Ueber abwickelbare Flächen und Kurven doppelter Krümmung.

§. 1.

Vorbereitende Bemerkungen und Formeln.

Wenn eine gerade Linie sich im Raume so bewegt, daß durch je zwei unendlich nahe Lagen derselben sich stets eine Ebene hindurchlegen läßt, so heißt die von ihr beschriebene Fläche eine abwickelbare Fläche, weil sie die Eigenschaft besitzt, sich in ein und dieselbe Ebene ausbreiten zu lassen, ohne daß die Größe der einzelnen Flächenelemente eine Aenderung erleidet oder ihr Zusammenhang aufgehoben wird. Sind je zwei unendlich nahe der geraden Erzeugungslinien, und folglich alle, einander parallel, so ist die Fläche eine Cylinderfläche; sie ist eine Kegelfläche, wenn alle Erzeugungslinien sich in ein und demselben Puncte schneiden. Im Allgemeinen aber wird, während die Gerade sich bewegt, ihr jedesmaliger Durchschnittspunct mit der unendlich nahen Lage eine Kurve im Raume beschreiben. Diese Kurve, welche auch als die Umhüllungslinie aller geraden Erzeugungslinien aufgefaßt werden kann, heißt die Wendungskurve der abwickelbaren Fläche. Es sollen zunächst die Puncte einer beliebigen abwickelbaren Fläche so durch Coordinaten bestimmt werden, wie es für die Behandlung der folgenden Aufgaben am zweckmäßigsten erscheint.

Es seien die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ eines Punctes der Wendungskurve als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen α gegeben vermöge der Gleichungen:

$$(1.)\quad \xi = \varphi(\alpha),\quad \eta = \psi(\alpha),\quad \zeta = \chi(\alpha),$$

und unter α möge der Einfachheit wegen der Bogen der Kurve verstanden werden, gerechnet von einem bestimmten Puncte aus und positiv genommen nach einer bestimmten Richtung, negativ nach der entgegengesetzten. Die Tangente der Kurve im Puncte (ξ, η, ζ), nach der Seite hin gezogen, nach welcher der Bogen wächst, bildet mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus resp. gleich sind:

$$\varphi'(\alpha),\quad \psi'(\alpha),\quad \chi'(\alpha).$$

Auf dieser Tangente trage man eine Strecke r ab und nenne x, y, z die Coordinaten des Endpunctes, welcher nothwendig auf der abwickelbaren Fläche liegt. Die Projectionen von r auf die Axen sind einerseits gleich:

$$x - \varphi(\alpha),\ y - \psi(\alpha),\ z - \chi(\alpha),$$

und andererseits gleich:

$$r\varphi'(\alpha),\ r\psi'(\alpha),\ r\chi'(\alpha).$$

Daher hat man die Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} x = \varphi(\alpha)+r\varphi'(\alpha) \\ y = \psi(\alpha)+r\psi'(\alpha) \\ z = \chi(\alpha)+r\chi'(\alpha). \end{cases}$$

Läßt man hierin α den Bogen der Wendungskurve durchlaufen und r alle Werthe von o bis ∞ annehmen, so erhält man alle Puncte des einen von den beiden Theilen, in welche die abwickelbare Fläche durch die Wendungskurve getheilt wird. Um die Puncte des anderen Theiles zu erhalten, hätte man die Strecken r auf denjenigen Richtungen der Tangenten abtragen müssen, welche mit den Axen Winkel bilden, deren Cosinus resp. gleich $-\varphi'(\alpha)$, $-\psi'(\alpha)$, $-\chi'(\alpha)$ sind. Man wird also durch die Gleichungen (2.) sämmtliche Puncte der abwickelbaren Fläche erschöpfen, wenn man darin r auch alle möglichen negativen Werthe ertheilt. Wir wollen den Theil der Fläche, welcher negativen Werthen des r entspricht, den negativen nennen, zur Unterscheidung von dem andern, welcher der positive heißen mag.

Betrachtet man r als eine Function von α und läßt nun α sich ändern, so durchläuft der Punct, dessen veränderliche Coordinaten x, y, z sind, eine Kurve auf der abwickelbaren Fläche. In Bezug auf den Bogen s dieser Kurve darf man festsetzen, daß er stets zugleich mit α zu- oder abnehme. Den veränderlichen Winkel, welchen die Kurve in der Richtung, in welcher ihr Bogen wächst, successive mit den geraden Erzeugungslinien der Fläche, und zwar mit deren positiven Richtungen, bildet, wollen wir mit ϑ bezeichnen, und für denselben einen Ausdruck durch r und α suchen. Zu dem Zwecke substituiren wir für die Wendungskurve ein Polygon mit unendlich kleinen Seiten MM_1M_2. (Fig. 1.), und statt der auf der Fläche, (wir wollen annehmen, auf ihrem positiven Theile), verzeichneten Kurve ein Polygon PP_1P_2 . . Dann ist:

$$\text{Winkel } P_1PQ = \vartheta,\quad P_1PM_1 = \pi - \vartheta,\quad MM_1 = d\alpha,\quad MP = r,$$
$$M_1P = r - d\alpha,\quad M_1P_1 = r + dr,\quad PP_1 = ds.$$

Bezeichnet man noch den unendlich kleinen Winkel PM_1P_1 durch τ, so erhält man aus dem Dreieck PM_1P_1:

$$r - d\alpha = -ds\cos\vartheta + (r+dr)\cos\tau$$
$$ds\sin\vartheta = (r+dr)\sin\tau,$$

und hieraus, wenn man die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung vernachlässigt, also $\cos\tau = 1$, $\sin\tau = \tau$ setzt:

$$\cos\vartheta = \frac{dr+d\alpha}{ds},\qquad \sin\vartheta = \frac{r\tau}{ds}.$$

Nun ist τ der Contingenzwinkel der Wendungskurve für den Punct M. Nennt man daher ϱ den Krümmungshalbmesser dieser Kurve in M, so ist:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\tau}{d\alpha},\quad \text{oder: } \tau = \frac{d\alpha}{\varrho}\quad (\varrho \text{ pos.})$$

Somit gelten für $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$, $\cot\vartheta$ die Ausdrücke:

$$(3.)\quad \cos\vartheta = \frac{dr+d\alpha}{ds}$$

$$(4.)\quad \sin\vartheta = \frac{r\,d\alpha}{\varrho\,ds}$$

$$(5.) \quad \cot\vartheta = \frac{\varrho}{r}\,\frac{dr + d\alpha}{d\alpha},$$

und nach einer bekannten Formel ist:

$$(6.) \quad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\chi''\alpha)^2}.$$

Wendet man dieselbe Betrachtung auf eine Kurve an, die dem negativen Theile der Fläche angehört, so findet man ohne Mühe, daß zwar die Gleichung (3.) unverändert bleibt, aber den rechten Seiten der Gleichungen (4.) und (5.) das negative Vorzeichen vorzusetzen ist. Man kann indessen alle drei Gleichungen auch für den negativen Theil der Fläche in unveränderter Form benutzen, wenn man den Winkel ϑ, der bisher durchweg durch einen Bogen zwischen o und π gemessen wurde, auf diesem Theile durch einen Bogen mißt, der zwischen o und $-\pi$ enthalten ist.

§. 2.

Bestimmung der Kurven, welche die Tangenten der Wendungskurve nach einem gegebenen Gesetze durchschneiden.

Es mögen die Kurven gesucht werden, für welche der Winkel ϑ in irgend einem Puncte eine gegebene Function der Coordinaten des correspondirenden Punctes auf der Wendungskurve und deshalb mittelbar eine gegebene Function des Bogens α ist. Die Gleichung (5.) ist die Differentialgleichung dieser Kurven. Schreibt man dieselbe in der Form:

$$dr + d\alpha = r\cot\vartheta\,\frac{d\alpha}{\varrho},$$

so erkennt man darin eine lineäre Differentialgleichung erster Ordnung. Um dieselbe zu integriren, setze man nach der gewöhnlichen Methode: $r = uv$, so wird

$$u\,dv + v\,du + d\alpha = uv\cot\vartheta\,\frac{d\alpha}{\varrho},$$

und diese Gleichung kann man zerlegen in die beiden folgenden:

$$v\,du + d\alpha = 0$$

$$dv = v\cot\vartheta\,\frac{d\alpha}{\varrho},$$

Aus der letzteren folgt:

$$v = e^{\int_0^\alpha \cot\vartheta\frac{d\alpha}{\varrho}}.$$

und darauf aus der ersteren:

$$u = c - \int_0^\alpha d\alpha\, e^{-\int_0^\alpha \cot\vartheta\frac{d\alpha}{\varrho}},$$

worin c eine willkürliche Constante. Man hat also:

$$(7.) \quad r = e^{\int_0^\alpha \cot\vartheta\frac{d\alpha}{\varrho}} \left\{ c - \int_0^\alpha d\alpha\, e^{-\int_0^\alpha \cot\vartheta\frac{d\alpha}{\varrho}} \right\},$$

und es leuchtet ein, daß c den Werth des r für $\alpha = o$ bedeutet Setzt man den Ausdruck des r in die Gleichungen (2.) ein, so erhält man die rechtwinkligen Coordinaten der gesuchten Kurve als Functionen des Bogens α.

1 Ist die Cotangente des Winkels ϑ proportional dem Krümmungshalbmesser, d. h. ist:

$$\cot \vartheta = \frac{\varrho}{a},$$

so liefert die Gleichung (7.):

$$r = a + (c - a) e^{\frac{\alpha}{a}}$$

Nimmt man insbesondere $c = a$, so wird $r = a$, und umgekehrt, wenn $r = a$ ist, so ist $\cot \vartheta = \frac{\varrho}{a}$, was auch unmittelbar aus Gleichung (5.) erhellt. Hieraus ergiebt sich leicht der folgende Satz:

Trägt man auf den Tangenten irgend einer Kurve Stücke von constanter Länge a ab und zieht von den Endpuncten gerade Linien nach den zu den entsprechenden Berührungspuncten gehörigen Krümmungsmittelpuncten, so stehen diese Linien normal auf der durch die Endpuncte der Tangenten bestimmten Kurve.

2. Ertheilt man ϑ einen constanten Werth ε, so giebt die Gleichung (7.) die Kurven, welche die geraden Erzeugungslinien einer abwickelbaren Fläche unter constantem Winkel durchschneiden.*) Für den Bogen s dieser Kurven erhält man vermöge (3.) den einfachen Ausdruck:

$$(8.) \quad s = \frac{1}{\cos \varepsilon} (r - c + \alpha),$$

wobei die durch die Integration eingeführte Constante so bestimmt ist, daß $s = o$ für $\alpha = o$.

Da $\frac{d\alpha}{\varrho}$ den Winkel zweier Nachbartangenten der Wendungskurve bedeutet, so ist, wenn diese Kurve eben ist und in der Ebene der XY liegt:

$$\frac{d\alpha}{\varrho} = \pm \, d \operatorname{arctg}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = \pm \, d \operatorname{arctg}\left(\frac{\psi'\alpha}{\varphi'\alpha}\right)$$

also:

$$\int \frac{d\alpha}{\varrho} = \pm \operatorname{arctg}\left(\frac{\psi'\alpha}{\varphi'\alpha}\right) + \text{Const},$$

so daß in diesem Falle die Berechnung von r nur von der Ausführung einer einzigen Quadratur abhängt.

3. Ist der constante Winkel ε insbesondere ein Rechter, also $\cot \varepsilon = o$, so wird:

$$(9.) \quad r = c - \alpha.$$

Die rechtwinkligen Trajectorien der Tangenten der Wendungskurve können also durch den Endpunct eines Fadens von constanter Länge c beschrieben werden, welcher auf die Kurve auf- oder von ihr abgewickelt wird, während er sie beständig berührt. Wenn man also für r den Werth $c - \alpha$ in die Gleichungen (2.) einsetzt, so stellen diese die Evolventen irgend einer gegebenen Kurve im Raume dar.

---

*) Diese Kurven sind von Molins im achten Bande von Liouville's Journal auf anderem Wege bestimmt worden.

§. 3.

Ueber die kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen.

Die Gleichungen der kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen sind, soviel mir bekannt, zuerst von Minding aufgestellt worden,*) welcher jedoch nicht die Methoden auseinandersetzt, welche von ihm zu ihrer Herleitung benutzt sind. Deshalb dürfte die folgende Lösung dieser sowohl an sich interessanten als auch mancher Anwendungen fähigen Aufgabe nicht überflüssig sein.

Wir betrachten wieder statt der Wendungskurve ein Polygon MM_1M_2 . . und statt der kürzesten Linie ein Polygon PP_1P_2 . . Dreht man den Theil . . $M_4M_3M_2P_1P_2P_3$ . . . des Polyeders, durch welches man sich die abwickelbare Fläche ersetzt denkt, um die Axe M_2P_1, bis die Ebene $P_2M_2P_1$ in dieselbe Ebene mit P_1M_1P fällt; dreht man darauf den Theil . . M_4M_3 P_2P_3 . . um die Axe M_3P_2, bis auch $P_3M_3P_2$ in derselben Ebene mit P_1M_1P liegt, und so fort, so wird das Polyeder in eine einzige Ebene ausgebreitet. Dem Polygon MM_1M_2 . . entspricht ein ebenes Polygon $M'M_1'M_2'$ . . (Fig. 2'.) mit eben so großen Seiten und gleicher Neigung zweier Nachbarseiten, und irgend welchen Polygonen, welche man zwischen zwei festen Puncten auf dem Polyeder zieht, entsprechen in der Ebene Polygone zwischen zwei entsprechenden Puncten, welche mit jenen bezüglich gleiche Länge haben, und die Verlängerungen der Seiten des Polygons $M'M_1'M_2'$ . . resp. unter den gleichen Winkeln durchschneiden, wie jene die Kanten des Polyeders. Die kürzeste Linie PP_1P_2 verwandelt sich also bei der Abwicklung in eine Gerade $P'P_1'P_2'$ . . , und es ist:

$$\text{Winkel } Q'P'P_1' = \vartheta, \quad Q_1'P_1'P_2' = \vartheta + d\vartheta, \quad P'M_1'P_1' = \tau,$$

während ϑ und τ die frühere Bedeutung haben. Man erhält also aus Fig. 2':

$$\vartheta = \vartheta + d\vartheta + \tau, \quad d\vartheta = -\tau = -\frac{d\alpha}{\varrho},$$

und folglich ist, wenn $\vartheta = \vartheta_0$ für $\alpha = 0$:

$$(10.) \quad \vartheta = \vartheta_0 - \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\varrho}.$$

Da jetzt ϑ als Function von α bekannt ist, so könnte man den Werth von r aus der allgemeinen Formel (7.) ableiten. Man benutzt aber noch einfacher unmittelbar die Differentialgleichung (5.), welche jetzt die Form annimmt:

$$dr + d\alpha = -r \cot\vartheta\, d\vartheta,$$

oder:
$$dr \sin\vartheta + r \cos\vartheta\, d\vartheta = -d\alpha \sin\vartheta,$$

oder:
$$d(r \sin\vartheta) = -d\alpha \sin\vartheta.$$

Integrirt man und bezeichnet durch r_0 den Werth des r für $\alpha = 0$, so wird:

$$(11.) \quad r\sin\vartheta = r_0 \sin\vartheta_0 - \int_0^\alpha d\alpha \sin\vartheta.$$

Vermöge (10.) und (11.) sind ϑ und r bekannt, und die Gleichungen (2.) geben nun wieder die Ausdrücke der rechtwinkligen Coordinaten durch α.

*) Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen. Crelle's Journal Band 20.

Um die Kurven zu rectificiren, gehe man aus von der Gleichung (4.), aus welcher sich ergiebt:

$$ds = \frac{r}{\sin\vartheta}\frac{d\alpha}{\varrho} = -\frac{r d\vartheta}{\sin\vartheta} = -r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta},$$

oder: $$ds = r\sin\vartheta d(\cot\vartheta).$$

Hieraus erhält man durch theilweise Integration:

$$s = r\sin\vartheta\cot\vartheta - \int\cot\vartheta d(r\sin\vartheta) + C,$$

oder vielmehr, da $d(r\sin\vartheta) = -d\alpha\sin\vartheta$ ist:

$$s = r\cos\vartheta + \int d\alpha\cos\vartheta + C.$$

Bestimmt man die Constante C so, daß $s = o$ für $\alpha = o$, so wird:

$$(12.)\quad s = r\cos\vartheta - r_0\cos\vartheta_0 + \int_0^\alpha d\alpha\cos\vartheta.$$

Bei der Anwendung der erhaltenen Formeln bieten sich einige Eigenthümlichkeiten dar, welche jetzt kurz berührt werden sollen. Nimmt man $\vartheta_0 = o$ an, so erhält man für jedes r_0 aus (11.) mit Rücksicht auf (10.):

$$(11a.)\quad r\sin\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\varrho} = -\int_0^\alpha d\alpha\sin\left(\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\varrho}\right).$$

Dividirt man beide Seiten dieser Gleichung durch den Factor von r, so hat der sich ergebende Werth von r, wie leicht zu sehen, für ein unendlich kleines positives oder negatives α einen unendlich kleinen negativen oder positiven Werth, und der Werth des ϑ hat bezüglich dasselbe Zeichen mit dem von r. Daher erhält man auf diese Weise eine theils auf dem positiven, theils auf dem negativen Theile der Fläche liegende und die Wendungskurve am Uebergangspuncte berührende kürzeste Linie. Dieselbe geht nicht durch den Punct, dessen Coordinaten $\alpha = o$, $r = r_0$ sind, indem vielmehr $r = o$ wird für $\alpha = o$. Allein die Gleichung (11a.) wird auch befriedigt, wenn man setzt: $\alpha = o$ für jedes r; und dieser Auflösung, welche, wenn r_0 von o verschieden, die einzig statthafte ist, entspricht eine gerade Erzeugungslinie der abwickelbaren Fläche.

Wir wollen jetzt annehmen, es sei ϑ_0 von Null verschieden und zwar positiv. Wenn α, indem es wächst, einen solchen Werth erreicht, daß ϑ verschwindet, so wird vermöge (11.) $r = +\infty$, und wenn α fortfährt zu wachsen, so wird ϑ negativ unendlich klein und $r = -\infty$, so daß man auf den beiden Theilen der Fläche zwei zusammengehörige Kurvenzweige erhält, welche die entgegengesetzten Richtungen derselben geraden Erzeugungslinie zu Asymptoten haben.*)

Es ist aber noch ein anderer Uebergang von dem positiven nach dem negativen Theile der Fläche möglich; denn es kann r auch negativ werden, indem es durch Null hindurchgeht. Da nun die Werthe des ϑ, welche sich aus (10.) ergeben, noch sehr wohl positiv sein können, während die aus (11.) fließenden von r schon negativ sind, so gerathen wir zwar mit unserer oben gemachten Festsetzung, daß ϑ und r stets einerlei Zeichen haben sollten, in einen Widerspruch. Allein dieser ist nur scheinbar. Denn eliminirt man ϑ aus (10.) und (11.), so erhält man die Gleichung:

---

*) Der Abstand der kürzesten Linie von der Erzeugungslinie für unendlich entfernte Puncte ist übrigens im Allgemeinen endlich. Die wahre Asymptote ist eine der Erzeugungslinie parallele Gerade, deren Gleichungen sich allgemein nach den gewöhnlichen Methoden bestimmen lassen.

$$(11'.)\quad r\sin\left(\vartheta_0-\int_0^\alpha\frac{d\alpha}{\varrho}\right)=r_0\sin\vartheta_0-\int_0^\alpha d\alpha\sin\left(\vartheta_0-\int_0^\alpha\frac{d\alpha}{\varrho}\right),$$

welche für r stets reelle Werthe giebt, und wenn man für r und dr ihre hieraus folgenden Werthe in (5.) einsetzt, so ergiebt sich für den Winkel ϑ, unter welchem die durch (11'.) dargestellte Kurve die geraden Erzeugungslinien durchschneidet, stets:

$$(10'.)\quad \cot\vartheta=\cot\left(\vartheta_0-\int_0^\alpha\frac{d\alpha}{\varrho}\right),$$

so daß die Kurve noch immer der characteristischen Eigenschaft der kürzesten Linien: $d\vartheta=-\frac{d\alpha}{\varrho}$ genügt. Nur muß man für ϑ auf dem negativen Theile der Fläche aus (10'.) den negativen Werth ziehen:

$$\vartheta=\vartheta_0-\int_0^\alpha\frac{d\alpha}{\varrho}-\pi.$$

Der Winkel ϑ erleidet also bei dem Uebergange von dem positiven auf den negativen Theil der Fläche eine plötzliche Aenderung um $-\pi$, oder die Kurve hat an der Uebergangsstelle eine Spitze. Allgemein, die Gleichung (11'.) kann eine endliche oder unendlich große Anzahl von Kurvenzweigen, welche im geometrischen Sinne alle als zusammengehörig betrachtet werden müssen, darstellen, und der Winkel ϑ ist für jeden besonderen Zweig zu bestimmen durch die Gleichung:

$$\vartheta=\vartheta_0-\int_0^\alpha\frac{d\alpha}{\varrho}-n\pi,$$

worin die ganze Zahl n jedesmal so zu wählen ist, daß ϑ zwischen o und π liegt auf dem positiven und zwischen o und $-\pi$ auf dem negativen Theil der Fläche.

Soll die kürzeste Linie außer durch den Punct A mit den Coordinaten o, r_0 noch durch einen anderen B mit den Coordinaten α_1, r_1 gehen, so muß die Gleichung (11'.) noch richtig bleiben, wenn man r_1 statt r schreibt und α_1 statt α in den oberen Grenzen der beiden ersten Integralzeichen. Indem man ϑ_0 aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, was offenbar allgemein geschehen kann, indem man die aus beiden leicht bestimmbaren Ausdrücke von $\mathrm{tg}\vartheta_0$ einander gleich setzt, so erhält man die Gleichung der gesuchten kürzesten Linie. Allein auf dieser kann man, selbst wenn A und B beide demselben, z. B. dem positiven Theile der Fläche angehören, nur dann auf dem wirklich kürzesten Wege von A nach B gelangen, wenn r, während α von o bis α_1 sich ändert, nicht durch Null hindurchgeht; denn dann würde die Kurve, indem sie eine plötzliche Wendung macht, auf den negativen Theil der Fläche übergehen und könnte nur durchs Unendliche hindurch auf den positiven zurückkehren, so daß der beschriebene Weg unendlich lang wäre. Liegen z. B. A und B beide auf der Wendungskurve, so zeigt schon die bloße Anschauung, daß im Allgemeinen der Bogen AB dieser Kurve der wirklich kürzeste Weg auf der Fläche von A nach B ist; und hieraus wird man schließen, daß in dem allgemeineren Falle der kürzeste Weg aus einer kürzesten Linie, einer geraden Erzeugungslinie, und einem zwischen ihnen enthaltenen und sie berührenden Bogen der Wendungskurve zusammengesetzt sein kann. Liegen A und B auf verschiedenen Theilen der Fläche, so muß wegen der beim Uebergange von dem einen auf den anderen nothwendig stattfindenden Discontinuität in der Richtung des zu durchlaufenden Weges ein anderes Verfahren eingeschlagen werden. Man muß in diesem Falle auf der Wendungskurve einen Punct X suchen, so daß die Summe der kürzesten Linien AX+BX ein Minimum ist. Wenn von diesen beiden Linien, welche die durch X gehende Erzeugungslinie unter gleichen (und entgegengesetzten) Winkeln durchschneiden werden, (wie der einfallende und reflektirte Lichtstrahl bei einem Spiegel), keine die Wendungskurve noch zum zweiten Male trifft, so ist ihre Summe der wirklich kürzeste Weg; im entgegengesetzten Falle aber würde das Resultat wieder illusorisch werden, und der Bogen der Wendungskurve zu Hülfe zu nehmen sein.

Man wird die hier angedeuteten Fragen in dem besonderen Falle leicht vollständig durch Rechnung lösen, wenn die Wendungskurve eine Kurve von constanter Krümmung (d. h. ϱ constant) ist, also z. B. wenn sie eine Schraubenlinie ist; und man wird zu demselben Ziele noch leichter gelangen, wenn man die Fläche in eine Ebene ausbreitet, wobei sich die Wendungskurve in einen Kreis verwandelt; an der Ebene muß man hierbei zwei Seiten unterscheiden, deren eine von dem positiven, die andere, gleichsam die Rückseite, von dem negativen Theile der Fläche überdeckt wird. Dadurch wird die Aufgabe auf die folgende reducirt: Auf einer Ebene, von welcher ein kreisförmiges Stück abgegrenzt ist, von einem Puncte nach einem anderen auf derselben oder der anderen Seite der Ebene auf dem kürzesten Wege zu gelangen, ohne in das Innere der Kreisfläche einzudringen, und ohne von der einen auf die andere Seite der Ebene anders als durch die Puncte der Kreisperipherie hindurch übergehen zu dürfen.

Die Aufgabe des folgenden Paragraphen kann dazu dienen, um die Frage nach dem kürzesten Wege zwischen Puncten auf abwickelbaren Flächen allgemein auf die analoge zurückzuführen für ebene Flächenstücke, die auf bekannte Weise begrenzt sind.

§. 4.

Anwendung auf die Bestimmung der Kurve, in welche sich die Wendungskurve bei der Abwicklung der Fläche verwandelt.

Auf der abwickelbaren Fläche sei eine kürzeste Linie gezeichnet, von welcher angenommen werden mag, daß sie die durch den Anfangspunct des Bogens gehende Erzeugungslinie rechtwinklig durchschneide. Wir wollen uns jetzt die Fläche in eine Ebene ausgebreitet denken und zwar der Einfachheit wegen so, daß die kürzeste Linie mit der Axe OU und die erwähnte Erzeugungslinie mit der darauf senkrechten OV zusammenfällt. (Fig. 3.) Dann ist $OA = c$ das frühere r_0, ferner $OF = u$ und $MF = v$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes M der abgewickelten Wendungskurve, und wenn man an diese die Tangente MG zieht, so ist $MG = r$, $OG = s$, während r und s vermöge (11.) und (12.), worin $\vartheta_0 = \frac{1}{2}\pi$ zu setzen, als Functionen des Bogens α der Wendungskurve gegeben werden, der mit AM gleiche Länge hat. Man hat also:

$$s - u = r\cos\vartheta, \quad v = r\sin\vartheta,$$

oder vielmehr:

$$(13.)\quad u = \int_0^\alpha d\alpha \sin\left(\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\varrho}\right), \quad v = c - \int_0^\alpha d\alpha \cos\left(\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\varrho}\right).$$

Die Ableitung dieser Formeln kann nur innerhalb solcher Grenzen von α als streng betrachtet werden, zwischen welchen r weder unendlich wird noch verschwindet, weil es noch nicht als feststehend betrachtet werden kann, daß die durch (11.) dargestellten Kurvenzweige bei der Abwicklung der Fläche alle dieselbe Gerade OU bedecken, und weil, auch dieses angenommen, die allgemeine Anwendbarkeit der Gleichung (12.) gewisse bisher nicht gemachte Conventionen nöthig machen würde. Allein aus (13.) folgt zunächst:

$$du^2+dv^2=d\alpha^2,$$

so daß das Bogenelement der Kurve (13.) gleich ist dem entsprechenden der Wendungskurve; und ferner erhält man daraus:

$$\frac{du}{d\alpha}\frac{d^2v}{d\alpha^2}-\frac{dv}{d\alpha}\frac{d^2u}{d\alpha^2}=\frac{1}{\varrho}.$$

Wegen der Bedeutung der linken Seite dieser Gleichung und wegen des stets positiven Werthes der rechten hat also die Kurve (13.) für jedes α stets dieselbe Krümmung, wie die Wendungskurve in dem entsprechenden Puncte, und sie bleibt, continuirlich durchlaufen, stets in einerlei Sinn convex. Wenn also ϱ durchweg endlich ist, so ist die Identität der Kurve (13.) mit der abgewickelten Wendungskurve für jedes α verifizirt. Wenn aber ϱ für einen gewissen Punct der Wendungskurve unendlich wird und diese hier einen Wendepunct hat, so kann man es bei der Abwicklung der Fläche nach Belieben so einrichten, daß die entsprechende ebene Kurve einen Wendepunct hat oder nicht, ohne daß in dem einen oder dem anderen Falle eine Unterbrechung in der Stetigkeit der Krümmung eintritt. Will man, daß die Gleichung (13.) eine ebene Kurve mit einem Wendepuncte darstelle, wenn die Kurve doppelter Krümmung einen solchen hat, so muß man darin ϱ, nachdem es unendlich geworden, das Zeichen wechseln lassen.

Man kann jetzt auch leicht für jede andere Kurve auf der abwickelbaren Fläche die ihr entsprechende in der Ebene finden. Denn es seien die Gleichungen (2.), worin r eine gegebene Function von α, die Gleichungen jener Kurve, so wird man die entsprechende ebene Kurve erhalten, wenn man die Strecken r auf den Tangenten der Kurve (13.) abträgt. Für die Coordinaten X, Y irgend eines der Endpuncte hat man aber offenbar:

$$(14.)\quad X=u+r\frac{du}{d\alpha},\qquad Y=v+r\frac{dv}{d\alpha}.$$

Wenn man also aus diesen beiden Gleichungen, nachdem man für u und v aus (13.) ihre Werthe eingesetzt hat, α eliminirt, so erhält man die Gleichung der gesuchten Kurve in rechtwinkligen Coordinaten. Diese Elimination führt z. B. für die kürzesten Linien, bei denen r vermöge (11'.) von α abhängt, für jedes α auf:

$$X\cos\vartheta_0+Y\sin\vartheta_0=(c-r_0)\sin\vartheta_0,$$

also auf die Gleichung einer und derselben Geraden für alle durch (11'.) dargestellten Kurvenzweige. Es setzt dies nur voraus, daß ϱ in (13.) durchweg dieselbe Bedeutung hat, wie in (11'.) d. h. daß es stets den Absolutwerth des Krümmungsradius bezeichnet, die abgewickelte Kurve also keinen Wendepunct hat. Ist aber $\varrho=\infty$, z. B. für $\alpha=0$, und will man der ebenen Kurve einen Wendepunct geben, so kann man dies erreichen, indem man für negative α in (13.) $-\varrho$ statt ϱ schreibt. Dann ergiebt aber die Elimination von α aus (11'.), (13.) und (14.):

$$-X\cos\vartheta_0+Y\sin\vartheta_0=(c-r_0)\sin\vartheta_0,$$

welche Gleichung zusammen mit der vorhergehenden eine gebrochene Linie darstellt, deren Theile mit den entgegengesetzten Richtungen der Wendetangente gleiche Winkel bilden.

Umgekehrt, wenn in der Ebene irgend eine Kurve gegeben ist durch ihre Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(15.)\quad F(X,Y)=0,$$

so hat man nur nöthig, aus der Gleichung:

$$F(u+r\frac{du}{d\alpha}, v+r\frac{dv}{d\alpha}) = 0$$

den Werth von r als Function von α zu ziehen und in (2.) zu substituiren, um die Gleichungen der Kurve auf der abwickelbaren Fläche zu erhalten, welche (15.) entspricht. Auf diese Weise kann man z. B. mit der größten Leichtigkeit auf jeder abwickelbaren Fläche die Kurven finden, welche bei gegebener Länge den größten Flächeninhalt einschließen, weil man weiß, daß dieselben sich bei der Abwicklung der Fläche in Kreise verwandeln müssen.

Vermöge ebendesselben Verfahrens hätte man offenbar auch zu den Gleichungen der kürzesten Linien gelangen können, wenn man die Kurve (13.) vorher, durch directe Integration ihrer Differentialgleichung, bestimmt hätte.

§. 5.

Anwendung auf die Bestimmung der Evoluten der Kurven doppelter Krümmung.

Mit der Entwicklung der Eigenschaften der Evoluten der Kurven im Raume beschäftigen sich alle mir bekannten neueren Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung. Ob und auf welche Weise man aber zur Aufstellung ihrer Gleichungen unter endlicher Form gelangen könne, darüber finden sich theils nur oberflächliche Bemerkungen, theils wird die Differentialgleichung dieser Kurven in einer Form gegeben, daß es unmöglich scheint, sie allgemein zu integriren. In einer Abhandlung im achten Bande von Liouville's Journal*) bemerkt Molins, daß Lancret das Problem durch Rechnung, aber auf complicirte Weise, gelöst habe, und er selbst giebt eine elegante geometrische Lösung vermöge gewisser Eigenschaften der Kurven im Raume, welche er zu diesem Zwecke beweist. Ich werde im Folgenden zwei andere Lösungen dieser nicht unwichtigen Aufgabe auseinandersetzen, von denen die eine sich auf die im Vorhergehenden gegebene Bestimmung der kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen stützt, während die andere ihr Ziel ohne Hülfe geometrischer Betrachtungen auf sehr einfache Weise durch Rechnung erreicht. Der Vollständigkeit wegen will ich die allbekannten Eigenschaften der Evoluten, welche bei der ersten, geometrischen Methode benutzt werden, ableiten, wobei ich mich eines von den gewöhnlichen abweichenden Verfahrens bedienen werde.

Zieht man durch die Puncte einer Kurve im Raume ein System von Normallinien, von denen je zwei benachbarte sich schneiden, so wird durch die successiven Durchschnittspunkte eine andere Kurve im Raume, eine Evolute der ersteren, bestimmt. Ist die Richtung der Normale für irgend einen Punct einmal angenommen, so ist dadurch das ganze System bestimmt; da aber jene nach Willkühr in der Normalebene gewählt werden kann, so hat jede Kurve unendlich viele Evoluten. Da zwei benachbarte Normalen sich nur auf der Durchschnittslinie zweier benachbarter Normalebenen schneiden können, so liegen alle Evoluten auf derjenigen Fläche, welche durch den Complex der Durchschnittslinien je zweier unendlich naher Normalebenen gebildet wird. Diese

---

*) „De la détermination, sous forme intégrable, des équations des développées des courbes à double courbure."

Fläche ist eine abwickelbare, weil je zwei benachbarte ihrer geraden Erzeugungslinien sich schneiden, nämlich in dem Durchschnittspuncte dreier unendlich naher Normalebenen, und jede Normalebene berührt die Fläche, weil sie zwei unendlich nahe Erzeugungslinien enthält. Da zwei Nachbar-Normalebenen auf der Ebene zweier Nachbartangenten senkrecht stehen, so ist dasselbe auch mit ihrer Durchschnittslinie der Fall; d. h. die Erzeugungslinie der abwickelbaren Fläche steht senkrecht auf der zugehörigen Krümmungsebene der Kurve; der Punct, in welchem sie die Ebene trifft, liegt dem Mittelpunct des durch drei unendlich nahe Puncte gehenden Kreises unendlich nahe und kann daher als der Krümmungsmittelpunct betrachtet werden. Die Ebene, welche durch zwei benachbarte sich schneidende Normallinien MP und M_1P gelegt wird, steht, weil sie die Tangente MM_1 enthält, senkrecht auf der Normalebene in M. Jene Ebene aber ist nichts anderes als die Krümmungsebene der Evolute für den Punct P, weil MP und M_1P zwei Nachbartangenten derselben sind; und die Normalebene der Kurve ist die Tangentialebene der abwickelbaren Fläche für den Punct P. Man hat also das Resultat, daß die Krümmungsebene jeder Evolute beständig normal ist zu der abwickelbaren Fläche, auf welcher alle Evoluten liegen.

Dieselbe Eigenschaft aber besitzen bekanntlich auch die kürzesten Linien auf krummen Flächen. Diese Wahrheit läßt sich für die abwickelbaren Flächen durch folgende, an das Frühere anknüpfende, sehr einfache geometrische Betrachtung darthun.*) Es stelle WW_1W_2 . . in Fig. 4. die Wendungskurve und PP_1P_2 . . eine kürzeste Linie auf der abwickelbaren Fläche vor. Wenn man die Ebene $P_1W_2P_2$ unendlich wenig um die Axe W_2P_1 drehte, bis sie mit PW_1P_1 in dieselbe Ebene käme, so würde nach dem Früheren P_1P_2 zusammenfallen mit der Verlängerung P_1S von PP_1. Die Linien P_1S und P_1P_2 bilden also gleiche Winkel mit der Axe P_1W_2, sind also zwei unendlich nahe Seitenlinien eines Umdrehungskegels um diese Axe, und ihre Ebene kann folglich als Tangentialebene des Kegels längs P_1S gelten. Als solche steht sie aber senkrecht auf der durch P_1S und die Axe gelegten Ebene, d. h. die Ebene SP_1P_2 steht senkrecht auf SP_1W_2, oder: die Ebene PP_1P_2 steht senkrecht auf PP_1W_1. Folglich ist die Krümmungsebene der kürzesten Linie in der That normal zu der Tangentialebene der abwickelbaren Fläche.

Diese Eigenschaft der kürzesten Linien geht nur an solchen besonderen Stellen der Fläche verloren, für welche der Winkel SP_1P_2 nicht, wie es beim Beweise vorausgesetzt wurde, unendlich klein, sondern endlich ist. Dieses findet, wie wir schon gesehen haben, beim Durchgange von dem positiven auf den negativen Theil der Fläche durch die Wendungskurve statt, und außerdem beim Uebergange über die scharfen Kanten der Fläche, welche den Wendepuncten der Wendungskurve entsprechen, in welchen Fällen die wirklich kürzeste Linie an der Uebergangsstelle gleichsam eine Reflexion erleidet; die Ebene, welche zwei unendlich nahe Elemente der kürzesten Linie zu beiden Seiten eines solchen vorspringenden Punctes enthält, steht nicht normal auf der Tangentialebene, sondern fällt vielmehr mit ihr zusammen.

Da also die Evoluten und die kürzesten Linien derselben characteristischen Eigenschaft genügen, daß sie ihre Krümmungsebene beständig normal zu der abwickelbaren Fläche haben, auf welcher sie liegen, so ist jede Evolute eine kürzeste Linie, oder doch wenigstens aus mehreren kürzesten Linien zusammengesetzt. Es darf nämlich die Evolute keine vorspringenden Puncte haben,

*) Hüllt man übrigens irgend eine krumme Oberfläche längs einer ihrer kürzesten Linien durch eine abwickelbare Fläche ein, so ist die Linie offenbar auch auf dieser Fläche eine kürzeste. Der Satz läßt sich also von den abwickelbaren auf alle anderen krummen Flächen übertragen.

weil sonst ihre gegebene Evolvente einen Zerreißungspunct haben müßte, und wo also die beständig kürzeste Linie einen solchen vorspringenden Punct hat, muß man eine andere kürzeste Linie an sie anschließen, welche die erstere berührt, so daß die Evolute beim Uebergang über eine scharfe Kante der abwickelbaren Fläche eine Spitze erhält.

Betrachten wir jetzt das Dreieck MKP (Fig. 5.), welches den Punct M (x, y, z) der Evolvente, den zugehörigen Krümmungsmittelpunct K, dessen bekannte Coordinaten A, B, C heißen mögen, und den entsprechenden Punct P (ξ, η, ζ) der gesuchten Evolute zu Ecken hat. Dasselbe ist bei K rechtwinklig; die Seite KP ist ein Stück der (zur Krümmungsebene der Evolvente senkrechten) Erzeugungslinie der abwickelbaren Fläche; die Cosinus der bekannten Winkel, die eine bestimmte Richtung dieser Erzeugungslinie mit den Axen bildet, seien a, b, c. Der unbekannte Winkel, den hiermit die Tangente PM der Evolute, in der Richtung von P nach M betrachtet, bildet, heiße ϑ. Dann ist, falls die Richtung von K nach P hin mit der durch a, b, c bestimmten Richtung zusammenfällt, der Winkel KPM $= \pi - \vartheta$, also, wenn k den Absolutwerth des Krümmungshalbmessers MK bezeichnet:

$$KP = -k\cot\vartheta.$$

Projicirt man KP auf die Axen, so findet man:

$$(16.)\qquad \xi - A = -ak\cot\vartheta,\quad \eta - B = -bk\cot\vartheta,\quad \zeta - C = -ck\cot\vartheta,$$

und dieselben Ausdrücke gelten, wie man leicht sieht, auch, wenn P in der Erzeugungslinie auf der anderen Seite des Krümmungsmittelpunctes liegt. Es sind also die Coordinaten ξ, η, ζ der Puncte der Evolute bekannt, sobald ϑ gefunden ist. Nun ist das Differential $d\vartheta$, weil die Evolute eine kürzeste Linie ist, abgesehen vom Vorzeichen, gleich dem Winkel zweier unendlich naher Erzeugungslinien der Fläche, oder was dasselbe ist, gleich dem Neigungswinkel zweier unendlich nahen Krümmungsebenen der Evolvente. Wenn man also für diesen unendlich kleinen Winkel den bekannten Ausdruck setzte, so könnte man ϑ durch eine Quadratur finden. Aber die Zweideutigkeit, welche hierbei durch das diesem Ausdrucke anhaftende doppelte Vorzeichen eintritt, und welche in der Natur der Aufgabe nicht begründet ist, nöthigt uns einen anderen Weg zur Bestimmung von ϑ einzuschlagen.

Es sei M′ der dem M unendlich nahe Punct der Evolvente oder vielmehr des dafür substituirten Polygons mit unendlich kleinen Seiten (Fig. 5.); der entsprechende Punct auf der Evolute sei P′. Die unendlich nahen Geraden M′P′ und MP schneiden sich in P, und wegen der Grundeigenschaft der kürzesten Linie bildet die Richtung P′M′ in P mit der durch P gehenden Erzeugungslinie (PW) einen Winkel, der gleich ist dem von PM mit ebenderselben gebildeten, d. h. gleich ϑ.*) Sind also u, v, w die Cosinus der Winkel, die P′M′ mit den Axen bildet, so hat man:

$$\cos\vartheta = ua + vb + wc.$$

Aber der Winkel, den P′M′ mit der durch P′ gehenden Erzeugungslinie bildet, ist $\vartheta + d\vartheta$; also ist:

$$\cos(\vartheta + d\vartheta) = u(a+da) + v(b+db) + w(c+dc).$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorhergehenden, so erhält man:

$$(17.)\qquad \sin\vartheta\, d\vartheta = -(uda + vdb + wdc).$$

Die Größen u, v, w sind unendlich wenig verschieden von den Cosinus der Winkel, die PM mit

*) Dies gilt bei der Art und Weise, wie ϑ jetzt definirt wird, auch noch für die Spitzen der Evolute.

den Axen bildet, folglich darf man setzen:

$$u = \frac{x - \xi}{PM}, \quad v = \frac{y - \eta}{PM}, \quad w = \frac{z - \zeta}{PM}.$$

Da nun $PM = \frac{k}{\sin\vartheta}$, so wird, wenn man noch für ξ, η, ζ ihre Werthe aus (16.) einsetzt:

$$u = \frac{(x-A)\sin\vartheta + ak\cos\vartheta}{k}, \text{ u. s. w.}$$

Mithin erhält man aus (17.), wenn man berücksichtigt, daß:

$$a^2+b^2+c^2 = 1, \quad \text{also:} \quad ada+bdb+cdc = 0,$$

für $d\vartheta$ den Ausdruck:

$$(18.) \quad d\vartheta = \frac{(A-x)da+(B-y)db+(C-z)dc}{k}.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung eine bekannte Function der Coordinaten der gegebenen Evolvente ist, so findet man ϑ durch eine Quadratur, und man hat nur nöthig, den Werth von ϑ, der eine willkürliche Constante enthält, in (16.) einzusetzen, um die Gleichungen des Systems der Evoluten zu erhalten. Ich unterlasse die Einführung der bekannten Ausdrücke für A, B, C, a, b, c u. s. w., weil wir die Formeln alsbald auf anderem Wege wieder erhalten werden.

§. 6.

Bestimmung der Evoluten durch Rechnung.

Die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Puncte einer Kurve im Raume seien als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen β gegeben vermöge der Gleichungen:

$$x = \Phi(\beta), \quad y = \Psi(\beta), \quad z = X(\beta).$$

Unter β möge der Bogen der Kurve verstanden und die nach β genommenen Differentialquotienten mögen durch Accente bezeichnet werden; k sei der Krümmungshalbmesser der Kurve in (x, y, z). Alsdann ist:

$$(\text{I.}) \quad x'^2+y'^2+z'^2 = 1. \qquad (\text{Ia.}) \quad x'x''+y'y''+z'z'' = 0.$$

$$(\text{II.}) \quad \sqrt{x''^2+y''^2+z''^2} = \frac{1}{k}. \qquad (\text{IIa.}) \quad x''x'''+y''y'''+z''z''' = -\frac{k'}{k^3}.$$

Dem Puncte (x, y, z) der gegebenen Evolvente entspreche der Punct (ξ, η, ζ) auf einer ihrer gesuchten Evoluten. Die Linie, welche beide Puncte verbindet, habe die Länge r, so daß:

$$(\text{III.}) \quad (\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z^2) = r^2.$$

Da diese Linie normal auf der Evolvente steht, so ist:

$$(\text{IV.}) \quad (\xi-x)x'+(\eta-y)y'+(\zeta-z)z' = 0,$$

und da sie die Evolute berührt, so hat man:

$$\frac{\xi'}{\xi-x} = \frac{\eta'}{\eta-y} = \frac{\zeta'}{\zeta-z} = p,$$

worin p einen Werth besitzt, der sogleich bestimmt werden soll. Zu dem Zwecke differentiire man (III.), so erhält man mit Rücksicht auf (IV.):

$$(\xi-x)\xi'+(\eta-y)\eta'+(\zeta-z)\zeta' = rr',$$

also:
$$\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\}\, p = rr',$$
d. h.:
$$p = \frac{r'}{r}.$$
Folglich ist:
$$\text{(V.)}\quad \xi' = (\xi-x)\frac{r'}{r}, \quad \eta' = (\eta-y)\frac{r'}{r}, \quad \zeta' = (\zeta-z)\frac{r'}{r}.$$
Differentiirt man die Gleichung (IV.) zweimal nach β, so erhält man, indem man für ξ', η', ζ' ihre eben gefundenen Werthe einsetzt und außerdem (I.) und (I'.) benutzt:
$$\text{(VI.)}\quad (\xi-x)x''+(\eta-y)y''+(\zeta-z)z'' = 1.$$
$$\text{(VII.)}\quad (\xi-x)x'''+(\eta-y)y'''+(\zeta-z)z''' = -\frac{r'}{r}.$$
Die Gleichungen (IV.), (VI.), (III.) und (VII.) lassen sich vermöge (II.) und (IIa.), wenn man der Kürze wegen setzt:
$$\text{(VIII.)}\quad \xi-x-k^2x'' = L, \quad \eta-y-k^2y'' = M, \quad \zeta-z-k^2z'' = N;$$
unter folgender Form schreiben:
$$\text{(IX.)}\quad \begin{cases} Lx'+My'+Nz' = 0 \\ Lx''+My''+Nz'' = 0 \\ L^2+M^2+N^2 = r^2-k^2 \\ Lx'''+My'''+Nz''' = -\dfrac{r'}{r}+\dfrac{k'}{k}. \end{cases}$$
Die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen nehmen eine noch einfachere Gestalt an, wenn man setzt:
$$\text{(X.)}\quad r = \frac{k}{\cos\omega}.$$
Da übrigens in Folge dieser Substitution die Gleichung (VI.) identisch ist mit:
$$kx''.\frac{\xi-x}{r}+ky''.\frac{\eta-y}{r}+kz''.\frac{\zeta-z}{r} = \cos\omega,$$
so leuchtet beiläufig ein, daß ω den Winkel bedeutet, den die von (x, y, z) nach dem Krümmungsmittelpuncte gezogene Gerade mit der nach (ξ, η, ζ) gezogenen bildet. Differentiirt man (X.), nachdem man von beiden Seiten die Logarithmen genommen hat, so ergiebt sich:
$$\frac{r'}{r}=\frac{k'}{k}+\operatorname{tg}\omega\, \omega',$$
und außerdem ist:
$$r^2-k^2 = k^2\operatorname{tg}^2\omega.$$
Man hat also das folgende System von Gleichungen zur Bestimmung von L, M, N, ω:
$$\text{(XI.)}\quad \begin{cases} Lx'+My'+Nz' = 0 \\ Lx''+My''+Nz'' = 0 \\ L^2+M^2+N^2 = k^2\operatorname{tg}^2\omega \\ Lx'''+My'''+Nz''' = -\operatorname{tg}\omega.\omega'. \end{cases}$$

Aus den drei ersten erhält man, wenn man berücksichtigt, daß:

$$(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2=\frac{1}{k^2}:$$

$$(\text{XII.})\quad \begin{cases} L = \pm(y'z''-z'y'')k^2\mathrm{tg}\omega \\ M = \pm(z'x''-x'z'')k^2\mathrm{tg}\omega \\ N = \pm(x'y''-y'x'')k^2\mathrm{tg}\omega, \end{cases}$$

und die Substitution dieser Werthe in die vierte ergiebt:

$$\omega' = \mp k^2\{(y'z''-z'y'')x'''+(z'x''-x'z'')y'''+(x'y''-y'x'')z'''\}.$$

Wenn man also durch ω_0 den Werth des ω für $\beta = 0$ bezeichnet, und der Kürze wegen setzt:

$$(\text{XIII.})\quad \int_0^\beta \{x'''(y'z''-z'y'')+y'''(z'x''-x'z'')+z'''(x'y''-y'x'')\}k^2 d\beta = \Omega,$$

so hat man für ω die Formel:

$$\omega = \omega_0 \mp \Omega.$$

Substituirt man diesen Werth in (XII.), setzt, wie es erlaubt ist, das Zeichen $\pm$ hinter das Zeichen tg, schreibt darauf C statt der willkührlichen Constanten $\pm\omega_0$ und führt für L, M, N ihre Werthe aus (VIII.) ein, so erhält man als Gleichungen der gesuchten Evoluten:

$$(\text{XIV.})\quad \begin{cases} \xi = x+k^2x''+k^2(y'z''-z'y'')\mathrm{tg}(C-\Omega) \\ \eta = y+k^2y''+k^2(z'x''-x'z'')\mathrm{tg}(C-\Omega) \\ \zeta = z+k^2z''+k^2(x'y''-y'x'')\mathrm{tg}(C-\Omega). \end{cases}$$

Man kann die gefundenen Formeln durch häufig angewandte analytische Transformationen oder durch Beachtung der geometrischen Bedeutung der darin vorkommenden Ausdrücke leicht auf den Fall übertragen, wo die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Evolvente nicht als Functionen des Bogens, sondern als Functionen irgend einer andern Veränderlichen gegeben sind, und man findet, wenn man der Einfachheit wegen die Bezeichnungen:

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = d\beta,\quad dyd^2z-dzd^2y = X,$$
$$dzd^2x-dxd^2z = Y,\quad dxd^2y-dyd^2x = Z$$

anwendet:

$$(\text{XIIIa.})\quad \Omega = \int_0^\beta \frac{Xd^3x+Yd^3y+Zd^3z}{X^2+Y^2+Z^2}d\beta,$$

$$(\text{XIVa.})\quad \begin{cases} \xi = x+\dfrac{(Ydz-Zdy)d\beta^2+Xd\beta^3\mathrm{tg}(C-\Omega)}{X^2+Y^2+Z^2} \\ \eta = y+\dfrac{(Zdx-Xdz)d\beta^2+Yd\beta^3\mathrm{tg}(C-\Omega)}{X^2+Y^2+Z^2} \\ \zeta = z+\dfrac{(Xdy-Ydx)d\beta^2+Zd\beta^3\mathrm{tg}(C-\Omega)}{X^2+Y^2+Z^2}. \end{cases}$$

Damit die Gleichungen (XIV.) oder (XIVa.) sämmtliche Evoluten darstellen, müssen der willkührlichen Constante C alle möglichen Werthe zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ ertheilt werden; und je nachdem der Werth des C positiv oder negativ ist, liegt der $\beta = 0$ entsprechende Punct der Evolute auf derjenigen Seite der Krümmungsebene der Evolvente, für welche die Axe der Ebene (d. h. das auf ihr errichtete Loth) mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus resp. gleich sind:

$$k(y'z''-z'y''),\quad k(z'x''-x'z''),\quad k(x'y''-y'x''),$$

oder aber auf derjenigen Seite, für welche diese Cosinus die entgegengesetzten Werthe haben.

Für den Winkel ω, den die Tangente einer der Evoluten mit dem Krümmungshalbmesser der Evolvente bildet, hat man, wenn man ihn in demselben Sinne wie C als positiv oder negativ wählt, die Gleichung:

$$\omega = C - \Omega.\ ^{*)}$$

Dieser Winkel ist für die nämliche Evolute von Punct zu Punct veränderlich, außer wenn alle Elemente in dem Integralausdruck für Ω identisch verschwinden, was nur der Fall ist, wenn die Evolvente eine ebene Kurve ist. Für eine zweite Evolute wird der entsprechende Winkel ω_1 gefunden durch die Gleichung:

$$\omega_1 = C_1 - \Omega,$$

worin C_1 eine von C verschiedene Constante; mithin ist:

$$\omega_1 - \omega = C_1 - C = \text{Const.}$$

Also hat man den folgenden Satz:

Zwei Systeme von Normallinien einer Kurve im Raume, welche zwei Evoluten derselben einhüllen, durchschneiden einander unter constantem Winkel.

Vermöge dieses Satzes führt die Kenntniß einer einzigen Evolute sogleich zur Kenntniß aller, ohne daß man nöthig hat, die durch (XIII.) angedeutete Quadratur zu vollziehen. Bezeichnet man nämlich durch ξ_1, η_1, ζ_1 die Coordinaten der besonderen Evolute, und durch ω_1 den Winkel, der allgemein durch ω bezeichnet wurde, so hat man nach (XIV.):

$$\xi_1 = x + k^2 x'' + k^2 (y'z''-z'y'') \operatorname{tg}\omega_1,$$

und zwei ähnliche Gleichungen für η_1, ζ_1.

Man erhält also drei Ausdrücke für $\operatorname{tg}\omega_1$, welche zwar der Form nach verschieden sind, sich aber nothwendig als identisch erweisen müssen, wenn man alle in ihnen vorkommenden Größen durch eine einzige ausdrückt, oder sonst geeignete Transformationen mit ihnen vornimmt. Man kann aus jenen drei Gleichungen auch leicht einen symmetrischen Ausdruck für $\operatorname{tg}\omega_1$ herstellen, wenn man dieselben addirt, nachdem man sie vorher resp. mit:

$$y'z''-z'y'',\quad z'x''-x'z'',\quad x'y''-y'x''$$

multiplicirt hat. Berücksichtigt man dabei, daß:

$$(y'z''-z'y'')^2 + (z'x''-x'z'')^2 + (x'y''-y'x'')^2 = \frac{1}{k^2},$$

und:

$$x''(y'z''-z'y'') + y''(z'x''-x'z'') + z''(x'y''-y'x'') = 0,$$

so findet man, wenn man der Einfachheit halber ein Summenzeichen anwendet:

$$\operatorname{tg}\omega_1 = \Sigma(\xi_1 - x)(y'z''-z'y'').$$

Der Werth des $\cos\omega_1$, welcher aus dem von $\operatorname{tg}\omega_1$ hervorgeht, muß ferner identisch sein mit

---

*) Der Winkel ϑ in §. 5. ist gleich $\omega + \frac{1}{2}\pi$, wenn man $a = +k(y'z''-z'y'')$, u. s. w. nimmt.

dem durch (X.) gelieferten:

$$\cos\omega_1 = \frac{k}{r_1}, \quad \text{worin:}\ r_1 = \sqrt{(\xi_1 - x)^2 + (\eta_1 - y)^2 + (\zeta_1 - z)^2}.$$

Nun haben wir gesehen, daß für irgend eine andere aus dem System der Evoluten $\omega = \omega_1 + \lambda$ ist, wenn λ eine positive oder negative Constante bedeutet. Demnach werden ξ, η, ζ gegeben durch die Gleichungen:

$$\xi = x + k^2 x'' + k^2 (y'z'' - z'y'')\,\mathrm{tg}(\omega_1 + \lambda)$$
u. s. w.

und es kommt nur noch darauf an, denselben eine passendere Gestalt zu geben. Subtrahirt man von dem Werthe des ξ den des ξ_1, so wird:

$$\xi = \xi_1 + k^2 (y'z'' - z'y'') \{\mathrm{tg}(\omega_1 + \lambda) - \mathrm{tg}\,\omega_1\}$$

oder:

$$\xi = \xi_1 + \frac{k^2 (y'z'' - z'y'')\,\mathrm{tg}\,\lambda}{\cos^2\omega_1 (1 - \mathrm{tg}\,\lambda\,\mathrm{tg}\,\omega_1)},$$

oder auch, wenn man für $\cos\omega_1$ den angegebenen Werth setzt:

$$\xi = \xi_1 + \frac{r_1^2 (y'z'' - z'y'')}{\cot\lambda - \mathrm{tg}\,\omega_1}.$$

Drückt man noch die nach dem Bogen β genommenen Differentialquotienten vermittelst der sich auf eine beliebige andere unabhängige Veränderliche beziehenden Differentiale aus und bildet für η und ζ die dem ξ entsprechenden Ausdrücke, so erhält man schließlich:

$$(\text{XV.}) \quad \begin{cases} \xi = \xi_1 + \dfrac{r_1^2 (dy\,d^2z - dz\,d^2y)}{d\beta^3 (\cot\lambda - \mathrm{tg}\,\omega_1)}, \\ \eta = \eta_1 + \dfrac{r_1^2 (dz\,d^2x - dx\,d^2z)}{d\beta^3 (\cot\lambda - \mathrm{tg}\,\omega_1)}, \\ \zeta = \zeta_1 + \dfrac{r_1^2 (dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{d\beta^3 (\cot\lambda - \mathrm{tg}\,\omega_1)}, \\ d\beta^3\,\mathrm{tg}\,\omega_1 = \Sigma(\xi_1 - x)(dy\,d^2z - dz\,d^2y). \end{cases}$$

Um den Nutzen der soeben gegebenen Zurückführung des Systems der Evoluten auf eine besondere einzusehen, nehme man z. B. als Evolvente eine Krümmungslinie auf einem Ellipsoide. Dann hat dasjenige System von Normallinien, welches zugleich zum Ellipsoide normal ist, eine Umhüllungslinie. Die Coordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 dieser Umhüllungslinie, oder dieser besonderen Evolute der gegebenen Krümmungslinie, sind algebraische Functionen von x, y, z, welche man ohne jede Schwierigkeit herstellen kann. Die Gleichungen (XV.) liefern also sofort das ganze System der Evoluten, ebenfalls in algebraischer Form, ohne daß man nöthig hat, das Integral in (XIIIa.) einer Untersuchung zu unterziehen.

Ich will die entwickelten Formeln jetzt auf einen, wie ich glaube, bisher nicht beachteten Fall anwenden, welcher sich durch seine Einfachheit auszeichnet und dabei doch eine beträchtliche Allgemeinheit besitzt.

§. 7.

Die Evoluten der Kurven auf der Kugeloberfläche.

Wir wollen als Evolvente eine Kurve annehmen, die ganz auf der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser a liegt, die aber im Uebrigen noch beliebig gestaltet sein kann. Wenn der Mittelpunct der Kugel zum Anfangspunct der Coordinaten gewählt wird, so genügen x, y, z der Bedingungsgleichung:

$$x^2+y^2+z^2 = a^2.$$

Das System der nach den Puncten der Evolvente gezogenen Kugelradien steht auf den Tangenten dieser Kurve normal. Der Mittelpunct der Kugel kann als die Umhüllungslinie jenes Systems von Normalen und folglich als eine besondere Evolute der gegebenen Kurve betrachtet werden. Man darf also in den Formeln (XV.) setzen:

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = 0, \quad r_1 = a,$$

und erhält als Gleichungen des Systems der Evoluten die folgenden, in welchen die positive oder negative Constante λ den unveränderlichen Winkel bedeutet, den die Tangenten irgend einer Evolute mit den Seitenlinien der durch den Mittelpunct der Kugel und der auf ihr gegebenen Kurve hindurchgelegten Kegelfläche bilden:

$$\text{(XVI.)} \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{a^2(dyd^2z - dzd^2y)}{d\beta^3(\cot\lambda - \mathrm{tg}\,\omega_1)}, \\ \eta &= \frac{a^2(dzd^2x - dxd^2z)}{d\beta^3(\cot\lambda - \mathrm{tg}\,\omega_1)}, \\ \zeta &= \frac{a^2(dxd^2y - dyd^2x)}{d\beta^3(\cot\lambda - \mathrm{tg}\,\omega_1)}, \\ -d\beta^3\mathrm{tg}\,\omega_1 &= \Sigma x(dyd^2z - dzd^2y). \end{aligned} \right.$$

Dividirt man die beiden ersten dieser Gleichungen durch die dritte, und eliminirt man aus den beiden neuen Gleichungen x, y, z, nachdem man diese Größen durch die unabhängige Veränderliche ausgedrückt hat, so erhält man eine Gleichung, welche in Bezug auf ξ, η, ζ homogen ist, und welche, weil sie λ nicht enthält, für jede Evolute gilt. Diese Gleichung stellt also eine Kegelfläche vor, auf welcher sämmtliche Evoluten liegen.

Nimmt man $\lambda = \pm\frac{\pi}{2}$, so wird $\cot\lambda = 0$, und man erhält diejenige Evolute, deren Gleichungen die einfachste Gestalt haben. Die Tangenten dieser Evolute, welche **Hauptevolute** heißen mag, berühren zugleich die Kugelfläche, so daß dieselbe für die Kurve auf der Kugel die nämliche Bedeutung hat, welche für eine ebene Kurve der in derselben Ebene gelegenen Evolute zukommt.

Wir wollen die allgemeinen Formeln jetzt auf ein Beispiel anwenden, welches durch seine Analogie mit den für die Evoluten der Kegelschnitte geltenden Resultaten bemerkenswerth ist, nämlich **auf die Kurve, welche aus der Kugel durch einen mit ihr concentrischen Kegel zweiten Grades ausgeschnitten wird.** Die Gleichungen dieser Kurve, welche **sphärischer**

Kegelschnitt heißen mag, seien in der Form gegeben:

$$(\text{XVII.})\quad x^2+y^2+z^2 = a^2, \quad x^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}y^2+\frac{a^2-c^2}{c^2}z^2,$$

und es sei $a > b > c$. Die Projectionen der Kurve auf die Coordinatenebenen sind:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$x^2+\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2 = a^2-c^2, \quad x^2-\frac{b^2-c^2}{c^2}z^2 = a^2-b^2.$$

Die erste ist eine Ellipse, die ganz innerhalb der Kugel liegt, die zweite eine Ellipse, welche die Kugel in vier Puncten schneidet, und die dritte ist eine Hyperbel. Betrachtet man x als unabhängige Veränderliche, d. h. nimmt $d^2x = 0$ an, so erhält man durch Differentiation der beiden letzten Gleichungen leicht:

$$dy = -\frac{b^2}{b^2-c^2}\,\frac{xdx}{y}, \quad dz = \frac{c^2}{b^2-c^2}\,\frac{xdx}{z},$$

$$d\beta = \frac{bcdx}{(b^2-c^2)yz}\sqrt{a^2x^2-(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

$$dyd^2z-dzd^2y = \frac{b^4c^4}{(b^2-c^2)^3}\,\frac{x^3dx^3}{y^3z^3},$$

$$dzd^2x-dxd^2z = \frac{(a^2-b^2)c^4}{(b^2-c^2)^2}\,\frac{y^3dx^3}{y^3z^3},$$

$$dxd^2y-dyd^2x = -\frac{(a^2-c^2)b^4}{(b^2-c^2)^2}\,\frac{z^3dx^3}{y^3z^3},$$

$$-d\beta^3 \operatorname{tg}\omega_1 = \frac{b^4c^4(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{(b^2-c^2)^3}\,\frac{dx^3}{y^3z^3},$$

$$d\beta^3 \cot\lambda = \frac{b^4c^4(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{(b^2-c^2)^3}\,\frac{dx^3}{y^3z^3}\,.\,q,$$

in welchem letzteren Ausdruck q die Bedeutung hat:

$$q = \frac{\{a^2x^2-(a^2-b^2)(a^2-c^2)\}^{\frac{3}{2}}\cot\lambda}{bc(a^2-b^2)(a^2-c^2)}.$$

Indem man diese Werthe in (XVI.) substituirt, erhält man für die Gleichungen der Evoluten der Kurve (XVII.) die folgenden:

$$(\text{XVIII.})\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\,\dfrac{x^3}{1+q}, \\[2ex] \eta = \dfrac{a^2(b^2-c^2)}{b^4(a^2-c^2)}\,\dfrac{y^3}{1+q}, \\[2ex] \zeta = -\dfrac{a^2(b^2-c^2)}{c^4(a^2-b^2)}\,\dfrac{z^3}{1+q}. \end{cases}$$

Die Elimination von x, y, z aus diesen Gleichungen und der zweiten von (XVII.) ergiebt die von q und folglich von λ unabhängige Gleichung:

$$\text{(XIX.)}\quad \xi^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{b^2-c^2}\eta\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{c\sqrt{a^2-c^2}}{b^2-c^2}\zeta\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Diese Gleichung stellt die Kegelfläche dar, auf welcher sämmtliche Evoluten des sphärischen Kegelschnitts liegen. Alle Ebenen, welche man senkrecht zu den Coordinatenaxen (d. h. zu den Hauptaxen des gegebenen Kegels) führt, schneiden aus dieser Kegelfläche Kurven aus, welche nichts anderes als die Hauptevoluten gewisser Ellipsen oder Hyperbeln sind, welche durch die nämlichen Ebenen aus gewissen Kegeln zweiten Grades ausgeschnitten werden. Betrachten wir den Kegel zweiten Grades:

$$\xi_1^{\,2} = \frac{\eta_1^{\,2}}{B^2} + \frac{\zeta_1^{\,2}}{C^2},$$

und schneiden ihn z. B. durch eine zur Xaxe senkrechte Ebene oder nehmen ξ_1 constant; die Hauptevolute des elliptischen Schnittes hat die Gleichung:

$$\xi_1^{\,\frac{2}{3}} = \left(\pm\frac{B}{B^2-C^2}\eta_2\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\pm\frac{C}{B^2-C^2}\zeta_2\right)^{\frac{2}{3}},$$

worin das Zeichen + oder — zu nehmen ist, je nachdem B $>$ oder $<$ C. Sie ist also in der That identisch mit dem Durchschnitte der nämlichen Ebene $\xi = \xi_1$ und der Kegelfläche (XIX.), wenn man B und C so bestimmt, daß:

$$\frac{B}{B^2-C^2} = \pm\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{b^2-c^2},\quad \frac{C}{B^2-C^2} = \pm\frac{c\sqrt{a^2-c^2}}{b^2-c^2}.$$

Hieraus folgt:

$$B = \pm\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2-c^2},\quad C = \pm\frac{c\sqrt{a^2-c^2}}{a^2-b^2-c^2}.$$

Die Kegelfläche, welche alle Evoluten des sphärischen Kegelschnitts enthält, kann demnach aufgefaßt werden als der geometrische Ort der Hauptevoluten aller Ellipsen, welche durch die zur Xaxe senkrechten Ebenen aus dem Kegel zweiten Grades:

$$\xi_1^{\,2} = (a^2-b^2-c^2)^2\left\{\frac{\eta_1^{\,2}}{b^2(a^2-b^2)} + \frac{\zeta_1^{\,2}}{c^2(a^2-c^2)}\right\}$$

ausgeschnitten werden. Dieser Kegel geht in eine Ebene über und die ebenen Durchschnitte werden unendlich große Ellipsen, wenn:

$$a^2-b^2-c^2 = 0 \quad (\text{oder } b = a\cos\varepsilon,\quad c = a\sin\varepsilon)$$

wird. Die entsprechenden Durchschnittskurven des Kegels (XIX.) sind dann so beschaffen, daß ihre vier Spitzen stets die Ecken eines Quadrats bilden, während sie im Allgemeinen einen Rhombus bestimmen.

Für die Hauptevolute des sphärischen Kegelschnittes ist, wegen $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, q = 0. Die Projection derselben auf die Ebene der YZ hat die Gleichung:

$$\text{(XX.)}\quad \left\{\frac{b(a^2-c^2)}{a^2(b^2-c^2)}\eta\right\}^{\frac{2}{3}} + \left\{\frac{c(a^2-b^2)}{a^2(b^2-c^2)}\zeta\right\}^{\frac{2}{3}} = 1,$$

ist also identisch mit der ebenen Evolute einer Ellipse, deren halbe Hauptaxen resp. gleich sind:

$$\frac{ba^2(a^2-c^2)}{a^4-b^2c^2} \quad \text{und} \quad \frac{ca^2(a^2-b^2)}{a^4-b^2c^2}.$$

Aehnliches gilt für die Projectionen auf die beiden anderen Coordinatenebenen.

§. 8.

Ueber die Kurven, welche die Tangentialebenen einer abwickelbaren Fläche rechtwinklig durchschneiden.

In einer vor Kurzem veröffentlichten Abhandlung („Ueber die Umhüllungslinie der Pollinien einer Kurve und deren inverse Linie." Crelle's Journal, Bd. 58, S. 374.) leitet Herr Hoppe die Gleichungen der Kurven her, welche die Tangenten einer gegebenen Kurve zu Pollinien haben. Diese Kurven, welche Herr Hoppe Involuten der gegebenen, der Involvente, nennt, sind identisch mit den Kurven, welche die Krümmungsebenen der gegebenen Kurve oder, was dasselbe ist, die Tangentialebenen der durch die Tangenten der letzteren bestimmten abwickelbaren Fläche unter rechten Winkeln durchschneiden. Ich will jetzt eine Lösung dieser Aufgabe mittheilen, welche ich seit etwa zwei Jahren besitze, und welche den innigen Zusammenhang erkennen lassen wird, in welchem die Aufgabe mit den im Vorhergehenden behandelten steht.

Die Tangentialebenen der gegebenen abwickelbaren Fläche sind die Normalebenen irgend einer der gesuchten Kurven; die Evoluten der letzteren liegen also sämmtlich auf der abwickelbaren Fläche und sind kürzeste Linien auf derselben (§. 5.). Umgekehrt leuchtet ein, daß auch jede Evolvente jeder kürzesten Linie zu dem System der gesuchten Kurven gehört. In der That, die Tangente, welche man an eine Evolvente einer kürzesten Linie in irgend einem ihrer Puncte zieht, liegt in einer auf der zugehörigen Tangentialebene der Fläche senkrechten Ebene (nämlich in der Krümmungsebene der kürzesten Linie), und steht außerdem auf der Durchschnittskante beider Ebenen senkrecht, (nämlich auf der Tangente der kürzesten Linie). Deshalb muß sie wirklich die Tangentialebene rechtwinklig durchschneiden. — Da übrigens jede der gesuchten Kurven unendlich viele kürzeste Linien zu Evoluten hat, so kann sie auch umgekehrt als die Evolvente unendlich vieler kürzester Linien aufgefaßt werden, und man kann zu ihrer Erzeugung nach Belieben eine derselben auswählen. Daher kann man, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, sich darauf beschränken, die Evolventen eines bestimmten Systems von kürzesten Linien zu suchen, z. B. desjenigen, welches ein und dieselbe Erzeugungslinie der abwickelbaren Fläche rechtwinklig durchschneidet.

Als Gleichungen der Wendungskurve der gegebenen abwickelbaren Fläche nehmen wir die Gleichungen (1.) und nennen x, y, z, s die Coordinaten und den Bogen einer kürzesten Linie; dann erhalten wir für die Coordinaten l, m, n einer der Evolventen dieser mit Rücksicht auf (9.):

$$l = x+(c-s)\frac{dx}{ds}, \quad m = y+(c-s)\frac{dy}{ds}, \quad n = z+(c-s)\frac{dz}{ds},$$

worin c den Abstand des Anfangspunctes der kürzesten Linie von dem ihrer Evolvente bedeutet. Es ist aber:

$$x = \varphi(\alpha)+r\varphi'(\alpha) \text{ u. s. w.,}$$

und vermöge (10.), (11.) und (12.) hat man:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\varrho}, \quad r\sin\vartheta = r_0 - \int_0^\alpha d\alpha\sin\vartheta,$$

$$s = \cot\vartheta\left(r_0 - \int_0^\alpha d\alpha\sin\vartheta\right) + \int_0^\alpha d\alpha\cos\vartheta.$$

Ferner findet man mit Rücksicht auf (3.) und (4.):

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(\alpha)\frac{dr+d\alpha}{ds} + \varphi''(\alpha).r\frac{d\alpha}{ds} = \varphi'(\alpha)\cos\vartheta + \varrho\varphi''(\alpha)\sin\vartheta.$$

Setzt man diese Werthe, so wie die entsprechenden für y u. s. w. in die Ausdrücke von l, m, n ein, so erhält man:

$$\text{(XXI.)} \quad \begin{cases} l = \varphi(\alpha) + P\varphi'(\alpha) + Q\varrho\varphi''(\alpha), \\ m = \psi(\alpha) + P\psi'(\alpha) + Q\varrho\psi''(\alpha), \\ n = \chi(\alpha) + P\chi'(\alpha) + Q\varrho\chi'(\alpha), \end{cases}$$

worin:

$$P = \cos\vartheta\left(c - \int_0^\alpha d\alpha\cos\vartheta\right) + \sin\vartheta\left(r_0 - \int_0^\alpha d\alpha\sin\vartheta\right),$$

$$Q = \sin\vartheta\left(c - \int_0^\alpha d\alpha\cos\vartheta\right) - \cos\vartheta\left(r_0 - \int_0^\alpha d\alpha\sin\vartheta\right).$$

Aus den Gleichungen (XXI.) ergeben sich, wenn noch der Kürze wegen:

$$R^2 = P^2 + Q^2 = \left(c - \int_0^\alpha d\alpha\cos\vartheta\right)^2 + \left(r_0 - \int_0^\alpha d\alpha\sin\vartheta\right)^2$$

gesetzt wird, leicht die folgenden:

$$(l-\varphi\alpha)^2 + (m-\psi\alpha)^2 + (n-\chi\alpha)^2 = R^2,$$

$$(l-\varphi\alpha)\varphi'\alpha + (m-\psi\alpha)\psi'\alpha + (n-\chi\alpha)\chi'\alpha = P,$$

$$(l-\varphi\alpha)\varphi''\alpha + (m-\psi\alpha)\psi''\alpha + (n-\chi\alpha)\chi''\alpha = \frac{Q}{\varrho},$$

und dies führt auf eine andere geometrische Erzeugungsart der bestimmten Kurven. Bemerkt man nämlich, daß:

$$P = -R\frac{dR}{d\alpha} \quad \text{und:} \quad \frac{Q}{\varrho} = 1 + \frac{dP}{d\alpha},$$

so erkennt man sofort, daß die beiden letzten jener drei Gleichungen aus der ersten entstehen, wenn man diese zweimal nach α differentiirt und dabei l, m, n als constant betrachtet. Daher kann der Punkt (l, m, n) als der Durchschnittspunkt der durch die erste Gleichung ausgedrückten Kugelfläche und der beiden ihr unendlich nahen aufgefaßt werden, und man hat den folgenden Satz:

Bewegt sich eine Kugel von dem veränderlichen Halbmesser R so, daß ihr

Mittelpunct auf der gegebenen Kurve im Raume fortrückt, so hüllen die Durchschnittskreise je zweier unendlich naher Kugelflächen eine Kurve ein, welche die Krümmungsebenen der gegebenen rechtwinklig durchschneidet.

Der Halbmesser R besitzt eine einfache geometrische Bedeutung. Denkt man sich nämlich die gegebene abwickelbare Fläche, von welcher die gegebene Kurve die Wendungskurve ist, in eine Ebene ausgebreitet, und zwar in die zu $\alpha = o$ gehörige Tangentialebene der Fläche (oder Krümmungsebene der Kurve), und nimmt man den Punct ($\alpha = o$) als Anfangspunct zweier rechtwinkliger Coordinatenaxen OU und OV, von denen die zweite mit der Tangente der Wendungskurve zusammenfällt (also die Strecke r_0 enthält), die erste der Tangente der kürzesten Linie (also auch c) parallel ist, so sind nach §. 4. die Größen:

$$u = \int_0^\alpha d\alpha\cos\vartheta \quad \text{und} \quad v = \int_0^\alpha d\alpha\sin\vartheta$$

die Coordinaten der ebenen Kurve, in welche sich die Wendungskurve verwandelt hat, und folglich bedeutet der veränderliche Werth von R den Abstand des festen Punctes (c, r_0) von dem zu dem jedesmaligen Werthe von α gehörigen Puncte dieser ebenen Kurve. Als den festen Punct, dessen Coordinaten die willkührlichen Constanten c und r_0 sind, kann man jeden beliebigen Punct in der Ebene wählen.

Ist die abwickelbare Fläche eine Kegelfläche, so daß sich die Wendungskurve auf einen Punct, z. B. den Anfangspunct der Coordinaten reducirt, so ist $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = \chi(\alpha) = 0$ und $R^2 = r_0^2 + c^2$, also:

$$l^2 + m^2 + n^2 = r_0^2 + c^2.$$

Es liegen in diesem Falle unendlich viele von den Kurven, die die Tangentialebenen des Kegels rechtwinklig durchschneiden, auf ein und derselben Kugelfläche, und diese Kurven sind offenbar identisch mit den rechtwinkligen Trajectorien der durch die Tangentialebenen ausgeschnittenen Kreise. Die Integrale in den Ausdrücken von P und Q verschwinden hier und die allgemeinen Gleichungen (XXI.) reduciren sich, wenn:

$$c = a\cos\mu, \quad r_0 = a\sin\mu$$

gesetzt wird, auf:

$$\begin{aligned} l &= \varphi'.a\cos(\vartheta-\mu) + \varrho\varphi''.a\sin(\vartheta-\mu), \\ m &= \psi'.a\cos(\vartheta-\mu) + \varrho\psi''.a\sin(\vartheta-\mu), \\ n &= \chi'.a\cos(\vartheta-\mu) + \varrho\chi''.a\sin(\vartheta-\mu), \end{aligned}$$

und es bezeichnen, entsprechend ihrer Bedeutung in dem allgemeinen Falle φ', ψ', χ' die Cosinus der Winkel, welche irgend eine Seitenlinie mit den Axen bildet; $\varrho\varphi''$, $\varrho\psi''$, $\varrho\chi''$ die Cosinus der Winkel einer darauf senkrechten und in der Tangentialebene gelegenen Geraden mit den Axen; und ϑ den Winkel, den die veränderliche Seitenlinie mit einer festen einschließen würde, wenn man den Kegel in eine Ebene ausbreitete.

Wenn die Wendungskurve der abwickelbaren Fläche eine Kurve von constanter Krümmung ist, so erhält man für P und Q die einfachen Ausdrücke:

$$P = (c-\varrho)\sin\frac{\alpha}{\varrho} + r_0 \cos\frac{\alpha}{\varrho},$$

$$Q = \varrho + (c-\varrho)\cos\frac{\alpha}{\varrho} - r_0 \sin\frac{\alpha}{\varrho},$$

und wenn man insbesondere für die willkührlichen Constanten c und r_0 die Werthe ϱ und o annimmt, so wird:

$$P = 0, \quad Q = \varrho, \quad R^2 = \varrho^2,$$

und die Gleichungen (XXI.) gehen über in:

$$l = \varphi(\alpha) + \varrho^2\varphi''(\alpha), \quad m = \psi(\alpha) + \varrho^2\psi''(\alpha), \quad n = \chi(\alpha) + \varrho^2\chi''(\alpha).$$

In diesem Falle ist also die Linie der Krümmungsmittelpuncte eine von den Kurven, welche die Krümmungsebene der gegebenen rechtwinklig durchschneiden. Wir wollen die gegebene Kurve kurz durch (C), den Ort ihrer Krümmungsmittelpuncte durch (K), und durch A und B irgend zwei entsprechende Puncte auf beiden bezeichnen. Da B der Krümmungsmittelpunct zu A ist, so steht BA senkrecht auf der Tangente an (C) in A. Aber diese Tangente kann angesehen werden als der Durchschnitt zweier unendlich naher Krümmungsebenen von (C) oder zweier unendlich naher Normalebenen von (K); folglich ist A der Krümmungsmittelpunct für den Punct B der Kurve (K) und $AB = \varrho$ der Krümmungsradius. Man hat also den folgenden Satz:

Der Ort der Krümmungsmittelpuncte einer Kurve von constanter Krümmung ist eine Kurve von ebenso großer Krümmung, welche zum Orte ihrer Krümmungsmittelpuncte wieder die gegebene Kurve hat. Jede von beiden Kurven durchschneidet die Krümmungsebenen der anderen rechtwinklig und jede ist die Umhüllungslinie der Pollinien der andern.

Die einzige Kurve von constanter Krümmung, für welche diese Eigenschaften verloren gehen, ist der Kreis.

F. G. Mehler.

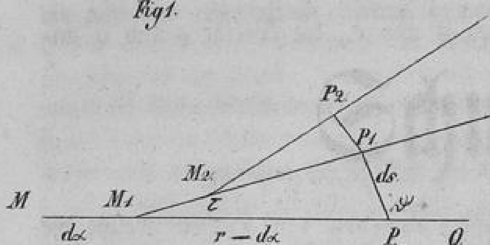

Fig 1.

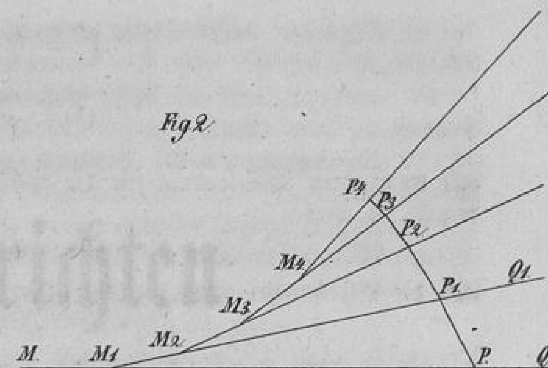

Fig 2.

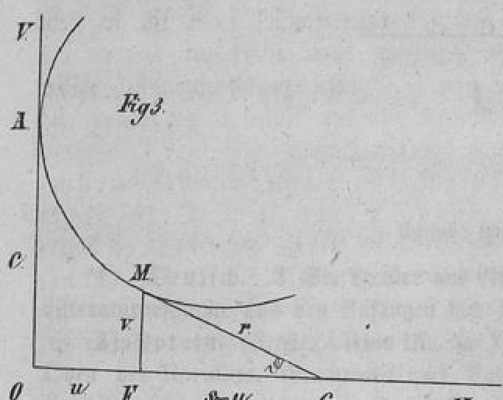

Fig 3.

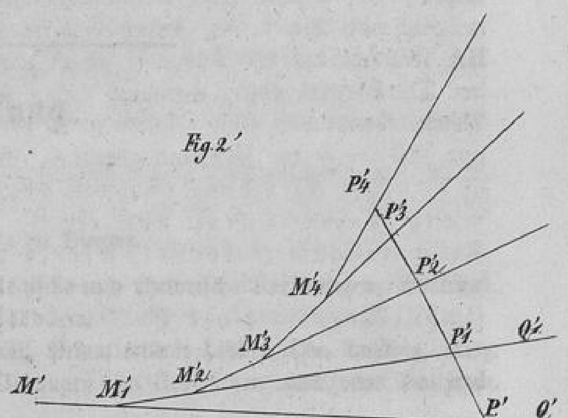

Fig 2'

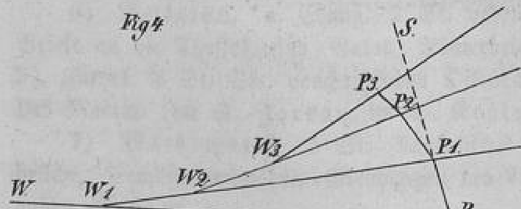

Fig 4

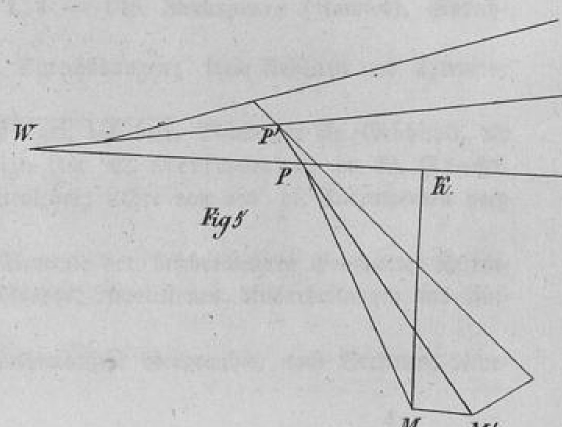

Fig 5