Die Unterrichts- und Prüfungsordnung der Real- und der höheren Bürgerschulen vom 6. October 1859 sucht durch Angabe der Pensen in den einzelnen Disciplinen das Ziel möglichst erkennbar und genau hinzustellen, welches unsere Realschüler erreichen sollen. Allein jene im Schul- und Verwaltungsfache rühmlichst ausgezeichneten Männer, welche bei diesen Anordnungen mitgewirkt haben, werden, eben weil ihnen der besondere Entwickelungsgang des Realschulwesens bekannt ist, gewiß nicht annehmen, daß alle die in dieser unserer Verfassungsurkunde enthaltenen Bestimmungen für ewige Zeiten Gültigkeit behalten. Ich habe es hier zunächst nur mit der Mathematik zu thun, aber eben grade hier braucht man nur die Schulprogramme der letzten Jahre flüchtig durchzublättern, um sich zu überzeugen, daß nicht gar zu viele meiner geehrten Collegen sich genau innerhalb der von dem Herrn Unterrichtsminister gesteckten Grenzen eingerichtet haben. Der Eine beliebt dieses, der Andere jenes Amendement; dem Einen will es nicht recht einleuchten, weshalb die nur besondern Zwecken dienende descriptive Geometrie für uns als obligatorisch betrachtet und nicht vielmehr den Gewerbeschulen überlassen wird; — Andere bedauern den Wegfall der sphärischen Trigonometrie, ohne welche allerdings kein Verständniß astronomischer Lehren möglich ist; — Andere halten die Auflösung cubischer Gleichungen namentlich bei stereometrischen Aufgaben für unentbehrlich; — noch Andere endlich wollen die Elemente der Differentialrechnung in das Pensum unserer Prima hineingezogen wissen oder meinen, sie, die Differentialrechnung, sei zwar nicht unmittelbar gefordert, aber als nothwendiges Hülfsmittel bei der analytischen Geometrie und bei der Herleitung der Reihen für transscendente Functionen stillschweigend vorausgesetzt. Diese mancherlei divergirenden Richtungen werden, davon bin ich überzeugt, durch die Umsicht der an der Spitze unseres Schulwesens stehenden Männer in einen Brennpunkt allmälig zurückgeleitet werden; ich selbst will den mir in diesem Programme verstatteten Raum dazu benutzen, um mir die Elemente der Differentialrechnung einmal darauf anzusehen, ob sie für den Schulunterricht brauchbar, resp. nothwendig sind oder nicht? Ich hoffe zu dem Resultate zu gelangen, daß man fähige Schüler ohne Differentialrechnung ziemlich weit förderen kann, und daß die Formeln dieser Wissenschaft in der Geometrie und Mechanik zwar eine schwer zu ersetzende Abkürzung gewähren, aber auch grade hier sich ohne gelehrte Ungeheuerlichkeiten in ein paar Stunden lehren und lernen lassen.

Was ist Differentialrechnung? Mit dieser einfachen Frage wird man eigentlich jeden Mathematiker in einige Verlegenheit setzen. Differentialrechnung, so kann man etwa sagen, ist derjenige Theil der Analysis, wo wir aus der Relation der veränderlichen Größen, die auf irgend eine Art miteinander verbunden sind, die Relation ihrer Veränderungen oder zusammengehörigen Differenzen suchen, sofern dabei die Quantität der Veränderungen selbst nicht in Betracht kommt. Sie bildet einen Theil der Analysis des Unendlichen, die man so nennt, weil die Differenzen, deren Verhältniß gesucht wird, als unendlich kleine Theilchen, ich möchte sagen, als Atome betrachtet werden, um das stetige Wachsen oder Abnehmen der variabelen Größe verfolgen, womöglich der Rechnung unterwerfen zu können, gleichsam das Verschwindende zu fassen, indem es verschwindet.

Allein ich gebe gern zu, daß diese Difinition so wenig, wie irgend eine andere, dem noch Uneingeweiheten einen klaren Begriff von dem eigentlichen Wesen und der Bedeutung der Differentialrechnung verschaffen dürfte. Weichen doch alle jene Heroen der Mathematik, deren Scharfsinne wir die Erfindung oder den weiteren Ausbau dieser sogenannten höheren Analysis verdanken, ein Newton, Leibnitz, Jac. und Joh. Bernouilli, Euler, d'Alembert, Lagrange u. a. m., in der Begründung ihrer Wissenschaft, so wesentlich von einander ab, daß man kaum begreift, wie alle diese von Haus aus weit auseinander gehenden Wege in der Hauptsache zu demselben Resultate führen. In der That, wer die Geschichte der Mathematik seit jenen Tagen, wo Newton durch Geometrie und allgemeine Bewegungslehre auf seine Fluxionenrechnung, Leibnitz durch die Betrachtung der Unterschiede und Summen in den Reihen der Zahlgrößen auf seine Differentialrechnung geleitet wurde, bis auf die neuere Zeit verfolgt, muß sich wunderen, daß die endlosen Streitigkeiten und Controversen über diesen Gegenstand dem ungeheuren Aufschwunge, welchen wir im 18. Jahrhundert Mathematik und Naturwissenschaften nehmen sehen, keinen Eintrag gethan zu haben scheinen, und man kann es unter solchen Umständen den Antidifferentialisten eben nicht verdenken, wenn sie nicht jeden Fortschritt der Wissenschaft der Leibnitz-Newtonschen Erfindung verdanken wollen. Jedenfalls ist es sehr zu bedauern, daß grade diese auf eine edlere höhere Abkunft pochende Tochter des Atlas bis auf den heutigen Tag nicht im Stande gewesen ist, ihre Ahnenprobe makellos zu bestehen und die hohen Säulen ihres Capitoliums auf absolut unverschiebbarem Grunde aufzuführen.

Bekanntlich hat der Ausdruck unendlich groß und unendlich klein unendlich viele Mißverständnisse und Mißdeutungen veranlaßt. In der Analysis der Alten finden wir den Ausdruck „unendlich" nirgend und selbst noch Cartesius, der doch vor Newton und Leibnitz das wesentliche Fundament der höheren Analysis, nämlich die Methode der unbestimmten Coefficienten in die Mathematik eingeführt hat, sucht das Wort ängstlich zu vermeiden. Viele andere tüchtige Analysten hielten daran fest, der Ausdruck unendliche Größe enthalte einen Widerspruch, Unendlichkeit sei ein Wort ohne Sinn und Verstand, so daß die Berliner Akademie der Wissenschaften es noch im Jahr 1784 für nöthig halten konnte, „eine genau bestimmte Theorie des sogen. Unendlichen" zu einer Preisaufgabe zu machen. Sie verlangte, man solle zeigen, wie es möglich gewesen, aus einem von namhaften Gelehrten für unstatthaft erklärten Begriffe so viele richtige Lehrsätze herzuleiten?

Allein jene Mathematiker des 18. Jahrhunderts, welche sich gegen die Zulassung des Unendlichen mit Händen und Füßen wehrten, haben sich in jenem ewigen Leben über den Sternen, seit dem sie dort mit lauter Unendlichkeiten zu thun haben, wohl eines Bessern besonnen. Der endliche Geist ist freilich nicht im Stande, das Unendliche zu fassen und zu begreifen; deshalb ist aber der Begriff des Unendlichen nicht ohne Sinn, sonst wäre der Gottesbegriff auch sinnlos und die ganze Welt eitel Dunst und Schein. Der Raum ist unendlich groß, die ihn erfüllende Materie ohne Ende theilbar und aus Atomen zusammengesetzt, die wir uns unendlich klein vorzustellen haben; die Zeit ist ewig, und kein menschliches Kunstwerk wird jemals so kleine Zeittheilchen darstellen, daß man sich nicht noch kleinere denken könnte; ein von stetig wirkenden Kräften fortbewegter Körper beschreibt eine Curve, deren noch so klein angenommener Theil doch immer noch eine krumme Linie ist; und so kann wohl der Mathematiker, der sich ja eben mit Raum, Zeit und Bewegung zu beschäftigen hat, nicht umhin, den Begriff des Unendlichen in seiner Wissenschaft zuzulassen, wenn er zunächst auch nur prüfend mit einer Hand in das dunkele Gebiet hinausgreift, während die andere noch an der schützenden Schranke festhält. Die Schwierigkeiten und Unbegreiflichkeiten der Differentialrechnung beginnen vielmehr grade da, wo uns einer der vorzüglichsten Mathematiker des vorigen Jahrhunderts eine Verbesserung und rein wissenschaftliche Begründung verspricht. Man machte nämlich die interessante Entdeckung, daß die berühmte Tochter des Aeskulap, die Panacea, sich in eine unendliche Reihe metamorphosirt hat, und es war daher ein Leichtes, sich mit Hülfe einer solchen endlosen Progression über den Abgrund der Unendlichkeit hinüber zu schwingen!

Mit einer gewissen naiven Selbstgewißheit und genialer Leichtfertigkeit hat man mit solchen in infinitum fort laufenden Reihen das Mögliche oder eigentlich das Unmögliche geleistet und erst in der neuesten Zeit hat man sich endlich langsam dazu bequemt, den Mißbrauch einzugestehen, der mit einer an sich vortrefflichen Entdeckung getrieben worden ist. In der That haben in neuerer Zeit viele Theile der Theorie der unendlichen Reihen eine gänzliche Umgestaltung erhalten und viele Resultate, die für völlig allgemein galten, sind in Grenzen eingeschlossen worden, über die hinaus ihre Anwendung mindestens unsicher ist. Tüchtige Mathematiker haben unserer viel bewunderten Analysis eine ihr bevorstehende vollkommne Umgestaltung augurirt, obgleich bis jetzt noch der Baumeister zu fehlen scheint, der den Willen und die Kraft besitzt, das Gebäude auf sicherem Fundamente neu und schön aufzurichten, statt das alte stellenweise auszubessern. Ich für mein Theil bin von der Wahrheit dieser Prophezeiung vollkommen überzeugt und bedaure nichts mehr, als daß ich mich nicht stark genug fühle, um zu diesem Almagest der Zukunft ein paar paßliche Bausteine herbeitragen zu helfen. Ich habe zwar in den nachfolgenden zunächst für meine Schüler — denen ich gewissermaßen zum Abschlusse ihres mathematischen Schulcursus noch einen kurzen Einblick in die sog. höhere Analysis gewähren möchte, — bestimmten Zeilen, an mehren Stellen unumwunden meine Meinung ausgesprochen, bin mir aber dabei vollkommen bewußt geblieben, daß tadeln leichter ist, als besser machen.

Einige Erklärungen, welche in den meisten Lehrbüchern der Differentialrechnung vorangeschickt zu werden pflegen, z. B. über veränderliche und constante Größen, was man unter Function versteht, daß man die Functionen eintheilt in ganze und gebrochene, in rationale, irrationale und transscendente, u. dgl. m., darf bei den Primanern unserer Realschulen als bekannt vorausgesetzt werden.

Wenn in der Gleichung $y = f(x)$ die ursprünglich variabele Größe x um $\triangle x$ zunimmt, so ändert sich y in einer von dem Wesen dieser Function abhängigen Weise um $\triangle y$, so daß also

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x) \quad \text{und}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Um die Eigenschaften der Function kennen zu lernen, wird es begreiflicher Weise von Wichtigkeit sein, dieses Verhältniß der zusammen gehörigen Aenderungen näher ins Auge zu fassen. Nun gehört es aber zu dem Wesen einer solchen Function, daß die Aenderungen nicht sprungweise erfolgen, sondern daß die verschiedenen y stetig in einander übergehen, — und um daher das geheimnißvolle Walten der Natur, welches eben in dieser Stetigkeit des Zu- oder Abnehmens besteht, seinem Verständnisse möglichst nahe zu bringen, hat der menschliche Geist absolut kein anderes Mittel, als sich diese Aenderungen möglichst klein, oder wie man sich lieber auszudrücken pflegt, unendlich klein vorzustellen. Der Differenzen-Quotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ist nun im Allgemeinen immer eine Function von x und bleibt eine solche, wenn ich das $\triangle x$ immer kleiner werden lasse, endlich gradezu $= o$ setze.

Diese Grenze $= f'(x)$, der sich $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ immer mehr nähert, je kleiner $\triangle x$ wird, nennt man den Differentialquotienten von y, und bezeichnet denselben ziemlich allgemein mit

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder } \frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x).$$

dx heißt das Differential von x, dy das Differential von y und wir wollen hier gleich vorläufig bemerken, daß, gleichwie in der Differenzenrechnung $\triangle x$ als unveränderlich in Vergleich zu $\triangle y$ gilt, auch hier dx als constant in Beziehung auf dy angesehen wird.

$\frac{dy}{dx}$ ist also ein Verhältniß von zwei unendlich kleinen Größen, und daß es für ein solches Verhältniß einen ganz bestimmten Ausdruck geben wird, kann eben so wenig zweifelhaft sein, als daß in jedem Atome des Wassers das Verhältniß des Wasserstoffes zum Sauerstoffe $= 2 : 1$ ist. Dem Anfänger macht es allerdings Schwierigkeiten, wenn er in

$$\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

$\triangle x = o$ setzen soll; und die Meister der Wissenschaft, je höher sie gestiegen sind, um so unlieber berühren sie diese empfindliche Stelle, weil sie sich in der Regel von ihrer Höhe nicht zu unserem beschränkten „Unterthanen-Verstande" herablassen können. Man vergesse aber nicht, daß es für die Auffassung ein großer Unterschied ist, ob ich in dem obigen Ausdrucke ohne Umstände $\triangle x = o$ setze, oder nach und nach immer kleiner werden lasse. Ich sollte ferner meinen, daß man bei dem Uebergange vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten nicht dem x, sondern dem $\triangle x$ andere und andere Werthe beilegt, so daß also in dieser Beziehung nicht x, sondern $\triangle x$ die ursprünglich variabele Größe ist. Der Ausdruck $\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$ oder kürzer $\frac{f(x + m) - f(x)}{m}$ müßte also nicht als $f(x)$, sondern als $f(m)$ betrachtet werden. Für $m = o$ geht der Ausdruck über in $\frac{o}{o}$; allein ich fürchte nicht, daß der Anfänger daran erheblichen Anstoß nehmen kann, da er ja schon in den Elementen der Analysis diesem Symbole der Unbestimmtheit begegnet und zur Beantwortung der Frage aufgefordert wird, was ist der wahre Werth eines mathematischen Ausdrucks, wenn derselbe für einen bestimmten Werth der variabelen Größe $= \frac{o}{o}$ wird? Was wir also Differentialquotient genannt haben, ist nichts Anderes als $f(m)$ für $m = o$ oder $f'(m)$.

Oder man schreibe den obigen Differenzenquotienten so:

$$\frac{f(x)' - f(x)}{x' - x}.$$

Ist $f(x)$ eine ganze rationale Function, oder läßt sie sich wenigstens in eine solche verwandeln, sei es auch nur in Form einer nach den Potenzen von x fortschreitenden Reihe, so ist leicht einzusehen, daß $f(x)' - f(x)$ durch $x' - x$ theilbar sein muß und nach Ausführung dieser Division hindert uns nichts, $x' = x$ zu setzen, wodurch dann also der sogenannte Differentialquotient erhalten wird.

Lagrange in seinem berühmte Werke: **Théorie des fonctions analytiques** hat bekanntlich die Vorstellungen von Differentialen, von unendlich kleinen Veränderungen, von Grenzverhältnissen ꝛc. ganz vermieden, weil er sie nicht für deutlich genug hält, um in einer Wissenschaft, die sich auf ihre unumstößlichen Beweise so viel zu gute thut, als Grundlage zu dienen; aber leider **incidit in Scyllam!** Lagrange legt seiner Theorie folgende Reihe zu Grunde:

$$\frac{f(x + \triangle x) - fx}{\triangle x} = f'(x) + f''(x)\,\frac{\triangle x}{1\,.\,2} + f'''(x)\,\frac{\triangle x^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \dots$$

$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ nennt er **fonctions dérivées** und zeigt dann, daß diese abgeleiteten Functionen nichts Anderes sind, als unsere Differentialquotienten. Allein ganz abgesehen davon, daß Lagranges Methode bei der Anwendung auf Geometrie und Mechanik nur dem Namen nach von der Methode der Grenzen sich unterscheidet, dürfte doch wohl die Frage erlaubt sein, was uns zu der Annahme berechtigt, daß sich die Differenz einer jeden Function einer veränderlichen Größe in eine nach den Potenzen der Differenz dieser Functionalgröße fortschreitende Reihe entwickeln läßt? Lagrange und nach ihm Andere suchen zwar zu beweisen, daß die obige Reihe für jede Function gilt ohne alle Ausnahme, und das blendende Licht, welches dieser große Geist überallhin ausstrahlt, könnte unsere des Sonnenglanzes ungewohnten Augen leicht hindern, genauer hinzusehen. Bei aller Hochachtung vor dem großen Meister, muß ich doch aufrichtig gestehen, daß mich der Beweis nicht befriedigt. Ob er Anfänger, für die er ja doch als Beweis des Fundamentalsatzes der ganzen Theorie bestimmt zu sein scheint, überzeugt, ist mir mehr als zweifelhaft, da Lagrange es eben nicht versteht, seine Gedanken in leicht verständlicher Form wiederzugeben. In der That ist obige Entwickelung nicht für jede Function ausführbar und noch weniger für jedes $\triangle x$ brauchbar, weil bei der Anwendung auf bestimmte Fälle Glieder $= 0\,.\,\infty$ werden. Wir werden auf diesen Gegenstand später zurückkommen.

Für die meisten in der niederen Analysis vorkommenden Functionen läßt sich freilich ohne große Schwierigkeit nachweisen, daß,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = A + B \triangle x + C \triangle x^2 + \dots$$

Läßt man in dieser Entwickelung $\triangle x$ unendlich klein werden, so geht augenscheinlich $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ in A über, da die mit $\triangle x$ multiplicirten Glieder der Reihe einen unendlich geringen Einfluß haben, mit a. W. $= 0$ sind. Der Differentialquotient ist hiernach nichts Anderes, als der von $\triangle x$ unabhängigen Theil des Differenzenquotienten.

Mit allen derartigen Auseinandersetzungen ist aber dem Lernenden, der sich gleich von vornherein bei dem Worte Differentialquotient etwas Ordentliches vorstellen möchte, so gut wie gar nichts genützt. Um diesen wichtigen Zweck zu erreichen, hätte man den von den Begründern der Wissenschaft eingeschlagenen Weg umsoweniger verlassen sollen, als ja unsere Schüler schon in den Elementen der Geometrie mit den hierbei zum Grunde liegenden Begriffe bekannt gemacht werden, wenn man z. B. den Kreis als Polygon von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten sich vorstellt u. dgl. m.; — ich meine eine ganz einfache geometrische Betrachtung. Hieß ja doch Anfangs die Differentialrechnung „die directe Methode der Tangenten", die Integralrechnung, **„inversa methodus tangentium"**.

Aus den Elementen der analytischen Geometrie ist bekannt, daß jede Function von der Form $y = f(x)$, insofern die Gleichung nicht etwa etwas an sich Unmögliches enthält, durch eine gerade oder krumme Linie bildlich dargestellt werden kann. Gleichung und Curve sind zusammengehörende Begriffe; aus der Gleichung lernt man die Eigenschaften der Curve kennen, aus dem Zuge der krummen Linie leitet man die Gleichung her. Wir wissen ferner, daß man unter einer Berührenden eine gerade Linie versteht, welche nur einen Punkt mit der Curve gemein hat, so zwar, daß zwischen ihr und der Curve keine andere gerade Linie durch diesen Punkt hindurch gelegt werden kann.*) Legt man nun durch die Punkte A und B in Figur 1 eine Secante, dann ist offenbar $AC = \triangle x$ und $BC = \triangle y$; daher $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die schneidende Linie mit der Abscissenaxe bildet. Lassen wir die Linie MS sich um den Punkt A so herum drehen, daß der Punkt B dem Punkte A immer näher und näher rückt, bis er endlich ganz mit demselben zusammen fällt, so geht die Schneidende über in die Berührende für den Punkt A. Natürlich sind gleichzeitig $\triangle x$ und $\triangle y$ immer kleiner und kleiner geworden, so daß $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ in $\frac{dy}{dx}$ übergeht. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ist also die Tangente des Winkels, den die Berührende für den Punkt (x, y) mit der Abscissenaxe macht.

Gleichwie nun, um den Zug einer Curve kennen zu lernen, die Richtung der Berührenden in jedem einzelnen Punkte das Wesentliche ist, so wird auch der analytische Ausdruck dieser Richtung, also der Differentialquotient für die Discussion einer Function von besonderer Bedeutung sein.

Für diejenigen Punkte der Curve z. B., wo sich dieselbe von unten nach oben, oder von oben nach unten umbiegt, wo also y ein Maximum oder Minimum wird, ist offenbar $\operatorname{tg.} \phi = \frac{dy}{dx} = 0$, die bekannte Regel, den größten oder kleinsten Werth einer Function zu bestimmen, worauf wir später zurückkommen werden.

Differentiation algebraischer Functionen.

Ist $y = f(x)$ und $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, so bedient man sich auch häufig der andern Schreibweise:

$$dy = f'(x) \,.\, dx.$$

Sie ist genau genommen falsch, denn $\frac{dy}{dx}$ hat nur einen Sinn, wenn man es als Verhältniß auffaßt. Man kann aber der Bequemlichkeit halber diese Schreibweise beibehalten, da man ja dem Ausdrucke jeden Augenblick wieder die richtige Form geben kann. y, u, v ... mögen irgend welche Functionen von x bezeichnen, so daß also y in $y + \triangle y$, u in $u + \triangle u$, v in $v + \triangle v$ ... übergeht, sobald die ursprünglich variabele Größe x um $\triangle x$ wächst.

Es sei 1) $y = ax + b$, so ist

$$(y + \triangle y) = a(x + \triangle x) + b$$

*) Leibnitz betrachtet jede Curve als ein Polygon unendlich vieler unendlich kleiner Atome und demgemäß die Tangente als die Verlängerung eines solchen Atomes.

$$\triangle y = a \triangle x \quad \text{oder} \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = a, \text{ folglich:}$$

$$\frac{dy}{dx} = a \quad \text{oder} \quad dy = a\,dx\,.$$

2) $y = \frac{a}{x}$

$$y + \triangle y = \frac{a}{x + \triangle x}$$

$$\triangle y = \frac{a}{x + \triangle x} - \frac{a}{x}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{a}{x\,(x + \triangle x)}.$$ Wird $\triangle x$ unendlich klein:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}.$$

3) $y = u \pm v$

$$y + \triangle y = u + \triangle u \pm v \pm \triangle v$$

$$\triangle y = \triangle u \pm \triangle v$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} \pm \frac{\triangle v}{\triangle x}$$ und wenn $\triangle x$ unendlich klein wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}.$$

4) $y = u\,.\,v$

$$y + \triangle y = (u + \triangle u)\,(v + \triangle v)$$

$$= u\,.\,v + u\triangle v + v\triangle u + \triangle u\,.\,\triangle v$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = u\frac{\triangle v}{\triangle x} + v\frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle u}{\triangle x}\,.\,\triangle v.$$

wird hierin $\triangle x$ unendlich klein, so wird auch das Produkt aus dem Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$ in die unendlich kleine Größe dv verschwindend klein sein, und es bleibt:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$ oder kurz:

$$dy = u\,dv + v\,du.$$

5) $y = \frac{u}{v}$

$$y + \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v}$$

$$\triangle y = \frac{v\triangle u - u\triangle v}{v(v + \triangle v)}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v\frac{\triangle u}{\triangle x} - u\frac{\triangle v}{\triangle x}}{v(v + \triangle v)}$$ und sobald $\triangle x$ unendlich klein wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \text{ oder kürzer:}$$

$$dy = \frac{v \cdot du - u\,dv}{v^2}.$$

6) $y = x^m$.

$y + \triangle y = (x + \triangle x)^m$; nach dem binomischen Lehrsatze:

$$= x^m + m x^{m-1} \triangle x + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \triangle x^2 + \ldots \text{ daher}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \triangle x + \ldots \quad \text{Also für } \triangle x = \text{unendlich klein,}$$

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}.$$

Setzen wir voraus, daß der binomische Lehrsatz bereits allgemein für jeden beliebigen Exponenten bewiesen worden ist, so gilt das gewonnene Resultat ebenfalls für jeden beliebigen Exponenten.

Nun giebt sich aber die Differentialrechnung das Ansehen, daß der allgemeine Beweis dieses so überaus wichtigen Satzes erst durch sie zu Stande gebracht werden kann, und muß sich also nach einem allgemeinen Beweise der obigen Differentialformel ohne Anwendung des binomischen Theorems umsehen.

Es sei also:

7) $y = x^{\frac{m}{n}}$, also $y^n = x^m$, daher:

$$n y^{n-1} \frac{dy}{dx} = m x^{m-1}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1} y}{y^n} = \frac{m}{n} x^{-1} y = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}$$

8) $y = x^{-m}$, also $y x^m = 1$, daher:

$$y \cdot dx^m + x^m dy = 0$$

$$y \cdot m \cdot x^{m-1} dx + x^m dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{m x^{m-1} y}{x^m} = - m x^{-m-1}$$

9) $y = x^{-\frac{m}{n}}$, also $y^n x^m = 1$, daher

$$y^n dx^m + x^m dy^n = 0$$

$$y^n m x^{m-1} dx + x^m n y^{n-1} dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{m y^n x^{m-1}}{n x^m y^{n-1}} = - \frac{m}{n} y x^{-1} = - \frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n} - 1}.$$

Demnach gilt obige Differentialformel auch für negative und gebrochene Exponenten. Freilich bleibt uns die Differentialrechnung den Beweis schuldig, daß die Formel auch für irrationale und imaginaire Exponenten richtig bleibt, wendet aber dennoch dieselbe auch in diesen Fällen an und gründet darauf weitreichende und verwickelte Schlüsse, die dann haltlos in der Luft schweben.

Enthält der auf diese Weise erhaltene Differentialquotient noch die variabele Größe x, ist derselbe also eine neue Function von x, etwa f'x, so kann man offenbar mit f'(x) ganz in gleicher Weise die

Operation des Differentiirens vornehmen. Ist nämlich

$$y = f(x) \text{ und } dy = f'(x) \,.\, dx$$

so erhält man dy und x als variabel, dx hingegen als constant betrachtet:

$$d(dy) = f''(x) \,.\, dx \,.\, dx$$

$$d[d(dy)] = f'''(x) \,.\, dx \,.\, dx \,.\, dx \text{ u. s. w.}$$

Man bezeichnet $d(dy)$ mit d^2y, $d[d(dy)]$ mit d^3y u. s. w., erhält also:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''x, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = f'''x \ldots.$$

und nennt diese abgeleiteten Functionen Differentialquotienten 2ter, 3ter .... Ordnung, oder sagt auch kurz 2ter, 3ter .... Differentialquotient.

Transscendente Functionen.

Transscendente Functionen, **quae vires Algebrae transscendunt**, wie Leibnitz sagt, kommen in der höheren Analysis vielfach vor, z. B. der Integrallogarithmus $\int \frac{dx}{\log. x}$, die **transscendentes elliptiques**, $-\int e^{-t^2} dt$ u. s. w. Hier kann aber selbstverständlich nur von denjenigen transscendenten Functionen die Rede sein, welche vorzugsweise so heißen und in der Analysis ein gewisses Bürgerrecht erworben haben, nämlich Exponentialgrößen, Logarithmen und Kreisfunctionen.

Die ganze rationale Function macht dem Mathematiker offenbar ungleich weniger Umstände und Schwierigkeiten, als jede andere und der Gedanke liegt daher nahe, zu untersuchen, ob sich nicht vielleicht jede beliebige gebrochene, irrationale oder transscendente Function in eine ganze rationale verwandeln läßt? Bei diesem Versuche wird man sich nun aber bald überzeugen, daß, wenn diese Transformation überhaupt ausführbar ist, eine unbegrenzte Anzahl von Gliedern zugelassen werden muß, also eine unendliche Reihe von der Form:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

Läßt sich nun $f(x)$ in eine nach den ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, so sind die vorausgesetzten Coefficienten durch den bekannten Schluß: „die Reihe gilt für jeden Werth von x, also auch für $x = o$;" scheinbar leicht zu finden. Zunächst erhalte ich $A = f(o)$:

durch Differentiation:

$$\frac{d f(x)}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots. \text{ folglich:}$$

$$B = \frac{df(o)}{dx} \text{ oder } = f'(o).$$

Durch wiederholte Differentiation:

$$\frac{d^2 fx}{dx^2} = 2C + 2.3Dx + \ldots.$$

$$\frac{d^3 fx}{dx^3} = \quad 2.3D \; + \ldots.$$

also $C = \frac{1}{1\,.\,2} \frac{d^2 f(o)}{d x^2} = \frac{f''(o)}{1\,.\,2}$

$D = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{d^3 f(o)}{d x^3} = \frac{f'''(o)}{1\,.\,2\,.\,3}$ u. s. w.

daher $f(x) = f(o) + f'(o) \frac{x}{1} + f''(o) \frac{x^2}{1\,.\,2} + f'''(o) \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots.$

Das ist nun die berühmte Mac Laurin'sche Reihe, welche in der Analysis als untrügliches Universalmittel angeboten wird, um alle und jede Function in eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Sie sieht allerdings recht einladend und elegant aus; Schade nur, daß sie uns so oft im Stiche läßt. Die Mac Laurin'sche Reihe ist nämlich nicht allgemein, sondern nur unter der Voraussetzung richtig, daß sich f(x) in eine Reihe von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots.$$

auflösen läßt, was eben erst bewiesen werden soll und einfach — nicht wahr ist.

Es kann freilich nicht zweifelhaft sein, daß uns nichts hindert, daß wir vielmehr in unserem vollen Rechte sind, wenn wir für f(x) die vorstehende Reihenform voraussetzen, da sie sich doch einmal als die bequemste und gefügigste zu empfehlen scheint. Denn läßt sich nachher die Art und Weise, wie die ursprünglich veränderliche von den bekannten oder constanten Größen der Aufgabe abgesondert werden sollte, mit anderen Worten, lassen sich die vorausgesetzten unbestimmten Coefficienten A, B, C .... finden, so ist ja eben dadurch unsere Voraussetzung gerechtfertigt. Es wird dann Alles darauf ankommen, ob die erhaltene Reihe convergirt oder divergirt und nur im ersten Falle ist die Darstellung der Function durch eine unendliche Reihe möglich. Ist die Reihe dagegen divergent, so lernen wir eben nichts weiter daraus, als daß sie nur unter gewissen Bedingungen oder auch gar nicht existirt. Der geniale Humbug, der mit divergirenden Reihen vielfach getrieben wird, ist im Ganzen werthlos, und anstatt sich hinter hohle Redensarten zu verstecken, wie z. B. „die Reihe sei theoretisch richtig, aber nicht praktisch brauchbar", sollte man einfach und ehrlich sagen, unter den und den Umständen ist die Summe der Reihe nicht $= f(x)$, oder f(x) läßt sich nicht in eine Reihe von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots.$$

auflösen.

Prüfung der Convergenz der Reihen.

Eine Reihe nennt man convergent, wenn die Summe ihrer n ersten Glieder sich einem bestimmten Grenzwerthe um so mehr nähert, je größer man n annimmt, so daß also der Rest der Reihe immer kleiner wird. Es wäre für die Analysis ein großer Fortschritt, wenn man ein Mittel fände, die Convergenz der Reihen ganz allgemein bestimmt und sicher festzustellen. Einstweilen werden wir uns bescheiden müssen, die Frage in jedem einzelnen Falle besonders in's Auge zu fassen.

Nur in einem einzigen Falle sind wir im Stande, die Frage nach der Convergenz leicht und sicher zu beantworten, nämlich bei der bekannten geometrischen Progression:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. \text{ in inf.}$$

Die Summe für n Glieder ist bekanntlich

$$s = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Soll die Reihe in inf. fortgehen, so ist $n = \infty$ zu setzen. Ist nun $x < 1$, so ist $x^\infty = 0$, ist dagegen $x > 1$, so wird $x^\infty = \infty$. Für $x < 1$ ist daher die Summe der Reihe

$$s = \frac{1}{1 - x},$$

für $x > 1$ aber ist die Summe nicht $= \frac{1}{1-x}$, sondern unendlich. Auch für $x = 1$ ist die Summe als ein Aggregat unendlich vieler Einsen = unendlich.*)

Jede beliebige andere Reihe kann man nun in Beziehung auf Convergenz und Divergenz dadurch prüfen, daß man sie mit dieser geometrischen Progression vergleicht.

Es sei nämlich die Reihe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

Sind die Verhältnisse $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} \ldots = p$, also immer gleich groß, dann ist

$$a_{n+1} = a_n p, \quad a_{n+2} = a_n p^2 \ldots, \text{ daher}$$

$$s = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{n-1} + a_n (1 + p + p^2 + \ldots).$$

Die eingeklammerte Reihe ist aber nur zu summiren, wenn $p < 1$; wenn also in der gegebenen Reihe das Verhältniß zweier aufeinander folgender Glieder sich immer mehr der Größe p nähert, so hat dieselbe nur dann eine endliche Summe, wenn $p < 1$.

---

*) Die Sache ist so überaus einfach, daß man gar nicht begreift, wie sonst rühmlichst bekannte Mathematiker sich nicht scheuen, gerade mit dieser Reihe die haarsträubendsten Schlüsse zu Stande zu bringen, wie z. B.

$$1 + b + b^2 + b^3 + \ldots = \frac{1}{1-b}, \quad b = 10 \text{ giebt:}$$

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots = -\tfrac{1}{9}\,!$$

Oder:

$$1 - b + b^2 - b^3 + \ldots = \frac{1}{1+b}, \quad b = 1 \text{ giebt}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \tfrac{1}{2}\,!$$

Offenbar ist ja doch

$$1 - b + b^2 - b^3 + \ldots = \frac{1}{1+b} \pm \frac{b^\infty}{1+b}, \text{ also für } b = 1$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1 \pm 1}{2} = 1 \text{ oder } = 0.$$

Guido Grandi glaubt, daß aus unendlich vielen 1 — 1 doch etwas Endliches entstehen könne und wittert in dieser Reihe die Lösung des Räthsels der Schöpfung aus Nichts! Leibnitz schreibt über diesen Gegenstand an Chr. Wolf: (Acta Erud. suppl. t. V. 1713). „Die Reihe ist für eine gerade Anzahl = 0, für eine ungerade = 1. Von einer unendlichen Anzahl kann man weder sagen, daß sie gerade, noch daß sie ungerade sei. Daher geschieht mit bewunderungswerther Feinheit der Natur bei dem Uebergange vom Endlichen zum Unendlichen, auch ein Uebergang von dem Disjunctiven zu einem Bestimmten in der Mitte zwischen beiden Disjunctiven liegenden. Da nun bei zwei gleich wahrscheinlichen Fällen das arithmetische Mittel für die Wahrscheinlichkeit zu nehmen ist, so beobachtet auch hier die Natur die Regel der Gerechtigkeit und giebt das Mittel zwischen 0 und 1, d. i. $\tfrac{1}{2}$!!" —

Werden ferner die Verhältnisse immer größer, so daß

$$a_{n+1} = a_n\, p, \quad a_{n+2} = a_n\, p\, p', \quad a_{n+3} = a_n\, p\, p'\, p'' \ldots, \text{ dann ist}$$

$$s = a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1} + a_n (1 + p + p p' + p p' p'' \ldots).$$

Die Reihe $1 + p + p^2 \ldots$ war bloß nicht zu gebrauchen für $p > 1$; die Reihe $1 + p + pp' + pp'p'' \ldots$ hat aber in keinem Falle eine endliche Summe, da die p wachsen, also > 1 werden müssen. Wenn also in einer beliebigen Reihe das Verhältniß von zwei aufeinander folgenden Gliedern immer größer wird, so divergirt dieselbe und ist daher nicht zu gebrauchen. Wenn dagegen die Verhältnisse $p, p', p'' \ldots$ immer kleiner, also endlich < 1 werden, so ist $p p' < p^2$, $p p' p'' < p^3 \ldots$ Also hat $1 + p + pp' + p p' p'' + \ldots$ und damit auch

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

eine angebbare Summe.

Dieser Satz reicht glücklicher Weise aus, um festzustellen, ob die auf irgend eine Art für $f(x)$ gefundene unendliche Reihe brauchbar ist, oder nicht.

Wenn man nun in der Reihe

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$$

die Coefficienten A, B, $C \ldots$ durch den Mac Laurin'schen Satz finden kann, so ist dagegen natürlich nichts einzuwenden; es ist, wie gesagt, nur zu bedauern, daß es in gar vielen Fällen nicht geht. Abgesehen davon, daß es Selbstüberwindung kostet, auf Umwegen zu einem Ziele zu gelangen, was kürzer zu erreichen ist, daß einige Geduld dazu gehört, sich durch ein Labyrinth von Differentialformeln hindurch zu tasten, in dessen Halbdunkel von einem Erkennen des Gesetzes, nach welchem die Reihe verläuft, selten die Rede sein kann, — versagt nicht selten die Mac Laurin'sche Reihe ganz und gar, giebt die Coefficienten $= \infty$ oder $= \frac{0}{0}$ u. dgl. und beweist eben dadurch die von mir vorhin ausgesprochene Ansicht, daß sie, nämlich die Mac Laurin'sche Reihe, nicht allgemein gilt. Wenn daher die Adepten der sogenannten höheren Analysis mit einer gewissen Vornehmthuerei auf die nicht in die tiefsten Geheimnisse ihrer Hieroglyphen eingeweiheten Menschenkinder herabsehen, wenn sie behaupten, die Darstellung der transscendenten Functionen durch Reihen sei nur durch Differentialrechnung ausführbar und allgemein zu beweisen, so mögen es mir die Herren nicht übel nehmen, wenn ich ihnen nicht Alles glaube. Ich meine vielmehr die Differentialrechnung verkennt ihre Bestimmung, wenn sie die Entwickelung jener transscendenten Functionen als eine ihrer wichtigsten Aufgaben betrachtet und irrt, wenn sie die allgemeine Lösung dieser Aufgabe durch den Taylorschen resp. Mac Laurin'schen Satz gefunden zu haben behauptet. Die nur ein klein wenig anders als gewöhnlich gehandhabte Methode der unbestimmten Coefficienten führt ganz leicht und befriedigend zum Ziele und würde der Differentialrechnung sogar die Mühe ersparen können, die Differentialquotienten der fraglichen Functionen aufzusuchen. Da aber die hochgestellte Dame die Dienste ihrer vermeintlichen Magd nicht will, so lassen wir sie ihre Differentialquotienten selbst auffinden und kommen später auf die Herleitung der Reihen zurück.

Differentiation transscendenter Functionen.

1. $y = \overset{a}{\log}.\ x.$

Setzt man die Reihenentwickelung voraus

$$\overset{a}{\log}.\ (1 + x) = M\,[x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots]$$

so folgt augenblicklich:

$$\frac{d\log.(1+x)}{dx} = M[1 - x + x^2 - x^3 + \ldots]$$

$$= \frac{M}{1+x};$$

oder wenn man $1 + x = z$ setzt,

$$\frac{d\log.z}{dz} = \frac{M}{z};$$

und für den natürlichen Logarithmus:

$$\frac{d\log.\text{nat}.x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Da beide gebrauchte Reihen nur für $x < 1$ convergiren, so gilt das Resultat zunächst nur für $x < 1$.

Nun ist aber:

$$\log.x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= 2[z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \ldots]$$

daher $\qquad d\log.x = 2dz[1 + z^2 + z^4 + \ldots]$.

Da hier $z < 1$, so ist $1 + z^2 + z^4 + \ldots = \frac{1}{1-z^2} = \frac{(x+1)^2}{4x}$

und $\qquad dz = \frac{2dx}{(x+1)^2}$

daher $\qquad d\log.x = \frac{dx}{x}$, wie vorher.

Ohne die Reihenentwickelung zu kennen, findet man das Differential von $\log.x$ folgendermaßen:

Es sei $\qquad \frac{d\log.x}{dx} = f(x)$, dann ist:

$$\frac{d(\log.x^n)}{d(x^n)} = f(x^n) = \frac{n\,d\log.x}{nx^{n-1}\,dx}$$

$$f(x^n) = \frac{1}{x^{n-1}}f(x), \text{ oder:}$$

$$f(x) = x^{n-1}f(x^n)$$

Da n beliebig ist, so darf man n auch $= o$ setzen, dadurch erhält man:

$$f(x) = x^{-1}\ f(1).$$

$f(1)$ ist offenbar eine Constante $= M$, daher

$$f(x) = \frac{d\log.x}{dx} = \frac{M}{x}.$$

Setzt man $x = 1 + z$, ferner $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$

so daß $\qquad \log.z = M\int(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots)\,dz$

so erkennt man, daß M der Modul des Systems sein muß.

Gegen diese Herleitung ist einzuwenden, daß der Schluß, man dürfe in der Gleichung:

$$f(x) = x^{n-1} f(x^n)$$

auch $n = o$ setzen, nichts weniger als überzeugend ist, wenn wir auch allenfalls die Herbeiziehung der Integralrechnung entschuldigen wollen. *)

2. $y = a^x$.

Logarithmirt giebt: $\log. y = x \log. a,$

und differentiirt: $\frac{dy}{y} = dx \log. a,$

also $\frac{dy}{dx} = a^x \log. a,$

und $a = e$ gesetzt: $dy = d(e^x) = e^x dx.$

Aus der Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$

folgt dasselbe Resultat unmittelbar.

3. $y = \sin x$ und $y' = \cos x$.

Kennt man bereits die Reihen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.,$$

so folgt ohne alle Umstände: $d \sin x = \cos x \, dx$

und $d \cos x = -\sin x \, dx.$

Als eine kleine Geduldsprobe und als Beweis, daß man auch auf Umwegen über Stock und Stein zum Ziele gelangen kann, will ich die Methode hersetzen, wie gelehrte Leute diese beiden Differentiale finden. Wem die übertriebene Nullenrechnung nicht behagt, der mag diese Deduction überschlagen.

Es sei $\frac{d \sin x}{dx} = \phi(x)$

da $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$, so ist

$\sin x \, d \sin x + \cos x \, d \cos x = o,$

daher $\frac{d \cos x}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x} \phi x.$

Nun ist $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$

daher $d \sin(x+y) = \sin x \, d \cos y + \cos y \, d \sin x + \cos x \, d \sin y + \sin y \, d \cos x,$

also $\phi(x+y) \, d(x+y) = -\sin x \frac{\sin y}{\cos y} \phi y \, dy + \cos y \, \phi x \, dx - \frac{\sin x}{\cos x} \phi x \, dx + \cos x \, \phi y \, dy$

$$= \cos(x+y) \left[\frac{\phi y \, dy}{\cos y} + \frac{\phi x \, dx}{\cos x}\right].$$

Setzt man hierin $y = (n-1)x$, wo n jede beliebige Größe haben kann, so ist:

$$\phi(nx) \, d(nx) = \frac{\cos nx \, \phi x \, dx}{\cos x} + \frac{\cos nx \, \phi(n-1)x \, d(n-1)x}{\cos(n-1)x}$$

---

*) Die Formel $\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n}$ ist angeblich auch allgemein richtig und giebt doch für $n = o$ etwas Falsches, nämlich $\frac{1}{0}$ anstatt $\log x$.

oder $$n\,\varphi(n x) = \frac{\cos n x\,\varphi x}{\cos x} + \frac{(n-1)\cos n x\,\varphi(n-1)x}{\cos(n-1)x}$$

und $$\frac{n\varphi\, n x}{\cos n x} = \frac{\varphi x}{\cos x} + \frac{(n-1)\,\varphi(n-1)x}{\cos(n-1)x}. \quad \text{I.}$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der Reihe für n die Zahlenwerthe $2, 3, 4 \ldots n$, so ist:

$$\frac{2\varphi\, 2x}{\cos 2x} = \frac{\varphi x}{\cos x} + \frac{\varphi x}{\cos x}$$

$$\frac{3\varphi\, 3x}{\cos 3x} = \frac{\varphi x}{\cos x} + \frac{2\varphi\, 2x}{\cos 2x}$$

$$\frac{4\varphi\, 4x}{\cos 4x} = \frac{\varphi x}{\cos x} + \frac{3\varphi\, 3x}{\cos 3x}$$

$$\cdots$$

$$\frac{n\varphi\, n x}{\cos n x} = \frac{\varphi x}{\cos x} + \frac{(n-1)\,\varphi(n-1)x}{\cos(n-1)x}.$$

Addirt man, so ergiebt sich für ein ganzes positives n das Resultat:

$$\frac{n\varphi\, n x}{\cos n x} - \frac{(n-1)\,\varphi x}{\cos x} = \frac{\varphi x}{\cos x} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{\varphi\, n x}{\cos n x} = \frac{\varphi x}{\cos x}. \quad \text{II.}$$

Um zu beweisen, daß Gleichung II. richtig bleibt für jedes beliebige n, setze man in Gleichung I.

$$\frac{\varphi\, n x}{\cos n x} = \frac{\varphi(n-1)x}{\cos(n-1)x} = \frac{\varphi x}{\cos x};$$

dadurch erhalten wir $\dfrac{n\,\varphi x}{\cos x} = \dfrac{n\,\varphi x}{\cos x}$.

Da wir also durch diese Substitution etwas Richtiges erhalten, so muß Formel II. eben so gut, wie Formel I. für jeden Werth von n gelten. Nehmen wir nun $n = o$, so ist $\dfrac{\varphi o}{1} = \dfrac{\varphi x}{\cos x}$.

φo ist aber offenbar eine Constante, daher

$$\varphi x = C \cos x.$$

Um ferner noch die Constante C zu bestimmen, wird folgendermaßen geschlossen:

Da $\sin x < x$, so ist $\dfrac{\sin x}{x} < 1$;

und da $\operatorname{tg.} x > x$, so ist $\dfrac{\sin x}{x} > \cos x$.

$\dfrac{\sin x}{x}$ liegt also zwischen den Grenzen 1 und $\cos x$ ist also $= 1$ für $x = o$.

In der Gleichung $\dfrac{\sin x}{x} - 1 = o$, wird also o eine Wurzel sein, so daß $\dfrac{\sin x}{x} - 1$ den Factor $x - o$ enthalten muß. Daher $\sin x = x + P x^2$

und $$\frac{d \sin x}{d x} = 1 + 2x \,.\, P x \frac{x^2\, dP}{d x} = C \cos x.$$

Setzt man hierin endlich $x = o$, so ist $C = 1$, folglich:

$$\frac{d \sin x}{d x} = \cos x \text{ und } \frac{d \cos x}{d x} = -\sin x.$$

Wer kein Freund ist von solchem Bombast, wird die folgende Herleitung bei weitem vorziehen. Es ist, $\Delta x = m$ gesetzt,

$$\sin(x+m) = \sin x \cos m + \cos x \sin m,$$
$$\cos(x+m) = \cos x \cos m - \sin x \sin m.$$

Daher $$\frac{\sin(x+m) - \sin x}{m} = -\sin x \frac{1-\cos m}{m} - \cos x \frac{\sin m}{m}$$
$$\frac{\cos(x+m) - \cos x}{m} = -\cos x \frac{1-\cos m}{m} - \sin x \frac{\sin m}{m}.$$

Setzen wir hierin m unendlich klein oder $= o$, so ist $\frac{\sin m}{m} = 1$

$$\frac{1-\cos m}{m} = \frac{2\sin \frac{1}{2}m^2}{2 \cdot \frac{1}{2}m} = \frac{\sin \frac{1}{2}m}{\frac{1}{2}m} \cdot \sin \frac{1}{2}m = o;$$

also da für $m = o$ der Differenzenquotient in den Differentialquotienten übergeht,

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \text{ und } \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

4. $y = \mathrm{tg}. x$, $y' = \cot x$.

$$\frac{d\,\mathrm{tg}. x}{dx} = \frac{d}{}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x^2 + \sin x^2}{\cos x^2} = \sec x^2.$$

und ebenso: $$\frac{d \cot x}{dx} = -\operatorname{cosec} x^2.$$

5. $y = \operatorname{arc} \sin x$, $y' = \operatorname{arc} \cos x$, $y'' = \operatorname{arc} \mathrm{tg}. x$, $y''' = \operatorname{arc} \cot x$.

Aus $y = \operatorname{arc} \sin x$ folgt $x = \sin y$,

also: $$\frac{dx}{dy} = \cos y, \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin y^2)}}$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Ebenso findet man leicht:

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Aus $y = \operatorname{arc} \mathrm{tg}. x$ folgt $x = \mathrm{tg}. y$,

also: $$\frac{dx}{dy} = 1 + \mathrm{tg}. y^2 \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}. y^2}$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \mathrm{tg}. x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

und ebenso: $$\frac{d \operatorname{arc} \cot x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Der merkwürdige Zusammenhang zwischen Logarithmen und Kreisfunctionen, der sich, sobald die Reihen für e^x, $\sin x$ und $\cos x$ bekannt sind, so leicht und sicher herausstellt, wird uns von der Differentialrechnung, welche diese Reihen hier noch ignorirt, auf folgende Art begreiflich gemacht:

Es ist: $$d \log \frac{1+x}{1-x} = \frac{2\,dx}{1-x^2}.$$

Nun muthet man uns zu, in dieser Formel für x zu substituiren $\sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg.}\ \varphi$, unbekümmert darum, ob die Formel in diesem sich jeder Kritik entziehenden Falle richtig bleibt oder nicht. Genug, es muß sein:

$$d \log \frac{1 + \sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg.}\ \varphi}{1 - \sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg.}\ \varphi} = \frac{2\sqrt{(-1)}\ d\varphi \sec \varphi^2}{1 + \mathrm{tg.}\ \varphi^2} = 2\sqrt{(-1)}\ d\varphi$$

daher $$\log \frac{1 + \sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg.}\ \varphi}{1 - \sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg.}\ \varphi} = 2\varphi\sqrt{(-1)} + C.$$

Für $\varphi = o$ wird erhalten $o = C$,

daher $$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}} \log \frac{1 + \sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg.}\ \varphi}{1 - \sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg.}\ \varphi} \quad \text{I.}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(-1)}} \log \frac{\cos\varphi + \sqrt{(-1)} \sin\varphi}{\cos\varphi - \sqrt{(-1)} \sin\varphi} = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}} \log \frac{[\cos\varphi + \sqrt{(-1)} \sin\varphi]^2}{\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{(-1)}} \log [\cos\varphi + \sqrt{(-1)} \sin\varphi].$$

Daraus folgt weiter: $e^{\varphi\sqrt{(-1)}} = \cos\varphi + \sqrt{(-1)} \sin\varphi$

und wenn φ in $-\varphi$ übergeht: $e^{-\varphi\sqrt{(-1)}} = \cos\varphi - \sqrt{(-1)} \sin\varphi$ $\Big\}$ II.

Setzt man $n\varphi$ anstatt φ, so ist:

$$e^{\pm n\varphi\sqrt{(-1)}} = \cos n\varphi \pm \sqrt{(-1)} \sin n\varphi,$$

und wenn man die Gleichung II. zur n^{ten} Potenz erhebt:

$$e^{\pm n\varphi\sqrt{(-1)}} = [\cos\varphi \pm \sqrt{(-1)} \sin\varphi]^n$$

daher: $$(\cos\varphi \pm \sqrt{(-1)} \sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \sqrt{(-1)} \sin n\varphi.$$

Setzt man in Gleichung I. $\mathrm{tg.}\ \varphi = \frac{a}{b}$, so ist

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}} \log \frac{a + b\sqrt{(-1)}}{a - b\sqrt{(-1)}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)}} \log \frac{a + b\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

daher: $$\log [a + b\sqrt{(-1)}] = \log \sqrt{(a^2 + b^2)} + \sqrt{(-1)} \operatorname{arc\,tg.} \frac{a}{b};$$

so daß also der Logarithmus einer unmöglichen Größe keine neue unmögliche Größe, vielmehr von der Form ist $A + B\sqrt{(-1)}$.

Ich will diese Untersuchung nicht weiter fortsetzen und es Jedem überlassen, ob ihn solche Deductionen überzeugen oder nicht. Zum Schluß und zum Beweise, wie die Meister der Analysis, denen wir diese Beweise verdanken, mit solchen Formeln umspringen, will ich nur noch die Summation folgender Reihen hinzufügen:

$$y = \sin\alpha + a \sin(\alpha + \varphi) + a^2 \sin(\alpha + 2\varphi) + a^3 \sin(\alpha + 3\varphi) \ldots.$$
$$y' = \cos\alpha + a \cos(\alpha + \varphi) + a^2 \cos(\alpha + 2\varphi) + a^3 \cos(\alpha + 3\varphi) \ldots.$$

Da $\cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{(-1)}} + e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2}$ und $\sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$

$$2y\sqrt{(-1)} = e^{\alpha\sqrt{(-1)}}\left[1 + a e^{\varphi\sqrt{(-1)}} + a^2 e^{2\varphi\sqrt{(-1)}} + a^3 e^{3\varphi\sqrt{(-1)}} \ldots.\right]$$
$$- e^{-\alpha\sqrt{(-1)}}\left[1 + a e^{-\varphi\sqrt{(-1)}} + a^2 e^{-2\varphi\sqrt{(-1)}} + a^3 e^{-3\varphi\sqrt{(-1)}} \ldots.\right]$$

und da die eingeklammerten Reihen geometrische Progressionen sind,

$$2y\sqrt{(-1)} = \frac{e^{\alpha\sqrt{(-1)}}}{1-ae^{\varphi\sqrt{(-1)}}} - \frac{e^{-\alpha\sqrt{(-1)}}}{1-ae^{-\varphi\sqrt{(-1)}}}$$

$$= \frac{\cos\alpha + \sqrt{(-1)}\sin\alpha}{1-a(\cos\varphi+\sqrt{(-1)}\sin\varphi)} - \frac{\cos\alpha - \sqrt{(-1)}\sin\alpha}{1-a(\cos\varphi-\sqrt{(-1)}\sin\varphi)},$$

und nach einer leichten Reduction:

$$y = \frac{\sin\alpha - a\sin(\alpha-\varphi)}{1-2a\cos\varphi + a^2}.$$

auf ganz ähnliche Weise: $y' = \dfrac{\cos\alpha - a\cos(\alpha-\varphi)}{1-2a\cos\varphi+a^2}$.

Ist $\alpha = \varphi$ und $a = 1$, so wird:

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\alpha. \qquad \text{I.}$$

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots \text{ in inf.} = -\tfrac{1}{2}. \qquad \text{II.}$$

Das sieht recht niedlich aus, ist aber leider nicht wahr.

Man setze z. B. in II. $\alpha = 0$, oder $= \pi$, so ist

$$1+1+1+1\ldots = -\tfrac{1}{2} \quad \text{oder}$$

$$-1+1-1+1\ldots = -\tfrac{1}{2}.$$

Dieselbe Substitution in Gleichung 1 giebt

$$0+0+0+0\ldots = \infty.$$

Diese Sonderbarkeiten rühren eben daher, daß man vergißt, in der Summenformel $1+b+b^2\ldots = \dfrac{1}{1-b}$ muß $b < 1$ sein.

Es unterliegt natürlich keinem Zweifel, daß man bei den transscendenten Functionen eben so gut, wie bei den algebraischen einen 2ten, 3ten, 4ten ... Differentialquotienten suchen kann.

$$\begin{array}{lllll}
y = e^x & y = \log x & y = \sin x & y = \cos x & y = \operatorname{arc}\sin x \\
\frac{dy}{dx} = e^x & \frac{dy}{dx} = x^{-1} & \frac{dy}{dx} = \cos x & \frac{dy}{dx} = -\sin x & \frac{dy}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{d^2y}{dx^2} = e^x & \frac{d^2y}{dx^2} = -x^{-2} & \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x & \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x & \frac{d^2y}{dx^2} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\
\frac{d^3y}{dx^3} = e^x & \frac{d^3y}{dx^3} = 2x^{-3} & \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x & \frac{d^3y}{dx^3} = \sin x & \frac{d^3y}{dx^3} = (1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}
\end{array}$$

u. s. w.

Der Taylor'sche Lehrsatz.

Der Taylor'sche Lehrsatz, zu welchem wir jetzt übergehen, ist diejenige analytische Formel, durch welche $f(x + \Delta x)$ in eine nach den ganzen positiven Potenzen von Δx fortschreitende Reihe entwickelt dargestellt wird. Je mehr Gewicht in der Analysis auf diesen Satz gelegt wird, desto mehr muß man bedauern, daß trotz aller Mühe, welche seit dem ersten Bekanntwerden desselben in **Brook Taylors Methodus incrementorum** im Jahre 1715 bis heute die bedeutendsten Mathematiker daran gesetzt haben, ein allgemein befriedigender, namentlich durch Einfachheit überzeugender Beweis noch fehlt.

Taylor selbst deutet folgenden Weg an:

Bedeutet in einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung y das erste Glied, Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y \ldots$ bezüglich die ersten Glieder der aufeinander folgenden Differenzen-Reihen, so ist das allgemeine Glied der Reihe:

$$y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 y + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\Delta^3 y \ldots$$

oder y als eine Function von x betrachtet,

$$= y + \frac{n\,\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{n\,.\,(n-1)\,\Delta x^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)\,.\,\Delta x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \ldots$$

Denkt man sich nun, daß $n\Delta x$, indem Δx in's Unendliche ab, n dagegen in's Unendliche zunimmt, immer eine constante Größe $= h$ bleibt, so gehen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \ldots$ über in $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} \ldots$ und gleichzeitig $n\Delta x$, $n(n-1)\Delta x^2 \ldots$ in h, $h^2 \ldots$ und man erhält:

$$y' = y + \frac{dy}{dx}\,h + \frac{d^2 y}{dx^2}\,\frac{h^2}{1\,.\,2} + \frac{d^3 y}{dx^3}\,\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots,$$

welches die berühmte Taylor'sche Reihe ist.

Lagrange, der diese Reihe als Grundlage der ganzen Differentialrechnung und Functionentheorie betrachtet wissen will, sucht sie in seiner **Théorie des fonctions analytiques** auf folgende Art zu begründen:

Da $f(x+h)$ für $h + o$ in $f(x)$ übergeht, so muß die Reihe nothwendig ein von h unabhängiges Glied $= f(x)$ enthalten:

Folglich wird die Reihe sein:

$$f(x) + Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} \ldots$$

Nun zeigt Lagrange zunächst, daß keiner der Exponenten α, β, $\gamma \ldots$ ein Bruch oder eine negative Zahl sein kann. Denn, sagt er, fx und $f(x+h)$ haben wegen der gleichen Functionszeichen auch gleich viel Werthe. Wäre nun auch nur ein Exponent z. B. α ein Bruch, so hätte Ax^{α} mehr als einen Werth, und $f(x+h)$ hätte also mehr Werthe als $f(x)$, welches ungereimt wäre. Nehmen wir ferner einen Exponenten z. B. β negativ an, so wäre für $h = o$, das Glied $Bh^{\beta} = \infty$, d. h. fx wäre für jeden Werth von x unendlich, was wieder unmöglich ist.

Derartige Beweise sind freilich mehr genial als ehrlich.

Wie oft kommt es doch wohl in der Analysis vor, daß man zwei mehrdeutige Ausdrücke gleichsetzt und dann untersuchen muß, welche Werthe zusammen gehören, d. h. wirklich gleich sind? Und wie dann, wenn $f(x)$, wie es bei Logarithmen und Kreisfunctionen in der That der Fall ist, eine unbegrenzte Anzahl von Werthen hat? Dann ist doch sicher die Anzahl der Werthe von $f(x+h)$ trotz des gebrochenen Exponenten nicht größer als unendlich. Und warum sollte denn nicht β negativ sein können? Es braucht nur noch ein zweiter Exponent negativ zu sein, dann ist ja $f(x) = \infty - \infty$. Es muß also zugestanden werden, — Lagrange bleibt uns den Beweis, daß die Exponenten α, β, $\gamma \ldots$ ganze positive Zahlen sein müssen, schuldig.

Zur Bestimmung der Coefficienten $A, B, C \ldots$ gelangt er nach dieser Einleitung auf folgendem Wege, der allerdings an einigen Abgründen vorbeiführt, so daß wir wohl thun dürften, wenigstens ein Auge zuzumachen, um bei dem Anblicke der Ungeheuer der grausigen Tiefe, ich meine beim Anblicke der doppelt unendlichen Reihen, nicht von einem gelinden Schwindel ergriffen zu werden.

Man setze $(h + k)$ für h, so erhält man, bloß die erste Potenz von k beibehaltend:

$$\begin{aligned} f(x+h+k) = f(x) &+ Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \ldots \\ &+ [A + 2Bh + 3Ch^2 + 4Dh^3 + \ldots] k \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

Setzt man dagegen $x + k$ für x und bedenkt, daß $A, B, C \ldots$ Functionen von x sind, daß also gleichwie

$$\begin{array}{llll} f(x+k) & \text{übergeht in} & fx + Ak + \ldots & \text{auch} \\ A & \text{"} \quad \text{"} & A + A'k + \ldots & \\ B & \text{"} \quad \text{"} & B + B'k + \ldots & \text{u. s. w.,} \end{array}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x+h+k) = f(x) &+ Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \ldots \\ &+ [A + A'h + B'h^2 + C'h^3 + D'h^4 + \ldots] k \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

und durch Gleichsetzung der Coefficienten von k,

$$A + 2Bh + 3Ch^2 + 4Dh^3 \ldots = A + A'h + B'h^2 + C'h^3 + D'h^4 \ldots,$$

daher:

$$\begin{aligned} A' &= 2B \\ B' &= 3C \\ C' &= 4D \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Nun ist offenbar, daß A' aus A, B' aus $B \ldots$ ebenso derivirt ist, wie A aus $f(x)$. Bezeichnet man also, wie Lagrange es thut, die erste abgeleitete Function mit $f'(x)$, die 2te mit $f''(x)$, die 3te mit $f'''(x) \ldots$, so ist

$$\begin{aligned} A &= f'(x) \\ B &= \tfrac{1}{2} A' = \frac{1}{2} f''(x) \\ C &= \tfrac{1}{3} B' = \frac{1}{2 \cdot 3} f''(x) \\ D &= \tfrac{1}{4} C' = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} f'''(x) \quad \text{u. s. w.,} \end{aligned}$$

demnach ist also:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + f'''(x)\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Schließlich wird nachgewiesen, daß die fonctions dérivées nichts Anderes sind als Differentialquotienten.

Andere Mathematiker gehen bei dem Beweise des Taylor'schen Lehrsatzes von der Voraussetzung aus, daß sich jede Function in eine Reihe entwickeln läßt von der Form:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$$

eine ganz handgreiflich falsche Voraussetzung, wie uns schon die Reihenausdrücke für $\log x$ und $\cot x$ lehren.

Wieder Andere lassen vorläufig negative oder gebrochene Exponenten zu, und setzen:

$$f(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots,$$

so daß also:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= A(x+h)^\alpha + B(x+h)^\beta + C(x+h)^\gamma + \ldots \\ &= A[x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\,.\,2}x^{\alpha-2}h^2 + \ldots] \\ &\quad + B[x^\beta + \beta x^{\beta-1}h + \frac{\beta(\beta-1)}{1\,.\,2}x^{\beta-2}h^2 + \ldots] \\ &\quad + C[x^\gamma + \gamma x^{\gamma-1}h + \frac{\gamma(\gamma-1)}{1\,.\,2}x^{\gamma-2}h^2 + \ldots] \\ &\quad + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta \ldots \\ &+ [\alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \delta Dx^{\delta-1} \ldots]\,h \\ &+ [\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)Bx^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1)Cx^{\gamma-2} + \delta(\delta-1)Dx^{\delta-2}\ldots]\,\frac{h^2}{2} \\ &+ [\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)Ax^{\alpha-3} + \beta(\beta-1)(\beta-2)Bx^{\beta-3} + \gamma(\gamma-1)(\gamma-2)Cx^{\gamma-3}\ldots]\,\frac{h^3}{2\,.\,3} \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

Hier sind nun die Coefficienten von h, $\frac{h^2}{2}$, $\frac{h^3}{2\,.\,3}$ .... offenbar nichts Anderes, als die Differentialquotienten und wir erhalten also:

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2\,.\,3} \ldots$$

Diese Herleitung sieht etwas befriedigender aus, leidet aber doch an denselben Mängeln. Einmal entziehen sich die doppelt unendlichen Reihen in Beziehung auf Convergenz jeder Kritik, sodann ist es sonderbar, daß der Taylor'sche Lehrsatz sich das Ansehen giebt, den binomischen Lehrsatz für jeden beliebigen Exponenten beweisen zu können, und doch bei seiner eigenen Herleitung sich darauf stützt.

Sei dem aber, wie ihm wolle, sicherlich wird die Taylor'sche Reihe nicht unter allen Umständen, sondern nur, wenn sie convergirt zu gebrauchen seien. Sie ist nur dann wahr, wenn

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,\frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\ldots(n+1)} : \frac{d^ny}{dx^n}\,\frac{h^n}{1\,.\,2\ldots n} < 1,$$

$$\text{oder}\quad \frac{h}{n+1} < \left[\frac{d^ny}{dx^n} : \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right];$$

und sind außerdem α, β, γ keine ganzen positiven Zahlen, so muß auch $h < x$ sein.

Ungeachtet dieser Halbheiten leitet man doch die bereits oben angeführte Mac Laurin'sche (Stirling'sche) Reihe mit einer bemerkenswerthen Seelenruhe daraus ab. Man setzt $x = o$, was doch nicht unter allen Umständen zulässig ist, und substituirt dann wieder x für h.

Also:
$$f(h) = f(o) + \frac{df(o)}{dx}h + \frac{d^2f(o)}{dx^2}\frac{h^2}{2}\ldots$$

und dann:
$$fx = f(o) + \frac{df(o)}{dx}x + \frac{d^2f(o)}{dx^2}\frac{x^2}{2}\ldots$$

Neuere Mathematiker haben die Lücken im Beweise des Taylor'schen Lehrsatzes recht wohl gefühlt und zu ihrer theilweisen Beseitigung manchen dankenswerthen Beitrag geliefert. Daß es ihnen aber nicht gelungen ist, uns andere nicht in den hohen Priesterorden eingeweihete Menschenkinder von der Wahrheit des Taylor'schen Orakelspruches zu überzeugen, will ich mir erlauben, durch ein Beispiel zu erläutern, indem ich den Beweis, wie ihn einer der vorzüglichsten Differentialisten giebt, mittheile. Ich fürchte sehr, es wird uns dabei zu Muthe werden, wie dem Schüler in Göthe's Faust, der bei Mephistos Vorlesungen über Philosophie gesteht:

„Kann euch nicht eben recht verstehen. —
Mir wird von alle dem so dumm,
Als ging mir ein Mühlrad im Kopf herum.

Zunächst soll bewiesen werden, daß die Summe der unendlichen Reihe:

$$f(x) - \frac{df(x)}{dx}x + \frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{d^3f(x)}{dx^3}\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots \quad \text{I.}$$

unter allen Umständen eine constante Größe ist. Dies wird allerdings richtig sein, wenn sie differentiirt o giebt. Die Differentiation ergiebt:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}\\
&-\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}x\\
&\qquad\qquad + \frac{d^2y}{dx^2}x + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^2}{2}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^2}{2} - \frac{d^4y}{dx^4}\frac{x^3}{2\,.\,3}\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wenn diese Reihe convergirt, dann allerdings heben sich alle Theile weg und der Schluß, daß Reihe I. = const, ist richtig. Wie denn aber, wenn die Reihe nicht convergirt, d. h. wenn wir bei dem k^{ten} Gliede abbrechend finden, daß $\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}\frac{x^k}{1\,.\,2\,.\,k}$ nicht verschwindend klein wird? — Eine solche Basis für einen allgemein sein sollenden Beweis, ist eben nicht Vertrauen einflößend.

Es ist ferner:

$$(1-x)^n = \Sigma(-1)^h B_n^h x^h \quad {}^{*)}$$

$$B_n^h = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-h+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots h} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n}{1\,.\,2\,.\,.(n-h)\,.\,1\,.\,2\ldots h} = \frac{n!}{(n-h)!\,h!},$$

daher: $$(1-x)^n = \Sigma\frac{(-1)^h\,n!\,x^h}{h!\,(n-h)!},$$

oder da n hier constant ist:

$$\frac{(1-x)^n}{n!} = \Sigma\frac{(-1)^h x^h}{h!\,(n-h)!}$$

---

*) Σ bedeutet: eine Reihe von Gliedern, deren allgemeines Glied ist ...
B_n^h „ den h^{ten} Binomial-Coefficienten.
$n!$ „ Product der Zahlen von 1 bis n.

Setzt man hierin $x = 1$, so ist im Allgemeinen

$\Sigma \frac{(-1)^h}{h!(n-h)!}$ immer $= o$. Die einzige Ausnahme ist die, wenn n selber $= o$ wird. In diesem Falle ist $(1-x)^0 = 1$, also auch

$$\Sigma \frac{(-1)^h}{h!(n-h)!} = 1.$$

Es wäre allerdings gut, wenn die gelehrten Leute uns begreifen helfen wollten, was das Product der Zahlen von 1 bis o, oder gar von 1 bis $-h$ bedeuten soll? Es wird uns ohnehin schon sauer genug, o^0 uns als 1 vorzustellen. —

Im Allgemeinen ist also auch:

$$(x+k)\,\Sigma \frac{(-1)^h}{h!\,(n-h)!} \text{ oder } \Sigma \frac{(-1)^h (x+k)^n}{h!\,(n-h)!} \text{ oder}$$

$$\Sigma \frac{(-1)^h (x+k)^h (x+k)^{(n-h)}}{h!\,(n-h)!} = o \qquad \text{II.}$$

Setzt man in Gleichung I. $(x+k)$ für x, so ist:

$$C = f(x+k) - (x+k)\frac{d f(x+k)}{dx} + \frac{(x+k)^2}{1\,.\,2}\,\frac{d^2 f(x+k)}{dx^2} \ldots. \qquad \text{III.}$$

Durch Subtraction von I. und III., wenn man $f(x+k)$ auf eine Seite bringt

$$\left.\begin{aligned} f(x+k) = f(x) + (x+k)\frac{d f(x+k)}{dx} - \frac{(x+k)^2}{1\,.\,2}\,\frac{d^2 f(x+k)}{dx^2} + \frac{(x+k)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{d^3 f(x+k)}{dx^3} \ldots. \\ - x\,\frac{d f(x)}{dx} + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,\frac{dx^2}{d^2 f(x)} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{d^3 f(x)}{dx^3} \quad \ldots. \end{aligned}\right\} \text{IV.}$$

Nun müßte man aus III. die Differentialquotienten von $f(x+k)$ suchen und in IV. einsetzen, allerdings eine endlose Arbeit.

Es ist nach I.

$$C = \Sigma \frac{(-1)^n x^n}{n!}\,\frac{d^n fx}{dx^n} \qquad \text{V.}$$

und wenn man $\frac{d f(x)}{dx}$ für $f(x)$ einsetzt:

$$C = \Sigma \frac{(-1)^n x^n}{n!}\,\frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}}, \text{ ebenso}$$

$$C = \Sigma \frac{(-1)^n x^n}{n!}\,\frac{d^{n+2} f(x)}{dx^{n+2}}$$

. . . . .

$$C = \Sigma \frac{(-1)^n x^n}{n!}\,\frac{d^{n+h} f(x)}{dx^{n+h}} \qquad \text{VI.}$$

Setzt man ferner in V. $(n-1)$ für n, so ist:

$$C = \Sigma \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{d^n fx}{dx^n}, \text{ ebenso:}$$

$$C = \Sigma \frac{(-1)^{n-2} x^{n-2}}{(n-2)!}\,\frac{d^n fx}{dx^n}$$

. . . .

$$C = \Sigma \frac{(-1)^{n-h} x^{n-h}}{(n-h)!}\,\frac{d^n fx}{dx^n} \qquad \text{VII.}$$

Setzt man in **V.** $x + k$ für x, so ist:

$$C = \Sigma \frac{(-1)^n (x+k)^n}{n!} \frac{d^n f(x+k)}{dx^n}$$

und dies von **V.** abgezogen:

$$o = \Sigma \frac{(-1)^n x^n}{n!} \frac{d^n fx}{dx^n} - \Sigma \frac{(-1)^n (x+k)^n}{n!} \frac{d^n f(x+k)}{dx^n}.$$ Ebenso

$$o = \Sigma \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^n fx}{dx^n} - \Sigma \frac{(-1)^{n-1} (x+k)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^n f(x+k)}{dx^n}$$

$$o = \Sigma \frac{(-1)^{n-2} x^{n-2}}{(n-2)!} \frac{d^n fx}{dx^n} - \Sigma \frac{(-1)^{n-2} (x+k)^{n-2}}{(n-2)!} \frac{d^n f(x+k)}{dx^n} \qquad \textbf{VIII.}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$o = \Sigma \frac{(-)^{n-h} x^{n-h}}{(n-h)!} \frac{d^n fx}{dx^n} - \Sigma \frac{(-1)^{n-h} (x+k)^{n-h}}{(n-h)!} \frac{d^n f(x+k)}{dx^n}.$$

Es kommt nun darauf an, aus diesen Gleichungen die Größen $\frac{d f(x+k)}{dx}$, $\frac{d^2 f(x+k)}{dx^2}$, $\frac{d^3 f(x+k)}{dx^3}$ u. s. w. zu eliminiren. Zu dem Ende multipliciren wir sämmtliche Gleichungen mit den vorläufig noch unbestimmten Coefficienten $g, g', g'' \ldots g^h$ und addiren, so ist:

$$o = \Sigma\Sigma \frac{(-1)^{n-h} g^{(h)} x^{n-h}}{(n-h)!} \frac{d^n fx}{dx^n} - \Sigma\,\Sigma \frac{(-1)^{n-h} g^{(h)} (x+k)^{n-h}}{(n-h)!} \frac{d^n f(x+k)}{dx^n}. \qquad \textbf{IX.}$$

Sollen hieraus die Differentialquotienten von $f(x+k)$ verschwinden, so müssen die Coefficienten von $\frac{d^n f(x+k)}{dx^n} = o$ sein,

also:

$$\Sigma \frac{(-1)^{n-h} g^{(h)} (x+k)^{n-h}}{(n-h)!} = o \quad \text{oder}$$

$$(-1)^n \Sigma \frac{(-1)^h (x+k)^{n-h} g^{(h)}}{(n-h)!} = o.$$

Vergleichen wir dieses mit Formel **II.** und setzen beides gleich, so erhalten wir:

$$g^{(h)} = \frac{(x+k)^h}{h!}. \qquad \textbf{X.}$$

Wenn man also dem $g^{(h)}$ diesen Werth beilegt, so fallen sämmtliche Glieder des zweiten Theiles in **IX.** weg, mit Ausnahme derjenigen Glieder, welche man erhält, wenn $n = o$ gesetzt wird. Da nun aber h nicht größer als n sein darf, so ist für $n = o$ auch $h = o$; das correspondirende g ist also $\frac{(x+k)^0}{o!} = 1$ und $\frac{d^0 f(x+k)}{dx^0} = f(x+k)$. Also wird aus Gleichung **IX.**

$$f(x+k) = \Sigma\Sigma \frac{(-1)^{n-h} (x+k)^h\ x^{n-h}}{h!\ (n-h)} \frac{d^n fx}{dx^n}$$

Der Coefficient von $\frac{d^n fx}{dx^n}$ ist also:

$$\Sigma \frac{(-1)^{n-h} (x+k)^h\ x^{n-h}}{h!\ (n-h)!}, \text{ wo } h = o, 1, 2, \ldots.$$

Nun ist $(z-x)^n = \Sigma\, B^h_n\, z^h (-x)^{n-h}$

$$= \Sigma \frac{n!}{h!\ (n-h)!} z^h (-x)^{n-h}$$

und setzt man $z = x + k$, so ist

$$k^n = \Sigma \frac{n!\,(x+k)^h\,(-x)^{n-h}}{h!\,(n-h)!} \quad \text{oder}$$

$$\frac{h^n}{n!} = \Sigma \frac{(x+k)^h\,(-x)^{n-h}}{h!\,(n-h)!}$$

Mithin ist der Coefficient von $\frac{d^n fx}{dx^n}$ nichts weiter als $\frac{k^n}{n!}$,

daher $$f(x+k) = \Sigma \frac{k^n}{n!} \frac{d^n fx}{dx^n}, \quad \text{d. h.}$$

$$f(x+k) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} k + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{k^2}{2} + \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \frac{k^3}{2 \,.\, 3} \ldots.$$

Gewöhnlich glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört,
Es müsse sich dabei doch auch was denken lassen!

Allein bei dieser Häufung schwer oder gar unverdaulicher Formeln möchte es wohl zu entschuldigen sein, wenn Einer und der Andere an das Hexen-Einmaleins in Göthe's Faust erinnert wird. Der Belehrung Suchende bewundert zwar den Scharfsinn des Lehrmeisters, ist aber nicht im Stande, ihm zu folgen auf dem Drahtseile über den Abgrund des — Nichts und wir dürfen es ihm also nicht verdenken, wenn er zu einem Orakel kein rechtes Vertrauen hat, das auf falschen Voraussetzungen basirt, statt sich um Convergenz und Divergenz zu kümmern, uns einigen Hocus Pocus vormacht und mit einer wahren Sündfluth unendlich vieler unendlich langer Reihen überschwemmt!

Wenn wir nun bei Functionen mit einer veränderlichen Größe schon mit einigem Mißtrauen an den Taylor'schen Satz herangetreten sind, so werden wir uns noch viel weniger befriedigt fühlen, wenn er auf zwei Veränderliche angewendet werden soll und begnügen uns daher mit folgender kurzen Andeutung:

Von zwei von einander unabhängigen Variabeln x und y ist x in Beziehung auf y und y in Beziehung auf x als constant zu betrachten. Ich kann also in $y = f(x, u)$ zuerst x in $x + k$ und dann u in $u + h$ über gehen lassen, oder umgekehrt.

Dadurch erhalte ich:

$$\begin{aligned} y' = y &+ \frac{dy}{dx} k + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{k^2}{2} \\ &+ \frac{dy}{du} h + \frac{d^2 y}{dx\,.\,du} h\,.\,k + \ldots \\ &+ \frac{d^2 y}{du^2} \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

$\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy}{du}$ nennt man partielle Differentialquotienten und man überzeugt sich leicht, daß das vollständige Differential von y aus der Summe der partiellen Differentiale besteht.

Man drückt dies folgendermaßen aus:

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx + \left(\frac{dy}{du}\right) du.$$

Soll man also eine Function mit zwei veränderlichen Größen vollständig differentiiren, so muß man dieselbe erst in Beziehung auf die eine, dann in Beziehung auf die andere differentiiren und die Resultate addiren.