Das Horizont-Aequatorsystem

mit dem Dreieck: Zenith-Pol-Stern.

Sei (Figur 1) M der Mittelpunkt der Himmelskugel und zugleich der Standpunkt des Beobachters, NOSWN der Horizont des Beobachters, ein grösster Kreis der Himmelskugel, O der Ostpunkt, W der Westpunkt, S der Südpunkt und N der Nordpunkt des Horizonts, Z das Zenith u. Z_1 das Nadir für den Beobachter, also die Gerade ZMZ_1 senkrecht auf der Ebene des Horizonts, AWQO der Himmelsäquator, ein grösster Kreis der Himmelskugel, welcher den Horizont in den Punkten O u. W schneidet und von den beiden Weltpolen P (Nordpol) u. P_1 (Südpol) gleichweit d. h. um je 90° Grad absteht, die Gerade PP_1 die Weltachse, welche durch den Punkt M auf der Ebene des Aequators senkrecht steht, ferner der durch die beiden Pole, durch Zenith und Nadir hindurchgehende grösste Kreis der Himmelskugel der Meridian, welcher auf Aequator und Horizont senkrecht steht und letztern im Südpunkte S u. Nordpunkte N schneidet, also die Gerade SN die Mittagslinie des Beobachtungsortes M; sei σ der Ort eines Sternes, $C\sigma G$ ein zum Aequator paralleler Kreis, welchen der Stern während der täglichen scheinbaren Drehung der Himmelskugel in der Richtung von Ost nach West durchläuft, C sein oberer, G sein unterer Culminationspunkt, H sein Aufgangspunkt, U sein Untergangspunkt; $Z\sigma B$ senkrecht auf Horizont, ein Quadrant des durch Zenith, Nadir und den Stern gehenden Vertikalkreises, $P\sigma D$ senkrecht auf Aequator, ein Quadrant des durch die beiden Pole und den Stern hindurchgehenden Deklinationskreises, S der Ausgangspunkt oder Nullpunkt der Zählung für das Horizontsystem, F der Frühlings- oder Widderpunkt, der Ausgangspunkt der Zählung für das Aequatorsystem und zwar in der Richtung von West nach Ost gezählt, so ist:

$\measuredangle$ PMN = Bogen PN = φ die Polhöhe des Beobachtungsortes M,
$\measuredangle$ ZMP = „ ZP = z die Zenithpoldistanz des Beobachtungsortes M,
$\measuredangle$ AMS = „ AS = $90^0 - \varphi$ die Aequatorhöhe des Beobachtungsortes M,
„ σB = h die Höhe des Sternes σ,
„ SB = w das (östliche) Azimuth des Sternes,
„ OH = m die (nördliche) Morgenweite des Sternes,
„ WU = m_1 die (nördliche) Abendweite des Sternes,
„ σD = δ die (nördl. oder positive) Deklination des Sternes,
$\measuredangle$ DPF = „ FD = α die Rektascension des Sternes,
$\measuredangle$ APD = „ σC = Bogen DA = s der Stundenwinkel des Sternes,
$\measuredangle$ APF = „ FDA = FD + DA = α + s = t der Stundenwinkel des Frühlingspunktes F.

Mithin im Dreieck ZPσ:

1) Seite ZP die Zenithpoldistanz des Beobachtungsortes M = 90^0 — Polhöhe = $90^0 - \varphi$,
2) Zσ die Zenithdistanz des Sternes = 90^0 — Höhe = 90^0 — h,
3) Pσ die Poldistanz des Sternes = 90^0 — Deklination = $90^0 - \delta$,
4) $\measuredangle$ ZPσ = $\measuredangle$ APD der Stundenwinkel des Sternes = s,
5) $\measuredangle$ PZσ = $\measuredangle$ BZN = Bogen BN = 180^0 — BS = 180^0 — Azimuth = 180^0 — w und
6) $\measuredangle$ ZσP der Variationswinkel des Sternes = v.

Von diesen sechs Grössen lassen sich nach den Hauptgleichungen der sphärischen Trigonometrie immer je vier mit einander verknüpfen, so dass so viele Gleichungen sich aufstellen lassen, als die Anzahl der Combinationen von sechs Elementen in der vierten Klasse beträgt d. i. 15.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Beziehungen, welche in den folgenden drei Aufgaben entwickelt werden.

I. Aufgabe.

Welche Beziehung findet statt zwischen Deklination, Höhe und Stundenwinkel des Sternes, sowie der Polhöhe des Beobachtungsortes?

Auflösung.

Im $\triangle$ ZPσ ist nach dem Cosinussatze:

$$\cos ZP\sigma = \frac{\cos Z\sigma - \cos ZP.\ \cos \sigma P}{\sin ZP.\ \sin \sigma P}$$

$$\text{oder } \cos s = \frac{\cos (90^0 - h) - \cos (90^0 - \varphi).\ \cos (90^0 - \delta)}{\sin (90^0 - \varphi)\ \sin (90^0 - \delta)}$$

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \varphi.\ \sin \delta}{\cos \varphi.\ \cos \delta} \quad \text{(I.)}$$

a) Besondere Fälle:

1) Wenn $h = 0^0$ so ist $\cos s = -\operatorname{tg} \varphi . \operatorname{tg} \delta$.

2) Wenn $s = 0^0$ so ist $\cos (\varphi - \delta) = \sin h = \cos (90^0 - h)$

also $\varphi - \delta = 90^0 - h$.

b) Auflösung der Gleichung:

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \varphi . \sin \delta}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

nach jeder der vier darin vorkommenden Grössen und Umformung des erhaltenen Ausdruckes in einen für logarithmische Berechnung bequemern.

1) s gesucht:

Subtrahiert man obige Gleichung von $1 = 1$ so erhält man nach einigen Reductionen:

$$2. \sin^2 \tfrac{1}{2} s = \frac{\cos (\varphi - \delta) - \cos (90^0 - h)}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

$$= \frac{-[\cos (90^0 - h) - \cos (\varphi - \delta)]}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

$$= \frac{2. \sin \tfrac{1}{2} (90^0 - h + \varphi - \delta) . \sin \tfrac{1}{2} (90^0 - h + \delta - \varphi)}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

$$\text{Also } \sin \tfrac{1}{2} s = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2} (90^0 - h + \varphi - \delta) . \sin \tfrac{1}{2} (90^0 - h + \delta - \varphi)}{\cos \varphi . \cos \delta}}$$

Addiert man in obiger Gleichung beiderseits 1, so ergibt sich:

$$\cos \tfrac{1}{2} s = \sqrt{\frac{\cos \tfrac{1}{2} (90^0 - h + \varphi + \delta) . \cos \tfrac{1}{2} (\varphi + \delta + h - 90^0)}{\cos \varphi . \cos \delta .}}$$

2) h gesucht:

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \varphi . \sin \delta}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

$$\text{also } \sin h = \sin \varphi . \sin \delta + \cos \varphi . \cos \delta . \cos s$$

$$= \sin \varphi (\sin \delta + \operatorname{cotg} \varphi . \cos s . \cos \delta);$$

Setzt man $\operatorname{cotg} \varphi . \cos s = \operatorname{tg} x$ so ist:

$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\cos x} . \sin (\delta + x)$, wo also zuvor $\sqrt{}\, x$ aus der Hilfsgleichung

$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} \varphi . \cos s$ zu bestimmen ist.

3) φ gesucht:

Aus obiger Gleichung ist:

$$\sin h = \sin \varphi . \sin \delta + \cos \varphi . \cos \delta . \cos s$$

$$= \sin \delta (\sin \varphi + \operatorname{cotg} \delta . \cos s . \cos \varphi);$$

Setzt man $\cot \delta . \cos s = \operatorname{tg} x$ so ist:

$$\sin h = \frac{\sin \delta}{\cos x} \cdot \sin (\varphi + x).$$

Mithin $\sin (\varphi + x) = \dfrac{\sin h . \cos x}{\sin \delta}$.

Man bestimme zunächt $\sqrt{\ } x$ aus der Hilfsgleichung $\operatorname{tg} x = \cot \delta . \cos s$ und dann erst $\sqrt{\ } \varphi$ aus der letztern Gleichung.

4) δ gesucht:

Nach Entwicklung 2) ist:

$$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\cos x} \cdot \sin (\delta + x).$$

Also $\sin (\delta + x) = \dfrac{\sin h . \cos x}{\sin \varphi}$, wo $\sqrt{\ } x$ aus der Hilfsgleichung $\operatorname{tg} x = \cot \varphi . \cos s$ zuerst zu berechnen ist.

II. Aufgabe.

Welche Beziehung findet statt zwischen Deklination, Höhe und Azimuth des Sternes, sowie der Polhöhe des Beobachtungsortes?

Auflösung.

Im $\triangle$ ZPσ ist nach dem Cosinussatze:

$$\cos PZ\sigma = \frac{\cos P\sigma - \cos PZ . \cos Z\sigma}{\sin PZ . \sin Z\sigma}$$

oder $\cos BN = \dfrac{\sin \delta - \sin \varphi . \sin h}{\cos \varphi . \cos h}$, aber $BN = 180 - SB = 180^0 - w$

also $- \cos w = \dfrac{\sin \delta - \sin \varphi . \sin h}{\cos \varphi . \cos h}$

oder $\cos w = \dfrac{\sin \varphi . \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi . \cos h}$ (II.),

wo das Azimuth w vom Südpunkte S aus entweder östlich oder westlich von 0^0 bis 180^0 gezählt wird.

a) Besondere Fälle:

Für einen eben auf- oder untergehenden Stern ist $h = 0^0$, also aus obiger Gleichung

$$\cos w = - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Ist die Morgenweite m des Sternes eine südliche, so ist $w = 90^0 - m$, mithin aus voriger Gleichung $\sin m = - \dfrac{\sin \delta}{\cos \varphi}$; ist aber die Morgenweite m des Sternes eine nördliche, so ist $w = 90^0 + m$, mithin $\cos (90^0 + m) = - \dfrac{\sin \delta}{\cos \varphi}$ also $\sin m = \dfrac{\sin \delta}{\cos \varphi}$.

Ist $\delta = 0^0$, so ist auch $m = 0^0$ d. h. es geht der Stern im Ostpunkt auf; ist δ nördlich oder positiv, so hat der Stern nur eine nördliche Morgenweite; ist aber δ südlich oder negativ, so hat der Stern nur eine südliche Morgenweite.

b) Allgemeine Auflösung der Gleichung:

$$\cos w = \frac{\sin \varphi .\ \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi .\ \cos h}$$

nach jeder der vier darin vorkommenden Grössen und Umformung des erhaltenen Ausdruckes in einen zur logarithmischen Berechnung brauchbaren.

1) w gesucht:

Analog Aufgabe I. b) 1).

Subtrahiert man obige Gleichung von $1 = 1$ und reduziert, so ergibt sich:

$$\sin \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(90^0 - \delta + \varphi + h).\ \cos \frac{1}{2}(\delta + \varphi + h - 90^0)}{\cos \varphi .\ \cos h}}$$

Addiert man aber in obiger Gleichung beiderseits 1 so erhält man:

$$\cos \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(90^0 - \delta + \varphi - h).\ \sin \frac{1}{2}(90^0 - \delta - \varphi + h)}{\cos \varphi .\ \cos h}}$$

2) δ gesucht:

Analog Aufgabe I. b) 2).

Aus obiger Gleichung $\cos w = \dfrac{\sin \varphi .\ \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi .\ \cos h}$ folgt

$$\sin \delta = \sin \varphi .\ \sin h - \cos \varphi .\ \cos h .\ \cos w$$
$$= \sin \varphi \, (\sin h - \operatorname{cotg} \varphi .\ \cos w .\ \cos h)$$

Setzt man $\operatorname{cotg} \varphi .\ \cos w = \operatorname{tg} x$ so erhält man:

$$\sin \delta = \frac{\sin \varphi}{\cos x} \sin (h - x),$$ wo x zuvor aus der Hilfsgleichung $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} \varphi .\ \cos w$ zu bestimmen ist.

3) φ gesucht:

Analog Aufgabe I. b) 3).

Aus der Gleichung (II) erhält man:

$$\sin \delta = \sin \varphi .\ \sin h - \cos \varphi .\ \operatorname{coh} h .\ \cos w.$$

Sondert man rechts den Faktor $\sin h$ ab, setzt $\operatorname{cotg} h .\ \cos w = \operatorname{tg} x$ so erhält man:

$$\sin \delta = \frac{\sin h}{\cos x} (\sin \varphi - x)$$

$$\text{also } \sin (\varphi - x) = \frac{\sin \delta .\ \cos x}{\sin h}$$

4) h gesucht:

Analog Aufgabe I. b) 4).

Nach Aufgabe II. b) 2) ist:

$$\sin \delta = \frac{\sin \varphi}{\cos x} \cdot \sin (h - x)$$

$$\text{Also } \sin (h - x) = \frac{\sin \delta . \cos x}{\sin \varphi}$$

wo x aus der Gleichung $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} \varphi . \cos w$ zu finden ist.

III. Aufgabe.

Welche Beziehung findet statt zwischen Höhe, Azimuth, Deklination und Stundenwinkel des Sternes?

Auflösung.

Im $\triangle$ ZPσ ist nach dem Sinussatze:

$$\sin \sigma Z : \sin \sigma P = \sin ZP\sigma : \sin PZ\sigma$$

$$\text{oder } \cos h : \cos \delta = \sin s : \sin (180^0 - w)$$

$$\text{oder } \cos h . \sin w = \cos \delta . \sin s \quad \text{(III.)}$$

a) Besonderer Fall:

Ist $h = 0^0$ so ist $\sin w = \cos \delta . \sin s$