

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE ZUM PROGRAMM DES KÖNIGL. GYMNASIUMS
UND REALGYMNASIUMS ZU INSTERBURG · OSTERN 1908.

**TAFELN FÜR SYMMETRISCHE FUNKTIONEN
BIS ZUR ELFTEN DIMENSION.**

MIT KURZEN ERLÄUTERUNGEN.

VON

CARL KOSTKA,

PROFESSOR AM KÖNIGL. GYMNASIUM UND REALGYMNASIUM
ZU INSTERBURG.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1908.

Progr.-Nr. 5.

90m (1908)
4



h
f



Vorbemerkung.

Die Arbeit hat als Grundthema die bekannte Aufgabe, bei einer algebraischen Gleichung eine symmetrische Funktion der Wurzeln durch die Koeffizienten darzustellen, deren einfachste Fälle schon in der Schule behandelt werden. Von den vielen Wegen, die zur allgemeinen Lösung vorgeschlagen worden sind, werden fast alle bei höheren Dimensionen ungangbar, weil die Rechnung gar zu verwickelt wird. Nur das Verfahren, das gewisse Determinanten der Koeffizienten verwendet, bleibt durchführbar und übersichtlich für beliebig hohe Dimensionen, weil es aus der Hauptfrage die Einzelfragen herauszulösen und jede der gesuchten Zahlen für sich nach einfachen Methoden zu berechnen oder zu kontrollieren gestattet. Man findet die betreffenden Sätze entwickelt im *Journal für Mathematik* (Crelle) Bd. 81, S. 281—289; Bd. 82, S. 212—229; Bd. 93, S. 89—123; Bd. 132, S. 159—166; ferner zusammenfassend im *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* Bd. XVI, S. 429—450. Auf diese Arbeiten, namentlich auf die letztgenannte, wird im folgenden ein für allemal Bezug genommen. Tafeln für symmetrische Funktionen sind mehrfach veröffentlicht: von Meier Hirsch, Cayley, Faà di Bruno, Durfee u. a. In jeder dieser Tafeln wird für eine Aufgabe oder höchstens für zwei (Durfee) in ihren verschiedenen Fällen die Lösung gegeben. Aus jeder der hier (zum ersten Mal vollständig für die Dimensionen I bis XI) abgedruckten Tafeln kann man für 18 Aufgaben direkt, für 12 mit geringer Mühe indirekt, im ganzen für 30 Aufgaben in ihren verschiedenen Fällen die Lösungen entnehmen. Sie sind also ungemein reichhaltig; überdies sind sie leichter zu berechnen und zu kontrollieren als die anderen Tafeln. Sie hier zu veröffentlichen war im *Jahresbericht* zugesagt (a. a. O., S. 433 Anm.). Ich hatte den Wunsch, Erläuterungen elementarer Art den Tafeln beizufügen, um den besseren Schülern zu zeigen, wie nahe sie dem Verständnis dieser Gedankenreihen stehen, die ja vollständig erst zum Lehrplan der Universität gehören. Jedoch erhielt dadurch das Programm einen Umfang, für den die verfügbaren Geldmittel nicht ausreichten. Ich muß deshalb auf die notwendigsten kurzen Erklärungen mich beschränken und weiteres auf eine andere Gelegenheit versparen. Der Zusammenhang mit der Schule geht dabei allerdings verloren; höchstens könnten die Tafeln zur Kontrolle leichter Aufgaben, wie sie wohl auch die Schule schon behandeln darf, benutzt werden.

A. Allgemeines. Bezeichnungen.

Von symmetrischen Funktionen der Größen t_1, t_2, \dots, t_n kommen verschiedene Formen in Betracht. Die elementaren symmetrischen Funktionen werden mit c_1, c_2, \dots, c_n bezeichnet, so daß

$$F(t) = (t - t_1) \cdot (t - t_2) \cdots (t - t_n) = t^n - c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} \cdots (-1)^n \cdot c_n \quad (1)$$

und t_1, \dots, t_n die Wurzeln von $F(t) = 0$ sind. Der einfachste Typus T der allgemeinen symmetrischen Funktion wird dargestellt durch die Summe aller Produkte, welche aus $t_1^{\alpha_0} t_2^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_{n-1}}$ durch die verschiedenen Permutationen der Exponenten entstehen; dabei sind $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ganze positive Zahlen oder Null. Die nicht verschwindenden Exponenten werden als Indices dem T hinzugefügt, gleiche Indices auch symbolisch in Potenzform zusammengefaßt. Also:

$$\sum t_1^{\alpha_0} t_2^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_{n-1}} = T_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}} = T_{1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots} = T_{(\alpha)}; \quad (2)$$

z. B.:

$$\sum t_1^5 t_2^4 t_3^4 t_4 t_5 t_6 = T_{1^5, 4^2, 5}.$$

K ist ein Produkt der c ; die Indices der c werden angefügt:

$$K_{(\beta)} = K_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots} = c_{\beta_0} \cdot c_{\beta_1} \cdot c_{\beta_2} \cdots \quad (3)$$

z. B.:

$$K_{4^2, 1^2} = c_4 \cdot c_4 \cdot c_4 \cdot c_1 \cdot c_1 = c_4^3 \cdot c_1^2.$$

Aus den Elementen c werden Determinanten C aufgebaut und durch die Indices der Diagonalreihe näher bezeichnet. In jeder Zeile solcher Determinante bilden die Indices der c eine aufsteigende arithmetische Reihe mit der Differenz 1, die Indices der Diagonalreihe sind absteigend geordnet:

$$C_{(\lambda)} = C_{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}} = \begin{vmatrix} c_{\lambda_0} & c_{\lambda_0+1} & \cdots & c_{\lambda_0+r-1} \\ c_{\lambda_1-1} & c_{\lambda_1} & \cdots & c_{\lambda_1+r-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\lambda_{r-1}-r+1} & c_{\lambda_{r-1}-r+2} & \cdots & c_{\lambda_{r-1}} \end{vmatrix}; \quad (4)$$

z. B.:

$$C_{6, 3, 1^2} = \begin{vmatrix} c_6 & c_7 & c_8 & c_9 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Dabei wird $c_0 = 1$, jedes c mit negativem Index = 0 gesetzt. Jedes t , dessen Index größer als n ist, soll Null sein. Daher verschwindet auch jedes c , dessen Index größer als n ist, jedes K

oder C , dessen höchster Index, jedes T , dessen Anzahl der Indices den Wert n übersteigt. Die Reihe (λ) ist immer absteigend geordnet; bei (α) und (β) ist die Anordnung in der Regel willkürlich. Die Summe der Indices bei T, K, C wird als Dimension der Funktion bezeichnet und hier μ genannt:

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1} = 1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \dots = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{r-1}. \quad (5)$$

In den einfachsten Fällen ist $T_1^\mu = c_\mu = K_\mu = C_\mu$; T_μ ist eine Potenzsumme der t ; $K_1^\mu = c_1^\mu$ die Potenz eines Polynoms. C_{1^μ} verdient besondere Beachtung. Wir setzen:

$$C_{1^r} = c_r \quad (6)$$

z. B.:

$$c_5 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Es ist c_r die Summe aller Kombinationen von t_1, t_2, \dots, t_n mit Wiederholung zur r -ten Klasse, jede Kombination als Produkt aufgefaßt, während doch c_r in gleichem Sinne die Summe der Kombinationen ohne Wiederholung war. Aus diesen Größen c bilden wir in Anlehnung an (1), (2), (3), (4):

$$\mathfrak{F}(t) = t^n - c_1 \cdot t^{n-1} + c_2 \cdot t^{n-2} \dots (-1)^n \cdot c_n = (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n); \quad (7)$$

$$\mathfrak{X}_{(\alpha)} = \mathfrak{X}_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}} = \sum t_1^{\alpha_0} t_2^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_{m-1}}; \quad (8)$$

$$\mathfrak{R}_{(\beta)} = \mathfrak{R}_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots} = c_{\beta_0} \cdot c_{\beta_1} \cdot c_{\beta_2} \dots; \quad (9)$$

$$\mathfrak{C}_{(\lambda)} = \mathfrak{C}_{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}} = |c_{\lambda_0} \ c_{\lambda_0 + \lambda_1} \ \dots \ c_{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{r-1}}|, \quad (10)$$

wo in (10) der Ausdruck rechts eine Determinante bedeutet, deren h -te Zeile aus der hingeschriebenen dadurch entsteht, daß $\lambda_{h-1} - h + 1$ an die Stelle von λ tritt. Auch hier ist $c_0 = 1$ und jedes c mit negativem Index $= 0$ zu setzen. Die c , deren Index größer ist als n , sind in \mathfrak{C} nicht $= 0$ zu nehmen, sondern ebenso wie c_1, \dots, c_n aus (6) zu berechnen. Man könnte jedoch auch, wie bei (4), jedes c , dessen Index n überschreitet, $= 0$ setzen; die so gebildete Determinante wird mit $\bar{\mathfrak{C}}$ bezeichnet.

Entwickelt man (6) nach den Elementen der ersten Zeile, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$c_r - c_1 \cdot c_{r-1} + c_2 \cdot c_{r-2} \dots (-1)^{r-1} \cdot c_{r-1} \cdot c_1 + (-1)^r \cdot c_r = 0, \quad (11)$$

wo r eine ganze positive Zahl ist. Jede dieser Gleichungen hat $r + 1$ Glieder, so lange $r \leq n$; ist $r > n$, so hat sie $n + 1$ Glieder, weil c_{n+h} verschwindet. Die ersten n dieser Gleichungen bleiben unverändert richtig, wenn jedes c_h mit c_n vertauscht wird. Daher ist auch

$$c_r = \bar{\mathfrak{C}}_{1^r} \quad (12)$$

zunächst richtig für $r \leq n$, aber auch für $r > n$, weil die Determinante dann verschwindet, da mit Hilfe von (11) alle Elemente der letzten Spalte $= 0$ gemacht werden können. Man könnte auch setzen:

$$\bar{c}_r = \bar{\mathfrak{C}}_{1^r}; \quad (12a)$$

das so erklärte \bar{c}_r fällt mit c_r zusammen für $r \leq n$; für $r > n$ ist es aber nicht, wie $c_r = 0$, sondern eine ganze Funktion von c_1, c_2, \dots, c_n , also auch von c_1, c_2, \dots, c_n . Aus den \bar{c}_r könnte man im Einklang mit (10) Determinanten $C_{(\lambda)}$ bilden, in denen die Elemente, deren Index n überschreitet, nicht verschwinden.

Die Funktionen $T, K, C, \mathfrak{X}, \mathfrak{R}, \mathfrak{C}$ sind ebenso wie die c und c für t_1, \dots, t_n nicht nur symmetrisch, sondern auch ganz und homogen. Man kann die Frage nach dem Zusammenhang von je zwei dieser Funktionsformen aufwerfen. In jeder der betreffenden Gleichungen müssen alle Glieder die gleiche Dimension haben.

Zu der Zahlenreihe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ erhält man die *konjugierte* oder *zugeordnete* (Cayley), indem man jedes α in Summanden 1 auflöst, diese Summen gleichmäßig untereinander schreibt und spaltenweise addiert. Z. B. sind 11, 5^2 , 3, 2, 1^3 und 8, 5, 4, 3^2 , 1^6 einander zugeordnet; ebenso $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ und $1^{\lambda_0 - \lambda_1}, 2^{\lambda_1 - \lambda_2}, \dots, (r-1)^{\lambda_{r-2} - \lambda_{r-1}}, r^{\lambda_{r-1}}$. Eine Reihe kann sich selbst konjugiert sein, z. B. 7, 4^2 , 3, 1^3 . Die zu (α) zugeordnete Reihe wird mit (α') bezeichnet; zu (β) ist (β') , zu (λ) ist (λ') zugeordnet.

Die Anordnung aller Indexreihen innerhalb derselben Dimension geschieht auf zweierlei Art: a) Die natürliche oder *Hauptordnung*: Jede Indexreihe wird absteigend geordnet und von zwei Indexreihen steht die voran, die an der ersten Stelle den höheren Index hat; stimmen aber in den h ersten Stellen die Zahlen überein, so steht die Reihe voran, welche in der $(h+1)$ -ten Stelle die höhere Zahl hat (vgl. die Tafeln links). b) Die *Nebenordnung*: Die einzelnen Reihen sind nacheinander denen in der Hauptordnung konjugiert. Daraus folgt, daß von zwei Reihen diejenige voransteht, welche mehr Indices enthält; enthalten sie gleich viel Indices, so steht die mit der geringeren Anzahl von Einsen voran; stimmen sie auch darin überein, so entscheidet die geringere Anzahl von Zweien usf. Vgl. die Tafeln rechts oder oben oder unten.

Jede Determinante C kann in bekannter Art nach den K entwickelt werden. Sind dann gleiche K vereinigt, so bedeutet $\kappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ den *Zahlenfaktor, den $K_{(\alpha)}$ in der Entwicklung von $C_{(\lambda)}$ nach den K erhält*. Jedes C kann auch nach den T entwickelt werden, am bequemsten mit Hilfe von Differentiationen nach den t . Sind dann gleiche T zusammengefaßt, so bedeutet $\tau_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ den *Zahlenfaktor, den $T_{(\alpha)}$ in der Entwicklung von $C_{(\lambda)}$ nach den T erhält*. Diese Zahlen κ und τ spielen im folgenden eine wichtige Rolle. Sie können offenbar nur ganze Zahlen oder Null sein. Die τ sind nie negativ.

B. Erklärung der Tafeln.

Hauptregel: Von den *Kopfbezeichnungen* der Zeilen und Spalten gehören immer zusammen: *links und oben; rechts und unten*. Die Indexreihen folgen einander links nach der Hauptordnung; rechts, oben und unten nach der Nebenordnung. Jede der Tafeln enthält, abgesehen von den Kopfbezeichnungen, sämtliche Zahlen τ und κ der betreffenden Dimension. In der ausgezeichneten Diagonale ist jede 1 sowohl eine Zahl τ wie eine Zahl κ . Die übrigen τ stehen *links*, die übrigen κ *rechts* von jener Diagonale. *Diejenigen τ , die rechts, sowie diejenigen κ , die links von der Hauptdiagonale ihren Platz haben sollten, sind sämtlich Null*. Indem man dies beachtet, findet man $\tau_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ in der Tafel, wenn man die Reihe (λ) links, die Reihe (α) oben aufsucht, an der Kreuzungsstelle steht $\tau_{(\lambda)}^{(\alpha)}$; man findet ferner $\kappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$, indem man die Reihe (λ) rechts, die Reihe (α) unten aufsucht, an der Kreuzungsstelle steht $\kappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$. Man kann hervorheben: $\tau_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ ist immer Null, wenn die zugeordnete Reihe (α') bei der *Hauptordnung hinter* (λ) stehen würde; $\kappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ ist Null, wenn die Reihe (α) bei der *Nebenordnung vor* (λ) steht. Man kennt folgende wichtige Formeln:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad C_{(\lambda)} &= \sum_{(\alpha)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot T_{(\alpha)}; & \text{(Ia)} \quad T_{(\alpha)} &= \sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot C_{(\lambda)}; \\
 \text{(II)} \quad C_{(\lambda)} &= \sum_{(\alpha)} \kappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot K_{(\alpha)}; & \text{(IIa)} \quad K_{(\alpha)} &= \sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot C_{(\lambda)}; \\
 \text{(III)} \quad C_{(\lambda)} &= \sum_{(\alpha)} \kappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{R}_{(\alpha)}; & \text{(IIIa)} \quad \mathfrak{R}_{(\alpha)} &= \sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot C_{(\lambda)}; \\
 \text{(IV)} \quad C_{(\lambda)} &= \sum_{(\alpha)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{F}_{(\alpha)}; & \text{(IVa)} \quad \mathfrak{F}_{(\alpha)} &= \sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot C_{(\lambda)}.
 \end{aligned}$$

Die Summen wären eigentlich über alle Reihen (α) oder (λ) zu erstrecken, die durch Zerlegung der Dimensionszahl μ in Summanden gebildet werden können. Indessen sind viele Zahlen τ und κ Null und es ergibt sich die Regel: Handelt es sich um die Beziehungen der K oder T zu den C , so gehe man in der Zeile oder Spalte, welche die gesuchte Funktion enthält, von der 1 der Hauptdiagonale nach der gesuchten Funktion hin und füge jeder der erhaltenen Zahlen als Faktor die entsprechende Bezeichnung der Spalte oder Zeile bei. Handelt es sich um die Beziehungen der C zu den \mathfrak{F} oder \mathfrak{R} , so gehe man in der betreffenden Zeile oder Spalte, welche die gesuchte Funktion enthält, mit der 1 der Hauptdiagonale beginnend, von der gesuchten Funktion weg, indem man jeder Zahl die Bezeichnung der entsprechenden Spalte oder Zeile als Faktor beifügt. Z. B.:

$$\begin{aligned}
 C_{9,1^2} &= T_{1^2,3} + T_{1^2,2^2} + 9T_{1^2,2} + 45T_{1^2,1^3} = K_{1^2,9} - K_{2,9} - K_{1,10} + K_{11}; \\
 C_{8,2,1^2} &= \mathfrak{R}_{1,2,7} - \mathfrak{R}_{1^2,8} - \mathfrak{R}_{3,7} + \mathfrak{R}_{1,9} = \mathfrak{F}_{1^2,2,3} + 2 \cdot \mathfrak{F}_{1^2,2^2} + 6 \cdot \mathfrak{F}_{1^2,3} + 12 \cdot \mathfrak{F}_{1^2,2^2} + 48 \cdot \mathfrak{F}_{1^2,3} + 160 \cdot \mathfrak{F}_{1^2,1^3}; \\
 T_{1^2,2^2} &= C_{6,3} - 4 \cdot C_{7,2} + 10 \cdot C_{8,1} - 20 \cdot C_9; & K_{1^2,7} &= C_{7,1^2} + C_{7,2} + 2 \cdot C_{8,1} + C_9; \\
 \mathfrak{F}_{1^2,3} &= C_{3,1^2} - C_{2^2,1^2} - C_{2,1^2} + 6 \cdot C_{1^2}; & \mathfrak{R}_{1,2,5} &= C_{3,2,1^2} + C_{3,1^2} + C_{2^2,1^2} + 2 \cdot C_{2^2,1^2} + 2 \cdot C_{2,1^2} + C_{1^2}.
 \end{aligned}$$

Bei den Gleichungen, die \mathfrak{R} oder \mathfrak{F} enthalten, ist \bar{C} statt C zu setzen, falls die Dimension μ den Wert n übersteigt.

Wir haben weiter die Gleichungen:

$$\text{(V)} \quad C_{(\lambda)} = \mathfrak{C}_{(\lambda')} \quad \text{und} \quad \text{(Va)} \quad \bar{\mathfrak{C}}_{(\lambda)} = \bar{C}_{(\lambda')}.$$

Da (λ) und (λ') auf derselben Zeile links und rechts stehen, so ist die Überführung von C in \mathfrak{C} oder umgekehrt besonders einfach. Ersetzen wir noch in I—IVa jedes $C_{(\lambda)}$ durch $\mathfrak{C}_{(\lambda')}$, so sehen wir, daß aus jeder Tafel die Lösungen von 18 Aufgaben direkt zu entnehmen sind, nämlich derjenigen, welche nach den Beziehungen der C und \mathfrak{C} zueinander oder zu einer der Formen T , K , \mathfrak{F} , \mathfrak{R} fragen. Bei den 12 übrigen Aufgaben, in denen die Beziehungen von je zwei der Formen T , K , \mathfrak{F} , \mathfrak{R} zu finden sind, wird die gesuchte Funktion zuerst nach den C entwickelt, dann jedes C nach den Funktionen der anderen Form. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 \text{(VI)} \quad T_{(\alpha)} &= \sum_{(\beta)} \left(\sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \tau_{(\lambda')}^{(\beta)} \right) \cdot K_{(\beta)}; & \text{(VIa)} \quad K_{(\alpha)} &= \sum_{(\beta)} \left(\sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \tau_{(\lambda')}^{(\beta)} \right) \cdot T_{(\beta)}; \\
 \text{(VII)} \quad T_{(\alpha)} &= \sum_{(\beta)} \left(\sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \tau_{(\lambda')}^{(\beta)} \right) \cdot \mathfrak{R}_{(\beta)}; & \text{(VIIa)} \quad \mathfrak{R}_{(\alpha)} &= \sum_{(\beta)} \left(\sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \tau_{(\lambda')}^{(\beta)} \right) \cdot T_{(\beta)}; \\
 \text{(VIII)} \quad T_{(\alpha)} &= \sum_{(\beta)} \left(\sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \tau_{(\lambda')}^{(\beta)} \right) \cdot \mathfrak{F}_{(\beta)}; & \text{(IX)} \quad K_{(\alpha)} &= \sum_{(\beta)} \left(\sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \tau_{(\lambda')}^{(\beta)} \right) \cdot \mathfrak{R}_{(\beta)}.
 \end{aligned}$$

Sechs weitere Gleichungen entstehen, indem man gleichzeitig T mit \mathfrak{X} und K mit \mathfrak{R} vertauscht. Somit sind im ganzen aus jeder Tafel für 30 Aufgaben in allen ihren Einzelfällen die Lösungen zu entnehmen.

C. Zur Berechnung und Kontrolle der Tafeln.

Aus (4) folgt:

$$C_{(\lambda)} = c_{\lambda_0} \cdot C_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}} - c_{\lambda_1-1} \cdot C_{\lambda_0+1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}} + c_{\lambda_2-2} \cdot C_{\lambda_0+1, \lambda_1+1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}} \dots \quad (13)$$

Hieraus können leicht die rechts stehenden Teile der Tafelzeilen mit den Zahlen x gefüllt werden, indem man von den niederen Dimensionen zu den höheren, von den unteren Zeilen zu den oberen aufsteigt. Auch für jedes einzelne x läßt daraus ein bequemes Rekursionsverfahren sich entnehmen. Man ordne die obere Indexreihe bei x absteigend wie die untere. Ist dann der erste obere Index kleiner als der erste untere, so ist $x = 0$, sind sie gleich, so können beide fortgelassen werden; dies folgt aus der Entwicklung von $C_{(\lambda)}$ nach den Elementen der ersten Zeile. Aus (13) ergibt sich die weitere Reduktion. Z. B.:

$$\begin{aligned} x_{4, 2^2, 1^2}^{5, 3, 2^2, 1} &= -x_{5, 2, 1^2}^{5, 3, 2^2} + x_{5, 3, 1^2}^{5, 3, 2^2, 1} = -x_{2, 1^2}^{3, 2^2} + x_{1^2}^{2^2, 1} = -x_{1^2}^{3, 2} + x_{3, 1^2}^{3, 2^2} + x_{1^2}^{2^2} - x_{2, 1^2}^{2^2, 1} \\ &= x_{2, 1^2}^{3, 2} - 2 \cdot x_{2, 1^2}^{2^2} - x_{1^2}^{2^2} + x_{2, 1^2}^{2^2, 1} = 6. \end{aligned}$$

In jeder Zeile mit Ausnahme der letzten in jeder Tafel ist die Summe aller x gleich Null. Bezeichnet man mit $x_{(\lambda)}^{[m]}$ die Summe derjenigen x , welche bei festem (λ) je m Indices in der oberen Reihe haben, so ist:

$$x_{\lambda, 1^{r-1}}^{[m]} = (-1)^{r+m} \cdot \binom{\mu - \lambda}{m-1};$$

dagegen ist jedes $x_{(\lambda)}^{[m]} = 0$, bei dem mehr als ein λ größer als 1 ist.

Einige besondere Werte der x : Sei $[m_h] = m_h + m_{h+1} + m_{h+2} + \dots + m_\mu$, so ist:

$$x_{\lambda, 1^{r-1}}^{(\alpha)} = (-1)^{r+m} \cdot \frac{(m-1)! [m_\lambda]}{m_1! m_2! \dots m_\mu!}; \quad (15a)$$

$$x_{\lambda_0, \lambda_1, 1^{r-2}}^{(\alpha)} = (-1)^{r+m} \cdot \frac{(m-2)!}{m_1! \dots m_\mu!} \cdot \left| \begin{array}{c} m_{\lambda_0} \quad [m_{\lambda_0+1}] \\ m_{\lambda_1-1} \quad [m_{\lambda_1}] - 1 \end{array} \right|; \quad (15b)$$

usf., vgl. *Jahresbericht* a. a. O. S. 445 (s. auch S. 536).

Jedes einzelne x kann auch nach folgender Regel ermittelt werden¹⁾: „Um $x_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ zu finden, bilde man die zugeordnete Reihe $(\lambda) = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ und vergleiche die beiden Reihen: (a) $\mu - \lambda_0, \mu + 1 - \lambda_1, \mu + 2 - \lambda_2, \dots, \mu + r - 1 - \lambda_{r-1}$ und (b) $\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots, \mu + r - 1$. In der Reihe (a) seien i Zahlen kleiner als μ ; sie seien in aufsteigender Ordnung $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i$; so müssen in der Reihe (b) genau i Zahlen sich finden, die nicht in (a) vorkommen; sie seien in beliebiger Ordnung $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i$ und durch ϱ Umstellungen werde diese Reihe zu einer aufsteigenden. Man prüfe, auf wie viel verschiedene Arten aus β_1, \dots, β_i durch Addition der Zahlen α die Reihe $\gamma_1, \dots, \gamma_i$ entstehen kann, wobei aber immer erst die letzte Addition eine Zahl oberhalb $\mu - 1$ ergeben darf; der erhaltenen Zahl gebe man das Vorzeichen $(-1)^{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} - m + \varrho}$. Addiert man für alle Anordnungen von $\gamma_1, \dots, \gamma_i$ die so erhaltenen

1) Zu entnehmen aus *Journal f. Math.* Bd. 81, S. 284 f. (§ 3).

positiven und negativen Zahlen, so hat man den Wert von $\kappa_{(\lambda')}^{(\alpha)}$. Die Regel führt oft schneller zum Ziel als die Ermittlung von $\kappa_{(\lambda')}^{(\alpha)}$ aus der Determinante $C_{(\lambda')}$, oder als das Reduktionsverfahren. Z. B. findet man auf Grund dieser Regel leicht:

$$\kappa_{2^2, 1^4}^{4, 3, 2, 1} = +4; \quad \kappa_{2^6, 1^2}^{5, 4, 3, 2, 1} = -12; \quad \kappa_{2^7, 1}^{5, 4, 3, 2, 1} = 0; \quad \kappa_{2^2, 1^{14}}^{3, 2^2, 1^{11}} = -108.$$

Noch ein Beispiel dazu: Es sei $(\alpha) = 8^2, 4, 3, 2^2, 1^3$ und $(\lambda') = 5^3, 3^2, 2^2, 1^5$; also $\mu = 30, m = 9$; $(\lambda) = 12, 7, 5, 3, 3$. Die Reihe (α) ist 18, 24, 27, 30, 31; also $\beta_1 = 18$; $\beta_2 = 24$; $\beta_3 = 27$; $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 24$. Aus 18, 24, 27 soll 32, 33, 34 durch Addition der α gebildet werden; es muß jedoch, um 34 zu erzeugen, zuletzt 8 addiert werden, bei 33 muß 8 oder 4, bei 32 muß 8, 4 oder 3 am Ende stehen. Daher kann als letzte Zahl 34 gar nicht entstehen; 32, 34, 33 liefert +16; 33, 34, 32 gibt -31; 34, 32, 33 gibt -39 und 34, 33, 32 liefert +34. Somit ist jenes $\kappa_{(\lambda')}^{(\alpha)} = 16 - 31 - 39 + 34 = -20$.

Sondert man aus der Tafel irgend ein Zahlenquadrat aus, dessen Diagonale ein Teil der Hauptdiagonale ist, und sind a_1, a_2, \dots, a_h die Zahlen in den horizontal oder vertikal nebeneinander liegenden Randfeldern dieses Quadrats, b_1, b_2, \dots, b_h die entsprechenden in der parallelen Reihe von Randfeldern, so ist $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_h \cdot b_h = 0$. Hierdurch hat man eine gute Kontrolle für jeden Teil der Tafel. Auch könnte dies benutzt werden, um die τ zu finden, falls die κ schon bekannt sind, oder umgekehrt. Man kann die Gleichungen auch in die Form kleiden:

$$\sum_{(\alpha)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \kappa_{(\rho)}^{(\alpha)} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{(\lambda)} \tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} \cdot \kappa_{(\lambda')}^{(\rho)} = 0; \quad (\rho) \neq (\lambda'); \quad (\beta) \neq (\alpha); \quad (16)$$

sie sind auch außerhalb der Tafeln gut zu verwerten.

Jedes $\tau_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ kann nach folgender Regel bestimmt werden: „In der Reihe $\lambda_0, \lambda_0 + 1, \lambda_0 + 2, \dots, \lambda_0 + r - 1$ vermindere man die ersten α_0 Zahlen um eine Einheit, in der neuen Reihe je α_1 Zahlen, dann wieder je α_2 Zahlen um eine Einheit usw.; man unterdrücke aber jede Reihe, die irgend zwei gleiche Zahlen enthält. So oft auf diesem Wege die Reihe $0, \lambda_0 + 1 - \lambda_1, \lambda_0 + 2 - \lambda_2, \dots, \lambda_0 + r - 1 - \lambda_{r-1}$ erhalten werden kann, eben so viel positive Einheiten enthält die Zahl $\tau_{(\lambda)}^{(\alpha)}$.“ Man tut gut, die α absteigend zu ordnen. Z. B. sei $(\alpha) = 3, 2^4$; $(\lambda) = 4, 3, 2^2$; so erhält man folgendes Schema:

0. 2. 4. 5	Anzahl:				
4. 5. 6. 7					
3) 3. 4. 5. 7	1				
2) 2. 3. 5. 7	1				
2) 2. 4. 5. 6	1				
1. 2. 5. 7	1				
1. 3. 4. 7	1				
1. 3. 5. 6	1 + 1 = 2				
2. 3. 4. 6	1 + 1 = 2				

2)	0. 2. 4. 7	1 + 1 = 2			
	0. 2. 5. 6	1 + 2 = 3			
	1. 2. 4. 6	1 + 1 + 2 + 2 = 6			
	0. 3. 4. 6	1 + 2 = 3			
	1. 3. 4. 5	2 + 2 = 4			
2)	0. 2. 4. 5	3 + 6 + 3 + 4 = 16;			

also $\tau_{4, 3, 2^2}^{3, 2^4} = 16$.

Die τ erinnern vielfach an die figurierten Zahlen. Zunächst ist:

$$\tau_{\lambda, 1^{r-1}}^{(\alpha)} = \binom{m-1}{\lambda-1} = \frac{(m-1)!}{(\lambda-1)! (m-\lambda)!}, \quad \text{also} = 1 \text{ für } \lambda = 1. \quad (17)$$

Z. B. $\tau_{6,1^5}^{1^1, 2^2} = \binom{8}{5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$; oder der Faktor von $T_{1^{11}, 2^4, 5^3}$ in der Entwicklung von $C_{15, 1^{21}}$ hat, da $m = 20$ ist, den Wert $\frac{19!}{14! \cdot 5!} = 11628$.

Allgemein wird zur besseren Darstellung der Formeln gesetzt:

$$\tau_{(\lambda)}^{(\alpha)} = \binom{m-1 \quad m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_{r-1}}{\lambda_0-1 \quad \lambda_1-1 \quad \lambda_2-1 \quad \dots \quad \lambda_{r-1}-1}. \quad (18)$$

Wird $\lambda_{r-1} = 1$, so kann in diesem Ausdruck die letzte obere und untere Zahl fortgelassen werden, so daß (17) sich ergibt, wenn alle λ außer einem $= 1$ sind. Sind p Zahlen λ größer als 1, so bleiben p Paare übereinander stehender Zahlen übrig. Für die so definierten Zahlformen sind a. a. O. Eigenschaften bewiesen, aus denen eine sehr große Zahl von Beziehungen zwischen den Zahlen der Tafeln zu erkennen ist. Folgende seien angeführt:

$$\binom{m \quad m_1 \quad \dots \quad m_{p-1}}{\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{p-1}} = \sum_0^{p-1} \binom{m-1 \quad m_1-1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_n \quad \dots \quad m_{p-1}}{\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n-1 \quad \dots \quad \lambda_{p-1}}; \quad (19)$$

in jedem Glied rechts ist einer der gegebenen unteren Indices um 1 vermindert; ein solches Glied fällt fort, wenn dabei ein unterer Index kleiner wird als der nächstfolgende. Z. B.:

$$\tau_{5,3,1^2}^{1^2, 2^2} = \binom{9 \quad 9}{4 \quad 2} = \binom{8 \quad 8}{4 \quad 2} + \binom{8 \quad 8}{3 \quad 2} + \binom{8 \quad 8}{4 \quad 1} = \tau_{5,3,1^2}^{1^2, 2^2} + \tau_{4,3,1^2}^{1^2, 2^2} + \tau_{5,2,1^2}^{1^2, 2^2} = 252 + 280 + 224 = 756.$$

oder

$$\tau_{3^2, 1^2}^{1^3, 2^2, 4} = \binom{5 \quad 3 \quad 2}{2 \quad 2 \quad 2} = \binom{4 \quad 2 \quad 2}{2 \quad 2 \quad 2} + \binom{4 \quad 2 \quad 2}{2 \quad 2 \quad 1} = \tau_{3^2, 1^2}^{1^3, 2^2, 4} + \tau_{3^2, 2, 1^2}^{1^3, 2^2, 4} = 2 + 10 = 12.$$

$$\binom{m \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}{\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_{p-1}} = A \cdot \prod_{h=0}^{h=p-1} \frac{(m+h)!}{(\lambda_h - h + p - 1)! (m+h-\lambda_h)!}; \quad (20)$$

$$\binom{m \quad m+1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}{\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_{p-1}} = \frac{A \cdot (m+1)!}{(d-p)! \prod_{h=0}^{h=p-1} (\lambda_h - h + p - 1)! (d + \lambda_h - h)}; \quad (21)$$

wobei der Kürze wegen gesetzt ist:

$$A = \prod_{h,i} (\lambda_h - h - \lambda_i + i), \quad 0 \leq h < i \leq p-1,$$

$$d = m + 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \dots - \lambda_{p-1}.$$

Z. B.:

$$\tau_{3, 2^2, 1^2}^{3, 4^2} = \binom{3 \quad 0 \quad 0}{2 \quad 1 \quad 1} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!}{4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 4!} = 15;$$

$$\tau_{3^2, 1^2}^{1^{11}} = \binom{10 \quad 11 \quad 0}{2 \quad 2 \quad 2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 11!}{2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = 660.$$

Die Angaben genügen zur Berechnung und Kontrolle der Tafeln; weitere Formeln findet man a. a. O. Sie alle gelten für beliebige Dimensionen und führen in jedem Fall auch ohne die Tafeln zum Ziel. Einige Beziehungen anderer Art zwischen den Zahlen der Tafeln seien noch angeführt.

a) In der Spalte, die durch die Indexreihe $(\alpha) = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ gekennzeichnet ist, multipliziere man jede Zahl τ mit der Zahl, die auf derselben Zeile in der *ersten* Spalte steht; dann ist die Summe der sämtlichen Produkte

$$= \frac{\mu!}{\alpha_0! \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{m-1}!}.$$

Insbesondere ist $\mu!$ die Summe der Quadrate aller Zahlen der ersten Spalte. Es muß nämlich die Entwicklung von $K_{1\mu}$ nach den T die Formel des polynomischen Satzes liefern und zugleich stimmen in der ersten Spalte je zwei Zahlen überein, bei denen die Indexreihen der betreffenden Zeilen einander zugeordnet sind.

b) In der Spalte, die durch die Indexreihe $1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots$ gekennzeichnet ist, multipliziere man jede Zahl \varkappa mit der Zahl, die auf derselben Zeile in der *letzten* Spalte steht; dann ist die Summe sämtlicher Produkte

$$= (-1)^{m-1} \cdot \frac{(m-1)! \mu}{m_1! m_2! m_3! \dots}.$$

Es muß nämlich die Entwicklung von T_μ nach den K auf Warings¹⁾ Formel für Potenzsummen führen und in der letzten Spalte sind je zwei Zahlen in solchen Zeilen, deren Indexreihen konjugiert sind, gleich oder entgegengesetzt, je nachdem die Dimensionszahl μ ungerade oder gerade ist.

c) In der Entwicklung eines C nach den K werden alle Zahlenfaktoren \varkappa ungeändert bleiben, wenn man jedes t_h durch $1 : t_h$ ersetzt.²⁾ Dadurch geht c_h in $c_{n-h} : c_n$ über. Multipliziert man mit c_n^r die Gleichung, so steht links statt $C_{(\lambda)}$ ein C mit der Indexreihe $n - \lambda_{r-1}, n - \lambda_{r-2}, \dots, n - \lambda_0$; rechts tritt an die Stelle von $K_{(\alpha)}$ das Produkt K mit der Indexreihe $n^{r-m}, n - \alpha_0, \dots, n - \alpha_{m-1}$. Für n darf man jede Zahl setzen, z. B. auch α_0 , die größte der Zahlen α . Man sieht also, daß $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ denselben Wert haben muß, wie ein \varkappa , dessen untere Reihe $\alpha_0 - \lambda_{r-1}, \alpha_0 - \lambda_{r-2}, \dots, \alpha_0 - \lambda_0$ und dessen obere $\alpha_0^{r-m}, \alpha_0 - \alpha_1, \dots, \alpha_0 - \alpha_{m-1}$ ist. Von der Dimension μ ist man zu der neuen $r \cdot \alpha_0 - \mu$ gelangt und wird hieraus Vorteil ziehen können, sobald $r \cdot \alpha_0 < 2\mu$ ist. Z. B. ist $\varkappa_{4,4,2,1}^{5,4,2} = \varkappa_{4,3,1,1}^{5,3,1}$.

Bei der Nachprüfung sowohl wie bei der Berechnung der Zahlen τ und \varkappa können auch diese Beziehungen verwendet werden.

1) Nach *Waring*, nicht aber, wie die *Enzyklopädie* sagt, nach *Girard* wird auch fernerhin die bekannte Formel zu benennen sein; die Gründe dafür hat *Saalschütz* im *Archiv d. Math. u. Phys.* 3. Reihe, 12. Bd., S. 205 f. übersichtlich zusammengestellt.

2) Vgl. z. B. *Journ. f. Math.* Bd. 82, S. 223 f.

I. $C_1 - T_1 - K_1 - G_1 - T_1 - R_1$

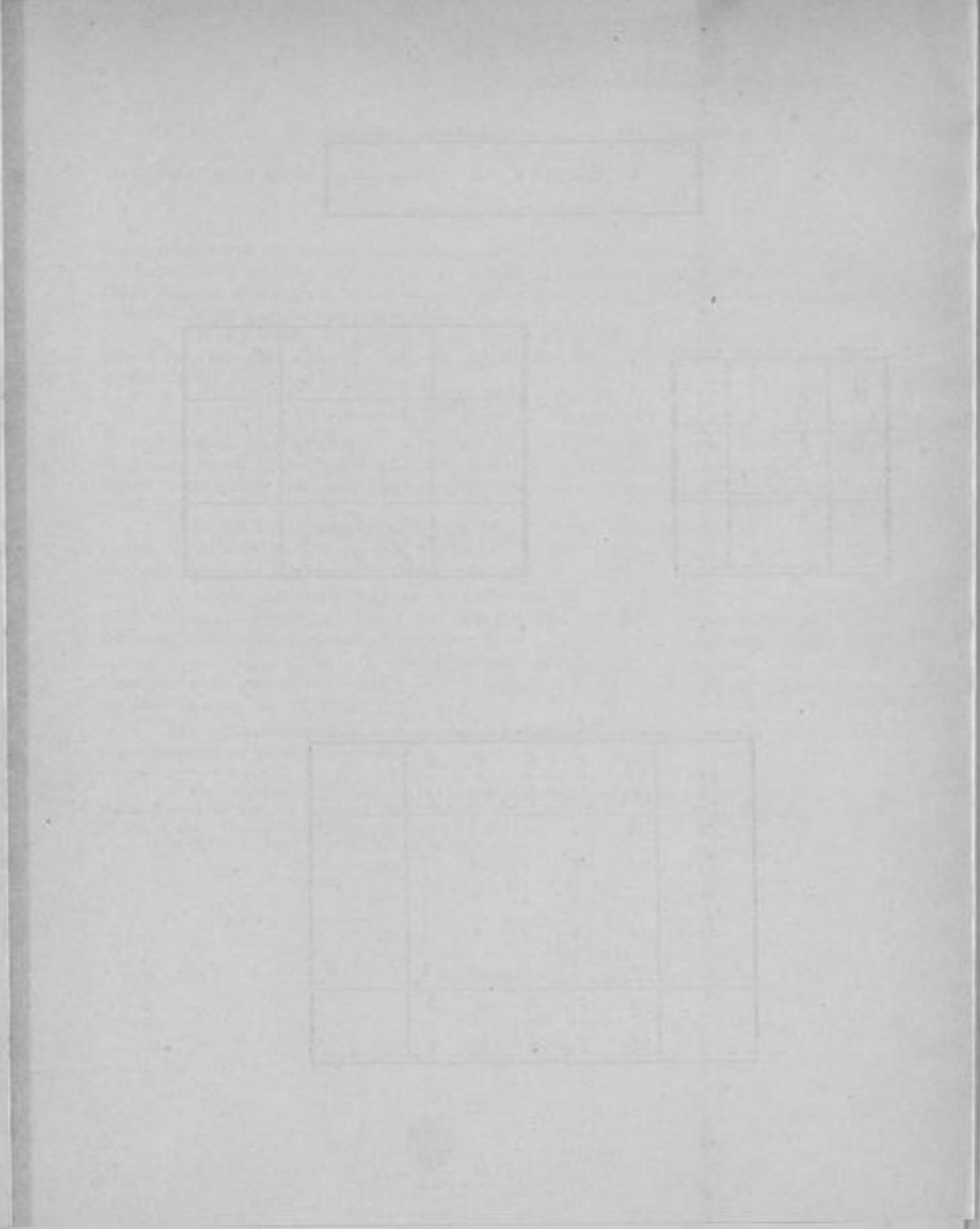
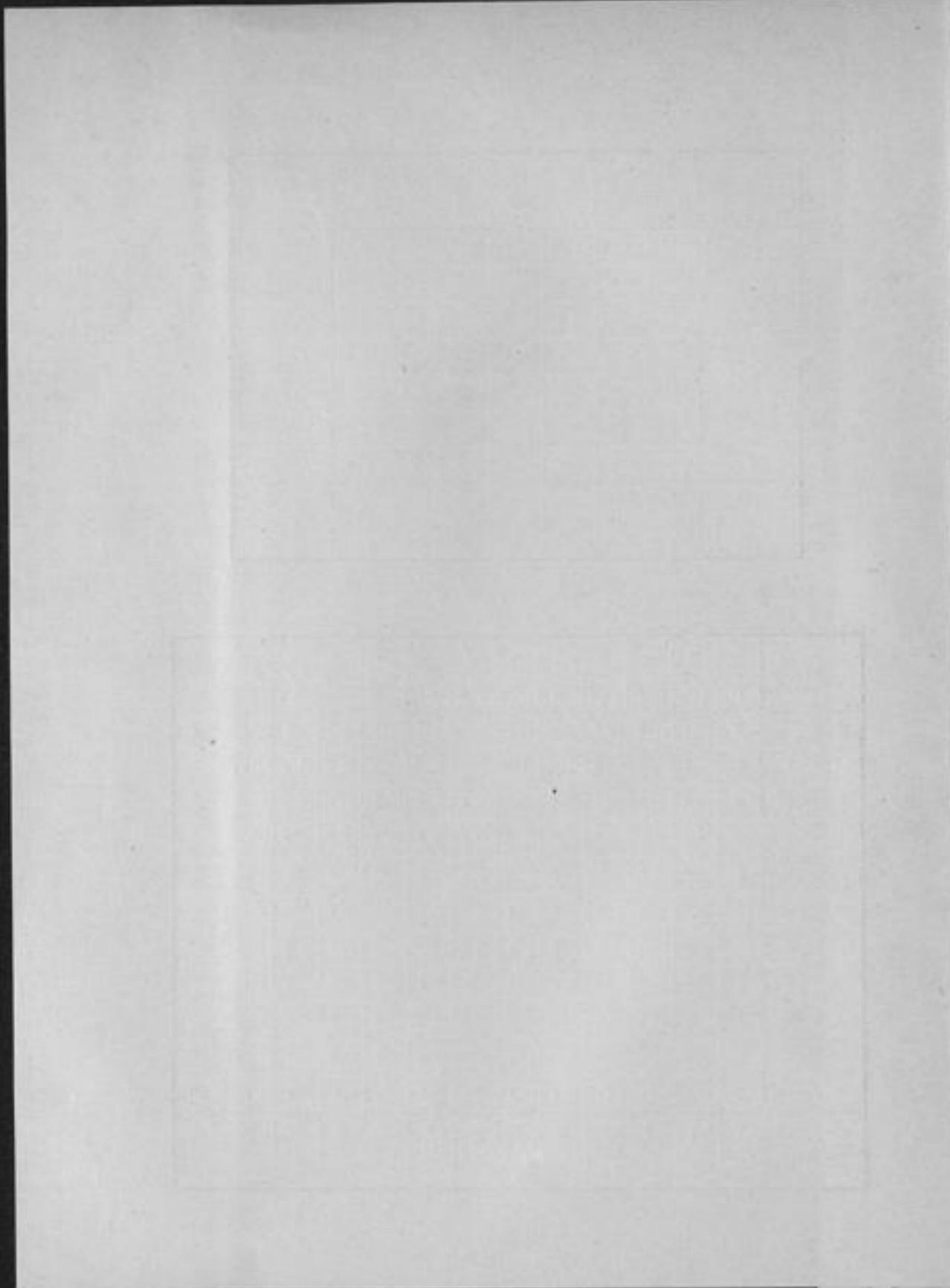
II.	R T 1,1	R T 2	
C_2	1	-1	$C_{3,1}$
$C_{3,1}$	1	1	C_2
	K 1,1 2	K 2 2	

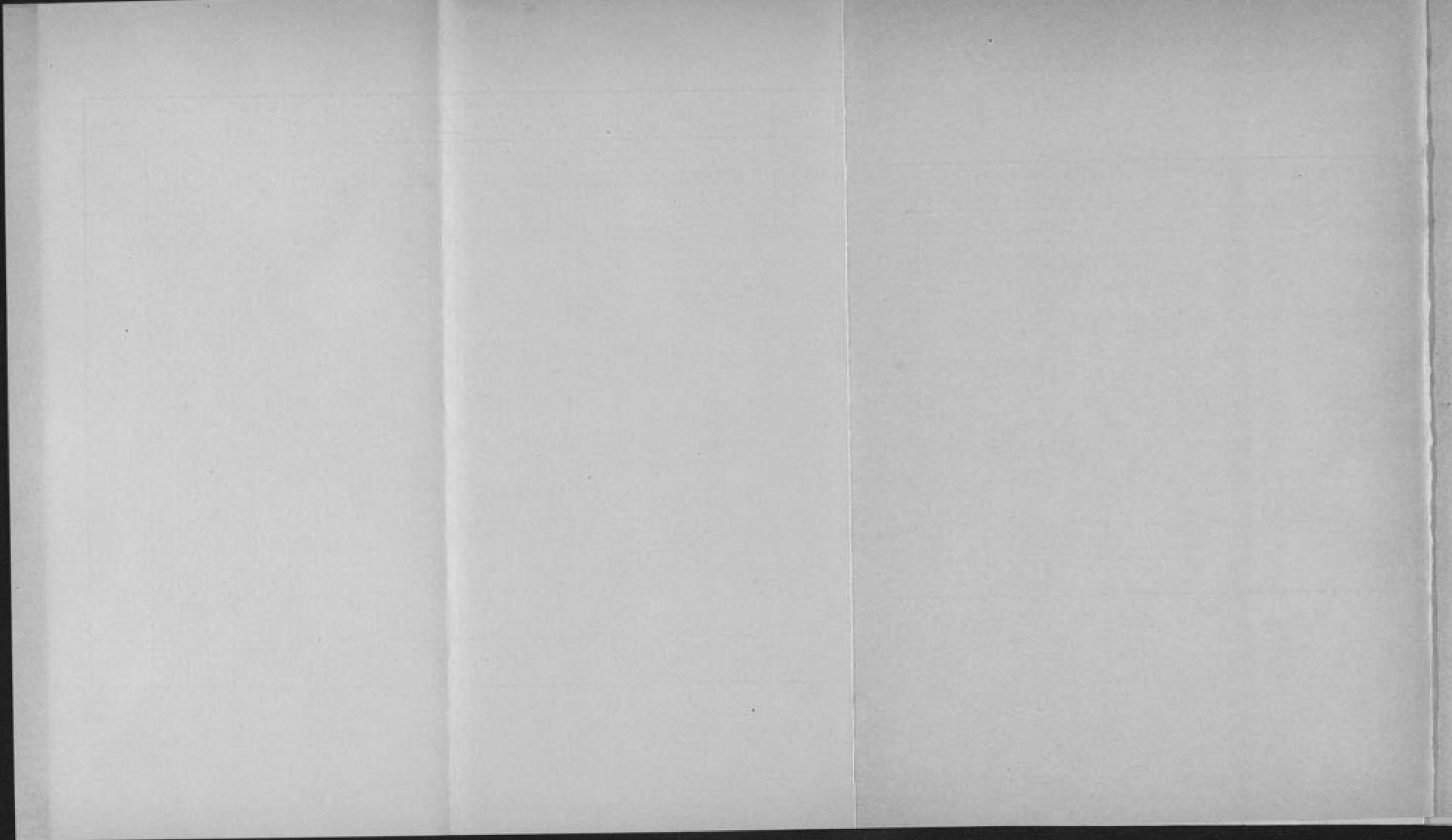
III.	R T 1,1,1	R T 1,2	R T 3	$\bar{G}_{(3)} - \bar{C}_{(3)}$
C_3	1	-2	+1	$C_{3,1,1}$
\bar{C} $C_{2,1}$	2	1	-1	$C_{2,1}$ \bar{C}
$C_{3,1,1}$	1	1	1	C_3
$\bar{G}_{(3)} - C_{(3)}$	K 1,1,1 2	K 1,2 2	K 3 2	

IV.	R T 1,1,1,1	R T 1 ² , 2	R T 2 ²	R T 1,3	R T 4	$\bar{G}_{(4)} - \bar{C}_{(4)}$
\bar{C} C_4	1	-3	+1	+2	-1	$C_{1,1,1,1}$ \bar{C}
$C_{3,1}$	3	1	-1	-1	+1	$C_{2,1,1}$
$C_{2,2}$	2	1	1	-1	0	$C_{2,2}$
$C_{2,1,1}$	3	2	1	1	-1	$C_{3,1}$
\bar{C} $C_{1,1,1,1}$	1	1	1	1	1	C_4 \bar{C}
$\bar{G}_{(4)} - C_{(4)}$	K 1 ⁴ 2	K 1 ² , 2 2	K 2 ² 2	K 1, 3 2	K 4 2	

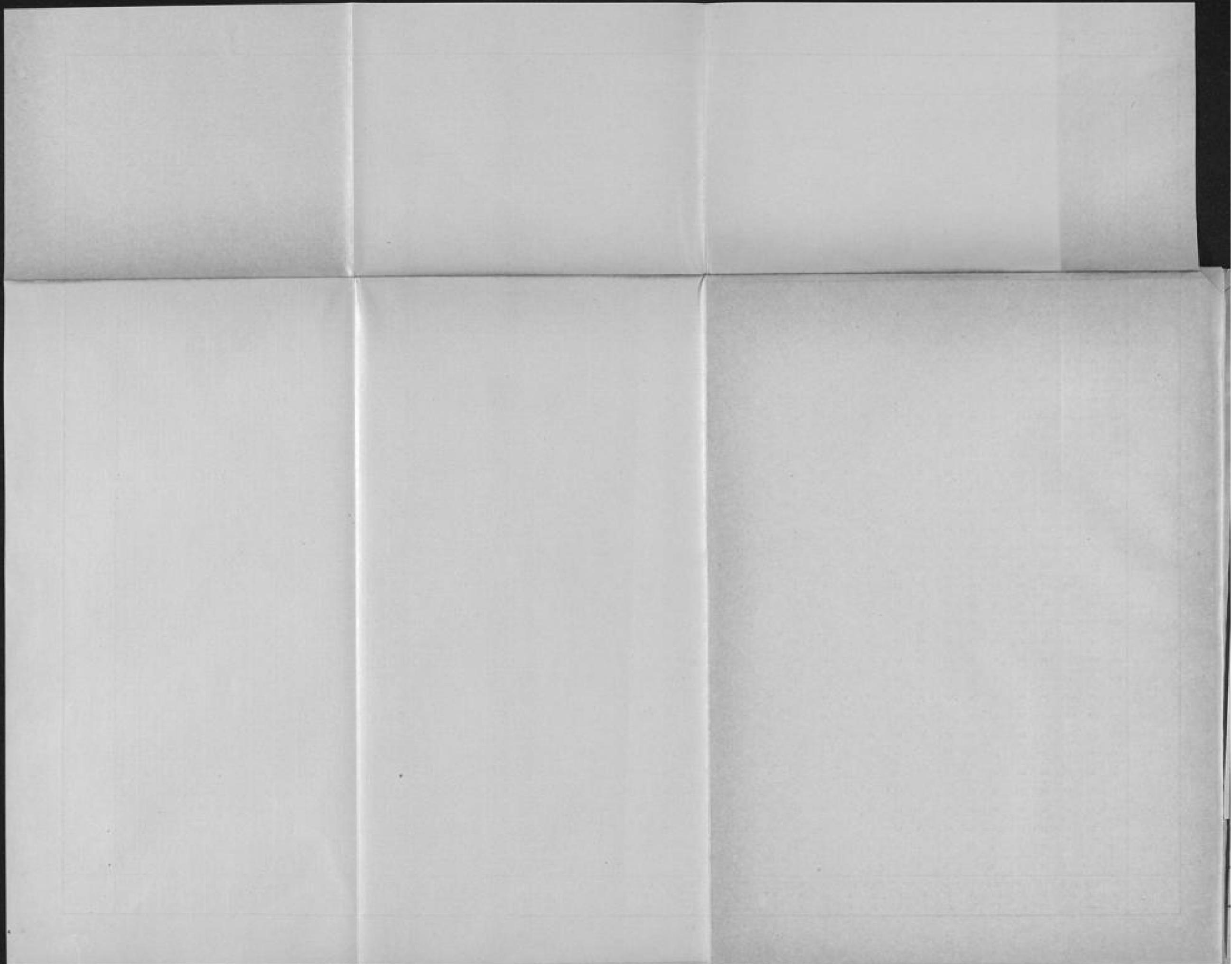
V.	R T 1 ⁵	R T 1 ⁴ , 2	R T 1 ³ , 2 ²	R T 1 ³ , 3	R T 2, 3	R T 1, 4	R T 5	$\bar{G}_{(5)} - \bar{C}_{(5)}$
\bar{C} C_5	1	-4	+3	+3	-2	-2	+1	$C_{5,1}$ \bar{C}
$C_{4,1}$	4	1	-2	-1	+2	+1	-1	$C_{2,1,1}$
$C_{2,2}$	5	2	1	-1	-1	+1	0	$C_{2,2,1}$
\bar{C} $C_{3,1,1}$	6	3	1	1	-1	-1	+1	$C_{3,1,1}$ \bar{C}
$C_{2,2,1}$	5	3	2	1	1	-1	0	$C_{2,2}$
$C_{2,1,1}$	4	3	2	2	1	1	-1	$C_{4,1}$
\bar{C} $C_{1,1,1,1}$	1	1	1	1	1	1	1	C_5 \bar{C}
$\bar{G}_{(5)} - C_{(5)}$	K 1 ⁵ 2	K 1 ⁴ , 2 2	K 1 ³ , 2 ² 2	K 1 ³ , 3 2	K 2, 3 2	K 1, 4 2	K 5 2	

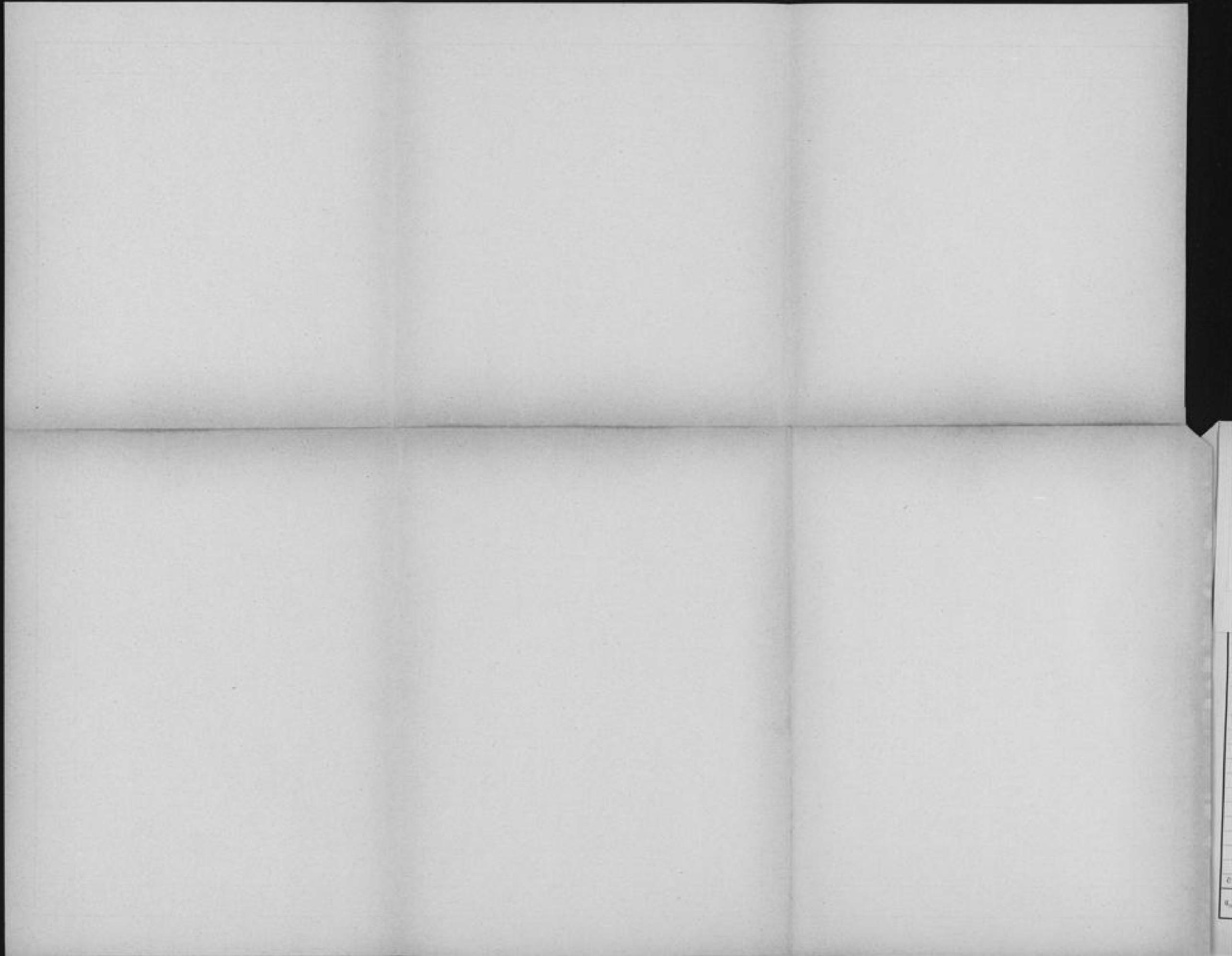
VI.	R T 1 ⁶	R T 1 ⁵ , 2	R T 1 ⁴ , 2 ²	R T 1 ⁴ , 3	R T 2 ³	R T 1, 2, 3	R T 1 ³ , 4	R T 3 ²	R T 2, 4	R T 1, 5	R T 6	$\bar{G}_{(6)} - \bar{C}_{(6)}$
\bar{C} C_6	1	-5	+6	+4	-1	-6	-3	+1	+2	+2	-1	$C_{6,1}$ \bar{C}
$C_{5,1}$	5	1	-3	-1	+1	+4	+1	-1	-2	-1	+1	$C_{2,1,1}$
$C_{4,2}$	9	3	1	-1	-1	0	+1	0	+1	-1	0	$C_{3,1,1}$
$C_{4,1,1}$	10	4	1	1	0	-2	-1	+1	+1	+1	-1	$C_{2,1,1}$
$C_{3,2}$	5	2	1	0	1	-2	+1	+1	-1	0	0	$C_{3,2}$
\bar{C} $C_{3,2,1}$	16	8	4	2	2	1	-1	-1	0	+1	0	$C_{2,2,1}$ \bar{C}
$C_{2,1,1}$	10	6	2	3	1	1	1	0	-1	-1	+1	$C_{4,1,1}$
$C_{2,2,2}$	5	3	2	1	1	1	0	1	-1	0	0	$C_{2,2}$
$C_{3,1,1}$	9	6	4	3	3	2	1	1	1	-1	0	$C_{4,2}$
$C_{2,1,1}$	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	-1	$C_{3,1}$
\bar{C} $C_{1,1,1,1,1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	C_6 \bar{C}
$\bar{G}_{(6)} - C_{(6)}$	K 1 ⁶ 2	K 1 ⁵ , 2 2	K 1 ⁴ , 2 ² 2	K 1 ⁴ , 3 2	K 2 ³ 2	K 1, 2, 3 2	K 1 ³ , 4 2	K 3 ² 2	K 2, 4 2	K 1, 5 2	K 6 2	





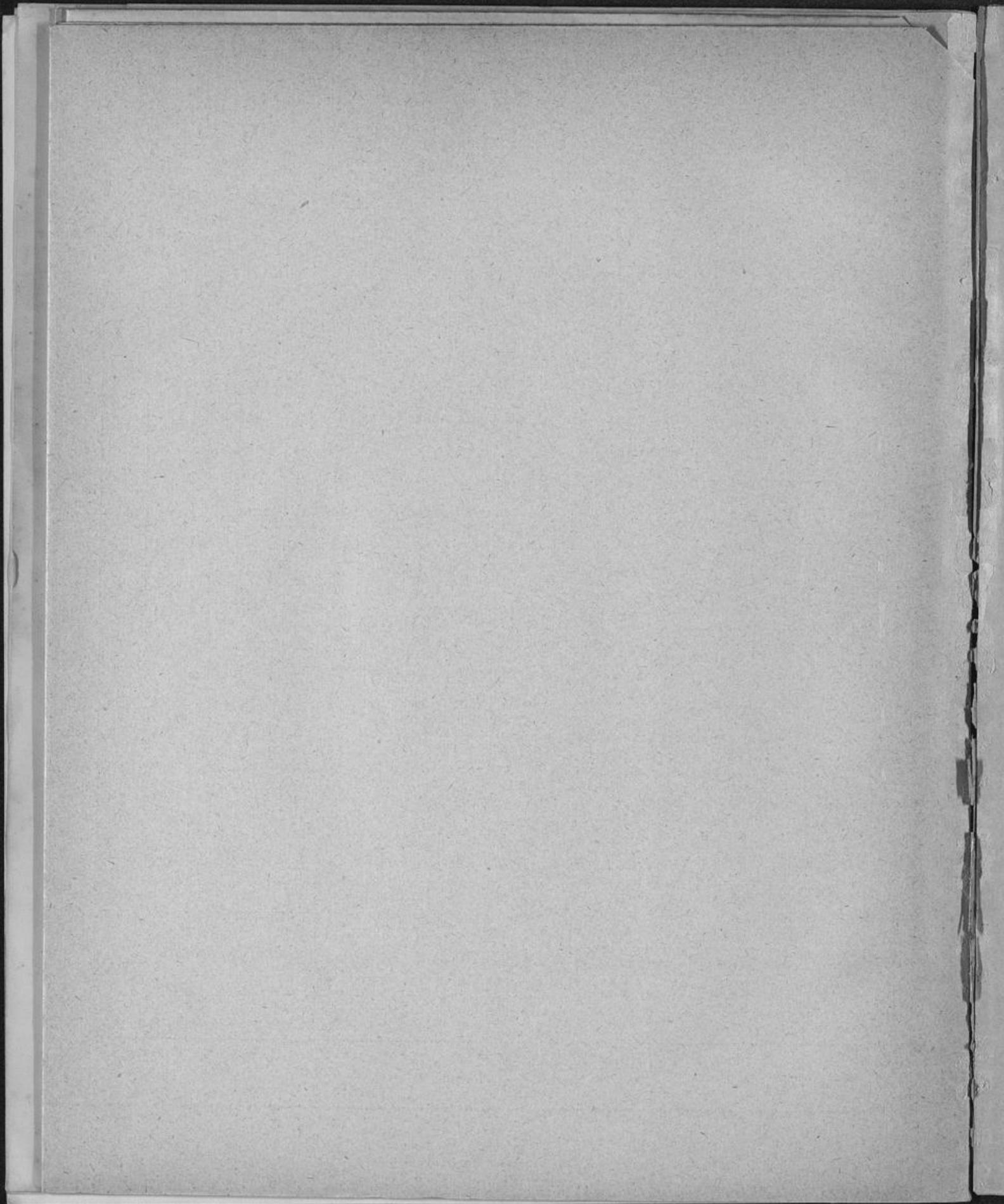




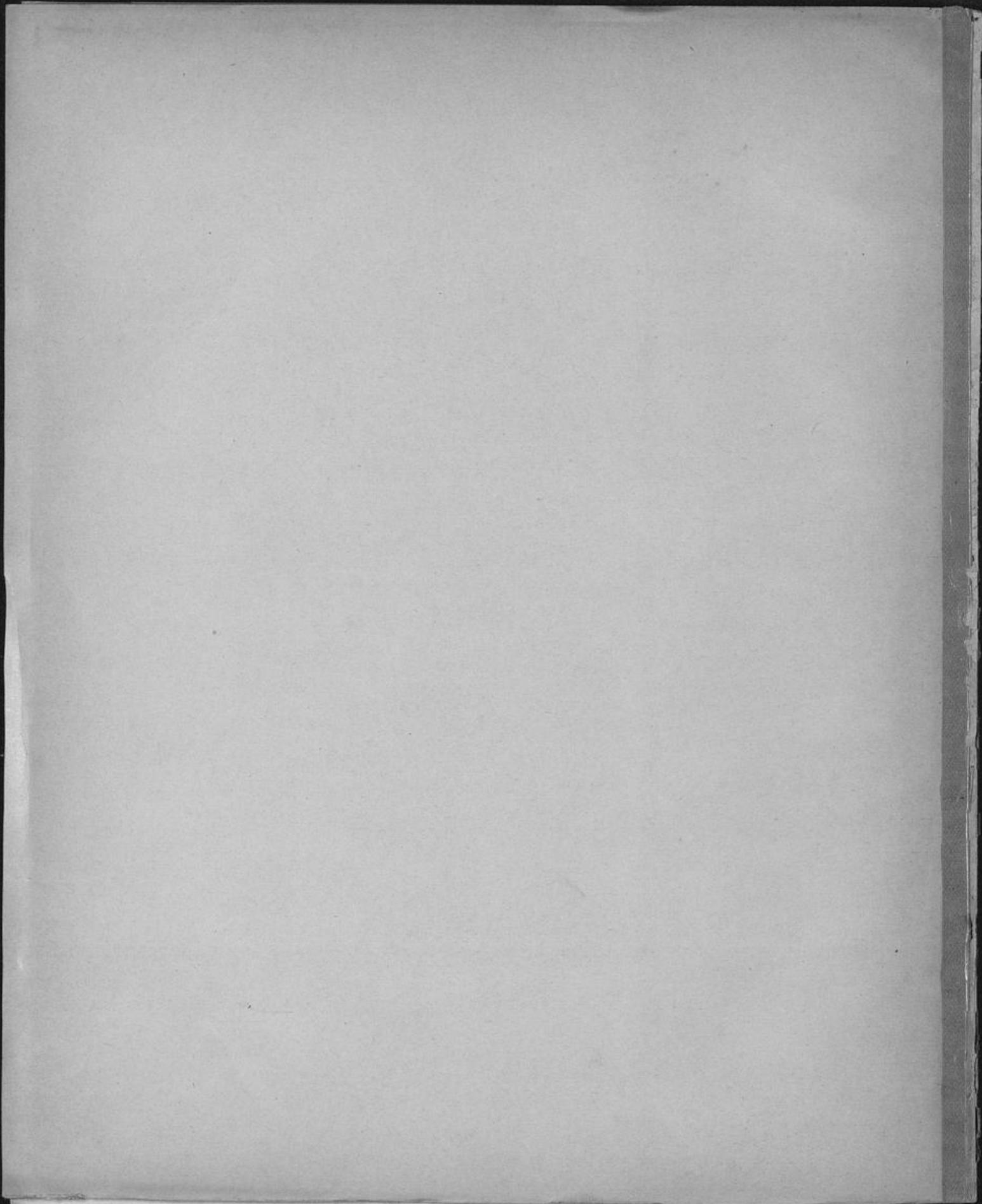




3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	$C_{10,1}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	C_{11} \bar{C}
$1^2, 2, 7$	$1^3, 8$	3, 4, 4	3, 3, 5	2, 4, 5	2, 3, 6	2, 2, 7	1, 5, 5	1, 4, 6	1, 3, 7	1, 2, 8	$1^2, 9$	5, 6	4, 7	3, 8	2, 9	1, 10	11	
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	
\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	\bar{K}	







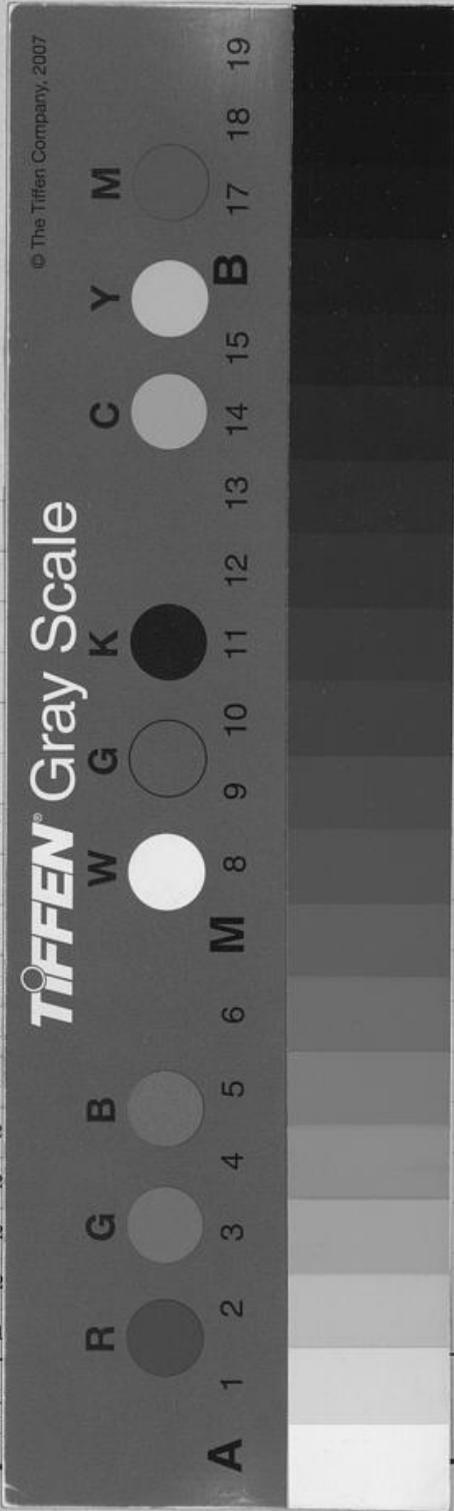
© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale

A 1 2 3 4 5 6 M 8 W G K Y M

19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

$C_{4,2^1}$	300	160	85		
$C_{4,2^2,1^2}$	567	315	171	1	-1
$C_{4,2,1^4}$	350	210	120	1	0
$C_{4,1^6}$	84	56	35	0	0
$C_{3^2,1}$	210	112	61	1	+1
$C_{3^2,2^2}$	252	140	79	0	-1
$C_{3^2,2,1^2}$	450	260	150	1	-1
$C_{3^2,1^4}$	225	140	85	1	0
$C_{3,2^3,1}$	288	176	108	0	1
$C_{3,2^2,1^3}$	315	203	129	1	1
$C_{3,2,1^5}$	160	112	76	2	1
$C_{3,1^7}$	36	28	21	1	1
C_{2^5}	42	28	19	0	1
$C_{2^4,1^2}$	90	62	43	1	2
$C_{2^3,1^4}$	75	55	40	2	2
$C_{2^2,1^6}$	35	28	22	3	2
$C_{2,1^8}$	9	8	7	2	2
\bar{C} $C_{1^{10}}$	1	1	1	1	1
$\mathcal{C}_{(\lambda^1)} = \mathcal{C}_{(\lambda)}$	1^{10} K ⊗	$1^8, 2$ K ⊗	$1^6, 2^2, 6$ K ⊗	$1, 4,$ K ⊗	



0	0	$C_{5,3,1^2}$
-1	0	$C_{6,2,1^2}$
+1	-1	$C_{7,1^2}$
0	0	$C_{4,3^2}$
0	0	$C_{4^2, 2}$
0	0	$C_{5,3,2}$
0	0	$C_{6,2^2}$
0	0	$C_{5,4,1}$
0	0	$C_{6,3,1}$
+1	0	$C_{7,2,1}$
-1	+1	$C_{8,1^2}$
0	0	C_5^2
0	0	$C_{6,4}$
0	0	$C_{7,3}$
-1	0	$C_{8,2}$
1	-1	$C_{9,1}$
1	1	C_{10} \bar{C}
$1, 9$ K ⊗	10 K ⊗	