Aufgaben

der sphärischen Astronomie.

Von

Joseph Mayenberg,

k. Gymnasialprofessor.

Programm

der Königl. Studienanstalt Hof

18⁸¹/₈₂.

Hof.

Druck der Mintzel'schen Buchdruckerei (H. Hörmann).

Vorliegendes zunächst für die Schule bearbeitetes Programm behandelt die wichtigsten Aufgaben der sphärischen Astronomie, welche mit Anwendung der zwei Fundamentalsätze der sphärischen Trigonometrie, des Sinussatzes und Cosinussatzes, gelöst werden können. —

Die Resultate zu den Rechnungsbeispielen sind mit 5stelligen Logarithmen (Schlömilchs Tafeln, Schulausgabe) berechnet, welche statt der 7stelligen Logarithmen für den Schulgebrauch sich unbedingt empfehlen. — Einige Bemerkungen sind dem bekannten Werke: „Die Wunder des Himmels von J. J. Littrow", und die Angaben mehrerer Rechnungsbeispiele dem ausgezeichneten Buche: „Astronomische Geographie von H. Martus, Leipzig 1880" entnommen.

Das Horizont-Aequatorsystem

mit dem Dreieck: Zenith-Pol-Stern.

Sei (Figur 1) M der Mittelpunkt der Himmelskugel und zugleich der Standpunkt des Beobachters, NOSWN der Horizont des Beobachters, ein grösster Kreis der Himmelskugel, O der Ostpunkt, W der Westpunkt, S der Südpunkt und N der Nordpunkt des Horizonts, Z das Zenith u. Z_1 das Nadir für den Beobachter, also die Gerade ZMZ_1 senkrecht auf der Ebene des Horizonts, AWQO der Himmelsäquator, ein grösster Kreis der Himmelskugel, welcher den Horizont in den Punkten O u. W schneidet und von den beiden Weltpolen P (Nordpol) u. P_1 (Südpol) gleichweit d. h. um je 90^0 Grad absteht, die Gerade PP_1 die Weltachse, welche durch den Punkt M auf der Ebene des Aequators senkrecht steht, ferner der durch die beiden Pole, durch Zenith und Nadir hindurchgehende grösste Kreis der Himmelskugel der Meridian, welcher auf Aequator und Horizont senkrecht steht und letztern im Südpunkte S u. Nordpunkte N schneidet, also die Gerade SN die Mittagslinie des Beobachtungsortes M; sei σ der Ort eines Sternes, $C\sigma G$ ein zum Aequator paralleler Kreis, welchen der Stern während der täglichen scheinbaren Drehung der Himmelskugel in der Richtung von Ost nach West durchläuft, C sein oberer, G sein unterer Culminationspunkt, H sein Aufgangspunkt, U sein Untergangspunkt; $Z\sigma B$ senkrecht auf Horizont, ein Quadrant des durch Zenith, Nadir und den Stern gehenden Vertikalkreises, $P\sigma D$ senkrecht auf Aequator, ein Quadrant des durch die beiden Pole und den Stern hindurchgehenden Deklinationskreises, S der Ausgangspunkt oder Nullpunkt der Zählung für das Horizontsystem, F der Frühlings- oder Widderpunkt, der Ausgangspunkt der Zählung für das Aequatorsystem und zwar in der Richtung von West nach Ost gezählt, so ist:

$\sphericalangle$ PMN = Bogen PN = φ die Polhöhe des Beobachtungsortes M,
$\sphericalangle$ ZMP = „ ZP = z die Zenithpoldistanz des Beobachtungsortes M,
$\sphericalangle$ AMS = „ AS = $90^0 - \varphi$ die Aequatorhöhe des Beobachtungsortes M,
„ σB = h die Höhe des Sternes σ,
„ SB = w das (östliche) Azimuth des Sternes,
„ OH = m die (nördliche) Morgenweite des Sternes,
„ WU = m_1 die (nördliche) Abendweite des Sternes,
„ σD = δ die (nördl. oder positive) Deklination des Sternes,
$\sphericalangle$ DPF = „ FD = α die Rektascension des Sternes,
$\sphericalangle$ APD = „ σC = Bogen DA = s der Stundenwinkel des Sternes,
$\sphericalangle$ APF = „ FDA = FD + DA = $\alpha + s$ = t der Stundenwinkel des Frühlingspunktes F.

Mithin im Dreieck ZPσ:

1) Seite ZP die Zenithpoldistanz des Beobachtungsortes M $= 90^0$ — Polhöhe $= 90^0 - \varphi$,
2) Zσ die Zenithdistanz des Sternes $= 90^0$ — Höhe $= 90^0 - h$,
3) Pσ die Poldistanz des Sternes $= 90^0$ — Deklination $= 90^0 - \delta$,
4) $\sphericalangle$ ZPσ = $\sphericalangle$ APD der Stundenwinkel des Sternes = s,
5) $\sphericalangle$ PZσ = $\sphericalangle$ BZN = Bogen BN $= 180^0$ — BS $= 180^0$ — Azimuth $= 180^0 - w$ und
6) $\sphericalangle$ ZσP der Variationswinkel des Sternes = v.

Von diesen sechs Grössen lassen sich nach den Hauptgleichungen der sphärischen Trigonometrie immer je vier mit einander verknüpfen, so dass so viele Gleichungen sich aufstellen lassen, als die Anzahl der Combinationen von sechs Elementen in der vierten Klasse beträgt d. i. 15.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Beziehungen, welche in den folgenden drei Aufgaben entwickelt werden.

I. Aufgabe.

Welche Beziehung findet statt zwischen Deklination, Höhe und Stundenwinkel des Sternes, sowie der Polhöhe des Beobachtungsortes?

Auflösung.

Im $\triangle$ ZPσ ist nach dem Cosinussatze:

$$\cos ZP\sigma = \frac{\cos Z\sigma - \cos ZP.\ \cos \sigma P}{\sin ZP.\ \sin \sigma P}$$

$$\text{oder } \cos s = \frac{\cos (90^0 - h) - \cos (90^0 - \varphi).\ \cos (90^0 - \delta)}{\sin (90^0 - \varphi)\ \sin (90^0 - \delta)}$$

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \varphi.\ \sin \delta}{\cos \varphi.\ \cos \delta} \quad \text{(I.)}$$

a) Besondere Fälle:

1) Wenn $h = 0^0$ so ist $\cos s = - \operatorname{tg} \varphi . \operatorname{tg} \delta$.

2) Wenn $s = 0^0$ so ist $\cos (\varphi - \delta) = \sin h = \cos (90^0 - h)$

also $\varphi - \delta = 90^0 - h$.

b) Auflösung der Gleichung:

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \varphi . \sin \delta}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

nach jeder der vier darin vorkommenden Grössen und Umformung des erhaltenen Ausdruckes in einen für logarithmische Berechnung bequemern.

1) s gesucht:

Subtrahiert man obige Gleichung von $1 = 1$ so erhält man nach einigen Reductionen:

$$2 . \sin^2 \tfrac{1}{2} s = \frac{\cos (\varphi - \delta) - \cos (90^0 - h)}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

$$= \frac{-[\cos (90^0 - h) - \cos (\varphi - \delta)]}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

$$= \frac{2 . \sin \frac{1}{2} (90^0 - h + \varphi - \delta) . \sin \frac{1}{2} (90^0 - h + \delta - \varphi)}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

$$\text{Also } \sin \tfrac{1}{2} s = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (90^0 - h + \varphi - \delta) . \sin \frac{1}{2} (90^0 - h + \delta - \varphi)}{\cos \varphi . \cos \delta}}$$

Addiert man in obiger Gleichung beiderseits 1, so ergibt sich:

$$\cos \tfrac{1}{2} s = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (90^0 - h + \varphi + \delta) . \cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta + h - 90^0)}{\cos \varphi . \cos \delta}}.$$

2) h gesucht:

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \varphi . \sin \delta}{\cos \varphi . \cos \delta}$$

also $\sin h = \sin \varphi . \sin \delta + \cos \varphi . \cos \delta . \cos s$

$= \sin \varphi (\sin \delta + \operatorname{cotg} \varphi . \cos s . \cos \delta)$;

Setzt man $\operatorname{cotg} \varphi . \cos s = \operatorname{tg} x$ so ist:

$\sin h = \dfrac{\sin \varphi}{\cos x} . \sin (\delta + x)$, wo also zuvor $\sqrt{}\, x$ aus der Hilfsgleichung $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} \varphi . \cos s$ zu bestimmen ist.

3) φ gesucht:

Aus obiger Gleichung ist:

$\sin h = \sin \varphi . \sin \delta + \cos \varphi . \cos \delta . \cos s$

$= \sin \delta (\sin \varphi + \operatorname{cotg} \delta . \cos s . \cos \varphi)$;

Setzt man $\cot \delta . \cos s = \operatorname{tg} x$ so ist:

$$\sin h = \frac{\sin \delta}{\cos x} . \sin (\varphi + x).$$

Mithin $\sin (\varphi + x) = \dfrac{\sin h . \cos x}{\sin \delta}$.

Man bestimme zunächt $\sqrt{\ }$ x aus der Hilfsgleichung $\operatorname{tg} x = \cot \delta . \cos s$ und dann erst $\sqrt{\ } \varphi$ aus der letztern Gleichung.

4) δ gesucht:

Nach Entwicklung 2) ist:

$$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\cos x} . \sin (\delta + x).$$

Also $\sin (\delta + x) = \dfrac{\sin h . \cos x}{\sin \varphi}$, wo $\sqrt{\ }$ x aus der Hilfsgleichung $\operatorname{tg} x = \cot \varphi . \cos s$ zuerst zu berechnen ist.

II. Aufgabe.

Welche Beziehung findet statt zwischen Deklination, Höhe und Azimuth des Sternes, sowie der Polhöhe des Beobachtungsortes?

Auflösung.

Im $\triangle$ ZPσ ist nach dem Cosinussatze:

$$\cos PZ\sigma = \frac{\cos P\sigma - \cos PZ . \cos Z\sigma}{\sin PZ . \sin Z\sigma}$$

oder $\cos BN = \dfrac{\sin \delta - \sin \varphi . \sin h}{\cos \varphi . \cos h}$, aber $BN = 180 - SB = 180^0 - w$

also $-\cos w = \dfrac{\sin \delta - \sin \varphi . \sin h}{\cos \varphi . \cos h}$

oder $\cos w = \dfrac{\sin \varphi . \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi . \cos h}$ (II.),

wo das Azimuth w vom Südpunkte S aus entweder östlich oder westlich von 0^0 bis 180^0 gezählt wird.

a) Besondere Fälle:

Für einen eben auf- oder untergehenden Stern ist $h = 0^0$, also aus obiger Gleichung

$$\cos w = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Ist die Morgenweite m des Sternes eine südliche, so ist $w = 90^0 - m$, mithin aus voriger Gleichung $\sin m = -\dfrac{\sin \delta}{\cos \varphi}$; ist aber die Morgenweite m des Sternes eine nördliche, so ist $w = 90^0 + m$, mithin $\cos (90^0 + m) = -\dfrac{\sin \delta}{\cos \varphi}$ also $\sin m = \dfrac{\sin \delta}{\cos \varphi}$.

Ist $\delta = 0^0$, so ist auch $m = 0^0$ d. h. es geht der Stern im Ostpunkt auf; ist δ nördlich oder positiv, so hat der Stern nur eine nördliche Morgenweite; ist aber δ südlich oder negativ, so hat der Stern nur eine südliche Morgenweite.

b) Allgemeine Auflösung der Gleichung:

$$\cos w = \frac{\sin \varphi . \ \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi . \ \cos h}$$

nach jeder der vier darin vorkommenden Grössen und Umformung des erhaltenen Ausdruckes in einen zur logarithmischen Berechnung brauchbaren.

1) w gesucht:

Analog Aufgabe I. b) 1).

Subtrahiert man obige Gleichung von $1 = 1$ und reduziert, so ergibt sich:

$$\sin \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (90^0 - \delta + \varphi + h) . \ \cos \frac{1}{2} (\delta + \varphi + h - 90^0)}{\cos \varphi . \ \cos h}}$$

Addiert man aber in obiger Gleichung beiderseits 1 so erhält man:

$$\cos \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (90^0 - \delta + \varphi - h) . \ \sin \frac{1}{2} (90^0 - \delta - \varphi + h)}{\cos \varphi . \ \cos h}}$$

2) δ gesucht:

Analog Aufgabe I. b) 2).

Aus obiger Gleichung $\cos w = \dfrac{\sin \varphi . \ \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi . \ \cos h}$ folgt

$$\sin \delta = \sin \varphi . \ \sin h - \cos \varphi . \ \cos h . \ \cos w$$
$$= \sin \varphi \ (\sin h - \operatorname{cotg} \varphi . \ \cos w . \ \cos h)$$

Setzt man $\operatorname{cotg} \varphi . \ \cos w = \operatorname{tg} x$ so erhält man:

$\sin \delta = \dfrac{\sin \varphi}{\cos x} \sin (h - x)$, wo x zuvor aus der Hilfsgleichung $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} \varphi . \ \cos w$ zu bestimmen ist.

3) φ gesucht:

Analog Aufgabe I. b) 3).

Aus der Gleichung (II) erhält man:

$$\sin \delta = \sin \varphi . \ \sin h - \cos \varphi . \ \operatorname{coh} h . \ \cos w.$$

Sondert man rechts den Faktor $\sin h$ ab, setzt $\operatorname{cotg} h . \ \cos w = \operatorname{tg} x$ so erhält man:

$$\sin \delta = \frac{\sin h}{\cos x} (\sin \varphi - x)$$

$$\text{also } \sin (\varphi - x) = \frac{\sin \delta . \ \cos x}{\sin h}$$

4) h gesucht:

Analog Aufgabe I. b) 4).

Nach Aufgabe II. b) 2) ist:

$$\sin \delta = \frac{\sin \varphi}{\cos x} \cdot \sin (h - x)$$

$$\text{Also } \sin (h - x) = \frac{\sin \delta . \cos x}{\sin \varphi}$$

wo x aus der Gleichung $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} \varphi . \cos w$ zu finden ist.

III. Aufgabe.

Welche Beziehung findet statt zwischen Höhe, Azimuth, Deklination und Stundenwinkel des Sternes?

Auflösung.

Im $\triangle ZP\sigma$ ist nach dem Sinussatze:

$$\sin \sigma Z : \sin \sigma P = \sin ZP\sigma : \sin PZ\sigma$$

$$\text{oder } \cos h : \cos \delta = \sin s : \sin (180^0 - w)$$

$$\text{oder } \cos h . \sin w = \cos \delta . \sin s \quad \text{(III.)}$$

a) Besonderer Fall:

Ist $h = 0^0$ so ist $\sin w = \cos \delta . \sin s$

Das Aequator-Ekliptiksystem

mit dem Dreieck: Pol-Ekliptikpol-Stern.

Sei (Figur 2) wieder M der Mittelpunkt der Himmelskugel, P der Nordpol, P_1 der Südpol derselben, AQ der Aequator, EK die Ekliptik, L u. L_1 die beiden Pole der Ekliptik, mithin LL_1 die im Punkte M auf der Ekliptikebene stehende Senkrechte, F u. H die Durchschnittspunkte der Ekliptik mit dem Aequator, und zwar F der Frühlingspunkt, H der Herbstpunkt, K der Sommer- und E der Wintersolstitialpunkt, also der Gränzkreis $PLAEP_1L_1QKP$ der Kolur der Solstitien, der durch die Punkte P, F, P_1 u. H gelegte Hauptkreis der Kolur der Aequinoktien; sei ferner σ der Ort eines Sternes, $P\sigma D$ ein Quadrant des durch σ gezogenen Deklinationskreises, also $P\sigma D$ senkrecht auf dem Aequator, $L\sigma C$ ein Quadrant des durch den Stern gelegten Breitenkreises, mithin $L\sigma C$ senkrecht auf der Ekliptik, F der Frühlingspunkt, der Anfangspunkt der Zählung in der Richtung von West durch Süd nach Ost, so ist:

Bogen $\sigma D = \delta$ die Deklination des Sternes,
„ $FD = \alpha$ die Rektascension des Sternes,
„ $\sigma C = \beta$ die astronomische Breite des Sternes,
„ $FC = \lambda$ die astronomische Länge des Sternes,
„ LP die Ekliptikpoldistanz = Bogen $KQ = \sphericalangle KMQ = \varepsilon$, die Schiefe der Ekliptik, eine Grösse, die säkularen Schwankungen unterworfen ist und deren Werth zur Zeit (im Jahre 1882) 23° 27′ 13″ beträgt.*)

Man hat daher im Dreieck $PL\sigma$:

1) Seite $P\sigma = 90^0 - \delta$,
2) „ $L\sigma = 90^0 - \beta$,
3) „ $LP = \varepsilon$,
4) $\sphericalangle LP\sigma$ = Bogen $AD = AF + FD = 90^0 + \alpha$,
5) $\sphericalangle PL\sigma$ = Bogen $CK = FK - FC = 90^0 - \lambda$,
6) $\sphericalangle P\sigma L$ = p der Positionswinkel des Sternes.

Von diesen sechs Grössen lassen sich wieder nach den Hauptgleichungen der sphärischen Trigonometrie immer je vier miteinander verbinden.

Besonders wichtig sind die in den folgenden drei Aufgaben entwickelten Beziehungen.

*) Die Veränderungen in der Schiefe der Ekliptik werden durch eine Bewegung des Aequators hervorgerufen, während die Ekliptik ruht; es ändert sich daher alle Jahre die Deklination der Sterne, die Breite aber bleibt constant. Durch eine andere Bewegung, das Rückwärtsgehen des Widderpunktes in der Richtung von Ost über Süd nach West,

IV. Aufgabe.

Welche Beziehung findet statt zwischen Deklination, Breite und Länge des Sternes, sowie der Schiefe der Ekliptik?

Auflösung.

Nach der Cosinusregel erhält man aus dem Dreieck $LP\sigma$:

$$\cos PL\sigma = \frac{\cos P\sigma - \cos LP. \cos L\sigma}{\sin LP. \sin L\sigma}$$

$$\text{oder } \cos (90^0 - \lambda) = \frac{\cos (90^0 - \delta) - \cos \varepsilon. \cos (90^0 - \beta)}{\sin \varepsilon. \sin (90^0 - \beta)}$$

$$\text{also } \sin \lambda \frac{\sin \delta - \cos \varepsilon. \sin \beta}{\sin \varepsilon. \cos \beta} \quad (\text{IV.})$$

a) Besondere Fälle:

Tritt an die Stelle des Sternes σ die Sonne, so ist $\beta = 0^0$, mithin aus obiger Gleichung IV.: $\sin \delta = \sin \varepsilon. \sin \lambda$.

b) Die allgemeine Auflösung der Gleichung IV. nach jeder der vier darin vorkommenden Grössen u. die Umformung des erhaltenen Ausdruckes in einen für logarithmische Berechnung bequemen Ausdruck wird ganz analog Aufgabe I. b. 1, 2, 3, 4. durchgeführt.

V. Aufgabe.

Welche Beziehung besteht zwischen Deklination, Rektascension und Breite des Sternes und der Schiefe der Ekliptik?

Auflösung:

Nach dem Cosinussatz erhält man aus dem Dreieck $PL\sigma$:

$$\cos LP\sigma = \frac{\cos L\sigma - \cos LP. \cos P\sigma}{\sin LP. \sin P\sigma}, \text{ oder}$$

$$\cos (90^0 + \alpha) = \frac{\cos (90^0 - \beta) - \cos \varepsilon. \cos (90^0 - \delta)}{\sin \varepsilon. \sin (90^0 - \delta)} \text{ u. hieraus}$$

$$\sin \alpha = \frac{\cos \varepsilon.}{\sin \varepsilon.} \frac{\sin \delta - \sin \beta}{\cos \delta} \quad (\text{V.})$$

---

jährlich um $50{,}_{2113}$ Sekunden, erfahren auch die Rektascensionen und die Längen bei allen Fixsternen jährliche Aenderungen und zwar nimmt die Länge eines jeden Fixsternes jedes Jahr gleichförmig um $50{,}_{2113}$ Sekunden zu; ebenso nehmen auch, aber nicht gleichförmig, die Rektascensionen bei allen Sternen zu, ausgenommen die Sterne, welche zwischen dem Pole des Aequators und der Ekliptik liegen, für welche die Rektascension mit der Zeit immer abnimmt. — Weil die Rektascensionen und Deklinationen der Fixsterne sich ändern, werden von allen grösseren Sternwarten astronomische Jahrbücher (Ephemeriden) herausgegegeben, in denen dieselben für die wichtigsten Gestirne so angegeben werden, wie sie auf Grund der neuesten Beobachtungen für die einzelnen Tage des betreffenden Jahres im Augenblicke der Culmination sein müssen. Aus der durch Beobachtung gefundenen Rektascension und Deklination eines Sternes, ergibt sich die Länge und Breite desselben durch Rechnung (siehe Rechnungsbeispiel 2).

a) Besonderer Fall:

Tritt wieder an die Stelle des Sternes die Sonne, so ist $\beta = 0^0$, mithin aus obiger Gleichung V. ist $\sin \alpha = \operatorname{cotg} \varepsilon . \ \operatorname{tg} \delta$.

b) Allgemeine Auflösung der Gleichung V. nach jeder der vier darin vorkommenden Grössen analog Aufgabe I. b. 1, 2, 3, 4.

VI. Aufgabe.

Welche Beziehung besteht zwischen Deklination, Rektascension, Breite und Länge des Sternes?

Auflösung.

Nach dem Sinussatze erhält man aus dem Dreieck $LP\sigma$:

$$\cos \beta : \cos \delta = \cos \alpha : \cos \lambda$$

$$\text{also } \cos \beta . \cos \lambda = \cos \alpha . \cos \delta \quad \text{(VI.)}$$

a) Besondere Fälle:

Wenn $\beta = 0^0$ so ist $\cos \lambda = \cos \alpha . \ \cos \delta$

$$\text{also } \cos \alpha = \frac{\cos \lambda}{\cos \delta} \quad (1.)$$

Nach IV. a) ist $\sin \delta = \sin \lambda . \ \sin \varepsilon$

„ V. a) „ $\sin \alpha = \operatorname{tg} \delta . \ \operatorname{cotg} \varepsilon .$

$$\text{Multipliziert gibt: } \sin \alpha = \frac{\sin \lambda . \ \cos \varepsilon}{\cos \delta} \quad (2.)$$

$$2) : 1) \text{ gibt: } \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \lambda . \ \cos \varepsilon \quad (3.)$$

Rechnungsbeispiele.

1.

Die Schiefe der Ekliptik zu berechnen aus Rektascension und Deklination des Sonnenmittelpunktes.

Auflösung:

Nach Aufgabe V. a) ist $\operatorname{cotg} \varepsilon = \sin \alpha . \operatorname{cotg} \delta$.

Am 5. Juli 1870 war $\alpha = 104^0\ 18'\ 9'',_3$

$\delta = 22^0\ 48'\ 12'',_8$

Für diese Zahlenwerte findet man aus obiger Gleichung

$\varepsilon = 23^0\ 27'\ 19''$ nahezu.*)

2.

Berechnung der Länge und Breite eines Sternes, wenn seine Rektascension und Deklination gegeben und ausserdem die Schiefe der Ekliptik bekannt ist. Gegeben von β Orionis im Jahre 1870:

Rektascension $\alpha = 77^0\ 4'\ 22'',_6$

Deklination $\delta = -\ 8^0\ 21'\ 14'',_6$ und

Schiefe $\varepsilon = 23^0\ 27'\ 19''$.

---

*) Nach einer vor 3000 Jahren in China gemachten Beobachtung (siehe Beispiel 19) betrug die damalige Schiefe der Ekliptik $23^0\ 52'$ und ist seit dieser Zeit in beständiger Abnahme begriffen, welche sich für ein Jahr auf $0,_{48368}'' = \frac{1}{2}$ Sekunde nahezu berechnet, so dass für das Jahr 1882 die Schiefe $\varepsilon = 23^0\ 27'\ 19'' - 12 \,.\, 0,_{48368}'' = 23^0\ 27'\ 13''$ nahezu beträgt.

Nach den von Lacrange angestellten Untersuchungen hatte die Schiefe im Jahre 29400 v. Chr. ihren grössten Wert nämlich $27^0\ 31'$. Seit jener Zeit nahm sie durch 15000 Jahre ab, bis sie im Jahre 14400 v. Chr. ihren kleinsten Wert $21^0\ 20'$ erreichte. Von da wuchs sie wieder durch 12400 Jahre und war im Jahre 2000 v. Chr. in ihrem grössten Werte $23^0\ 53'$. Seit dieser Epoche nimmt sie wieder durch 8600 Jahre ab und wird im Jahre 6600 n. Chr. ihren kleinsten Wert $22^0\ 54'$ haben. Demzufolge geht der wahre Wert der Schiefe zwischen den beiden Grenzen von 21 und 28 Grad auf und ab, ohne dieselben je zu überschreiten und zwar ist der Ausdruck dieser Aenderung der Schiefe eigentlich gar keine der Zeit proportionale Grösse.

Auflösung:

Nach Gleichung V. ist: $\sin \beta = \cos \varepsilon . \ \sin \delta - \sin \varepsilon . \ \cos \delta . \ \sin \alpha$. Scheidet man rechts $\cos \varepsilon$ aus, setzt dann $\operatorname{tg} \varepsilon . \ \sin \alpha = \operatorname{tg} x$, so erhält man

$$\sin \beta = \frac{\cos \varepsilon . \ \sin (\delta - x)}{\cos x}.$$

Man findet zunächst aus der Hilfsgleichung $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \varepsilon . \ \sin \alpha$, $\sqrt{\ } x = 22^0 \ 55' \ 26''$ und sodann aus der obigen Gleichung $\sqrt{\ } \beta = -31^0 \ 8' \ 20''$.

Ist β gefunden, so ergibt sich leicht mittelst der Sinusregel (Aufgabe VI.) der Wert für $\lambda = 75^0 \ 0' \ 48''$.

3.

Gegeben Länge und Breite eines Sternes, sowie die Schiefe der Ekliptik; berechne hieraus die Rektascension und Deklination desselben? Gegeben im Jahre 1870 von α Arietis:

die Länge $\lambda = 35^0 \ 50' \ 41'',2$;
die Breite $\beta = 9^0 \ 57' \ 41'',7$ und
die Schiefe $\varepsilon = 23^0 \ 27' \ 19''$.

Auflösung:

Man berechne zunächst nach dem Cosinussatze mittelst eines Hilfswinkels die Seite δ und sodann mittelst des Sinussatzes den Winkel α.

Nach Aufgabe IV. ist $\sin \delta = \sin \varepsilon . \ \cos \beta . \ \sin \lambda + \cos \varepsilon . \ \sin \beta$; sondert man rechts den Faktor $\cos \varepsilon$ ab, setzt dann $\operatorname{tg} \varepsilon . \ \sin \lambda = \operatorname{tg} x$, so erhält man:

$$\sin \delta = \frac{\cos \varepsilon}{\cos x} \sin (\beta + x).$$

Man findet zunächst aus der obigen Hilfsgleichung $\sqrt{\ } x = 14^0 \ 15' \ 21''$ uud sodann aus der vorigen Gleichung $\delta = 22^0 \ 50' \ 48''$.

Ist δ gefunden, so ergibt sich mit Anwendung des Sinussatzes (Aufgabe VI) $\alpha = 29^0 \ 57' \ 45''$.

4.

Die Deklination der Sonne am Mittag des 20. Mai 1882 beträgt 20^0, die Schiefe für dieses Jahr $23^0 \ 27' \ 13''$. Berechne die Länge der Sonne für diesen Zeitpunkt?

Auflösung.

Nach Cosinussatz (siehe Aufgabe IV.) ist:

$$\sin \lambda = \frac{\sin \delta - \cos \varepsilon . \ \sin \beta}{\sin \varepsilon . \ \cos \beta} \text{ u. da } \beta = 0^0$$

$$\text{so ist } \sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon}.$$

Hieraus findet man $\lambda_1 = 59^0 \ 14' \ 31''$ (und $\lambda_2 = 120^0 \ 45' \ 29''$).

5.

Am 31. März 1870 war die Länge der Sonne $10^0\ 29'$. Wie gross war ihre Rektascension und Deklination, wenn die Schiefe der Ekliptik $23^0\ 27'\ 19''$ beträgt?

Auflösung.

Mit Anwendung des Cosinussatzes (siehe Aufgabe IV.) erhält man:

$$\sin\delta = \cos\varepsilon.\ \sin\beta + \sin\varepsilon.\ \cos\beta.\ \sin\lambda \text{ u. da } \beta = 0^0$$

so ist $\sin\delta = \sin\varepsilon.\ \sin\lambda.$

Hieraus $\delta_1 = 4^0\ 9'\ 11''$ ($\delta_2 = 175^0\ 50'\ 49''$).

Ist δ berechnet so ergibt sich mit Anwendung des Cosinussatzes (siehe Aufgabe V.):

$$\sin\alpha = \frac{\cos\varepsilon.\ \sin\delta - \sin\beta}{\sin\varepsilon.\ \cos\delta} \text{ u. da } \beta = 0^0$$

so ist $\sin\alpha = \operatorname{cotg}\varepsilon.\ \operatorname{tg}\delta$

u. hieraus $\sqrt{}\ \alpha_1 = 9^0\ 38'\ 30''$ ($\alpha_2 = 170^0\ 21'\ 30''$).

6.

Gegeben die Deklination δ eines Sternes, seine augenblickliche wahre Höhe h nach der Culmination, sowie die Polhöhe φ des Beobachtungsortes. Man berechne das Azimuth des Sternes?

Auflösung.

Aus dem Dreieck Zenith-Pol-Stern erhält man mit Anwendung des Cosinussatzes (siehe Aufgabe II. b. 1):

$$\cos w = \frac{\sin\varphi.\ \sin h - \sin\delta}{\cos\varphi.\ \cos h}$$

$$\text{u. hieraus } \sin\tfrac{1}{2} w = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(90^0 - \delta + \varphi + h).\ \cos\frac{1}{2}(\delta + \varphi + h - 90^0)}{\cos\varphi.\ \cos h}}$$

Zahlenbeispiel:

$$\delta = 49^0\ 12'\ 40''$$
$$h = 74^0\ 50'\ 7''$$
$$\varphi = 49^0\ 29'\ 14''$$

Man findet $w = 97^0\ 53'\ 29''$ westlich.

7.

Von einem Sterne wurde zu einer gewissen Zeit die wahre Höhe $h = 22^0\ 45'$ und das östliche Azimuth $w = 50^0\ 15'$ bestimmt, ebenso ist dessen Deklination $\delta = +7^0\ 54'$ bekannt. Man soll den Stundenwinkel des Sternes, sowie die Polhöhe des Beobachtungsortes berechnen?

Auflösung.

Wendet man auf das Dreieck Zenith-Pol-Stern den Sinussatz an (siehe Aufgabe III.) so ergibt sich

$$\sin s = \frac{\cos h.\ \sin w}{\cos \delta}$$

und hieraus $\sqrt{} s = 45^0\ 42'\ 40''$. —

Um die Polhöhe zu bestimmen, wendet man auf das Dreieck Zenith-Pol-Stern den Cosinussatz an (siehe Aufgabe II. b. 3), so erhält man:

$$\sin(\varphi - x) = \frac{\sin \delta.\ \cos x}{\sin h} \quad \text{wo } \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} h.\ \cos w.$$

Man findet zunächst $\sqrt{} x = 56^0\ 44'\ 38''$ und sodann auch $\varphi = 67^0\ 58'\ 58''$.

8.

Berechne für Berlin, dessen Polhöhe $\varphi = 52^0\ 30'\ 16''$ beträgt, den Stundenwinkel eines Sternes, dessen Deklination $\delta = +38^0$ bekannt und dessen wahre Höhe vor der Culmination $h = 65^0\ 37'\ 30''$ bestimmt ist.

Auflösung.

Mit Anwendung des Cosinussatzes (siehe Aufgabe I.) erhält man: $\cos s = \frac{\sin h - \sin \varphi.\ \sin \delta}{\cos \varphi.\ \cos \delta}$; subtrahiert man diese Gleichung von $1 = 1$ und vereinfacht, so ergibt sich ein Ausdruck für $\sin \frac{1}{2} s$; man findet hieraus $\sqrt{} s = 28^0\ 17'$ Bogenmass $= 1^h\ 53^m\ 8^{sec}$ Zeitmass (Sternzeit) d. h. der Stern braucht vom Augenblick der Beobachtung bis zur Culmination noch $1^h\ 53^m\ 8^{sec.}$ Sternzeit.

9.

An einem Orte wurde die scheinbare Höhe eines Sternes zur Zeit der Culmination mittelst des Theodoliten gemessen zu $50^0\ 24'\ 30''$. Man bestimme die Polhöhe des Beobachtungsortes, wenn die Refraktion $48''$, die Depression des Horizonts für den Standpunkt des Beobachters $5'\ 12''$ und die Deklination des Sternes $+12^0\ 25'\ 40''$ beträgt?

Auflösung.

Die wahre Höhe h des Sternes ist gleich der gemessenen scheinbaren Höhe vermindert um die Summe aus Refraktion und Depression, also $h = 50^0\ 18'\ 30''$. Man findet (nach Aufgabe I. a. 2):

$$\varphi = 52^0\ 7'\ 10''.$$

10.

Am 12. Mai wurde auf dem Meere die Höhe der Sonne zur Zeit ihrer Culmination bis zum obersten Punkte des Sonnenrandes mittelst des Sextanten gemessen zu $64^0\ 20'\ 30''$. Man soll die Polhöhe des Beobachtungsortes berechnen, wenn die Refraktion $28''$, die Depression des Horizonts $3'\ 42''$, die Deklination zur Zeit der Beobachtung $18^0\ 4'$ und der scheinbare Durchmesser derselben $31'\ 40''$ beträgt.

Auflösung.

Die wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes erhält man, wenn man von der gemessenen scheinbaren Höhe die Summe aus Refraktion, Depression und Sehwinkel des Sonnenhalbmessers subtrahiert. Man findet (nach Aufgabe I.)

$$\varphi - \delta = 90^0 - h \text{ u. hieraus}$$
$$\varphi = 44^0\ 3'\ 30''.$$

11.

Am 21. Juni 1872 war in Berlin die wahre Culminationshöhe des Sonnenmittelpunktes $h_1 = 60^0\ 57'\ 5'',_5$, am 21. Dezember aber die Culminationshöhe $h_2 = 14^0\ 2'\ 18'',_5$ gefunden. Wie gross ist in jedem Falle die Deklination der Sonne, wenn die Polhöhe von Berlin $\varphi = 52^0\ 30'\ 16'',_7$ beträgt? Berechne zur Probe direkt aus den beiden Culminationshöhen die Polhöhe von Berlin.

Auflösung.

Man findet die Deklination der Sonne
am 21. Juni: $\delta_1 = h_1 - (90^0 - \varphi) = 23^0\ 27'\ 22'',_2$,
am 21. Dez.: $\delta_2 = (90^0 - \varphi) - h_2 = 23^0\ 27'\ 24'',_2$ und die Polhöhe von Berlin

$$\varphi = 90^0 - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2) = 52^0\ 30'\ 18''.$$

12.

a) Welche Höhe hat der Mittelpunkt der Sonne 1) am 24. Juni, 2) am 1. Dezember zwei Stunden vor der Culmination an einem Orte, dessen

Polhöhe $\varphi = 50^0$ ist, wenn die Deklination der Sonne für den erstern Zeitpunkt $23^0\ 25'\ 49''$ und für den zweiten Zeitpunkt $-21^0\ 49'\ 23'',_7$ beträgt?

b) Wie gross ist die Culminationshöhe des Sonnenmittelpunktes an den beiden vorgenannten Tagen, wenn zur Zeit der Culmination der Sonne ihre Deklination bez. $+23^0\ 25'\ 47'',_8$ u. $-21^0\ 50'\ 11'',_3$ beträgt?

Antwort:

a) 1) $54^0\ 37'\ 20''$
2) $13^0\ 24'\ 52''$

b) 1) $63^0\ 25'\ 48''$
2) $18^0\ \ 9'\ 49''$

13.

Aus der Polhöhe eines Ortes, der Deklination der Sonne und deren wahren Höhe ist die Zeit der vor (oder nach) der Culmination der Sonne gemachten Beobachtung zu bestimmen.

Auflösung.

Aus der Gleichung I. b) 1) ergibt sich der Wert für den Stundenwinkel s der Sonne und zwar im Bogenmass; dieses verwandelt man in Zeitmass (15 Grad Bogenmass = 1 Stunde Sternzeit); die in Sekunden ausgedrückte Sternzeit wird in Sekunden mittlerer Zeit verwandelt (1 Sekunde Sternzeit = $0,_{997269}$ Sekunden mittlerer Zeit oder 86400 Sekunden Sternzeit = 86164 Sek. m. Z.). Man erhält nun die Zeit, welche vom Augenblick der Beobachtung bis zur Culmination der Sonne d. h. bis zum wahren Mittag verfliesst, mithin die Zeitangabe vor dem wahren Mittag; hiezu hat man noch die Zeitgleichung (in mittlerer Zeit ausgedrückt) zu addieren, um die von unsern Räderuhren angegebene Zeit zu erhalten. — Analog ist zu verfahren, wenn die Beobachtung nachmittags fällt.

Zahlenbeispiel.

Um wie viel Uhr vormittags hatte am 21. Juni in München die Sonne eine wahre Höhe von 40^0, wenn die Polhöhe Münchens $48^0\ 8'$, die Deklination der Sonne $23^0\ 27'$ und die Zeitgleichung $1^m\ 20^s$ beträgt?

Antwort.

Der Stundenwinkel der Sonne beträgt $39^0\ 54'\ 14''$ um $9^h\ 22^m\ 9^s$.

14.

Man soll für einen gewissen Tag die Zeit des Sonnen-Aufgangs und Untergangs bestimmen an einem Orte, dessen Polhöhe bekannt ist, wenn ausserdem die Deklination der Sonne für die Zeit ihres Aufgangs und Untergangs und ebenso die Zeitgleichung für diese beiden Zeitpunkte gegeben ist.

Auflösung.

Die gesuchte Zeit ist der Augenblick, in welchem der Sonnenmittelpunkt im Horizont erscheint. Da aber im Horizont die Strahlenbrechung $\beta = 34' \ 54''$ beträgt, so ist der Zenithabstand des Sonnenmittelpunktes $90^0 + \beta$ oder die Höhe der Sonne $h = -34' \ 54''$.

Zur Bestimmung des Stundenwinkels s der Sonne benützt man die Gleichung (I. b. 1.), wo das Vorzeichen — vor der Wurzel für den Aufgang, das Vorzeichen + aber für den Untergang genommen wird, da der auf der Ostseite des Meridians gelegene Stundenwinkel negativ, der auf der Westseite gelegene aber positiv zu rechnen ist. —

Der für den Stundenwinkel gefundene Wert im Bogenmass wird in Zeitmass (Sternzeit) verwandelt und zur Bestimmung der verlangten Zeitangabe ganz analog wie im vorigen Beispiele verfahren.

Zahlenbeispiel.

Wann geht für Berlin, dessen Polhöhe $52^0 \ 30'$ ist, der Mittelpunkt der Sonne a) am 24. Juni, b) am 1. Dezember auf und unter?

Gegeben am 24. Juni:

Für Sonnenaufgang	$\delta = + 23^0 \ 26' \ 7''$	und Zeitgleichung	$z = + \ 1^m \ 57^s$
„ Sonnenuntergang	$\delta = + 23^0 \ 25' \ 20''$	„ „	$z = + \ 2^m \ 5^s$

Am 1. Dezember:

Für Sonnenaufgang	$\delta = - 21^0 \ 48' \ 36''$	und Zeitgleichung	$z = - 10^m \ 55^s$
„ Sonnenuntergang	$\delta = - 21^0 \ 51' \ 42''$	„ „	$z = - 10^m \ 47^s$

Auflösung.

Am 24. Juni beträgt der Stundenwinkel der Sonne zur Zeit ihres Aufganges $125^0 \ 40'$, zur Zeit ihres Unterganges $125^0 \ 38' \ 40''$;

Zeit des Aufganges um $3^h \ 40^m \ 39^s$ mittlere Zeit,

„ „ Unterganges um $8^h \ 23^m \ 18^s$ „ „

Am 1. Dezember beträgt der Stundenwinkel der Sonne zur Zeit ihres Aufganges $59^0\ 45'\ 50''$, zur Zeit ihres Unterganges $59^0\ 40'\ 26''$;
Zeit des Aufganges um $7^h\ 50^m\ 41^s$ mittlere Zeit,
„ „ Unterganges um $3^h\ 47^m\ 16^s$ „ „ *)

15.

Wo geht für einen Ort, dessen Polhöhe φ ist, der Mittelpunkt der Sonne a) am 21. Juni, b) am 21. Dezember auf, wenn die Deklination der Sonne für die Zeit des Aufganges an den beiden Tagen bekannt ist.

Auflösung.

Man bestimme das östliche Azimuth w aus der Gleichung (II. b. 1), wo $h = -34'\ 54''$ zu setzen, so ist im erstern Falle die Morgenweite der Sonne eine nördliche, nämlich $m = w - 90^0$ und im zweiten Falle dieselbe eine südliche und zwar $m = 90^0 - w$.

Zahlenbeispiel:

$\varphi = 50^0$; Deklination der Sonne am 21. Juni zur Zeit ihres Aufganges $+ 23^0\ 27'$ und am 21. Dezember $- 23^0\ 26'\ 30''$.

Man findet für diese Zahlenwerte mit Berücksichtigung der Strahlenbrechung die Morgenweite der Sonne a) $39^0\ 8'\ 20''$, b) $37^0\ 21'\ 32''$.**)

---

*) Berechnet man die Zeit des **wahren** Sonnenaufgangs d. h. für die Höhe $h = 0^0$ so ist $\cos s = - \operatorname{tg} \varphi .\ \operatorname{tg} \delta$ (I. a.); man erhält dann

für den Stundenwinkel beim Aufgange der Sonne am 24. Juni $s = 124^0\ 23'\ 45''$
„ „ „ „ Untergange „ „ „ „ „ $s = 124^0\ 22'\ 16''$
„ „ „ „ Aufgange „ „ „ 1. Dez. $s = 58^0\ 34'$
„ „ „ „ Untergange „ „ „ „ „ $s = 58^0\ 28'\ 30''$
für die Zeit des Sonnenaufganges am 24. Juni . . . . $3^h\ 45^m\ 43^s$ (m. Z.)
„ „ „ „ Sonnenunterganges „ „ „ . . . . $8^h\ 19^m\ 35^s$ „ „
„ „ „ „ Sonnenaufganges „ 1. Dez. . . . . $7^h\ 55^m\ 27^s$ „ „
„ „ „ „ Sonnenunterganges „ „ „ . . . . $3^h\ 42^m\ 39^s$ „ „

In Folge der Refraktion tritt also eine **Verlängerung des Tages** ein und zwar beträgt diese am 24. Juni 8 Minuten 47 Sekunden, am 1. Dezember aber 9 Min. 23 Sek.

Die durch die Refraktion bewirkte Verlängerung des Tages ist um so bedeutender, je grösser die Polhöhe oder geographische Breite des Ortes.

**) Wird die Strahlenbrechung nicht berücksichtigt, so ergibt sich für die nördliche Morgenweite der Sonne bei ihrem wahren Aufgange am 21. Juni aus der Gleichung (II. a) $\sin m = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$ der Werth $m = 38^0\ 15'$; für die südliche Morgenweite der Sonne im Augenblicke ihres wirklichen Aufganges am 21. Dezember aus der Gleichung (II. a) $\sin m = - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$ der Werth $m = 38^0\ 14'$.

Bei nördlicher Deklination der Sonne ist in Folge der Refraktion die Morgenweite grösser, bei südlicher Deklination aber kleiner.

Analog lässt sich auch der Ort der Sonne bei ihrem Untergange d. h. ihre Abendweite bestimmen, wenn die Polhöhe des Beobachtungsortes und die Deklination der Sonne für die Zeit des Unterganges gegeben sind.

16.

Bestimmung der Zeit des Sonnenaufganges auf einem Berge.

Der Gipfel des Vesuv hat eine Seehöhe von ungefähr 1100^m. Wie viel Zeit früher sieht ein auf dem Berggipfel stehender Beobachter am 1. Mai die Sonne über dem Meere aufgehen, als ein anderer Beobachter an der Küste, dessen Augen 2^m über dem Wasser sich befinden, wenn die Polhöhe $\varphi = 41^0\ 10'$, die Deklination der Sonne am 1. Mai zur Zeit ihres Aufganges 15^0, die Depression des Horizonts für den Beobachter auf dem Gipfel 1 Grad, für den Beobachter an der Küste aber $2'\ 33''$ beträgt?

Auflösung.

Der Stundenwinkel der Sonne bei ihrem Aufgang für den Beobachter auf dem Gipfel beträgt $105^0\ 48' = 7^h\ 3^m\ 12^s$ Sternzeit $= 7^h\ 2^m\ 3^s$ m. Z. Der Stundenwinkel der Sonne für den Beobachter an der Küste aber beträgt $104^0\ 26'$ oder $6^h\ 56^m\ 2^s$ Sternzeit $= 6^h\ 54^m\ 54^s$ mittl. Zeit; mithin geht die Sonne oben früher auf um 7 Minuten 9 Sekunden mittlere Zeit.

17.

Berechnung der Dauer der astronomischen Dämmerung an einem Orte, dessen Polhöhe gegeben, wenn ausserdem die Deklination der Sonne bekannt ist.

Auflösung.

Die astronomische Dämmerung (Abenddämmerung) beginnt im Augenblicke des scheinbaren Sonnenunterganges und endigt mit dem Sichtbarwerden der Sterne sechster Grösse. Nach angestellten Beobachtungen tritt das Ende der Abenddämmerung (oder der Beginn der Morgendämmerung) ein, wenn die Sonne 18 Grad unter dem Horizont steht d. h. wenn ihre Höhe — 18 Grad ist. Man berechnet daher den Stundenwinkel s der Sonne im Augenblicke ihres scheinbaren Unterganges aus der Gleichung (I. b. 1), wo $h = -34'\ 54''$; ebenso den Stundenwinkel s_1 der Sonne beim Ende der Dämmerung aus derselben Gleichung, wo $h = -18^0$; verwandelt die im Bogenmass ausgedrückte Differenz $s_1 - s$ in Zeitmass (Sternzeit) und diese in mittlere Zeit, um die gesuchte Dämmerungsdauer in mittlerer Zeit zu erhalten.

Zahlenbeispiel.

Wie lange dauert am 1. September Abends die Dämmerung an einem Orte, dessen Polhöhe $50^0\ 19'$, wenn die Deklination der Sonne um diese Zeit $8^0\ 10'$ beträgt?

Man findet $s = 100^0\ 54'$, $s_1 = 130^0\ 50'$ und hieraus für die Dämmerungsdauer 1 Stunde 59 Minuten 24 Sekunden mittlere Zeit.*)

18.

Die Länge des Schattens eines $b = 2^m$ hohen Gnomons beträgt am 24. Juni im Augenblicke der Culmination der Sonne $a = 1{,}1^m$. Welches ist die Polhöhe des Beobachtungsortes, wenn die Deklination der Sonne zur Zeit ihrer Culmination $23^0\ 25'\ 48''$, die Refraktion $32''$ und der Sehwinkel des Sonnenhalbmessers $15'\ 46''$ beträgt?

Auflösung.

Man findet zunächst den scheinbaren Höhenwinkel h_1 des obersten Punktes des Sonnenrandes aus der Gleichung $\operatorname{tg} h_1 = \frac{b}{a}$, nämlich $h_1 = 61^0\ 11'\ 22''$; sodann den wahren Höhenwinkel des Sonnenmittelpunktes $h = 60^0\ 55'\ 3''$ und schliesslich aus der Gleichung (I. a. 2) auch die Polhöhe $\varphi = 52^0\ 30'\ 45''$.**)

19.

Die kleinste Schattenlänge eines 8 Fuss hohen Gnomons (Obelisken) fand der sternkundige Kaiser Tschu-Kong zu Honan-Fu in China im Jahre 1100 v. Chr. im Wintersolstitium zu $12\frac{3}{3}\frac{1}{2}$ Fuss, im Sommersolstitium zu $1\frac{1}{2}$ Fuss. Wie berechnet sich aus dieser 3000 Jahre alten Beobachtung die damalige Schiefe der Ekliptik, wenn die Strahlenbrechung bei der grossen Höhe $11''$, bei der kleinen Höhe $1'\ 33''$, der scheinbare Halbmesser der Sonne am 21. Juni $15'\ 46''$ und am 21. Dezember $16'\ 17''$ ist?

Auflösung.

Die wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes am Mittag des 21. Juni findet man $H = 79^0\ 6'\ 52'',5$; die wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes am

---

*) Die Dämmerungsdauer ist am kürzesten am Aequator, am längsten an den Polen. Für denselben Ort ist die Dämmerungsdauer am kürzesten zur Zeit der Aequinoktien, am längsten zur Zeit der Solstitien.

**) Die mittelst des Gnomons gefundene Höhe h_1 ist die scheinbare Höhe des obersten Punktes des Sonnenrandes; um die wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes zu erhalten, hat man von dem mittelst des Gnomons beobachteten Höhenwinkel die Summe aus Sehwinkel des Sonnenhalbmessers und der Refraktion zu subtrahieren.

Mittag des 21. Dezember $h = 31^0\ 22'\ 18'',_5$; die Schiefe $\varepsilon = \frac{1}{2}(H - h) = 23^0\ 52'\ 17''$. — Aus den beiden mittägigen Sonnenhöhen H u. h im Sommer- und Wintersolstitium findet man auch die Polhöhe $\varphi = 90^0 - \frac{1}{2}(H + h) = 34^0\ 45'\ 24'',_5$*).

20.

Berechne die Entfernung von Paris bis Berlin, wenn die Erde als eine Kugel mit dem Halbmesser $r = 6370000^m$ betrachtet wird, die geographische Länge von Paris $\lambda_1 = 20^0$, die von Berlin $\lambda = 31^0\ 3'$, die geographische Breite von Paris $\beta_1 = 48^0\ 50'$, die von Berlin $\beta_2 = 52^0\ 30'$ beträgt?

Auflösung.

Sei (Figur 3) NASB der erste Meridian (von Ferro), N der Nordpol, S der Südpol, AB der Aequator der Erdkugel, $NPCSC_1N$ der durch Paris u. $NBDSD_1N$ der durch Berlin gehende Meridian, sei ferner durch die 3 Punkte P, B u. O (den Mittelpunkt der Erde) ein grösster Kreis gelegt, so ist Dreieck NPB ein von drei Bogen grösster Kugelkreise begrenztes Dreieck, also ein spärisches Dreieck, in dem bekannt ist:

1) Seite $NP = NC - PC = 90^0 - \beta_1$
2) Seite $NB = ND - BD = 90^0 - \beta_2$ und
3) $\sphericalangle PNB =$ Bogen $CD = AD - AC = \lambda_2 - \lambda_1$.

Mithin ist nach dem Cosinussatze aus zwei Seiten und ihrem Zwischenwinkel die dritte Seite (Bogen BP) mittelst eines Hilfswinkels zu berechnen. Man findet Bogen $BP = 7^0\ 53',_5$ nahezu, und da $1^0 = 111,_{18}{}^{km}$ gefunden wird, so ergibt sich für die Länge des Bogens BP nahezu 877 Kilometer.

*) Der scheinbare Sonnendurchmesser ist z. Z. am grössten am 1. Januar, wo die Erde der Sonne am nächsten (im Perihelium) steht, am kleinsten aber am 2. Juli, wo die Erde am weitesten von der Sonne entfernt ist (im Aphelium). Im Perihelium beträgt der scheinbare Sonnendurchmesser 32′ 34″, im Aphelium 31′ 29″, so dass der mittlere scheinbare Sonnendurchmesser nahezu 32′ ist.

Mittag des 21. Dez … $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (H — h) =
23° 52′ 17″. — Aus … H u. h im Sommer-
und Wintersolstitiu… $= 90^0 - \frac{1}{2}$ (H + h)
= 34° 45′ 24″,5*).

Berechne di… wenn die Erde als
eine Kugel mit de… tet wird, die geo-
graphische Länge v… = 31° 3′, die geo-
graphische Breite vo… = 52° 30′ beträgt?

Sei (Figur 3…), N der Nordpol,
S der Südpol, AB d… der durch Paris
u. NBDSD₁N der … ferner durch die
3 Punkte P, B u. O… ster Kreis gelegt,
so ist Dreieck NPB… kreise begrenztes
Dreieck, also ein sp…

1) Seite N…

2) Seite N…

3) $\surd$ PNB…

Mithin ist na… ihrem Zwischen-
winkel die dritte Seit… ls zu berechnen.
Man findet Bogen B… 111,18 km gefunden
wird, so ergibt sich … u 877 Kilometer.

---

*) Der scheinba… n 1. Januar, wo die
Erde der Sonne am nächs… am 2. Juli, wo die
Erde am weitesten von d… rihelium beträgt der
scheinbare Sonnendurchmes… r mittlere scheinbare
Sonnendurchmesser nahezu …

Fig. I.

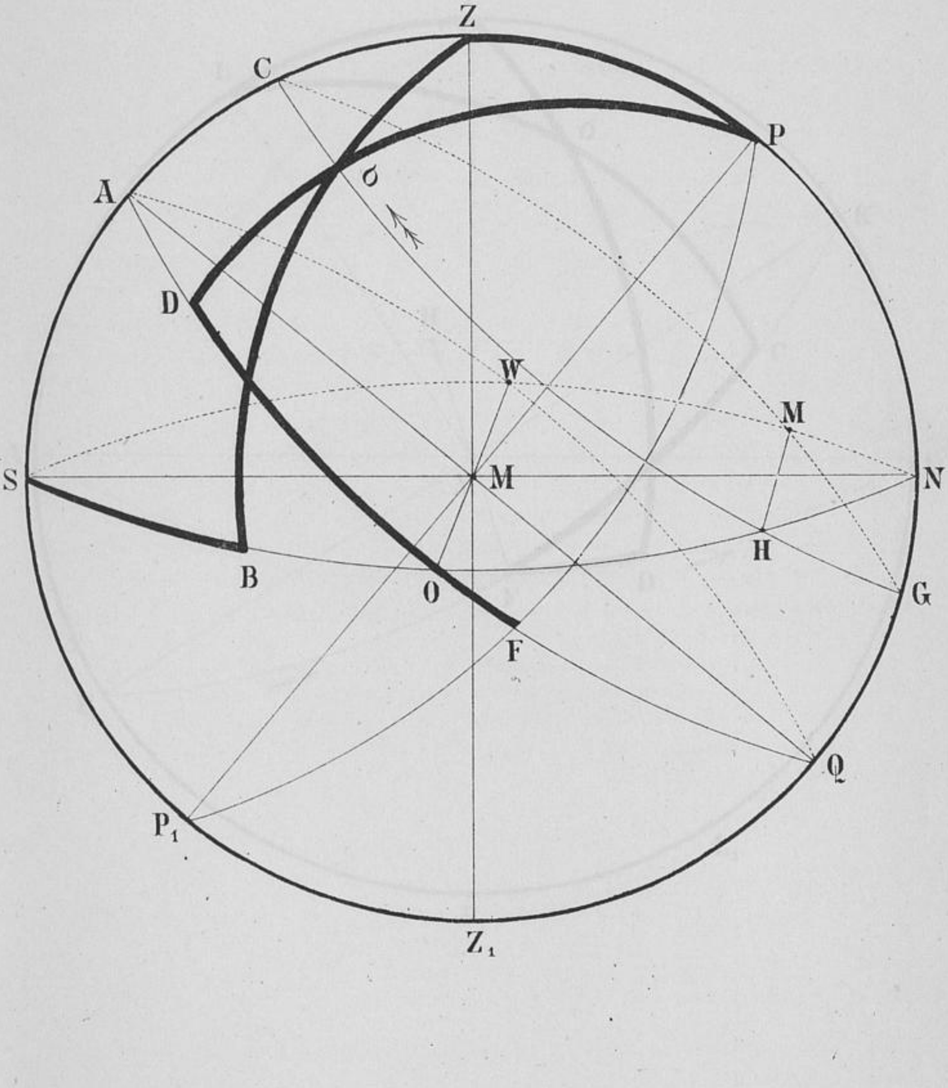

Fig. II.

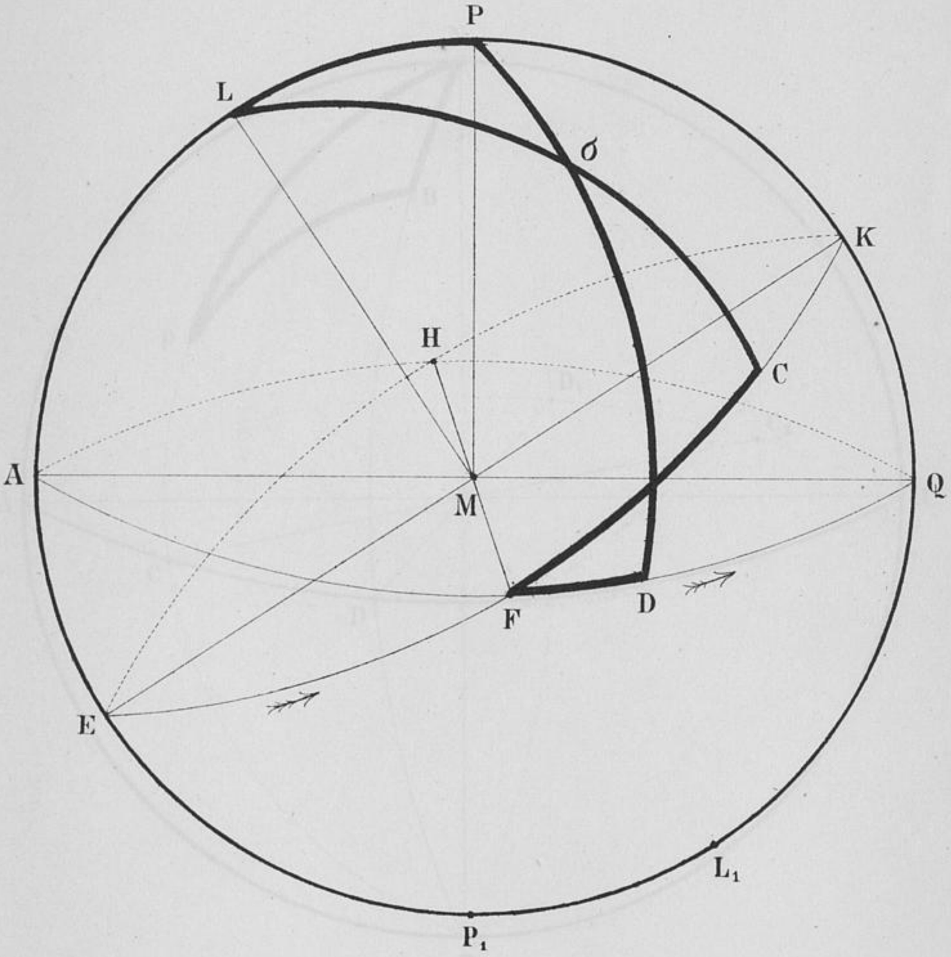

Fig. III.