnisse der beiden ähnlichen Dreiecke führen dann zu dem gewünschten Proportions- oder Regeldetri-Ansatz. In dem einen oder anderen Falle hat man höchstens noch eine Quadratwurzelausziehung nötig, z. B. in dem Falle, in welchem die Hypotenuse f des kleinen rechtwinkligen Messplattendreiecks nach der Formel $f = \sqrt{a^2 + q^2}$ auszurechnen ist. Somit ist erwiesen und klar gelegt, dass beim Gebrauch der Millimeterskala des Apparats logarithmisch-trigonometrische Rechnungen nicht zur Verwendung, dafür aber einfache Proportionen in Anwendung kommen.

4. Es soll die Höhe eines Fabrikschornsteins, Baumes, Turmes, Mastes usf. aus Messungen (zwei Messungen) mittels Rechnung ermittelt werden, wenn der Fusspunkt C_1 ein der Messung zugänglicher Punkt ist. (Fig. 3.)

(Fig. 3.)



Lösung: Es sei x die unbekannte Höhe des betreffenden Gegenstandes, l der Abstand des Auges A des Beobachters von der Bodenfläche $A_1 C_1$ ($A_1 C_1$ ist die horizontale Distanz). Man messe die zugängliche horizontale Entfernung $AC = A_1 C_1 = b$, stelle den Winkelmessapparat in A auf, so dass die Messplatte in die Vertikalebene fällt, und visiere am Diopter $N_1 N_2$ den höchsten Punkt B ein; dann lese man am Fadenlot den Höhenwinkel α in Graden ab. Aus diesen zwei Messungen kann die Höhe des betreffenden Gegenstandes $x = BC_1$ berechnet werden. Es kann auch zur Kontrolle der Höhenwinkel α (ohne Gebrauch des Fadenpendels) nach der andern, bereits früher beschriebenen Methode bestimmt werden.

$$1) \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{x - l}{b}, \quad x - l = b \operatorname{tang} \alpha, \quad x = l + b \cdot \operatorname{tang} \alpha.$$

Ohne Anwendung trigonometrischer Formeln unter Zuhilfenahme der Millimeterskala der Messplatte lässt sich die Aufgabe auch in folgender Weise behandeln (Fig. 3):

$$2) \quad \frac{h}{b} = \frac{a}{q}, \quad \frac{x - l}{b} = \frac{a}{q}, \quad x - l = b \cdot \frac{a}{q}, \quad x = l + b \cdot \frac{a}{q}.$$

Im Falle 2) ist $\frac{a}{q}$ der Quotient der beiden Millimeterzahlen der Messplatte; derselbe ist, wie man sofort erkennt, gleichbedeutend mit $\operatorname{tang} \alpha$ in den Gleichungen bei 1).

5. Es sei der Fusspunkt C_1 des Objekts ein der Längenmessung unzugänglicher Punkt. (Fig. 4.)

Lösung: Mit dem Messband messe man die Länge der zugänglichen Basis $A_1 D_1 = AD = b$; in den Punkten A und D stelle man den Winkelmessapparat in eine vertikale Ebene und visiere am Diopter der Messplatte an beiden Stellen den höchsten Punkt B ein. Das Fadenlot gibt dann die Winkel α und β in Graden an. Zur Kontrolle kann man auch die Höhenwinkel α und β (ohne Fadenlot) nach der bereits früher beschriebenen anderen Methode bestimmen. (Fig. 4.)

Aus diesen drei Messungen ergibt sich dann, wie folgt, die gesuchte Höhe x. (Fig. 4.) (A_1 D_1 ist die zugängliche horizontale Basis.)

Es ist: 1) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{AC}{BC}$ folglich: $\left.\begin{array}{l} AC = BC \cdot \operatorname{cotg}\alpha \\ DC = BC \cdot \operatorname{cotg}\beta \end{array}\right\}$ durch Subtraktion:

ebenso: 2) $\operatorname{cotg}\beta = \frac{DC}{BC}$ 3) $AC - DC = BC\,(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta)$

oder: $AD = BC\,(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta)$

$b = (x - l)\,(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta)$

foglich: 4) $x - l = \frac{b}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta}$, demnach: $x = l + \frac{b}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta}$

Für die Berechnung ist $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta$ durch eine einfache goniometrische Umformung in logarithmisch geeignete Form zu bringen.

6. Unter Benutzung der Millimeterskale der Messplatte des Apparats lässt sich dieselbe Aufgabe (Nr. 5) auch ohne die Hilfsmittel der Trigonometrie in folgender einfacher Weise lösen (Fig. 4):

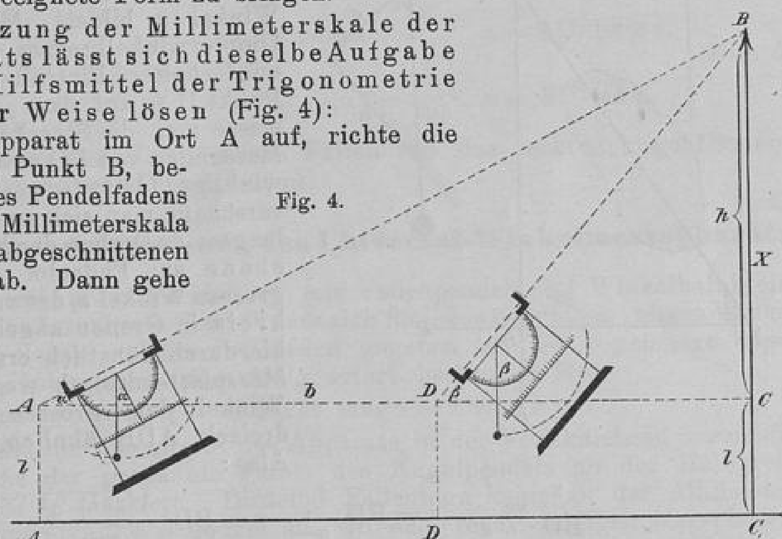


Fig. 4.

Man stelle den Apparat im Ort A auf, richte die Diopter auf den höchsten Punkt B, beobachte den Schnittpunkt des Pendelfadens mit der unteren Kante der Millimeterskala und lese die Zahl der abgeschnittenen Millimeter von der Skala ab. Dann gehe man mit dem Apparat nach dem Ort D und verfahre wie zuvor. Der horizontale Abstand beider Orte $AD = b$ ist in Metern zu messen. Die Apparatkonstante q oder der Abstand des Halbkreis-Mittelpunkts von der Millimeterskala (untere Kante) ist in Millimetern bekannt. $AA_1 = DD_1 = CC_1 = l$ ist der Abstand des Auges des Beobachters vom horizontalen Erdboden. Dreieck ADB ist dann durch eine Längenmessung (AD) und zwei Ablesungen an der Millimeterskala bei A und D berechenbar. Es sei nun a_1 die für den Ort A und a_2 die für den Ort D an der Messplatte abgelesene Millimeterzahl, dann ergeben sich, da die entstandenen kleinen Messplattendreiecke beziehungsweise den grossen Dreiecken in der Vertikalebene ähnlich sind, folgende Gleichungen: (Fig. 4).

1) $\frac{h}{AC} = \frac{a_1}{q}$ folglich: $AC = h \cdot \frac{q}{a_1}$

2) $\frac{h}{DC} = \frac{a_2}{q}$ $DC = h \cdot \frac{q}{a_2}$

Durch Subtraktion: 3) $AC - DC = h \cdot \left(\frac{q}{a_1} - \frac{q}{a_2}\right)$ oder: $b = h \cdot \left(\frac{q}{a_1} - \frac{q}{a_2}\right)$

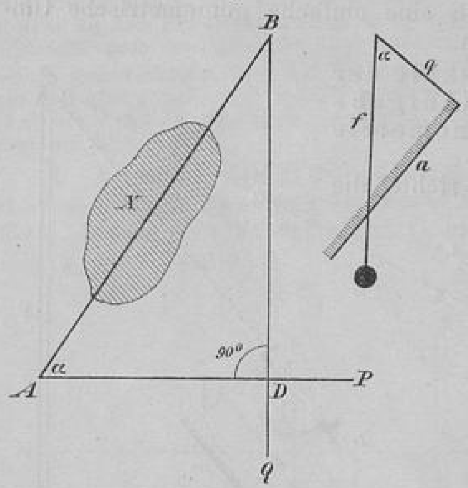
folglich: $h = \frac{b}{\frac{q}{a_1} - \frac{q}{a_2}}$ Demnach: 4) $x - l = \frac{b}{\frac{q}{a_1} - \frac{q}{a_2}}$ oder $x = l + \frac{b}{\frac{q}{a_1} - \frac{q}{a_2}}$

Die Quotienten $\frac{q}{a_1}$ und $\frac{q}{a_2}$ sind aber gleichbedeutend mit $\operatorname{cotg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\beta$, so dass man beim Einsetzen dieser Werte wieder die obige Gleichung $x = l + \frac{b}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta}$, also denselben Wert von x wie in 5) erhält.

7. In der Feldebene (horizontales Gelände) sind zwei feste sichtbare Punkte A und B gegeben. Es soll auf verschiedene Arten die unzugängliche Entfernung zwischen A und B mittels Bildung rechtwinkliger Dreiecke aus zwei ausgeführten Messungen durch Rechnung ermittelt werden, und zwar a) ohne die Hilfsmittel der Trigonometrie, b) mit Benützung derselben. (Fig. 5 u. 6.)

Lösung: a) Ohne die Hilfsmittel der Trigonometrie bei Benutzung der Millimeterskala. (Fig. 5.)

Fig. 5.



1) Man wähle im horizontalen Gelände eine beliebige Standlinie AP, welche mit AB den gemessenen, also in Graden bekannten spitzen Winkel α bildet. Mittels des rechtwinkligen Diopterwinkelkreuzes suche man auf AP durch wiederholtes Einstellen und Einvisieren einen Punkt D so auf, dass $\angle ADB = 90^0$ ist. Alsdann messe man die Strecke BD. Durch diese beiden Messungen von BD und $\angle\alpha$ ist das grosse rechtwinklige Geländedreieck ADB bestimmt. Nun verschaffe man sich am Apparat durch vorsichtiges langsames Drehen der Messplatte in der Vertikalebene am Fadenlot des Apparats den gleichgrossen Winkel α, der vorhin in A am Horizontalkreis in Graden abgelesen wurde. Dann ist das hierdurch künstlich erzeugte kleine rechtwinklige Messplattendreieck wegen Uebereinstimmung der Winkel dem grossen rechtwinkligen Geländedreieck ADB ähnlich. (II. Aehnlichkeitssatz.) Also:

$$\frac{x}{BD} = \frac{f}{a}, \quad x = BD \cdot \frac{f}{a}, \quad x = BD \cdot \frac{\sqrt{a^2 + q^2}}{a}. \qquad \text{(Fig. 5.)}$$

2) Gemessen $\angle\alpha$ und AD: Aehnlich wie zuvor erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{AD} = \frac{f}{q}, \quad x = AD \cdot \frac{f}{q} = AD \cdot \frac{\sqrt{a^2 + q^2}}{q}. \\ &\text{3) Gemessen AD und BD:} \\ &x^2 = AD^2 + BD^2, \quad x = \sqrt{AD^2 + BD^2}. \end{aligned}\right\} \text{Fig. 5.}$$

4) Mittels Diopterwinkelkreuz mache man $AC \perp AB$ (siehe Fig. 6) und wähle einen beliebigen Punkt C. Gemessen wird Strecke AC und $\angle\alpha$. Das in ähnlicher Weise wie in 1) erzeugte kleine Messplattendreieck habe die gleichen Winkel wie das grosse Geländedreieck ABC.

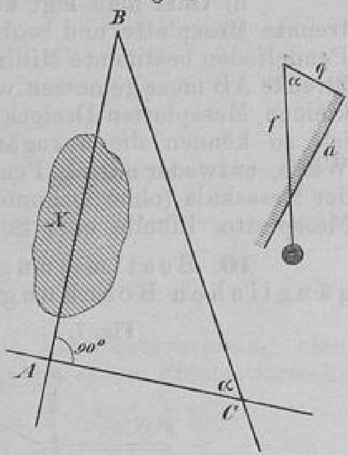
$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{AC} = \frac{a}{q}, \quad x = AC\,\frac{a}{q} \\ &\text{5) Gemessen Strecke BC und } \angle\alpha\text{:} \\ &\frac{x}{BC} = \frac{a}{f}, \quad x = BC \cdot \frac{a}{f} = BC \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + q^2}}. \end{aligned}\right\} \text{Fig. 6.}$$

6) Gemessen Strecken AC und BC:

$$x^2 = BC^2 - AC^2 \text{ (Fig. 6)}$$
$$= (BC + AC) \cdot (BC - AC),$$
$$x = \sqrt{(BC + AC)(BC - AC)}.$$

Lösung: b) Mit den Hilfsmitteln der Trigonometrie durch Winkelmessungen usw. ohne Gebrauch der Millimeterskala.

Fig. 6.



Für das rechtwinklinge Gelände-Dreieck ABD (Fig. 5) oder das rechtwinklige Gelände-Dreieck ABC (Fig. 6), aus welchen die unbekannte Entfernung x logarithmisch-trigonometrisch berechnet werden soll, hat man nur eine Längenausmessung und mit dem Winkelmessapparat eine Horizontal-Winkelmessung für den Winkel α vorzunehmen, nachdem zuvor das Diopter-Winkelkreuz des Messapparats die Festlegung des rechten Winkels bei D (Fig. 5) und bei A (Fig. 6) bewirkt hat. Es ergeben sich dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{zu 1)}\ \sin\alpha = \dfrac{BD}{x}, & x = \dfrac{BD}{\sin\alpha}. \\ \text{„ 2)}\ \cos\alpha = \dfrac{AD}{x}, & x = \dfrac{AD}{\cos\alpha}. \end{array}\right\} \text{Fig. 5.} \qquad \left.\begin{array}{ll} \text{zu 4)}\ \operatorname{tang}\alpha = \dfrac{x}{AC}, & x = AC \cdot \operatorname{tang}\alpha. \\ \text{„ 5)}\ \sin\alpha = \dfrac{x}{BC}, & x = BC \cdot \sin\alpha. \end{array}\right\} \text{Fig. 6.}$$

Fall 3 und 6) scheiden aus, da in diesen Fällen nur das rechtwinklige Diopterwinkelkreuz des Apparats zur Verwendung kommt.

Vermischte Aufgaben unter Benutzung des Universal-Winkelmessapparats.

8. Die Millimeterskala in Verbindung mit Fadenpendel und Winkelhalbkreisteilung hat ausserdem noch den besonderen Vorteil, dass sich für jeden beliebigen spitzen Winkel (der nicht zu nahe bei 90⁰ liegt), welcher in Graden gegeben ist, die zugehörige trigonometrische Tangente und Kotangente ziffermässig sofort bestimmen lässt.

Beispiel: Gegeben: $\angle\alpha = 37\frac{1}{2}^0$. Gesucht $\operatorname{tang}\alpha = ?$ $\operatorname{cotg}\alpha = ?$

Lösung: Man drehe die Messplatte des Apparats in der Vertikalebene vorsichtig und behutsam so lange, bis der gespannte Faden des Kugelpendels an der Halbkreisteilung den Winkel von $37\frac{1}{2}^0$ markiert. Dieselbe Fadenlage zeigt an der Millimeterskala die zugehörige Millimeterzahl a = 46 mm an. In dem rechtwinkligen Messplattendreieck mit den Katheten a = 46 mm und q = 60 mm ist dann $\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{q} = \frac{46}{60} = 0{,}7666$ und $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{q}{a} = \frac{60}{46} = 1{,}3043$; q = 60 mm ist die bekannte Konstante des Apparats, gleich dem Abstand des Halbkreismittelpunktes von der Millimeterskala (untere Kante). Für grössere Winkel α hat man die Millimeterskala durch Verschiebung zu verlängern, event. eine längere Reserve-Millimeterskala einzusetzen und die Fadenlänge des Kugelpendels entsprechend zu vergrössern, was durch Drehen an der Faden-Stellschraube auf der Rückseite der Messplatte bewirkt wird.

9. Die unzugänglichen Längen der Basis AC und der Höhe BC einer gleichmässig stark ansteigenden Strasse, eines Bergabhanges, einer Böschung, eines Treppenaufstieges, einer Bodensenkung usw. zu ermitteln. (Zwei Methoden.) (Fig. 7.)

a) Man misst die horizontale Länge AC staffelweise, indem man die hölzerne Messlatte bei HG, FE und DB mittels Libelle oder Setzwage horizontal setzt und die freiliegenden Enden der Latte durch das Fadensenklot herunterlotet. AC = HG + FE + DB. Ferner: BC = HA + FG + DE.

b) Oder man legt auf AB eine hölzerne Latte, setzt darauf die vom Apparat getrennte Messplatte und beobachtet entweder den Pendel-Ausschlagswinkel α oder die vom Pendelfaden bestimmte Millimeterzahl a auf der Millimeterskala. Die Länge der zugänglichen Strecke AB muss gemessen werden. Da das grosse Geländedreieck ABC dem entsprechenden kleinen Messplatten-Dreieck des Messapparats wegen der Winkelübereinstimmung ähnlich ist, so können die unzugänglichen unbekannten Dimensionen AC und BC auf doppelte Weise, entweder mittels Pendelwinkels α (trigonometrisch) oder durch die Millimeterzahl a der Messskala (ohne Trigonometrie durch Proportionen) ermittelt werden. (Fig. 7.) (Längere Messplatte, Libelle oder Setzwage, Messband, Metermass, Fadenlot, Winkelmessapparat.)

10. Bestimmung von Böschungs-Neigungswinkeln, von unzugänglichen Böschungs-Dimensionen, Böschungs-Querschnitten usf.

Fig. 7.

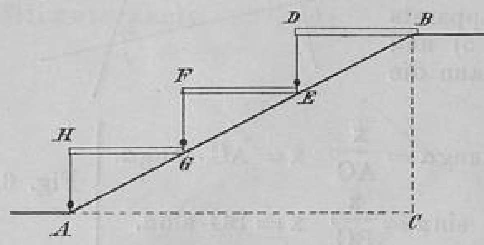
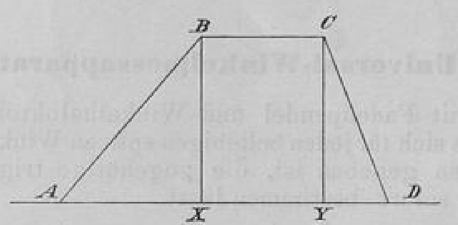


Fig. 8.



Um den Kubikinhalt von Erdmassen eines geradlinigen Fahrdammes zu berechnen, ist die Vertikalquerschnittsfläche ABCD (Fig. 8) zu ermitteln. Man misst die Längen von den beiden Böschungen AB und CD und der Fahrbreite BC, setzt in der Richtung der zugänglichen Dimensionen von AB und CD die Messplatte auf und bestimmt am Pendel die Böschungs-Neigungswinkel oder die Millimeterzahlen an der Millimeterskala und daraus die unzugänglichen Dimensionen AX, BX und DY durch Rechnung trigonometrisch oder durch Proportionen. Multipliziert man dann die Querschnittsfläche ABCD mit der Länge des Dammes, so erhält man den Kubikinhalt desselben. (Winkelmessapparat, Messband.)

11. Nivellementsaufgabe zur Ermittlung von Höhenunterschieden (zwei Methoden):

a) Auf unebener Bodenfläche, im bergigen Gelände oder auf einem Hofe zwischen Mauern und Gebäuden soll in gegebener Höhenlage eine Horizontale durch den Winkelmessapparat festgelegt werden. Man stellt den Grundkreis des Apparats in gegebener Diopter-Höhenlage horizontal ein und benutzt das Doppeldiopter $N_1 N_2$, $N_2 N_1$ der Messplatte, indem man von N_1 nach N_2 und umgekehrt von N_2 nach N_1 visiert. Die Schnittpunkte dieser Visierlinie mit senkrecht aufgestellten, in Zentimeter abgeteilten Messstäben oder etwa vorhandenen Mauern usw. werden zwecks Ermittlung von Höhenunterschieden des unebenen Erdbodens genau bezeichnet. Dreht man nun die Messplatte auf dem horizontal eingestellten Grundkreis des Apparats, so beschreibt die Dioptervisierlinie eine horizontale Ebene.

b) Man kann aber auch von N_1 nach N_2 visieren, dann die Messplatte um 180^0 drehen und abermals von der anderen Seite aus von N_1 nach N_2 visieren. Man erhält dann dieselbe Horizontale mit denselben Festpunkten wie vorhin. (Winkelmessapparat, Metermass.)

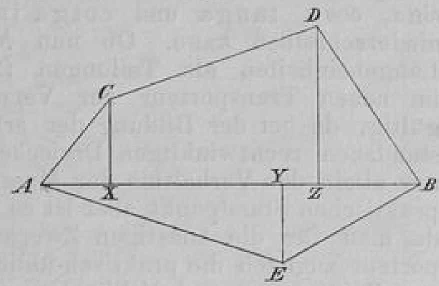
12. Flächenberechnung beliebiger geradliniger Figuren (Polygone), deren Ecken in der Feldebene durch Fluchtstäbe markiert sind. (Fig. 9.)

a) Um den Flächeninhalt eines unregelmässigen, in der Feldebene gelegenen abgesteckten Grundstückes (z. B. eines Fünfecks) zu ermitteln, lege man eine Standlinie so durch das Polygon, dass von dieser Basis aus sämtliche Ecken durch sogenannte rechtwinklige Abschläge (Ordinaten) gewonnen werden können. Die Lage der Punkte X, Y und Z auf der Standlinie AB ermittelt man durch das rechtwinklige Diopter-Winkelkreuz des Winkelmessapparats, die Seitenlängen der rechtwinkligen Dreiecke und Trapeze durch das Messband. Oder:

b) Man zerlege die Figur des Grundstücks AEBDC (Fig. 9) durch Ziehen der Diagonalen EC und ED in Dreiecke und berechne nach den bekannten Dreiecksflächenformeln die Fläche jedes einzelnen Dreiecks; man erhält dann (Fig. 9): Fläche AEBDC $= \triangle$ EAC $+ \triangle$ ECD $+ \triangle$ EDB. Zur Berechnung des Flächeninhalts eines beliebigen Dreiecks ist mindestens eine Längsmessung notwendig. Die ausserdem noch erforderlichen Dreieckswinkel-Bestimmungen (Horizontalwinkel) werden durch den Universalwinkelmessapparat bewirkt. Wird bei einem Dreieck eine Seite a und die zugehörige Höhe h, oder werden alle drei Seiten a b und c ausgemessen, so ist dann für die Flächenberechnung eine Winkelbestimmung nicht erforderlich. Die zur Anwendung gelangenden Flächenformeln eines Dreiecks sind: 1) $f = {}^1/_2 ah$, 2) $f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = {}^1/_2 (a+b+c)$

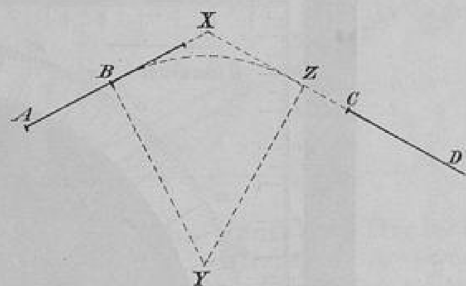
3) $f = {}^1/_2 \, b c \cdot \sin\alpha$, 4) $f = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$.

Fig. 9.



13. Zwei in der Feldebene gegebene markierte geradlinige Wegstrecken AB und CD durch einen Kreisbogen BZ so miteinander zu verbinden, dass die Wege in B und Z tangential zum Bogen liegen. Man verlängere AB und CD über B und C hinaus und markiere den Schnittpunkt X durch einen Fluchtstab, dann mache man XZ = XB und markiere den Punkt Z durch einen Fluchtstab. In B und Z stecke man durch das rechtwinklige Diopterwinkelkreuz rechte Winkel ab, deren entsprechende Schenkel den Mittelpunkt Y des Kreisbogens liefern. Mit der Messleine beschreibe man um Y als Mittelpunkt mit YB als Radius den gesuchten Kreisbogen. Oder: Man stelle in X den Winkelmessapparat auf und halbiere den Winkel BXC. Die Winkelhalbierende durch X und die Senkrechte zu AB in B liefern den Mittelpunkt Y. (Messband, Winkelmessapparat.) (Fig. 10.)

Fig. 10.



II. Der neue Transporteur für Winkel und Winkelfunktionen,[1]

konstruiert und bearbeitet von Professor Dr. Kreuschmer, Barmen.

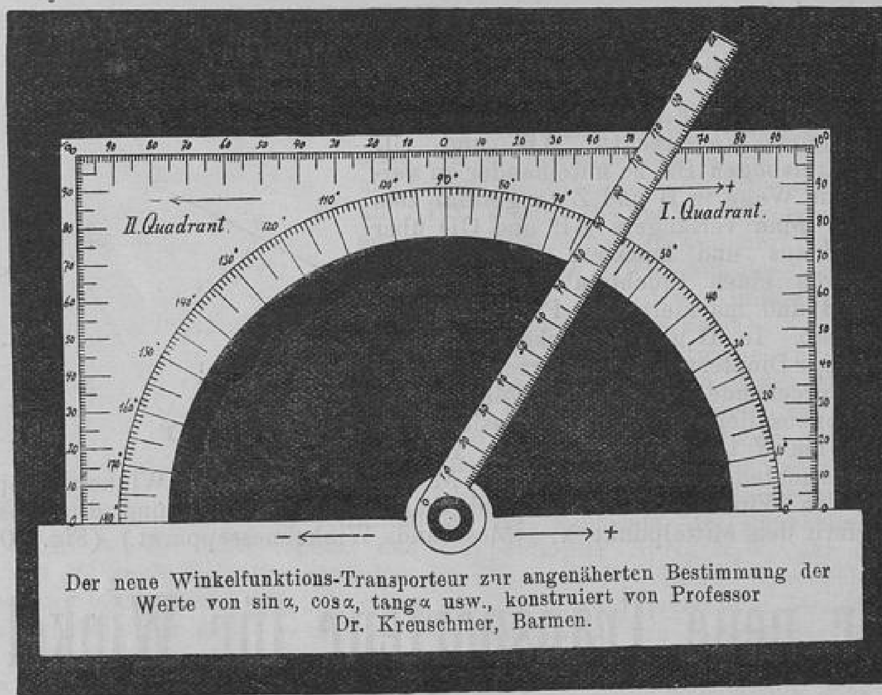
Mit diesem neuen mathematischen Messinstrument (Fig. 11 u. 13) kann man ebenso wie beim alten Winkeltransporteur in bekannter Weise das Zeichnen und Bestimmen von Winkeln nach Graden vornehmen. Vom alten Transporteur unterscheidet sich jedoch der neue durch eine besondere Vorrichtung, welche eine wesentliche, wertvolle Gebrauchserweiterung — direkte elementare Ermittlung der angenäherten natürlichen Werte der Winkelfunktionen, ihrer Grenzwerte usw. — zur Folge hat.

Die neue, praktische Gebrauchsanwendung besteht darin, dass man mittels einer einfachen Vorrichtung (Zeigermechanismus) für jeden beliebigen spitzen oder

[1]) Erschienen in der Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Cie. in Bensheim (Hessen). (Papierkarton-Transporteur nach Fig. 14, mit dauerhaftem Drehzeiger für die Hand des Schülers. Preis 40 Pfg.)

stumpfen Winkel α die natürlichen, angenäherten Werte der Winkelfunktionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\alpha$ in Form von Zahlenquotienten sofort ablesen und niederschreiben kann. Ob nun Millimetereinheiten oder beliebige andere sehr kleine Längeneinheiten als Teilungen für den Drehzeiger, die Rechteck- und Dreieckseiten im neuen Transporteur zur Verwendung kommen, ist im allgemeinen ganz gleichgültig, da bei der Bildung der erforderlichen Quotienten je zweier Seiten in den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken die gewählte Einheit sich hebt, also fortfällt und nur allein das Verhältnis der Masszahlen dieser Dreiecksseiten in Betracht kommt. Vom praktischen Standpunkt aber ist es vorteilhaft, wenn Millimeter-Teilungen gewählt werden, da man für die sonstigen Zwecke des Zeichnens und Konstruierens am neuen Transporteur zugleich die praktisch-üblichen Massstäbe unseres dezimalen Metersystems in Form von Zentimetern und Millimetern zur Verfügung hat.

Fig. 11.



Der neue Winkelfunktions-Transporteur zur angenäherten Bestimmung der Werte von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$ usw., konstruiert von Professor Dr. Kreuschmer, Barmen.

Je nach der Lage des Drehzeigers ist in diesen rechtwinkligen Dreiecken stets die eine der beiden Katheten konstant, während mit der Bewegung des Drehzeigers die andere Kathete und die Hypotenuse veränderlich sind. So besitzt z. B. für Winkel zwischen 0^0 und 45^0 sowie zwischen 135^0 und 180^0 die horizontale, für Winkel zwischen 45^0 und 135^0 die vertikale Kathete die konstante Länge. Die angenäherten Werte aller Winkelfunktionen können nun sofort als Zahlenquotienten je zweier entsprechender Seiten der vom Zeiger abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecke angegeben werden. Nach den Grundbegriffen für die Winkelfunktionen erhält man die Grund-Gleichungen (Fig. 12):

Grundbegriffe der vier Winkelfunktionen.

$$\sin\alpha = \frac{\text{gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\text{gegenüberliegende Kathete}}{\text{anliegende Kathete}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{anliegende Kathete}}{\text{gegenüberliegende Kathete}} = \frac{b}{a}$$

Wie man auch leicht erkennen wird, lassen sich bei der Zeigerbewegung nach der einen oder anderen Drehrichtung hin die Veränderlichkeit der Funktionen (Wachsen und Abnahme) mit dem sich ändernden Winkel, der Vorzeichenwechsel beim Wechsel der Quadranten und Durchgang durch Null und die Grenzwerte der Funktionen für die Winkel im ersten und zweiten Quadranten sehr anschaulich vorführen. Die für die Funktionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ usw. am Transporteur zu entnehmenden Winkelgrade, auf welche der Drehzeiger eingestellt werden muss, sind ohne weiteres in den veränderlichen rechtwinkligen Dreiecken sofort zu erkennen. (Fig. 13, 15 u. 17.) Die bei anderweitigen geometrischen Darstellungen, z. B. für Winkel über 45⁰ bis 90⁰ entstehenden, sehr gross u. schlieslich unendlich gross werdenden rechtwinkligen Dreiecke (siehe Fig. 15 u. 17) sind hier in vorteilhafter Weise dadurch vermieden, dass mit der Zeigerbewegung beim Übergang über 45⁰, statt jener sehr gross, schliesslich bei 90⁰ unendlich gross werdenden Dreiecke, kleinere, in endlichen Grenzen bleibende Dreiecke, welche den grossen Dreiecken aber ähnlich sind, auswechseln und in Funktion treten. Hierbei tritt dementsprechend (für tang 90⁰ und cotg 0⁰) in dem Ausdruck für die Unendlichkeit statt der Form $\frac{\infty}{a}$ die andere Form $\frac{a}{0}$ auf. Die innerhalb des Millimeterrechtecks vorhandenen (durch Schraffierung kenntlich gemachten) veränderlichen rechtwinkligen Dreiecke, an denen die Winkelfunktionswerte abgelesen werden, gehen aber über den Rahmen jenes Rechtecks nicht hinaus, können also niemals unbequem gross werden. Beim Übergang des Drehzeigers aus dem ersten in den zweiten Quadranten (bei OM) und umgekehrt, wenn also Winkel α gleich 90⁰ geworden ist, tritt für die horizontale veränderliche Kathete (die auf der Rechtecksseite PQ liegt) in M ein Vorzeichenwechsel ein, da bei M für die Werte der veränderlichen Kathete der Durchgang durch Null stattfindet und der Nullpunkt (M) auf der unendlichen Zahlen-Punktreihe der reellen Werte gleichzeitig der Grenzpunkt für die positiven und negativen Grössen ist.

Fig. 12.

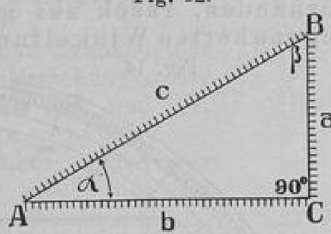
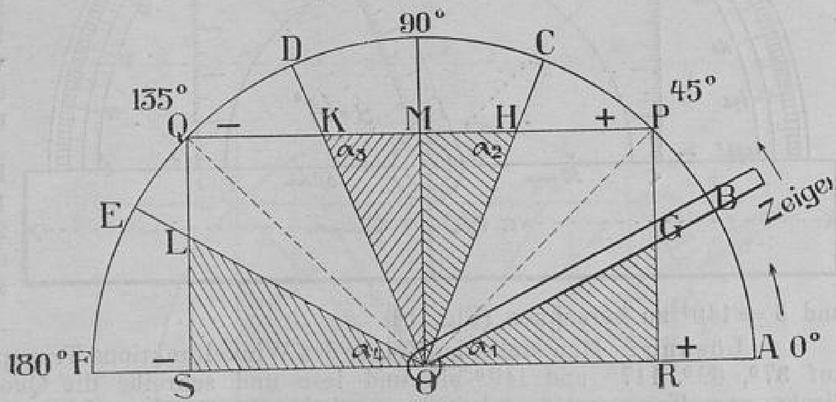


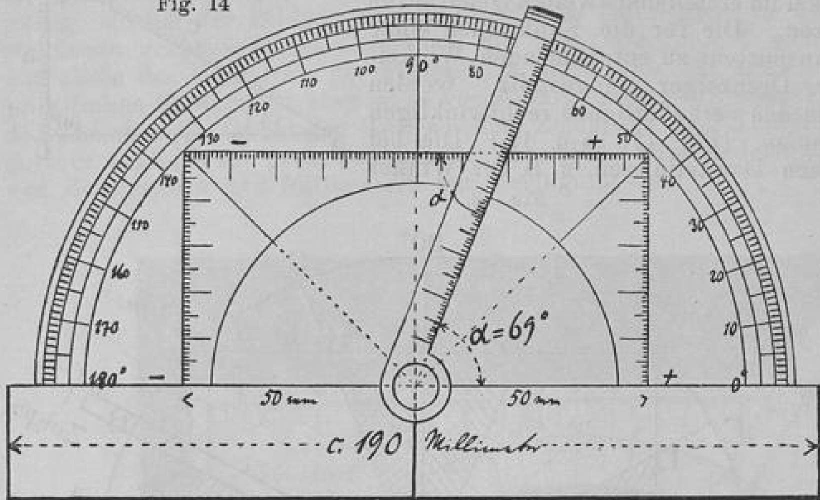
Fig. 13.



In allen Lagen für die Einstellung des Transporteur-Drehzeigers muss die veränderliche Hypotenuse (Zeigerkante) stets absolut genommen werden. Sie kann nicht negativ werden, weil ihre Veränderlichkeit zwischen zwei festen positiven Grenzen (OR und OP) schwankt und daher der Nullwert weder erreicht noch überschritten werden kann.

Die Zahlenquotienten, die einem Exemplar des neuen Transporteurs von Ehrhardt & Cie., Bensheim, (Hessen) (s. Fig. 14 auf S. 14) (aus Kartonpapier für die Hand des Schülers zum Preise von 40 Pfg. hergestellt), entnommen sind, stimmen, in Dezimalbrüche verwandelt, etwa bis auf zwei Dezimalstellen mit den wahren Winkelfunktionswerten überein. Bei in Metall hergestellten, mit Präzisionsteilungen usw. versehenen Transporteuren würde die Genauigkeit natürlich viel weiter gehen, da noch Bruchteile von Winkelgraden und Millimeterteilen berücksichtigt werden können. Die damit erzielten Resultate dürften je nach Grösse und Feinheit in der Ausführung des Transporteurs auf drei, vier und mehr Dezimalstellen genau sein. Jedenfalls aber ist im neuen Transporteur, — vom pädagogischen Nutzen als Anschauungsmittel und Gebrauchs-Apparat für den mathematischen Unterricht ganz abgesehen, — ein einfaches sicheres Mittel vorhanden, rasch auf mechanischem Wege durch blosse Zeigerdrehung die angenäherten Winkelfunktionswerte von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ als Zahlenquotienten für alle praktischen Berechnungen leicht zu bestimmen. Hierbei werden die Logarithmen der Winkelfunktionen in den Logarithmentafeln nicht gebraucht, da man in Bruchform die Zahlenwerte der Funktionen selbst direkt ablesen und hinschreiben kann.

Fig. 14



Zahlenbeispiele: Es seien die Ausdrücke 1) $x = \sin\alpha \cdot \cos\beta$ und 2) $y = \operatorname{cotg}\delta : \operatorname{tang}\gamma$ für die ganzen Winkelgrade $\alpha = 37^0$, $\beta = 62^0$, $\gamma = 117^0$ und $\delta = 149^0$ zu berechnen (Fig. 14).

Lösung: Man stelle den Zeiger des Winkelfunktions-Transporteurs beziehungsweise auf 37^0, 62^0, 117^0 und 149^0 ein und lese und schreibe die Quotienten der Funktionen direkt vom Transporteur ab; man erhält ohne Gebrauch der Logarithmentafeln für

$$1)\quad x = \sin\alpha \cdot \cos\beta = \sin 37^0 \cdot \cos 62^0 = \frac{38}{63} \cdot \frac{27}{57} = \frac{2}{7} = 0{,}2857$$

$$2)\quad y = \frac{\operatorname{cotg}\delta}{\operatorname{tang}\gamma} = \frac{\operatorname{cotg} 149^0}{\operatorname{tang} 117^0} = \frac{-50}{30} \cdot \frac{-25}{50} = \frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots.$$

Bemerkung: Berechnet man, wie sonst üblich, x und y logarithmisch, so erhält man die genaueren Werte: $x = 0{,}2825$ und für $y = 0{,}8480$. Dabei berücksichtige man, dass der obige hierbei zur Verwendung gekommene neue Transporteur aus Kartonpapier für die Hand des Schülers dementsprechend einfach gearbeitet ist und dass die Ablesungen auf ganze Millimeter abgerundet wurden.

Als weiterer Beleg dafür, dass schon der einfache Winkelfunktions-Transporteur (Schülerausgabe in Kartonpapier-Druck) auf etwa 2 Dezimalstellen genaue Resultate liefert, dient folgendes Zahlenbeispiel mit dem Transporteur (Fig. 14):
Durch Zeigereinstellung erhält man z. B. $\sin 70^0 = \frac{50}{53} = 0{,}94$. Aus $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ ergibt sich andererseits: $\sin 70^0 = \sin(32^0 + 38^0) = \sin 32^0 \cos 38^0 + \cos 32^0 \sin 38^0 = \frac{31}{59} \cdot \frac{50}{64} + \frac{50}{59} \cdot \frac{40}{64} = \frac{3550}{3776} = 0{,}94$. Nach einer vorliegenden Sinustabelle (natürliche Werte der Sinuswinkelfunktion) entnimmt man den Zahlenwert: $\sin 70^0 = 0{,}9397 = 0{,}94$. (Also Übereinstimmung bis auf etwa 2 Dezimalstellen).

Bei Anwendung von feineren, exakt aus Metall gearbeiteten Transporteuren mit Präzisionsteilung erhält man selbstverständlich viel genauere Ausdrücke, die man logarithmisch und auch ohne Logarithmen weiter berechnen kann. Auf jeden Fall aber ist das Aufsuchen der Logarithmen der Winkelfunktionen in den vier- und fünfstelligen Logarithmen-Tafeln nicht erforderlich, da man die natürlichen angenäherten Funktionswerte als Zahlenquotienten direkt vom Transporteur abliest und niederschreibt. Bei raschen technischen trigonometrischen Überschlags-

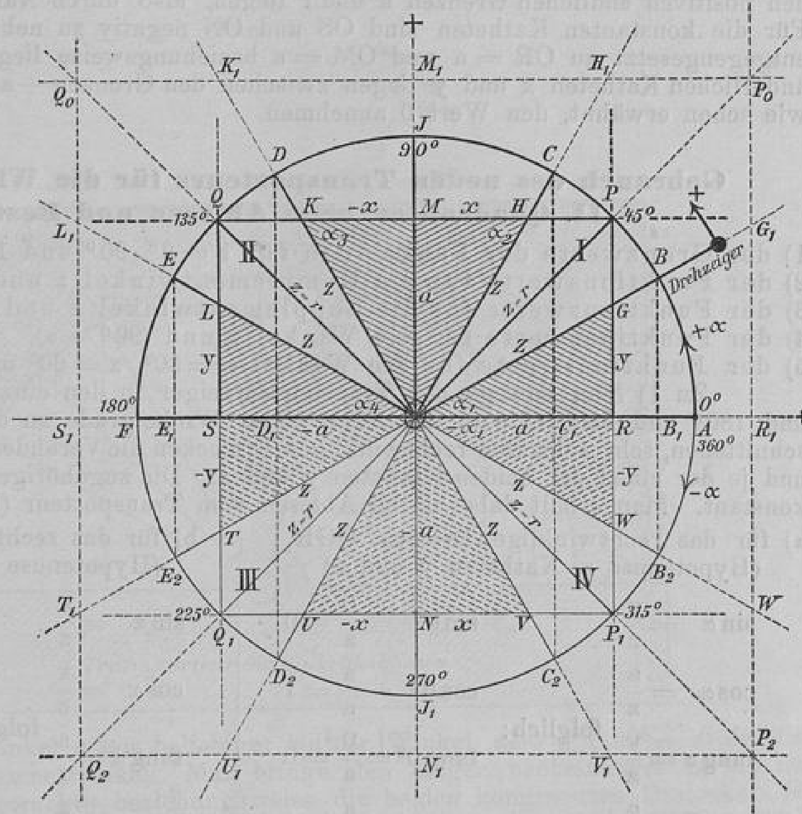
Berechnungen, ferner zur sicheren und von der logarithmisch-trigonometrischen Rechnungsart offenbar ganz unabhängigen Kontrolle trigonometrischer Ausdrücke für bestimmte Zahlenwerte dürfte aus diesem Grunde der neue Winkelfunktions-Transporteur auch in der technischen Praxis mannigfache praktische Verwendung finden.

Vervollständigt man die Figur des Halbkreises im neuen Transporteur zu einem Vollkreise, so kann man alle die Betrachtungen und Beziehungen der Winkelfunktionen für den I. und II. Quadranten auch auf den III. und IV. Quadranten für die erhabenen und negativen Winkel ausdehnen.

In der Zeichnung für die Winkelfunktionen der Winkel in den vier Quadranten eines Vollkreises (Fig. 15) sei: OA Anfangslage (Nullgrad) des drehbaren Strahls (Zeiger),

AO = r = Radius des in 360⁰ geteilten Kreises, AP positive, AP_1 negative Drehrichtung (positive und negative Winkel).

Fig. 15.



In den veränderlichen rechtwinkligen Dreiecken (schraffiert) bezeichnet: a die konstante horizontale oder vertikale Kathete,, x die horizontale veränderliche Kathete, y die vertikale veränderliche Kathete, z die veränderliche Hypotenuse zwischen den festen positiven Grenzen z = a und z = r liegend.

Man erhält bei der Weiterbewegung des Drehzeigers (aus der Anfangslage OA) durch den III. und IV. Quadranten aus den entsprechenden Seitenverhältnissen der veränderlichen rechtwinkligen Dreiecke die Werte der Winkelfunktionen für die erhabenen Winkel zwischen 180⁰ und 360⁰ entsprechend der Drehbewegung des Millimeterzeigers. Die den Richtungen OM, RP und SQ entgegengesetzt liegenden Strecken des dritten und vierten Quadranten sind dann in der Rechnung negativ einzuführen. Erfolgt aus der Anfangslage OA die Zeigerdrehung in entgegengesetzter Richtung (durch den vierten Quadranten), so entstehen die negativen Winkelgrössen zwischen 0⁰ und — 360⁰, für welche die Funktionen ebenfalls leicht ermittelt werden können. Man kann sich also an der Hand der veränderlichen rechtwinkligen Dreiecke mit den veränderlichen Seiten x, y und z von den einzelnen Vorgängen in den Quadranten I, II, III und IV, hinsichtlich der Entstehung und Bildung der Winkelfunktionen, je nach der Drehrichtung der Zeigerbewegung, für alle positiven und negativen Winkelgrössen zwischen 0⁰ und 360⁰ eine klare anschauliche und deutliche Vorstellung machen, in welcher Weise sich die Funktionen mit dem Winkel ändern, welche Grenzwerte entstehen, wie sich beim Übergang aus dem einen Quadranten in den andern der Zeichenwechsel der Funktion vollzieht und welche goniometrischen Beziehungen für die einzelnen Winkelgrössen in Form von goniometrischen Gleichungen mittels des neuen Transporteurs zustande kommen.

Für die veränderlichen Werte der horizontalen und vertikalen Katheten, die in der letzten Figur beziehungsweise mit x und y bezeichnet sind, tritt stets dann ein Zeichenwechsel ein, wenn mit der Zeigerbewegung beim Übergang aus einem Quadranten in den benachbarten diese Werte durch die Null hindurchgehen. So z. B. findet für die mit x bezeichneten veränderlichen Katheten bei M und N und für die mit y bezeichneten veränderlichen Katheten bei R und S ein Zeichenwechsel statt. Für die veränderliche Hypotenuse z kann aber kein Zeichenwechsel stattfinden, da die Werte für z zwischen den positiven endlichen Grenzen a und r liegen, also durch Null niemals hindurchgehen. Für die konstanten Katheten sind OS und ON negativ zu nehmen, da diese Richtungen entgegengesetzt zu OR = a und OM = a beziehungsweise liegen. Die Werte der veränderlichen Katheten x und y liegen zwischen den Grenzen + a und — a und können also, wie schon erwähnt, den Wert 0 annehmen.

Gebrauch des neuen Transporteurs für die Winkel des I. und II. Quadranten beim Ablesen und Bestimmen:

1) der Grenzwerte der Funktionen für $\alpha = 0^0$, 90^0 und 180^0,
2) der Funktionswerte für die Komplementwinkel α und $(90^0 - \alpha)$,
3) der Funktionswerte für die Supplementwinkel α und $(180^0 - \alpha,)$
4) der Funktionswerte für die Winkel α und $(90^0 + \alpha)$,
5) der Funktionswerte für die Winkel $\alpha = 30^0$, $\alpha = 60^0$ und $\alpha = 45^0$.

Zu 1) Man bewege den Transporteurzeiger in den einzelnen Fällen nach 0^0, 90^0 und 180^0 und beobachte in der Nähe dieser Winkelgrade an den vom Drehzeiger abgeschnittenen, sehr schmalen rechtwinkligen Dreiecken die Veränderlichkeit der Hypotenuse z und je der einen der beiden Katheten y und x. Die zugehörige andere Kathete ist immer konstant. Man erhält dabei durch Ablesen vom Transporteur (Fig. 17):

a) für das rechtwinklige Dreieck OGR_1: (Hypotenuse z, Katheten y und a)

$$\sin\alpha = \frac{y}{z} \qquad \sin 0^0 = \frac{0}{a} = 0$$
$$\cos\alpha = \frac{a}{z} \qquad \cos 0^0 = \frac{a}{a} = 1$$
folglich:
$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{a} \qquad \operatorname{tang} 0^0 = \frac{0}{a} = 0$$
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{a}{y} \qquad \operatorname{cotg} 0^0 = \frac{a}{0} = \infty$$

b) für das rechtwinklige Dreieck OHM: (Hypotenuse z, Katheten x und a)

$$\sin\alpha = \frac{a}{z} \qquad \sin 90^0 = \frac{a}{a} = 1$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{z} \qquad \cos 90^0 = \frac{0}{a} = 0$$
folglich:
$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{x} \qquad \operatorname{tang} 90^0 = \frac{a}{0} = \infty$$
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{a} \qquad \operatorname{cotg} 90^0 = \frac{0}{a} = 0$$

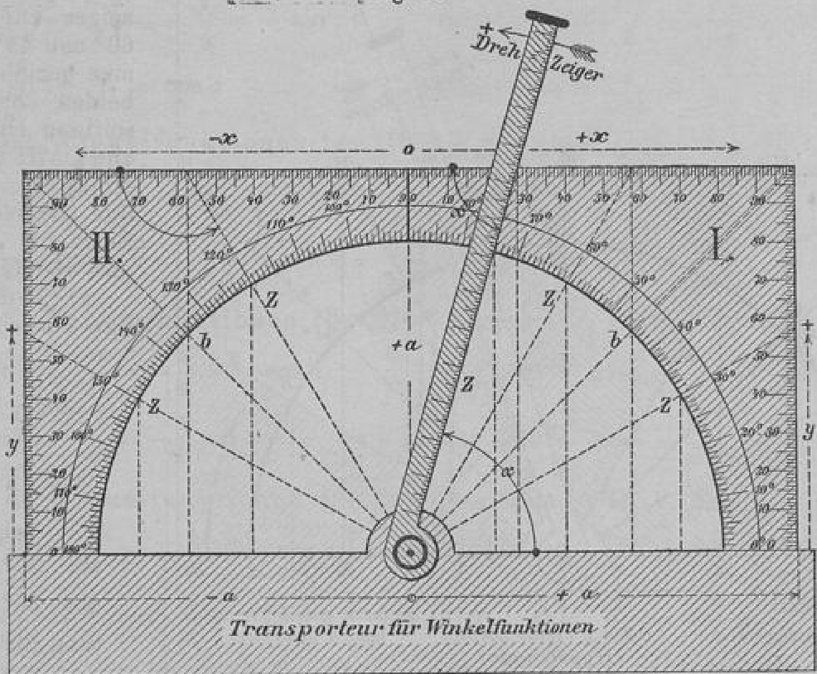
c) für das rechtwinklige Dreieck OLS: (Hypotenuse z, Katheten y und — a) (Fig. 17)

$$\sin\alpha = \frac{y}{z} \qquad \sin 180^0 = \frac{0}{a} = 0$$
$$\cos\alpha = \frac{-a}{z} \qquad \cos 180^0 = \frac{-a}{a} = -1$$
folglich:
$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{-a} \qquad \operatorname{tang} 180^0 = \frac{0}{-a} = -0$$
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{-a}{y} \qquad \operatorname{cotg} 180^0 = \frac{-a}{0} = -\infty$$

Zu 2) Man stelle den Drehzeiger z. B. auf einen beliebigen spitzen Winkel α ein und nenne den anderen spitzen Komplement-Winkel des dabei abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecks β. Also $\angle(90^0-\alpha)=\angle\beta$. Demnach erhält man aus $\triangle\, OGR_1$ (Fig. 17):

$$\left.\begin{aligned}
\sin\ (90^0-\alpha) &= \sin\beta = \frac{a}{z} = \cos\alpha\\
\cos\ (90^0-\alpha) &= \cos\beta = \frac{y}{z} = \sin\alpha\\
\mathrm{tang}\,(90^0-\alpha) &= \mathrm{tang}\beta = \frac{a}{y} = \mathrm{cotg}\,\alpha\\
\mathrm{cotg}\,(90^0-\alpha) &= \mathrm{cotg}\beta = \frac{y}{a} = \mathrm{tang}\,\alpha
\end{aligned}\right\}\ \text{folglich:}\quad
\begin{aligned}
\sin\ (90^0-\alpha) &= \cos\alpha\\
\cos\ (90^0-\alpha) &= \sin\alpha\\
\mathrm{tang}\,(90^0-\alpha) &= \mathrm{cotg}\,\alpha\\
\mathrm{cotg}\,(90^0-\alpha) &= \mathrm{tang}\,\alpha
\end{aligned}$$

Fig. 16.



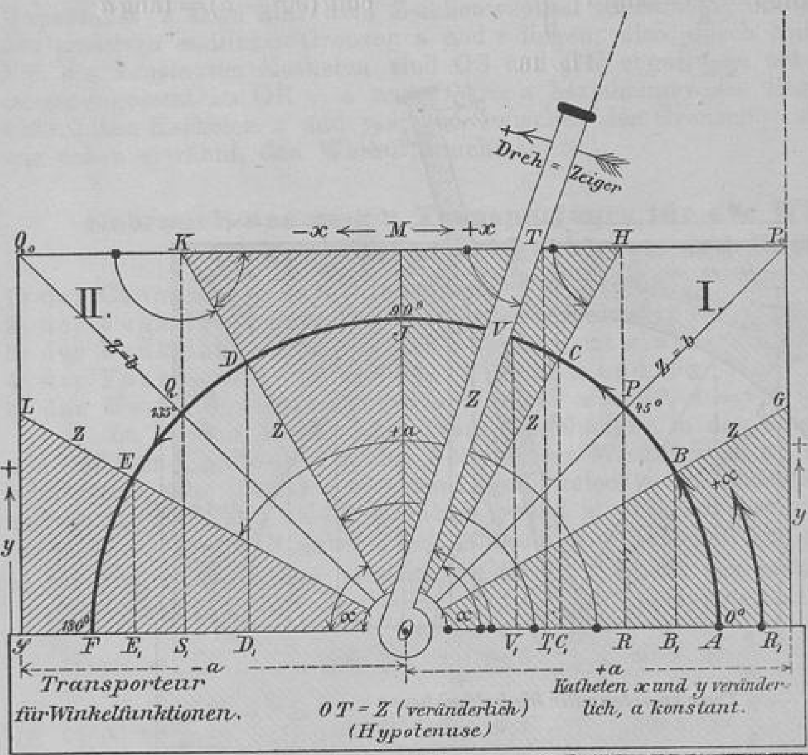
Zu 3) Es sei Winkel α ein beliebiger spitzer Winkel, also $\angle(180^0-\alpha)$ der dazu gehörige stumpfe Supplementwinkel. Man bringe den Zeiger nacheinander in die Lage von OG und OL und betrachte beziehungsweise die beiden kongruenten Dreiecke OGR_1 und OLS. In Fig. 17 ist $\angle BOA=\angle\alpha$, also $\angle EOA=\angle(180^0-\alpha)$, da $EOF=\angle\alpha$ ist.

$$\left.\begin{aligned}
\sin\ (180^0-\alpha) &= \frac{y}{z} = \sin\alpha\ \text{(Fig. 17)}\\
\cos\ (180^0-\alpha) &= \frac{-a}{z} = -\frac{a}{z} = -\cos\alpha\\
\mathrm{tang}\,(180^0-\alpha) &= \frac{y}{-a} = -\frac{y}{a} = -\mathrm{tang}\,\alpha\\
\mathrm{cotg}\,(180^0-\alpha) &= \frac{-a}{y} = -\frac{a}{y} = -\mathrm{cotg}\,\alpha
\end{aligned}\right\}\ \text{folglich:}\quad
\begin{aligned}
\sin\ (180^0-\alpha) &= \sin\alpha\\
\cos\ (180^0-\alpha) &= -\cos\alpha\\
\mathrm{tang}\,(180^0-\alpha) &= -\mathrm{tang}\,\alpha\\
\mathrm{cotg}\,(180^0-\alpha) &= -\mathrm{cotg}\,\alpha
\end{aligned}$$

Zu 4) In den beiden Dreiecken GOR_1 und KOM sei $\angle GOR_1=\angle KOM=\angle\alpha$, also $\triangle\, OMK \cong \triangle\, OR_1G$ und $\angle KOR_1=\angle(90^0+\alpha)$. Man erhält demnach die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sin(90^0+\alpha) &= \frac{a}{z} = \cos\alpha \text{ (Fig. 17)}\\
\cos(90^0+\alpha) &= \frac{-x}{z} = -\frac{x}{z} = -\frac{y}{z} = -\sin\alpha\\
\operatorname{tang}(90^0+\alpha) &= \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -\frac{a}{y} = -\operatorname{cotg}\alpha\\
\operatorname{cotg}(90^0+\alpha) &= \frac{-x}{a} = -\frac{x}{a} = -\frac{y}{a} = -\operatorname{tang}\alpha
\end{aligned}\right\} \text{folglich: }
\begin{aligned}
\sin(90^0+\alpha) &= +\cos\alpha\\
\cos(90^0+\alpha) &= -\sin\alpha\\
\operatorname{tang}(90^0+\alpha) &= -\operatorname{cotg}\alpha\\
\operatorname{cotg}(90^0+\alpha) &= -\operatorname{tang}\alpha
\end{aligned}$$

Fig. 17.



Zu 5) Stellt man in folgenden einzelnen Fällen den Transporteurzeiger auf $\angle\alpha = 30^0$, 60^0 und 45^0 ein, so kommen beziehungsweise die beiden halben gleichseitigen Dreiecke OGR_1 und OMH und das rechtwinklich gleichschenklige Dreieck OP_0R_1 in Betracht. Man erhält aus den Gleichungen:

a) für das rechtwinklige Dreieck OGR_1

$$z^2 = a^2 + y^2$$

und $y = \frac{z}{2}$:

also: $a = \frac{z}{2}\sqrt{3}$

folglich:

$$\sin 30^0 = {}^1/_2$$
$$\cos 30^0 = {}^1/_2\sqrt{3}$$
$$\operatorname{tang} 30^0 = {}^1/_3\sqrt{3}$$
$$\operatorname{cotg} 30^0 = \sqrt{3}$$

b) für das rechtwinklige Dreieck OHM

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= a^2 + x^2\\ \text{und } x &= \frac{z}{2}:\\ \text{also: } a &= \frac{z}{2}\sqrt{3}\end{aligned}\right\} \text{also: } \left\{\begin{aligned}\sin 60^0 &= {}^1/_2\sqrt{3}\\ \cos 60^0 &= {}^1/_2\\ \operatorname{tang} 60^0 &= \sqrt{3}\\ \operatorname{cotg} 60^0 &= {}^1/_3\sqrt{3}\end{aligned}\right.$$

c) für das rechtwinklige Dreieck OP_0R_1 (Fig. 17)

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= a^2 + a^2\\ b^2 &= 2a^2\\ \text{also: } a &= \frac{b}{2}\sqrt{2}\end{aligned}\right\} \text{also: } \left\{\begin{aligned}\sin 45^0 &= {}^1/_2\sqrt{2}\\ \cos 45^0 &= {}^1/_2\sqrt{2}\\ \operatorname{tang} 45^0 &= 1\\ \operatorname{cotg} 45^0 &= 1\end{aligned}\right.$$

Ableitung von $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

In Figur 17, folgt aus Dreieck z. B. OMH:

1) $a^2 + x^2 = z^2$ oder $\left(\frac{a}{z}\right)^2 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 = 1$, also: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; ferner ist:

2) $\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{x} = \frac{a:z}{x:z} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ebenso: 3) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{a} = \frac{x:z}{a:z} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Für einen stumpfen Winkel α ($\angle DOA = \angle\alpha$) folgt z. B. aus Dreieck OMK (Fig. 17):

$$1)\ a^2 + (-x)^2 = z^2 \text{ oder } \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \left(\frac{-x}{z}\right)^2 = 1, \text{ also } \sin^2\alpha + \cos\alpha^2 = 1; \text{ ferner:}$$

$$2)\ \operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{-x} = \frac{a:z}{(-x):z} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ ebenso } 3)\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{-x}{a} = \frac{(-x):z}{a:z} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Die Winkelfunktionen der Winkel des III. und IV. Quadranten.

1) Die Funktionswerte für Winkel ($-\alpha$) (Fig. 15)
2) Die Funktionswerte für Winkel ($180^0 + \alpha$).
3) Die Funktionswerte für Winkel ($270^0 - \alpha$),
4) Die Funktionswerte für Winkel ($270^0 + \alpha$),
5) Die Grenzwerte der Funktionen für die Winkel 270^0 und 360^0.

1) Winkelfunktionen für negative Winkel aus $\triangle$ ORW, Fig. 15:

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{z} = -\frac{y}{z} = -\sin\alpha \qquad \operatorname{tang}(-\alpha) = \frac{-y}{a} = -\frac{y}{a} = -\operatorname{tang}\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{a}{z} = \cos\alpha \qquad \operatorname{cotg}(-\alpha) = \frac{a}{-y} = -\frac{a}{y} = -\operatorname{cotg}\alpha$$

2) Winkelfunktionen für ($180^0 + \alpha$) aus $\triangle$ OST, Fig. 15:

$$\sin(180^0 + \alpha) = \frac{-y}{z} = -\frac{y}{z} = -\sin\alpha \qquad \operatorname{tang}(180^0 + \alpha) = \frac{-y}{-a} = \frac{y}{a} = \operatorname{tang}\alpha$$

$$\cos(180^0 + \alpha) = \frac{-a}{z} = -\frac{a}{z} = -\cos\alpha \qquad \operatorname{cotg}(180^0 + \alpha) = \frac{-a}{-y} = \frac{a}{y} = \operatorname{cotg}\alpha$$

3) Winkelfunktionen für ($270^0 - \alpha$) aus $\triangle$ ONU, Fig. 15:

$$\sin(270^0 - \alpha) = \frac{-a}{z} = -\frac{a}{z} = -\cos\alpha \qquad \operatorname{tang}(270^0 - \alpha) = \frac{-a}{-x} = +\frac{a}{x} = +\frac{a}{y} = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\cos(270^0 - \alpha) = \frac{-x}{z} = -\frac{x}{z} = -\frac{y}{z} = -\sin\alpha \qquad \operatorname{cotg}(270^0 - \alpha) = \frac{-x}{-a} = +\frac{x}{a} = +\frac{y}{a} = \operatorname{tang}\alpha$$

4) Winkelfunktionen für ($270^0 + \alpha$) aus $\triangle$ ONV, Fig. 15:

$$\sin(270^0 + \alpha) = \frac{-a}{z} = -\frac{a}{z} = -\cos\alpha \qquad \operatorname{tang}(270^0 + \alpha) = \frac{-a}{x} = -\frac{a}{x} = -\frac{a}{y} = -\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\cos(270^0 + \alpha) = \frac{x}{z} = \frac{y}{z} = \sin\alpha \qquad \operatorname{cotg}(270^0 + \alpha) = \frac{x}{-a} = -\frac{x}{a} = -\frac{y}{a} = -\operatorname{tang}\alpha$$

5) Grenzwerte der Funktionen für 270^0 und 360^0, Fig. 15:

Stellt man den Transporteurzeiger auf 270^0 ein oder setzt man in den Formeln 3) den Winkel α gleich 0, so erhält man:

$$\sin 270^0 = -1, \quad \cos 270^0 = -0, \quad \operatorname{tang} 270^0 = \infty, \quad \operatorname{cotg} 270^0 = 0.$$

Dreht man den Zeiger aus der Anfangslage OA nach 360^0, so deckt sich diese Zeigerlage mit der Zeigerrichtung für $\angle\alpha = 0^0$. Demnach erhält man:

$$\sin 360^0 = \sin 0^0 = 0, \qquad \operatorname{tang} 360^0 = \operatorname{tang} 0^0 = 0$$
$$\cos 360^0 = \cos 0^0 = 1, \qquad \operatorname{cotg} 360^0 = \operatorname{cotg} 0^0 = \infty$$

In erweitertem Sinne, je nach der doppelten Stellung und Drehung des bewegten Zeigers gegen Grenzlagen beziehungsweise für 0^0, 90^0, 180^0, 270^0 und 360^0 erhält man aus den unendlich schmal werdenden rechtwinkligen Grenzdreiecken die Grenzwerte:

$\sin 0^0 = \pm 0$	$\sin 90^0 = +1$	$\sin 180^0 = \pm 0$	$\sin 270^0 = -1$	$\sin 360^0 = \mp 0$
$\cos 0^0 = \mp 1$	$\cos 90^0 = \pm 0$	$\cos 180^0 = -1$	$\cos 270^0 = \mp 0$	$\cos 360^0 = +1$
$\operatorname{tang} 0^0 = \pm 0$	$\operatorname{tang} 90^0 = \mp \infty$	$\operatorname{tang} 180^0 = \mp 0$	$\operatorname{tang} 270^0 = \pm \infty$	$\operatorname{tang} 360^0 = \mp 0$
$\operatorname{cotg} 0^0 = \pm \infty$	$\operatorname{cotg} 90^0 = \pm 0$	$\operatorname{cotg} 180^0 = \mp \infty$	$\operatorname{cotg} 270^0 = \pm 0$	$\operatorname{cotg} 360^0 = \mp \infty$

Barmen, im März 1906. Kreuschmer.