Ein Beitrag zur Parallelentheorie.*)

Unter den zahlreichen Versuchen, welche die Geometer seit Jahrhunderten gemacht haben, die Lehre von den Parallellinien strenger als Euklid zu begründen, stehen die von Legendre oben an.

Den ersten Versuch, die Lehre von den Parallelen ohne das 11. Axiom Euklids zu begründen, theilte er in seiner 1794 erschienenen Geometrie mit, ersetzte ihn aber, weil er ihm nicht genügte, in der Auflage seiner Geometrie vom Jahre 1802 durch eine andere Beweisart. Er geht vom Dreiecke aus, indem er beweist, daß die drei Winkel eines Dreiecks zusammen zwei Rechte betragen, worauf er mit aller Strenge das 11. Axiom Euklids als Lehrsatz beweisen kann. In der angeführten Auflage und den flg. bis zur 8. Auflage seines Lehrbuches bewies er jenen Satz von der Winkelsumme eines Dreiecks dadurch, daß er zeigte, diese Summe könne nicht größer und auch nicht kleiner als zwei Rechte sein. In dem Beweise des zweiten Theils dieses Satzes, nämlich, daß die Winkelsumme nicht kleiner als zwei Rechte sein kann, kommt eine schwache Stelle vor, indem vorausgesetzt wird, daß man durch einen Punkt in der Ebene eines Winkels eine gerade Linie ziehen könne, welche beide Schenkel des Winkels schneidet. Diese Voraussetzung ist unbegründet und muß auf das zu beweisende 11. Axiom Euklids zurückgeführt werden. Deshalb gab Legendre diesen Beweis wieder auf und erfand für den erwähnten Satz von der Winkelsumme im Dreieck einen neuen Beweis.**) Aber auch dieser ist, wie schon von Andern bemerkt worden, am Schlusse nicht streng, indem angenommen wird, daß zwei Geraden, welche eine dritte Gerade schneiden, eine einzige Gerade bilden, wenn die Winkel, die sie mit der dritten machen, ins Unendliche abnehmen, während sie ins Unendliche zunehmen.***)

---

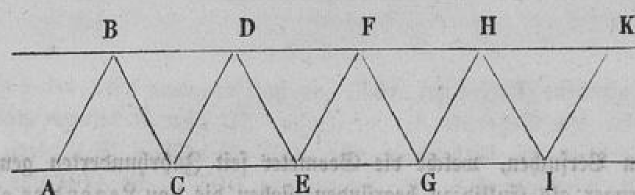
*) Da der Lehrer Herr **Graupner**, welcher die wissenschaftliche Abhandlung für das diesj. Programm zu liefern übernommen hatte, durch Krankheit verhindert worden ist, dieselbe zu vollenden, so erlaubt sich Unterzeichneter, diesen Beitrag hier mitzutheilen, welcher zugleich ein Nachtrag zu seiner im Programm des Bromberger Gymnasiums 1852 erschienenen Abhandlung über die Theorie der Parallelen ist.

**) S. Legendre Elemente der Geometrie, übersetzt von Crelle;
2. Aufl. der Uebers. nach der 12. Aufl. des Originals 1833.

***) Vgl. Die angef. Uebers. v. Crelle. S. 30. Anm. und Hoffmann, Kritik der Parallelentheorie. Jena. 1807. S. 162. Einen rein analytischen Beweis des fragl. Satzes, den Legendre in s. Anmerkungen S. 280. flg. mittheilt, übergehe ich hier, weil er nicht geometrisch ist.

Da es für das System der Geometrie von Wichtigkeit ist, daß die Schwierigkeiten in der Lehre von den Parallelen möglichst beseitigt werden, so wird jeder noch so kleine Beitrag zu diesem Zwecke nicht ohne Interesse für die Geometer sein. Deshalb und aus dem oben angeführten Grunde erlaube ich mir einen neuen Beweis für den Satz mitzutheilen, daß die Winkelsumme im Dreieck nicht kleiner als zwei Rechte sein kann, um auf diese Weise die zweite Beweisart Legendre's wo möglich zu vervollständigen.

Des Zusammenhangs wegen will ich für diejenigen, welchen Legendre's Geometrie nicht zur Hand ist, den vollkommen strengen Beweis mittheilen, welchen Legendre für den zugehörigen Satz gegeben hat, daß die Winkelsumme im Dr. nicht größer als 2 R. sein kann.

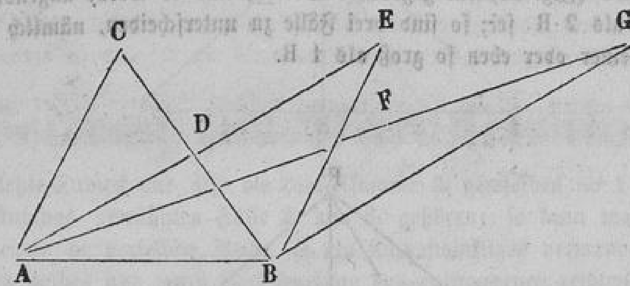


Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck und ACJ eine gerade Linie. Man mache $CE = AC$, W. $DCE =$ W. BAC und $DC = AB$, so ist Dr. DCE congr. Dr. ABC (6. Satz Leg. G.). Angenommen nun, es wäre W. $ABC + BAC + ACB > 2$ R, so wäre W. $ABC + BAC + ACB >$ W. $ACB + DCE + BCD$, weil die letzten drei W. zusammen gleich 2 R. Nimmt man also auf beiden Seiten den W. ACB und dann die nach der Construction gleichen Winkel BAC und DCE weg, so bleibt W. $ABC > BCD$. Weil aber $BC = BC$, $AB = CD$ so folgt daraus, daß $BD < AC$ wäre (L-G. 10. S). Auf gleiche Weise construire man Dr. EFG congr. Dr. CDE, so läßt sich eben so zeigen, daß $DF < CE$ d. h. $DF < AC$ sein müßte, wobei zugleich $DF = BD$ ist. Dasselbe läßt sich von JH, HK u. s. w. zeigen. Mag nun der Unterschied zwischen BD und AC noch so klein sein, so ist doch klar, daß dieser Unterschied, oft genug wiederholt, größer wird als jede gegebene Länge, und folglich, wenn man sich die Reihe der Dreiecke hinlänglich fortgesetzt denkt, größer wird als die Summe der beiden Seiten AB und IK, d. h. größer als 2 AB; folglich die gebrochene Linie ABD... KJ kürzer als die gerade AJ. Dies ist aber unmöglich (3 Erkl. die gerade L. ist der kürzeste Weg zwischen zwei Puncten); mithin ist die obige Annahme unstatthaft und die Summe der drei W. in Dr. kann nicht größer als 2 R sein.

Zum Beweise des Satzes, daß die Winkelsumme eines Dreiecks nicht kleiner als 2 R sein kann, schicke ich folgende Aufgabe voraus.*)

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, in welchem die Winkelsumme gleich ist der Winkelsumme in einem gegebenen Dreiecke, und in welchem zwei Winkel zusammen beliebig klein sind.

*) Diese Aufg. in anderer Form wendet auch Legendre bei seiner dritten Beweisart an.



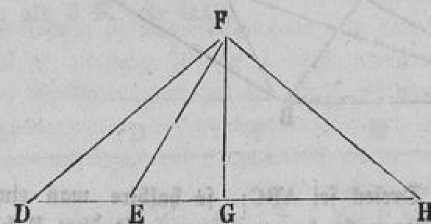
Auflösung. Das gegebene Dreieck sei ABC; so halbire man eine beliebige Seite, etwa BC, im Puncte D; verbinde D mit der Gegenecke A; verlängere AD über D hinaus um sich selbst bis E und verbinde E mit B;*) dann ist Dr. BDE congr. Dr. ADC (Leg. G. 6. S.), weil BD=CD u. DE=AD p. C. und W. BDE = W. ADC als Sch. W.; folglich W. DBE = W. ACD und W. BED = W. CAD; also im Dr. ABC die Winkelsumme DBE+BED+ABD+BAD = Winkelsumme ACD+CAD+ABD+BAD d. h. = W. S. A+B+C im gegebenen Dr. ABC. Auch ist hiernach in dem Dr. ABC die Winkelsumme AEB+BAE = Winkelsumme CAD+BAD d. h. = W. A. — Mögen nun die beiden Theile des W. A, nämlich die W. BAD und CAD oder, was dasselbe ist, die W. BAE und AEB in dem Dr. ABE, gleich oder ungleich sein; so muß es einen von ihnen geben, der n i c h t g r ö ß e r ist als $\frac{1}{2}$A. Sei W. BAE dieser Winkel.**) Dann halbire man die Gegenseite BE in F und verfahre eben so mit dem Dr. ABE wie vorher mit dem Dr. ABC, so daß man ein neues Dreieck ABG erhält, in welchem die Winkelsumme gleich der Winkelsumme A+A+C im Dr. ABC ist und worin die Summe der W. BAG+AGB = W. BAE, also höchstens = $\frac{1}{2}$ A ist. Mögen nun diese beiden Winkel BAG und AGB gleich oder ungleich sein, so muß es einen von ihnen geben, der nicht größer als die Hälfte von $\frac{1}{2}$ A, d. h. nicht größer als $\frac{1}{4}$ A ist. Verfährt man mit dem Dr. ABG eben so wie mit dem Dr. ABE, indem man die Gegenseite desjenigen von den beiden W. BAG und AGB, welcher nicht größer als $\frac{1}{4}$ A ist, halbirt u. s. w., so erhält man wieder ein Dreieck, dessen Winkelsumme gleich der Winkelsumme A+B+C und worin zwei W. zusammen höchstens = $\frac{1}{4}$ A sind. Geht man auf diese Weise weiter, so erhält man eine Reihe von Dreiecken, in denen die Summe der drei W. immer gleich der Winkelsumme A+B+C ist, die Summe zweier Winkel aber bezüglich höchstens $\frac{1}{8}$ A, $\frac{1}{16}$ A, $\frac{1}{32}$ A, u. s. w., allgemein höchstens $\frac{1}{2^{n-1}}$ A beträgt, wo A ein Winkel des gegebenen Dreiecks ABC und n die Anzahl der Dreiecks-Construktionen bezeichnet. Da nun die Größe $\frac{A}{2^{n-1}}$ um so kleiner wird je größer n wird und für n = ∞ verschwinden, so kann $\frac{A}{2^{n-1}}$ so klein gemacht werden als man will, wenn man nur n groß genug nimmt, d. h. die Reihe jener Dreiecks-Constructionen weit genug fortsetzt; mithin kann man zu einem in der Aufgabe verlangten Dreiecke gelangen.

*) Man könnte auch E mit C verbinden.

**) Wäre AEB dieser Winkel, so hätte man die Gegenseite AB zu halbiren.

Ich gehe nun über zu dem Beweise des **Satzes**: In einem Dreiecke ist die Summe der drei Winkel nicht kleiner als zwei Rechte.

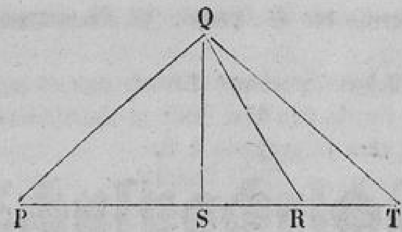
Beweis. Es sei ABC (Fig. 2.) ein gegebenes Dreieck, und es werde angenommen, daß die Summe seiner drei Winkel kleiner als 2 R sei; so sind drei Fälle zu unterscheiden, nämlich: die fragliche Winkelsumme ist größer, oder kleiner oder eben so groß als 1 R.



Erstens: Die Winkelsumme im Dr. ABC sei kleiner als 2 R, aber größer als 1 R, und also W. $A+B+C = 2\,R-x$, wo x einen Winkel bezeichnet, der kleiner als 1 R ist. Dann construire man nach der vorhergehenden Aufgabe ein Dreieck DEF, in welchem die Summe der drei Winkel gleich $A+B+C$ und worin zwei Winkel, etwa D und F, zusammen kleiner als $1\,R - x$, also etwa $= 1\,R - x - y$ ist; so in diesem Dreiecke Winkel DEF = W. $A+B+C$ — Winkelsumme $D+F$, d. h. W. DEF $= 2\,R-x-(1\,R-x-y) = 1\,R+y$, d. h. W. DEF > 1 R. Verlängert man nun DE über E hinaus, so ist der Nebenwinkel von W. DEF ein spitzer. Fällt man ferner von F ein Loth auf die Richtung der DE, so muß der Fußpunkt G desselben auf der Verlängerung von DE über E hinaus liegen (weil im Dr. EGF die Winkelsumme nicht größer als 2 R sein kann, wie oben bewiesen). Da nun die Winkelsumme in DEF < 2 R, in dem Dr. FEG aber höchstens $= 2$ R (oben bewiesen); so ist die Summe aller 6 Winkel in den beiden Dreiecken DEF und FEG kleiner als 4 R. Wenn man also die beiden Nebenwinkel DEF und GEF, deren Summe $= 2$ R, davon subtrahirt, so bleibt als Winkelsumme das Dr. DFG weniger als 2 R. Sie sei $= 2\,R-z$, wo z auch $= x$ sein kann.

Man verlängere nun DG über G hinaus um sich selbst bis H und ziehe HF; so ist Dr. FGH congr. Dr. FGD (Leg. G. 6 S.), weil FG=FG, GH=GD p. C. und W. FGH = W. FGD = R. p. C.; also die Winkelsumme im Dr. FGH $= 2\,R-z$, mithin die Winkelsumme aller 6 W. in den beiden Dreiecken FGD und FGH $= 2\,(2\,R-z) = 4\,R-z$. Wenn man also die beiden Nebenwinkel FGD und FGH, deren Summe $= 2$ R, subtrahirt, so erhält man als Winkelsumme des gleichschenkligen Dreiecks DFH die Größe $4\,R-2z-2R = 2\,R - 2\,z$.

Verfährt man mit dem Dreieck DFH so wie mit dem gegebenen Dr. ABC, so erhält man ein neues gleichschenkliges Dreieck, in welchem die Winkelsumme $= 2\,R - 4\,z$ ist. Auf diese Weise kann man eine Reihe von Dreiecken construiren, in denen die Winkelsummen bezüglich $2\,R - 8\,z$, $2\,R - 16\,z$, $2\,R - 32\,z$. u. s. w. allgemein $2\,R - 2^m z$ sind, und kann diese Reihe so weit fortsetzen, bis man zu einem Dreiecke gelangt, in welchem die Winkelsumme $= 1$ R oder sogar < 1 R. ist, während die Winkelsumme des vorhergehenden Dreiecks > 1 R ist.



Sei LMN dieses letzte Dreieck und also die Winkelsumme in demselben $= 1$ R oder < 1 R, wohin nun auch die beiden Anfangs erwähnten Fälle 2. und 3. gehören; so kann man dasselbe nicht mehr wie die vorhergehenden Dreiecke in derselben Reihe in ein stumpfwinkliges verwandeln und daraus wie aus jenen durch Fällen eines Lothes und durch Verdoppelung des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks ein gleichschenkliges Dreieck erhalten, in welchem die Abweichung der Winkelsumme von 1 R das Doppelte von der Abweichung beim vorhergehenden Dreiecke beträgt.

Man verwandle daher dies Dr. LMN nach der obigen Aufgabe in ein Dr. PQR, mit unveränderter Winkelsumme, worin aber zwei Winkel, etwa P u. Q, zusammen kleiner als $\frac{R}{2^{p-1}}$ sind, wo p eine ganze die Anzahl der erforderlichen Dreiecks-Constructionen bestimmende Zahl bedeutet; und fälle aus der Ecke eines dieser beiden Winkel, etwa aus Q, auf die Gegenseite PR ein Loth QS, welches innerhalb des Dreiecks PQR fallen muß, weil alle Winkel desselben spitze, mithin alle Außenwinkel des Dreiecks stumpfe sind; dann ist in dem rechtwinkligen Dreieck PQS die Summe der spitzen Winkel QPS und PQS offenbar noch kleiner, als $\frac{R}{2^{p-1}}$, weil W. PQS nur ein Theil von W. PQR ist. Verlängert man nun PS über S hinaus um sich selbst bis T und zieht QT, so ist Dr. SQT congruent Dr. SQP, weil $QS=QS$, $ST=SP$ p. C. und W. QST $=$ W. QSP als R. p. C., mithin W. $SQT+STQ =$ W. $SQP+SPQ < \frac{R}{2^{p-1}}$; folglich W. $SQT+STQ+SQP+SPQ < 2\frac{R}{2^{p-1}}$, d. h. $< \frac{R}{2^{p-2}}$, d. h. die Winkelsumme im Dr. PQT $< \frac{R}{2^{p-2}}$ oder wenn man $p-2=q$ setzt, die Winkelsumme im Dr. PQT $< \frac{R}{2^q}$. Da nun nach der obigen Aufgabe q so groß genommen werden kann als man will, und da 2^q ins Unendliche wächst, wenn q ins Unendliche wächst, mithin die Größe $\frac{R}{2^q}$ ins Unendliche abnimmt und zur Grenze Null hat; so führt die Annahme, daß in dem gegebenen Dreiecke ABC die Winkelsumme < 2 R sei, auf ein Dreieck, dessen Winkelsummer **kleiner** als **jede angebbare Winkelgröße** ist, d. h. auf ein Dreieck als Grenze, dessen Winkelsumme Null ist, was gegen die Natur des Dreiecks streitet. Mithin ist jene Annahme unstatthaft, und die Winkelsumme in einem Dreiecke kann nicht $<$ 2 R sein.

Aus den beiden vorhergehenden Lehrsätzen folgt nun daß die Winkelsummen in einem beliebigen Dreiecke gleich 2 R. ist.

Mit Hülfe dieses Satzes ist es nun möglich, des 11. Axiom Euklids als Lehrsatz zu beweisen, wie es von Legendre im 23. S. I. B. geschehen ist.

Fraustadt, den 21. März 1858.

A. Krüger.