Der folgende Lehrgang der Differentialrechnung ist aus der Praxis hervorgegangen und zwar in den der Unterprima eingereiht. Bei seinem Aufbau sind demnach nur die bis zu dieser Klasse bekannten Gebiete der Mathematik berücksichtigt. Vor allem ist vorausgesetzt, daß den Schülern schon aus den früheren Klassen der Funktionsbegriff geläufig geworden ist und sie auch in der graphischen Darstellung der Funktionen geübt sind. Die §§ 8—14 sind als eine erst in Oberprima zu behandelnde Fortsetzung und Erweiterung der Differentialrechnung gedacht.

§ 1.

Bestimmung und Bedeutung des Differentialquotienten.

Aufgabe 1. Einer Kugel mit dem Radius $r = 5$ cm ist ein gerader Kegel einbeschrieben; es ist der Inhalt desselben als Funktion der Höhe h zu bestimmen.

Lösung. Der Radius des Grundkreises des Kegels sei ϱ, es ist dann der Inhalt

$$v = \frac{1}{3}\pi\varrho^2 h.$$

ϱ ist die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Kathetenprojektionen h und $2r - h$ sind, folglich

$$\varrho^2 = h(2r - h)$$

$$v = \frac{1}{3}\pi h^2(2r - h)$$

$$v = \frac{1}{3}\pi h^2(10 - h).$$

Aufgabe 2. Es soll das Steigen bzw. Fallen des Inhaltes des Kegels festgestellt werden, wenn die Höhe h alle möglichen Werte nacheinander durchläuft.

Lösung. Es sei $h = 6$ cm, für diesen Wert ist $v = 144 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)$ ccm. Es soll nun diese Höhe um $\varDelta h$ vergrößert werden, der Zuwachs des Volumens werde mit $\varDelta v$ bezeichnet.

$$v + \varDelta v = \frac{1}{3}\pi(6 + \varDelta h)^2(10 - 6 - \varDelta h)$$

$$144 \cdot \frac{\pi}{3} + \varDelta v = \frac{\pi}{3}(144 + 12(\varDelta h) - 8(\varDelta h)^2 - (\varDelta h)^3)$$

$$\varDelta v = \frac{\pi}{3}(12(\varDelta h) - 8(\varDelta h)^2 - (\varDelta h)^3).$$

Ein positives Δv bedeutet eine Zunahme, ein negatives Δv eine Abnahme des Inhaltes.

Es sei $\Delta h = 2$ cm; $\Delta v_2 = -16 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm, d. h. bei einer Vergrößerung der Höhe um 2 cm ist der Inhalt um $16 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm kleiner geworden. Hier läßt sich nun die Frage aufstellen, ob bei allmählicher Vergrößerung der Höhe von 6 cm auf 8 cm ein dauerndes Abnehmen des Inhaltes vorhanden ist. Aus obigem Werte für Δv_2 kann dies nicht geschlossen werden, denn $\Delta h = 1$ cm gibt $\Delta v_1 = 3 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm, d. h. bei einer Vergrößerung der Höhe von 6 cm aus um 1 cm ist der Inhalt des Kegels um $3 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm größer geworden, bei weiterer Vergrößerung der Höhe um 1 cm ist er um $\Delta v_2 - \Delta v_1 = 19 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm gefallen. Obgleich aus

$$\Delta v = \frac{\pi}{3}(12(\Delta h) - 8(\Delta h)^2 - (\Delta h)^3)$$

sich ergibt, daß für jedes $\Delta h < 1$ der Wert für Δv positiv ist, so läßt sich daraus nicht der Schluß ziehen, daß der Inhalt dauernd zunimmt, wenn die Höhe von 6 cm auf 7 cm wächst, es folgt vielmehr nur, daß der Inhalt für $h = 7$ cm um $3 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm größer ist als derjenige für $h = 6$ cm. Die Feststellung, ob v fortwährend zunimmt, ist nur zu ermöglichen, wenn man für sämtliche Werte von Δh (zwischen 0 und 1) die zugehörigen Zunahmen Δv berechnet und jede derselben mit der vorhergehenden vergleicht. Es kommt somit darauf an, die Veränderung des Inhaltes zu bestimmen, wenn die Höhe um eine außerordentlich kleine Größe vermehrt wird. Mit beliebiger Verkleinerung von Δh wird auch Δv immer kleiner; dividieren wir beiderseits durch Δh, so folgt

$$\frac{\Delta v}{\Delta h} = \frac{\pi}{3}(12 - 8(\Delta h) - (\Delta h)^2).$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir, daß der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta h}$ mit abnehmenden Δh sich immer mehr dem Werte $12 \cdot \frac{\pi}{3}$ nähert. (Man setze $\Delta h = \frac{1}{10^6}$ cm; $\frac{1}{10^{10}}$ cm; usw.). Läßt man Δh unendlich klein werden, d. h. kleiner als jede noch so kleine Zahl, die man sich denken kann, so hat der Quotient den Wert $12 \cdot \frac{\pi}{3}$. $\frac{\Delta v}{\Delta h}$ wird dann durch $\frac{dv}{dh}$ ersetzt, so daß also

$$\frac{dv}{dh} = 12 \cdot \frac{\pi}{3}$$

ist. dv und dh sind abgekürzte Bezeichnungen für unendlich kleine Zunahmen des Inhaltes und der Höhe. Der Quotient $\frac{dv}{dh}$, der nach obigem einen ganz bestimmten Wert hat, heißt der Differentialquotient des Inhaltes gebildet nach der Höhe. Für die Höhe 6 cm ist $\frac{dv}{dh} = 12 \cdot \frac{\pi}{3}$ also positiv, d. h. das Volumen nimmt zu, sobald die Höhe 6 cm um ein unendlich kleines Stück vergrößert wird.

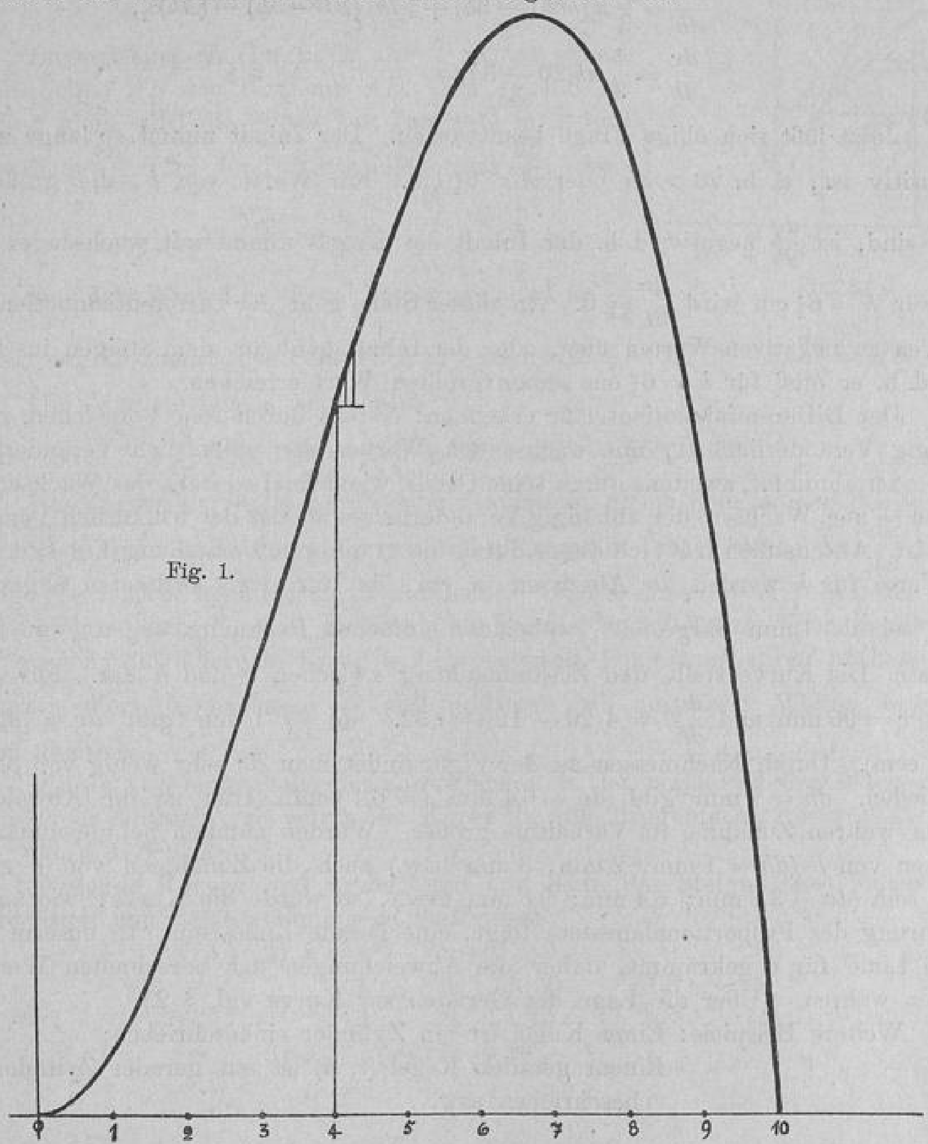

Fig. 1.

In gleicher Weise wird der Differentialquotient für eine beliebige Höhe gebildet:

$$v + \varDelta v = \frac{1}{3}(h + \varDelta h)^2(10 - h - \varDelta h),$$

$$v + \varDelta v = \frac{1}{3}\pi h^2(10 - h) + [h(\varDelta h)(20 - 3h) + (\varDelta h)^2(10 - 3h) - (\varDelta h)^3] \cdot \frac{\pi}{3},$$

$$v = \frac{1}{3}\,\pi h^2(10 - h),$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta h} = \frac{1}{3}\,\pi\,[h(20 - 3h) + (\Delta h)(10 - 3h) - (\Delta h)^2],$$

$$\frac{dv}{dh} = \frac{1}{3}\,\pi h(20 - 3h).$$

Jetzt läßt sich obige Frage beantworten. Der Inhalt nimmt so lange zu, als $\frac{dv}{dh}$ positiv ist, d. h. $20 > 3h$ oder $h < 6\frac{2}{3}$ cm. Für Werte von h, die größer als $6\frac{2}{3}$ cm sind, ist $\frac{dv}{dh}$ negativ, d. h. der Inhalt des Kegels nimmt mit wachsender Höhe ab. Für $h = 6\frac{2}{3}$ cm wird $\frac{dv}{dh} = 0$. An dieser Stelle geht der Differentialquotient von positiven zu negativen Werten über, oder der Inhalt geht aus dem Steigen ins Fallen über, d. h. er muß für $h = 6\frac{2}{3}$ cm seinen größten Wert erreichen.

Der Differentialquotient läßt erkennen: erstens durch sein Vorzeichen, ob die abhängig Veränderliche (v) mit wachsenden Werten der willkürlich Veränderlichen (h) zu- oder abnimmt, zweitens durch seine Größe, wievielmal so stark das Wachsen (Abnehmen = neg. Wachsen) der abhängig Veränderlichen als das der willkürlich Veränderlichen ist. Anschaulich läßt sich dieses durch die graphische Darstellung (Fig. 1) machen. Die Werte für h werden als Abszissen in cm, die für v als Ordinaten abgetragen (1 ccm sei als 1 mm dargestellt, wobei der einfachen Rechnung wegen $\frac{1}{3}\cdot\pi = 1$ gesetzt ist.) Die Kurve stellt den Zusammenhang zwischen v und h dar. Für $h = 4$ cm ist $v = 96$ mm und $\frac{dv}{dh} = 4(20 - 12) = 32$. $dh = 1$ mm gibt $dv = 3{,}2$ mm ($= 3{,}2$ ccm). Durch Nachmessen an der Figur findet man dv sehr wenig von 3,2 mm verschieden. $dh = 2$ mm gibt $dv = 6{,}4$ mm ($= 6{,}4$ ccm). Hier ist die Abweichung von der wahren Zunahme im Verhältnis größer. Würden nämlich bei gleichmäßigem Wachsen von h ($dh = 1$ mm, 2 mm, 3 mm usw.) auch die Zunahmen von v gleichmäßig sein ($dv = 3{,}2$ mm; 6,4 mm; 9,6 mm usw.), so würde die Kurve, wie aus der Umkehrung des Proportionalansatzes folgt, eine gerade Linie sein. In unserm Falle ist die Linie für v gekrümmt, daher die Abweichungen der berechneten Werte dv von den wahren. (Über die Lage der Geraden zur Kurve vgl. § 2.)

Weitere Beispiele: Einer Kugel ist ein Zylinder einbeschrieben;
Einem geraden Kegel (r, h) ist ein gerader Zylinder einbeschrieben usw.

§ 2.

Die geometrische Bedeutung des Differentialquotienten bei Kurven.

A und B seien zwei Punkte der Kurve $y = f(x)$ [bestimmtes Beispiel $y = x^2(10 - x)$]. Die Koordinaten von A seien $x_1 | y_1$, die von B $x_2 | y_1$. Letztere können mit $x_1 + \varDelta x \mid y_1 + \varDelta y$ bezeichnet werden. In dem Dreieck ABC ist dann $BC = \varDelta y$, $AC = \varDelta x$, folglich

$$\operatorname{tg} BAC = \operatorname{tg} ADx = \frac{\varDelta y}{\varDelta x}.$$

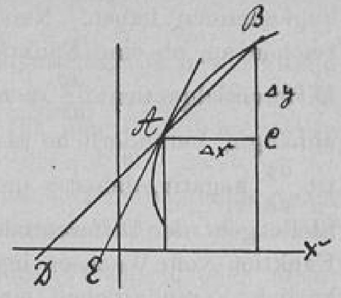

Fig. 2.

Bewegt sich der Punkt B auf A zu, so nähert sich die Sehne AB der Tangente AE. Für $\varDelta y$ und $\varDelta x$ unendlich klein wird die Sehne zur Tangente in A, und der Quotient $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ wird der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$; also

$$\operatorname{tg} AEx = \frac{dy}{dx}.$$

Um den Winkel in E zu bestimmen, ist in $\frac{dy}{dx}$ der Wert der Abszisse x_1 des Punktes A zu setzen, z. B. $y = x^2(10 - x)$ $\frac{dy}{dx} = x(20 - 3x)$.

Die Abszisse von A sei 4, also

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} AEx = 4 \cdot 8 = 32, \quad \widehat{AEx} = 88^0\, 12'\, 36''.$$

Bei Kurven ist somit der Differentialquotient gleich dem tangens des Winkels, den die Berührende mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Ist $\frac{dy}{dx}$ positiv, so steigt die Kurve, negativ, so fällt dieselbe. Ist für einen Wert von x der Differentialquotient gleich 0, so ist die Tangente parallel der x-Achse. Für diesen Wert von x erreicht die Kurve in bezug auf ihre nächste Umgebung ihren höchsten bzw. niedrigsten Wert, je nachdem $\frac{dy}{dx}$ von positiven zu negativen Werten bzw. umgekehrt übergeht.

Würde von einer Stelle der Kurve aus statt des veränderlichen Wachsens ein gleichmäßiges eintreten, so würde die Kurve in die Tangente an dieser Stelle übergehen (vgl. § 1 Schluß).

Folgende Kurven sind zu zeichnen und dann das Steigen bzw. Fallen sowie ihre höchsten und tiefsten Punkte zu bestimmen.

1) $y = x^3 - 7x + 6$,

2) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{319}{24}$,

3) $y = x^3 - 12x + 16$.

§ 3.

Maxima und Minima.

Durchläuft in der Funktion $y = x^2(10 - x)$ die willkürlich Veränderliche x alle möglichen Werte, so erkennt man, daß y bis zu einem bestimmten Werte von x wächst, bei weiterer Zunahme von x sich jedoch verkleinert. Die graphische Darstellung läßt sich deutlicher erkennen. In dem Punkte, in welchem die abhängig

Veränderliche vom Steigen ins Fallen übergeht, wird sie einen größten Wert (Maximum) in bezug auf ihre unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Werte angenommen haben. Nun gibt der Differentialquotient nach § 1 durch sein Vorzeichen an, ob eine Funktion steigt oder fällt. Für die angegebene Funktion ist der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = x(20 - 3x)$. Solange x kleiner ist als $6\frac{2}{3}$, ist $\frac{dy}{dx}$ positiv, die abhängig Veränderliche also im Zunehmen begriffen; sobald aber x größer als $6\frac{2}{3}$, ist $\frac{dy}{dx}$ negativ, daher y im Abnehmen begriffen. Für $x = 6\frac{2}{3}$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$, an dieser Stelle geht der Differentialquotient von positiven zu negativen Werten über, d. h. die Funktion vom Wachsen ins Abnehmen. Sie muß demnach für diesen Wert der willkürlich Veränderlichen einen größten Wert erreichen. Wir erkennen daraus, daß derjenige Wert der willkürlich Veränderlichen, für welchen eine Funktion derselben ein Maximum wird, die Gleichung erfüllen muß:

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Wenn dagegen eine Funktion bis zu einem gewissen Punkt der willkürlich Veränderlichen abgenommen hat und ist dann ins Wachsen übergegangen, so hat sie in diesem Punkte relativ zu unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Werten einen kleinsten Wert (Minimum) angenommen. Betrachten wir die Funktion $y = \frac{x^2}{x - 2r}$ (das Volumen y des einer Kugel (r) umbeschriebenen Kegels mit der Höhe x wird berechnet durch $y = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{x^2}{x - 2r}$) und lassen x alle Werte von $2r$ an durchlaufen (graphisch darstellen). Aus dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = \frac{x(x - 4r)}{(x - 2r)^2}$ ersehen wir, daß y abnimmt, solange $x < 4r$ ist, dagegen zunimmt, sobald $x > 4r$ ist. Für $x = 4r$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$, an dieser Stelle geht der Differentialquotient von negativen zu positiven Werten über, die Funktion also vom Abnehmen ins Wachsen. Sie muß demnach für $x = 4r$ einen kleinsten Wert annehmen. Auch hier folgt, daß derjenige Wert der willkürlich Veränderlichen, für welchen eine Funktion derselben ein Minimum wird, die Gleichung erfüllen muß:

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Nach § 2 ist bei Kurven $\frac{dy}{dx}$ gleich dem tangens des Winkels, den die Berührende in einem Kurvenpunkte mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Aus den Darlegungen in diesem Paragraphen folgt, daß in dem Punkte der Kurve, in welchem eine Funktion ihr Maximum oder Minimum erreicht, die Tangente parallel der x-Achse sein muß, also $\frac{dy}{dx} = 0$.

In dem Punkte, für welchen die abhängig Veränderliche ein Maximum erreicht, geht der Differentialquotient, der ja selbst wieder eine Funktion von x ist, von positiven zu negativen Werten über, er hat also für zunehmende x abgenommen. Nach § 1 ist das Fallen einer Funktion daran zu erkennen, daß der Differentialquotient dieser Funktion negativ ist.

Es muß daher der Differentialquotient des Differentialquotienten, d. h. der zweite Differentialquotient für diesen Wert von x, der das Maximum gibt, negativ sein. In gleicher Weise folgt, daß der zweite Differentialquotient für den Wert von x, der das Minimum gibt, positiv ist.

Wenn jedoch für einen Wert von x auch der zweite Differentialquotient den Wert Null annimmt, so ist (wenn von den höheren Differentialquotienten abgesehen wird) zu untersuchen, ob $\frac{dy}{dx}$ in diesem Falle sein Vorzeichen wechselt oder nicht. Tritt der erste Fall ein, so hat die Funktion (Kurve) ein Maximum, wenn $\frac{dy}{dx}$ von $+$ zu $-$, ein Minimum, wenn $\frac{dy}{dx}$ von $-$ zu $+$ übergeht.

Beispiel. Gegeben $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$; $\frac{dy}{dx} = 4(x-1)^3$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(x-1)^2$ erhalten für $x = 1$ den Wert Null. In dem Punkte $x = 1$ wechselt der erste Differentialquotient sein Vorzeichen und geht von negativen zu positiven Werten über; die Funktion (Kurve) hat in dem Punkte $x = 1$ ein Minimum (Fig. 3)*).

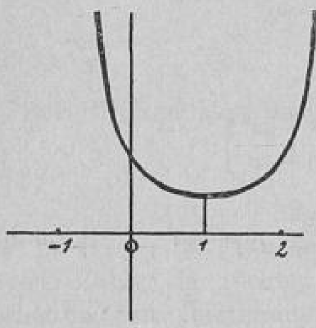

Fig. 3.

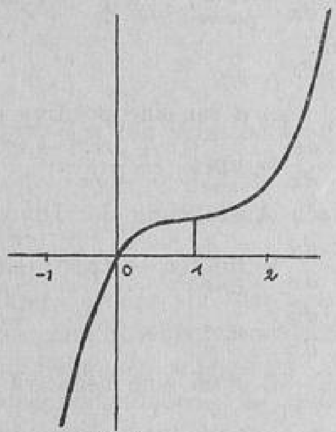

Fig. 4.

Tritt der zweite Fall ein, daß der erste Differentialquotient das Zeichen nicht wechselt, so verharrt eine Funktion (Kurve) im Steigen bzw. im Fallen, nachdem die willkürlich Veränderliche den Punkt, für welchen $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, überschritten hat. In diesem Falle kann also weder Maximum noch Minimum eintreten.

Beispiel. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; $\frac{dy}{dx} = 3(x-1)^2$ ist stets positiv (Fig. 4.*).

Über die Bedeutung von $\frac{d^2y}{dx^2}$ bei Kurven vgl. § 16.

*) In Fig. 3 und 4 sind x in cm, y in halben cm abgetragen.

2

§ 4.

Bestimmung der Differentialquotienten einer Konstanten und der einfachen Funktionen x^n, $\sin x$, $\cos x$.

Nach § 1 wird der Differentialquotient der Funktion $y = f(x)$ dadurch bestimmt, daß die willkürlich Veränderliche x um Δx vermehrt, dann der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnet und schließlich zur Grenze Δx unendlich klein (d. h. rechnerisch im Vergleich zu endlichen Größen $= 0$) übergegangen wird. Mithin:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x),$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right].$$

Der Differentialquotient der Funktion $y = f(x)$ wird entweder mit y' oder mit $f'(x)$ bezeichnet.

1) $$y = a$$

$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{a - a}{\Delta x}\right] = 0$, d. h. der Differentialquotient einer Konstanten ist gleich Null.

2) $$y = x^n$$

α) n sei eine positive ganze Zahl,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}\right].$$

Nach Ausführung der Division folgt

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1}]$$
$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

β) n sei eine negative ganze Zahl; $n = -k$

$$y = x^{-k} = x^{\frac{1}{k}},$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{\frac{1}{(x + \Delta x)^k} - \frac{1}{x^k}}{\Delta x}\right]$$
$$= \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{x^k - (x + \Delta x)^k}{\Delta x \cdot x^k \cdot (x + \Delta x)^k}\right]$$
$$= \lim_{\Delta x = 0}\left[-\frac{1}{x^k \cdot (x + \Delta x)^k} \cdot \frac{(x + \Delta x)^k - x^k}{\Delta x}\right]$$
$$= -\frac{1}{x^{2k}} \cdot kx^{k-1} = -kx^{-k-1}.$$

Setzt man für $-k$ wieder n, so erhält man $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

γ) n sei eine gebroche Zahl; $n = \frac{p}{q}$,

$$y = x^{\frac{p}{q}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{(x+\Delta x)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{\Delta x}\right].$$

Es werde $x^{\frac{1}{q}} = u$ gesetzt. $x = u^q$; folglich $y = u^p$

$$x + \Delta x = (u + \Delta u)^q,$$

$$\Delta x = (u+\Delta u)^q - u^q. \text{ Mithin}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{(u+\Delta u)^p - u^p}{(u+\Delta u)^q - u^q}\right].$$

Zähler und Nenner der rechten Seite werden durch Δu dividiert; für $\Delta x = 0$ wird auch $\Delta u = 0$, demnach ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u = 0}\left[\frac{\frac{(u+\Delta u)^p - u^p}{\Delta u}}{\frac{(u+\Delta u)^q - u^q}{\Delta u}}\right]$$

$$= \frac{pu^{p-1}}{qu^{q-1}} = \frac{p}{q}u^{p-q} = \frac{p}{q}\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-q} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}.$$

Der Differentialquotient der Funktion x^n ist also für jedes beliebige n

$$nx^{n-1}.$$

3)
$$y = \sin x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}\right].$$

Der Zähler der rechten Seite ist die Differenz zweier sin, der sinus ist aber das Verhältnis einer bestimmten Strecke im Kreis zum Radius; der Nenner Δx ist ein Winkel, ist also bisher in Grad, Minuten und Sekunden angegeben. Bei einem Quotienten müssen Zähler und Nenner dieselbe Benennung haben. Es muß demnach x ebenfalls als Quotient zweier Längen bestimmt werden, nämlich als Verhältnis des zum Winkel gehörenden Bogens und des Radius. Wird der Radius des Kreises gleich 1 gesetzt, so kann die Länge des Lotes als sinus, der Bogen muß dann mit x bezeichnet werden. Man sagt dann, x ist im Bogenmaß ausgedrückt, z. B. $x = 60^0$; $60^0 = \frac{\pi}{3}$; $y = \sin\frac{\pi}{3} = \sin 1{,}0472$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\right].$$

Für $\varDelta x = 0$ erhält die rechte Seite die Form $\frac{0}{0}$, da sowohl $\sin\frac{\varDelta x}{2}$ als auch $\varDelta x$ Null werden. Es ist demnach zu untersuchen, welchem Werte sich der Quotient $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ nähert, wenn $\alpha = 0$ wird. Es ist

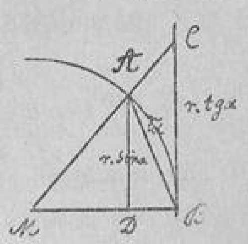

Fig. 5.

$$\triangle MBA < \text{Sekt. } MBA < \triangle MBC \quad \text{oder}$$

$$\frac{r \cdot AD}{2} < \frac{r \cdot \text{Bog. } AB}{2} < \frac{r \cdot BC}{2} \quad \text{oder}$$

$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$. Nach Division durch $\sin\alpha$ erhält man $1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$. Nähert sich α der Null, so nähert sich $\frac{1}{\cos\alpha}$ dem Werte 1. Die beiden Grenzen 1 und $\frac{1}{\cos\alpha}$, zwischen denen $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ liegt, erhalten für $\alpha = 0$ denselben Wert 1, folglich muß $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ für $\alpha = 0$ gleich 1 sein.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x = 0}\left[\frac{2\cos\frac{2x + \varDelta x}{2}\sin\frac{\varDelta x}{2}}{\varDelta x}\right].$$ Nach dem vorigen ist $\frac{\sin\frac{\varDelta x}{2}}{\frac{\varDelta x}{2}} = 1$, also

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x = 0}\left[\cos\frac{2x + \varDelta x}{2}\,\frac{\sin\frac{\varDelta x}{2}}{\frac{\varDelta x}{2}}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

4)
$$y = \cos x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x = 0}\left[\frac{\cos(x + \varDelta x) - \cos x}{\varDelta x}\right]$$

$$= \lim_{\varDelta x = 0}\left[\frac{-\,2\sin\frac{2x + \varDelta x}{2}\sin\frac{\varDelta x}{2}}{\varDelta x}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

§ 5.

Differentialquotienten von Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten von Funktionen.

1) Differentialquotient der Summe bzw. Differenz von Funktionen.

$$y = f(x) \pm \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \cdots,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x = 0}\left[\frac{f(x + \varDelta x) \pm \varphi(x + \varDelta x) \pm \psi(x + \varDelta x) \pm \cdots - f(x) \mp \varphi(x) \mp \psi(x) \mp \ldots}{\varDelta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \pm \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} \pm \frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x} \pm \cdots\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \pm \varphi'(x) \pm \psi'(x) \pm \cdots.$$

Der Differentialquotient der Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Differentialquotienten der Funktionen.

2) Differentialquotient des Produktes aus einer Funktion und einer Konstanten.

$$y = af(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{af(x+\Delta x)-af(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0} a\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = af'(x).$$

3) Differentialquotient des Produktes zweier Funktionen.

$$y = f(x)\cdot\varphi(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x+\Delta x)-f(x)\cdot\varphi(x)}{\Delta x}\right].$$

Die rechte Seite bleibt ungeändert, wenn im Zähler

$-f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x)+f(x)\varphi(x+\Delta x)$ hinzugefügt wird.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x+\Delta x)-f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x)+f(x)\varphi(x+\Delta x)-f(x)\cdot\varphi(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\varphi(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+f(x)\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\cdot\varphi(x)+\varphi'(x)\cdot f(x).$$

4) Differentialquotient des Quotienten zweier Funktionen.

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)-f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)\cdot\Delta x}\right]$$

$$\lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)-f(x)\cdot\varphi(x)+f(x)\cdot\varphi(x)-f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left\{\frac{1}{\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)}\cdot\left[\varphi(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right]\right\},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\cdot\varphi(x)-\varphi'(x)\cdot f(x)}{[\varphi(x)]^2}.$$

Beispiel. $y = \operatorname{tang} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d\sin x}{dx}\cdot\cos x - \dfrac{d\cos x}{dx}\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d\operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$y = \operatorname{cotg} x$. In derselben Weise erhält man

$$\frac{d\operatorname{cotg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

§ 6.

Differentialquotient zusammengesetzter Funktionen.

1) Die Basis einer Potenz mit konstanten Exponenten ist eine Funktion von x; z. B.

$$y = (x^2 + 3)^n.$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{\{(x+\Delta x)^2 + 3\}^n - (x^2+3)^n}{\Delta x}\right].$$

Es sei $x^2 + 3 = z$ und $(x + \Delta x)^2 + 3 = z + \Delta z$, mithin

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta x}\right].$$ Die rechte Seite wird mit Δz erweitert.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = nz^{n-1}\cdot\frac{dz}{dx} \qquad (\S\ 3)$$

$$= n(x^2+3)^{n-1}\cdot\frac{d(x^2+3)}{dx}$$

$$= n(x^2+3)^{n-1}\cdot 2x.$$

Der hier angegebene Weg führt zur Bestimmung des Differentialquotienten der Funktion $y = [f(x)]^n$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{[f(x+\Delta x)]^n - [f(x)]^n}{\Delta x}\right],$$

$f(x) = z$, $f(x + \Delta x) = z + \Delta z$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right]$$

$$= nz^{n-1}\frac{dz}{dx} = n[f(x)]^{n-1}\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

$$= n[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x).$$

2) Der Bogen einer Kreisfunktion ist eine Funktion von x; z. B.

$$y = \sin(x^2+3),$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\sin[(x+\Delta x)^2+3] - \sin(x^2+3)}{\Delta x}\right].$$

Es sei $x^2+3 = z$; $(x+\Delta x)^2 + 3 = z + \Delta z$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{2\cos\frac{2z+\Delta z}{2}\sin\frac{\Delta z}{2}}{\Delta x}\right].$$

Nach § 3 ist der Grenzwert des Quotienten aus dem sinus und seinem Bogen gleich 1, folglich muß die rechte Seite mit $\frac{\Delta z}{2}$ erweitert werden.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{2\cos\frac{2z+\Delta z}{2}\sin\frac{\Delta z}{2}}{\frac{\Delta z}{2}}\cdot\frac{\Delta z}{2\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\cos\frac{2z+\Delta z}{2}\sin\frac{\Delta z}{2}}{\frac{\Delta z}{2}}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos z \cdot \frac{dz}{dx} = \cos(x^2+3)\frac{d(x^2+3)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2+3)\cdot 2x.$$

Es sei $y = \sin[f(x)]$,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\sin[f(x+\Delta x)] - \sin f(x)}{\Delta x}\right].$$

Es sei $f(x) = z$; $f(x+\Delta x) = z + \Delta z$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\sin(z+\Delta z) - \sin z}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\sin(z+\Delta z) - \sin z}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right]$$

$$= \cos z \cdot \frac{dz}{dx} = \cos[f(x)[\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

$$= \cos[f(x)]\cdot f'(x).$$

3) Bestimmung des Differentialquotienten der Funktion

$$y = f[\varphi(x)],$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left\{\frac{f[\varphi(x+\Delta x)] - f[\varphi(x)]}{\Delta x}\right\};\ \varphi(x) = z;\ \varphi(x+\Delta x) = z + \Delta z.$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left\{\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right\}$$

$$= f'(z)\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$= f'[\varphi(x)]\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$$

§ 7.

Differentialquotient unentwickelter Funktionen.

Nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren lassen sich die Differentialquotienten unentwickelter Funktionen bestimmen.

Beispiel 1. $f(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$

Man bilde die Ableitung sämtlicher Summanden:

$$\frac{d(b^2x^2)}{dx} + \frac{d(a^2y^2)}{dx} - \frac{d(a^2b^2)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(b^2x^2)}{dx} = 2b^2x; \quad \frac{d(a^2y^2)}{dx} = \frac{d(a^2y^2)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2a^2y \cdot \frac{dy}{dx}; \quad \text{mithin}$$

$$2b^2x + 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Beispiel 2. $f(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x + a_4y + a_5 = 0.$

$$\frac{d(a_0x^2)}{dx} + \frac{d(a_1xy)}{dx} + \frac{d(a_2y^3)}{dx} + \frac{d(a_3x)}{dx} + \frac{d(a_4y)}{dx} + \frac{da_5}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(a_0x^2)}{dx} = 2a_0x; \quad \frac{d(a_1xy)}{dx} = a_1\left(\frac{dx}{dx} \cdot y + \frac{dy}{dx} \cdot x\right) = a_1y + a_1x\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{da_2y^2}{dx} = 2a_2y\frac{dy}{dx}; \quad \frac{d(a_3x)}{dx} = a_3; \quad \frac{d(a_4y)}{dx} = a_4\frac{dy}{dx}; \quad \frac{da_5}{dx} = 0; \quad \text{mithin:}$$

$$2a_0x + a_1y + a_1x\frac{dy}{dx} + 2a_2y\frac{dy}{dx} + a_3 + a_4\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a_0x + a_1y + a_3}{a_1x + 2a_2y + a_4}.$$

Beispiel 3. $y\sin x + x\cos y = 0.$

$$\frac{d(y\sin x)}{dx} + \frac{d(x\cos y)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(y\sin x)}{dx} = \frac{dy}{dx}\sin x + y\cos x; \quad \frac{d(x\cos y)}{dx} = \cos y - x\sin y\frac{dy}{dx}; \quad \text{mithin:}$$

$$\frac{dy}{dx}\sin x + y\cos x + \cos y - x\sin y\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x + \cos y}{x\sin y - \sin x}.$$

Entwickelung der Funktionen in Reihen*).

§ 8.

Die binomische Reihe.

Die Potenz $(1+x)^n$, in welcher n eine beliebige Zahl ist, soll in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Es sei

$$(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k + \cdots; \quad x = 0 \text{ gibt } a_0 = 1.$$

Ich bilde beiderseits die Ableitung nach x und erhalte

$$n(1+x)^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + k \cdot a_kx^{k-1} + \cdots; \quad x = 0 \text{ gibt } a_1 = n.$$

Die 2te Ableitung liefert

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3x + \cdots + (k-1) \cdot ka_kx^{k-2} + \cdots;$$

$$x = 0 \text{ gibt } a_2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Die $k$te Ableitung:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) \cdot (1+x)^{n-k} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot ka_k + 2 \cdot 3 \cdots (k)(k+1)a_{k+1} \cdot x + \cdots;$$

$x = 0$ gibt $a_k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$. Die rechte Seite werde mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet.

$$a_k = \binom{n}{k}.$$

Es ist somit

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots.$$

Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so hat die Reihe eine endliche Anzahl Glieder und schließt mit x^n (bin. Lehrsatz). Für jeden anderen Wert von n hat die Reihe unendlich viel Glieder.

Die Konvergenz wird bestimmt, indem man den Grenzwert untersucht, den der Quotient des $(k+1)$ten und des $k$ten Gliedes für $k = \infty$ annimmt.

$$q = \lim_{k=\infty}\left[\frac{\binom{n}{k+1}x^{k+1}}{\binom{n}{k}x^k}\right] = \lim_{k=\infty}\left[\frac{n-k}{k+1} \cdot x\right] = \lim_{k=\infty}\left[\frac{\frac{n}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}x\right] = -x.$$

Die binomische Reihe ist demnach konvergent für $x < 1$ (absolut genommen)**).

Für $x = \dfrac{b}{a}$ erhält man

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{b}{a}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{k}\left(\frac{b}{a}\right)^k + \cdots$$

*) Der Beweis der Möglichkeit einer solchen Entwickelung ist übergangen. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten und die einfachsten Sätze über Konvergenz und Divergenz der unendlichen Reihen sind als bekannt vorausgesetzt.

**) Die Feststellung der Konvergenz für $n = \pm 1$ ist übergangen, weil sie für Schüler im allgemeinen zu schwierig ist.

$$\frac{(a+b)^n}{a^n} = 1 + \binom{n}{1}\frac{b}{a} + \binom{n}{2}\frac{b^2}{a^2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{b^k}{a^k} + \cdots$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots.$$

Nach dem vorhergehenden folgt, daß diese Reihe konvergiert, wenn $b < a$ (absolut genommen) ist.

§ 9.

Die Exponentialreihe.

Es ist $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ nach der binomischen Reihe zu entwickeln und der Grenzwert dieser Potenz für $n = \infty$ festzustellen.

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\,\frac{x^k}{n^k} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot x^k + \cdots}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

Für $n = \infty$ erhält man

1) $$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots.$$

Da diese Reihe aus der binomischen Reihe entstanden ist, konvergiert sie unter derselben Bedingung wie die binomische, also $\frac{x}{n} < 1$ oder $x < n$. Da $n = \infty$ ist, konvergiert die Reihe für jedes endliche x.

Direkter Nachweis: Der Grenzwert des Quotienten des $(k+1)^{\text{ten}}$ und des k^{ten} Gliedes für $k = \infty$ ist.

$$q = \lim_{k=\infty}\left[\frac{\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{x^k}{k!}}\right] = \lim_{k=\infty}\left[\frac{x}{k+1}\right] = 0.$$

Die Reihe konvergiert für jedes x.

Für Werte von x, die größer als 1 sind, nähert sich $\frac{x^k}{k!}$ mit wachsendem k einem Bruche von der Form $\frac{\infty}{\infty}\cdot$ Es könnte somit $\lim\limits_{k=\infty}\left[\frac{x^k}{k!}\right]$ fraglich werden. Wenn r eine positive ganze Zahl und (absolut genommen) größer als x ist, so ist

$$\frac{x^k}{k!} = \frac{x^r}{r!}\cdot\frac{x^{k-r}}{(r+1)(r+2)\cdots k}.$$

Nun ist
$$\begin{aligned} r+1 &> r, \\ r+2 &> r, \\ &\vdots \\ k\quad &> r; \quad \text{folglich } (r+1)\cdot(r+2)\cdots k > r^{k-r} \end{aligned}$$

und
$$\frac{1}{(r+1)(r+2)\cdots k} < \frac{1}{r^{k-r}}, \text{ mithin}$$
$$\frac{x^k}{k!} < \frac{x^r}{r!}\left(\frac{x}{r}\right)^{k-r};$$

da $\frac{x}{r}$ ein echter Bruch ist, so wird $\left(\frac{x}{r}\right)^{k-r}$ mit wachsendem k immer kleiner, für $k=\infty$ wird $\left(\frac{x}{r}\right)^{k-r}=0$, demnach ist
$$\lim_{k=\infty}\left[\frac{x^k}{k!}\right]=0.$$

Für $x=1$ geht Reihe 1) über in:
$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots.$$

Die Summe dieser Reihe wird mit e bezeichnet.
$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots.$$

Ferner
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{x}\right)}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x}=\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{x}\right)}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x, \text{ folglich}$$
$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]=e^x, \quad \text{demnach}$$
$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots.$$

Diese Reihe heißt die natürliche Exponentialreihe.

Es sei
$$S_k=1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}, \; k>x.$$

α) x positiv:
$$e^x=S_k+\frac{x^{k+1}}{(k+2)!}+\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}+\cdots$$
$$S_k+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left(1+\frac{x}{k+2}+\frac{x^2}{(k+2)(k+3)}+\cdots\right).$$

Es ist $k+2>k+1$, mithin $\frac{1}{k+2}<\frac{1}{k+1}$,

$k+3>k+1$, " $\frac{1}{(k+2)(k+3)}<\frac{1}{(k+1)^2}$ usw., mithin

$e^x<S_k+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left(1+\frac{x}{k+1}+\left(\frac{x}{k+1}\right)^2+\cdots\right)$. Da $\frac{x}{k+1}<1$ ist, folgt

$$e^x < S_k + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{k+1}},$$

$$< S_k + \frac{x^{k+1}}{k!} \cdot \frac{1}{k+1-x}; \text{ demnach}$$

$$S_k < e^x < S_k + \frac{x^{k+1}}{k!(k+1-x)}.$$

Nimmt man die ersten $(k+1)$ Glieder, so ist der Fehler, den man durch Fortlassen der übrigen Glieder begeht, kleiner als $\frac{x^{k+1}}{k!(k+1-x)}$.

Für $x = 1$ erhält man

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{k! \cdot k}. \quad k = 11 \text{ gibt}$$

$$2{,}718\,28\,18\,28\,26 < e < 2{,}718\,28\,18\,28\,44.$$

β) x negativ.

a) k eine ungerade Zahl:

$$e^x = S_k + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^{k+2}}{k+2} + - \cdots$$

$$e^x = S_k + \left(\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^{k+2}}{(k+2)!}\right) + \left(\frac{x^{k+3}}{(k+3)!} - \frac{x^{k+4}}{(k+4)!}\right) + \cdots$$

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} > \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} > \frac{x^{k+3}}{(k+3)!} > \cdots, \text{ mithin}$$

$$e^x > S_k.$$

Ferner ist

$$e^x = S_{k+1} - \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} + \frac{x^{k+3}}{(k+3)!} - \cdots,$$

$$= S_{k+1} - \left(\frac{x^{k+2}}{(k+2)!} - \frac{x^{k+3}}{(k+3)!}\right) - \left(\frac{x^{k+4}}{(k+4)!} - \frac{x^{k+5}}{(k+5)!}\right) - \cdots,$$

mithin $\quad e^x < S_{k+1}$ und

$$S_k < e^x < S_{k+1}.$$

b) k eine gerade Zahl:

In gleicher Weise erhält man

$$S_k > e^x > S_{k+1}.$$

Ist in der Exponentialfunktion der Exponent eine negative Zahl, so liegt e^x für $x < k$ zwischen der Summe der ersten $(k+1)$ und der ersten $(k+2)$ Glieder.

Nimmt man e als Basis eines Logarithmensystems (die Log. für diese Basis mögen mit l bezeichnet werden), so läßt sich jede beliebige Potenz mit konstanter Basis und veränderlichem Exponenten in eine Reihe entwickeln.

Es ist $\quad a^x = (e^{la})^x = e^{xla} = 1 + \frac{xla}{1!} + \frac{(xla)^2}{2!} + \frac{(xla)^3}{3!} + \cdots + \frac{(xla)^k}{k!} + \cdots$ (allgemeine Exponentialreihe).

Für $x = 1$ erhält man $a = 1 + \frac{la}{1!} + \frac{(la)^2}{2!} + \cdots + \frac{(la)^k}{k!} + \cdots$. (Berechnung des Numerus aus seinem natürlichen Logarithmus.)

Differentialquotient der Exponentialfunktion:

1)
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots,$$
$$\frac{de^x}{dx} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$
$$= e^x.$$

Die Exponentialfunktion ist also diejenige Funktion, deren Ableitungen ihr sämtlich gleich sind.

2)
$$a^x = 1 + \frac{xla}{1!} + \frac{(xla)^2}{2!} + \cdots + \frac{(xla)^k}{k!} + \cdots,$$
$$\frac{da^x}{dx} = la + \frac{x(la)^2}{1!} + \frac{x^2(la)^3}{2!} + \cdots + \frac{x^{k-1}(la)^k}{(k-1)!} + \frac{x^k(la)^{k+1}}{k!} + \cdots,$$
$$= la\left(1 + \frac{(xla)}{1!} + \frac{(xla)^2}{2!} + \cdots + \frac{(xla)^k}{k!} + \cdots\right)$$
$$= a^x \cdot la.$$

§ 10.

Die Logarithmische Reihe.

1. Für die Basis e.

Differentialquotient von lx.

$y = lx$ oder $x = e^y$, mithin

$$1 = e^y \frac{dy}{dx} \qquad (§\ 9 \text{ und } 6).$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x},$$
$$\frac{d(lx)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

lx kann in keine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden, da das absolute Glied $= l0 = -\infty$ ist, dagegen $l(1+x)$.

Es sei $l(1+x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots$. $x = 0$ gibt $a_0 = l1 = 0$.

Nach der ersten Ableitung erhält man:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots,$$

nach der k^{ten}:

$$(-1)(-2)(-3)\cdots(-(k-1))\,(1+x)^{-k} = k!\,a_k + (k+1)\,.\,k\cdots 3\cdot 2\cdot a_{k+1}x + \cdots,$$

$x = 0$ gibt $(-1)^{k-1}\cdot(k-1)! = k!\,a_k$,

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \text{folglich}$$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \pm \frac{x^k}{k} + \cdots.$$

Zweite Herleitung. Nach der ersten Differentiation erhält man

$$(1+x)^{-1} = a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots.$$

Die linke Seite wird nach der binomischen Reihe entwickelt.

$$1 + \binom{-1}{1}x + \binom{-1}{2}x^2 + \cdots \binom{-1}{k-1}x^{k-1} + \cdots = a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1}$$

folglich

$$\begin{aligned} k \cdot a_k &= \binom{-1}{k-1} \\ &= \frac{(-1)(-2)\cdots(-1-(k-2))}{(k-1)!} \\ &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots (k-1)}{k!} = (-1)^{k-1} \\ a_k &= \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert des Quotienten des $(k+1)^{\text{ten}}$ und des k^{ten} Gliedes für $k = \infty$ ist

$$q = \lim_{k=\infty}\left[-\frac{x \cdot k}{k+1}\right] = \lim_{k=\infty}\left[\frac{x}{\frac{1}{k}+1}\right] = -x.$$

Die Log. Reihe ist somit konvergent für $x < 1$.

Auch für $x = 1$ ist die Reihe konvergent. Es ist

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots.$$

Es sei

$$\begin{aligned} S_{2k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots - \frac{1}{2k}, \\ l2 &= S_{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+1} + - \cdots \\ &= S_{2k} + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) + \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+4}\right) + \cdots, \end{aligned}$$

mithin $\quad l2 > S_{2k}$.

$$\begin{aligned} S_{2k+1} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots + \frac{1}{2k+1}, \\ l2 &= S_{2k+1} - \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+3} - + \cdots \\ &= S_{2k+1} - \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+3}\right) - \left(\frac{1}{2k+4} - \frac{1}{2k+5}\right) - \cdots, \end{aligned}$$

mithin $\quad l2 < S_{2k+1}$; folglich

$$S_{2k} < l2 < S_{2k+1},$$

d. h. die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$ ist konvergent.

(Zur Berechnung von $l2$ eignet sich diese Reihe nicht, da sie sehr schwach konvergiert.)

Für $x = -1$ wird dagegen die Reihe divergent.

$$l0 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right).$$

Die in Klammern stehende Reihe heißt die harmonische.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right) \text{ usw.}$$

Nun ist

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} \text{ usw.}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$$

Die Reihe für $l(1+x)$ ist somit konvergent, wenn $-1 < x \leqq +1$ ist.
Setzt man in diese Reihe $-x$ an Stelle von x, so folgt

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^k}{k} - \cdots \quad -1 \leqq x < 1.$$

Durch Subtraktion der Reihen für $l(1+x)$ und $l(1-x)$ erhält man

$$l(1+x) - l(1-x) = l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots\right).$$

$$-1 < x < 1.$$

Es sei $\quad S_{2k+1} = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)$, mithin

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left[S_{2k+1} + \left(\frac{x^{2k+3}}{2k+3} + \frac{x^{2k+5}}{2k+5} + \cdots\right)\right].$$

Es ist

$$\frac{1}{2k+5} < \frac{1}{2k+3},$$

$$\frac{1}{2k+7} < \frac{1}{2k+3} \text{ usw., mithin}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} < 2\left[S_{2k+1} + \left(\frac{x^{2k+3}}{2k+3} + \frac{x^{2k+5}}{2k+3} + \frac{x^{2k+7}}{2k+3} + \cdots\right)\right] \text{ und, da } x < 1 \text{ ist,}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} < 2\left(S_{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{2k+3} \cdot \frac{1}{1-x^2}\right), \text{ also}$$

$$2S_{2k+1} < l\frac{1+x}{1-x} < 2\left(S_{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)(1-x^2)}\right).$$

Mit Hilfe der Reihe für $l\frac{1+x}{1-x}$ können die Logarithmen sämtlicher positiven Zahlen berechnet werden. Berechnung von ln:

Es ist $n = \frac{1+x}{1-x}$; $x = \frac{n-1}{n+1}$; folglich, da x stets kleiner als 1 ist,

$$ln = 2\left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5}{5} + \cdots\right).$$

Beispiel.
$$l2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \cdots\right).$$

$k = 4$ gibt

$$2 \cdot 0{,}346\,573\,023\,7 < l2 < 2 \cdot 0{,}346\,573\,601\,0,$$
$$l2 = 0{,}69\,315.$$

In gleicher Weise findet man $l3 = 1{,}098\,61$. Es sind jedoch mehr Glieder zur Berechnung notwendig als bei $l2$. Je mehr sich x dem Werte 1 nähert, um so langsamer konvergiert die Log.-Reihe. Kürzer gelangt man unter Benutzung von $l2$ zu dem Werte für $l3$. Es ist $l3 = l\left(2 \cdot \frac{3}{2}\right) = l2 + l\left(\frac{3}{2}\right)$.

$$\frac{3}{2} = \frac{1+x}{1-x}, \quad x = \frac{1}{5},$$

$$l\frac{3}{2} = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5} + \cdots\right).$$

$k = 3$ gibt

$$2 \cdot 0{,}202\,732\,495\,3 < l\frac{3}{2} < 2 \cdot 0{,}202\,732\,552\,5,$$

$$l\frac{3}{2} = 0{,}405\,46 \quad \text{und}$$

$$l3 = 0{,}693\,15 + 0{,}405\,46 = 1{,}098\,61.$$

In ähnlicher Weise können die Logarithmen der anderen Zahlen berechnet werden.

2. Für eine beliebige Basis b.

Differentialquotient von ${}^b\log x$.

$$y = {}^b\log x \quad \text{oder} \quad x = b^y, \quad \text{mithin}$$
$$1 = b^y lb \cdot \frac{dy}{dx},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^y lb} = \frac{1}{x\,lb}.$$

In gleicher Weise wie in 1) findet man

$${}^b\log x\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{lb}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots\right).$$

Die Logarithmen für eine beliebige Basis lassen sich, wie aus der obigen Reihe hervorgeht, demnach nicht ohne Abhängigkeit von den Logarithmen für die Basis e herstellen. Die letzteren, die nach 1) ohne weiteres berechnet werden können, heißen deshalb „natürliche Logarithmen".

In der obigen Reihe ist nach 1)

$$2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\cdots\right)=l\,\frac{1+x}{1-x},\ \text{mithin}$$

$$^b\!\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{lb}\cdot l\frac{1+x}{1-x}\quad\text{oder}$$

$$^b\!\log a=\frac{1}{lb}\cdot la^{*)}.$$

Um $^b\!\log a$ zu erhalten, ist der natürliche Logarithmus von a mit $\frac{1}{lb}$ zu multiplizieren. $\frac{1}{lb}$ heißt der Modulus des Systems für Basis b. Für das Briggsche System ist der Modulus $\frac{1}{l10}=0{,}434\,29$, z. B. $\log 2=0{,}434\,29\cdot l2=0{,}301\,03$.

§ 11.

Die goniometrischen Reihen.

1. Die Sinusreihe.

Da $\sin 0=0$, kann man setzen

$$\sin x=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots+a_{2k}x^{2k}+a_{2k+1}x^{2k+1}+\cdots.$$

Der erste Differentialquotient ist $\cos x$,

„ zweite „ „ „ $-\sin x$,

„ dritte „ „ „ $-\cos x$,

„ vierte „ „ „ $\sin x$,

„ $(2k)^{\text{te}}$ „ „ „ $(-1)^k\sin x$,

„ $(2k+1)^{\text{te}}$ „ „ „ $(-1)^k\cos x$.

Bildet man in der obigen Reihe auf jeder Seite den $2k^{\text{ten}}$ Differentialquotienten, so folgt

$$(-1)^k\sin x=2k!\,a_{2k}+(2k+1)2k\cdots3\cdot2a_{2k+1}x+\cdots;\quad x=0\ \text{gibt}\ a_{2k}=0.$$

Der $(2k+1)$ Differentialquotient lautet

$$(-1)^k\cos x=(2k+1)!\,a_{2k+1}+(2k+2)(2k+1)\cdots3\cdot2\cdot a_{2k+2}x+\cdots.$$

$x=0$ gibt $\qquad a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, mithin

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\cdots+\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots.$$

---

*) Diese Gleichung läßt sich auch folgendermaßen ableiten. Es ist $b^{^b\!\log a}=a$. Durch Logarithmieren nach dem natürlichen Systeme folgt $^b\!\log a\cdot lb=la$, demnach $^b\!\log a=\frac{1}{lb}\cdot la$.

Der Quotient des $(2k+1)^{\text{ten}}$ und des $(2k-1)^{\text{ten}}$ Gliedes für $k=\infty$ ist

$$q = \lim_{k=\infty}\left[-\frac{x^2}{2k(2k+1)}\right] = 0,$$ d. h. die Sinusreihe konvergiert für jedes x.

Es sei $S_{2k+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ und $(2k+1) > x$.

α) k eine gerade Zahl.

$$\sin x = S_{2k+1} - \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} + \frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!} - + \cdots$$

$$\frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!} = \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \cdot \frac{x^2}{(2k+4)(2k+5)}.$$ Da $x < (2k+1)$ ist,

folgt $$\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} > \frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!} > \frac{x^{2k+7}}{(2k+7)!} > \cdots,$$

$$\sin x = S_{2k+1} - \left(\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} - \frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!}\right) - \left(\frac{x^{2k+7}}{(2k+7)!} - \frac{x^{2k+9}}{(2k+9)!}\right) - \cdots;$$

demnach $$\sin x > S_{2k+1}.$$

Ferner ist

$$\sin x = S_{2k+3} + \frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!} - \frac{x^{2k+7}}{(2k+7)!} + - \cdots$$

$$= S_{2k+3} + \left(\frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!} - \frac{x^{2k+7}}{(2k+7)!}\right) + \left(\frac{x^{2k+9}}{(2k+9)!} - \frac{x^{2k+11}}{(2k+11)!}\right) + \cdots;$$

demnach $\sin x < S_{2k+1}$; mithin

$$S_{2k+1} < \sin x < S_{2k+3}.$$

β) k eine ungerade Zahl.

In gleicher Weise erhält man

$$S_{2k+1} > \sin x > S_{2k+3}.$$

Folglich: Ist $x < 2k+1$, so liegt $\sin x$ zwischen der Summe der ersten $(k+1)$ und der Summe der ersten $(k+2)$ Glieder.

2. Die Kosinusreihe.

Da $\cos 0 = 1$, kann man setzen

$$\cos x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2k} x^{2k} + a_{2k+1} x^{2k+1} + \cdots.$$

Der $(2k)^{\text{te}}$ Differentialquotient von $\cos x$ ist $(-1)^k \cos x$, folglich

$$(-1)^k \cos x = (2k)!\, a_{2k} + (2k+2)(2k+1) \cdots 4 \cdot 3 a_{2k+2} x^2 + \cdots;$$

$$x = 0 \text{ gibt } a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

Der $(2k+1)^{\text{te}}$ Differentialquotient ist $(-1)^k \sin x$, mithin

$$(-1)^k \sin x = (2k+1)!\, a_{2k+1} + (2k+2)(2k+1) \cdots 3 \cdot 2 a_{2k+2} x + \cdots;$$

$$x = 0 \text{ gibt } a_{2k+1} = 0.$$

Die Kosinusreihe lautet

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$

Die Reihe konvergiert für jedes x. In entsprechender Weise wie bei der Sinusreihe findet man, daß, falls $x < 2k$ ist, $\cos x$ zwischen der Summe der ersten $(k+1)$ und der ersten $(k+2)$ Glieder liegt.

3. Die Tangens- und die Kotangensreihe.

Diese Reihen lassen sich durch Division der Reihen für sinus und cosinus herstellen. Man erhält

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots,$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots.$$

Das Gesetz, nach welchem die Koeffizienten gebildet werden, ist bei dieser Ableitung nicht ersichtlich, daher sind die Konvergenzgrenzen aus denselben nicht zu bestimmen. Die Aufstellung des allgemeinen Gliedes dürfte für Schüler zu weitführend sein; daher ist von der Bildung desselben abgesehen. Die tg-Reihe konvergiert für $x < \frac{\pi}{2}$, die cotg-Reihe für $x < \pi$ (absolut genommen).

§ 12.

Die Arcus-Reihen.

Diese Funktionen lassen sich als inverse aus den goniometrischen dadurch herleiten, daß bei einer der letzteren der Funktionswert zuerst gegeben ist, der Bogen erscheint alsdann als abhängig Veränderliche.

1. Die arctg-Reihe.

Bestimmung des Differentialquotienten von $y = \operatorname{arctg} x$:

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \text{oder} \quad x = \operatorname{tg} y.$$

Nach § 3 ist $\quad 1 = \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx}; \quad \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$

$$\frac{d(\operatorname{arctg} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Da $\operatorname{arctg} 0 = 0$, kann man setzen

$$\operatorname{arctg} x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2k+1} x^{2k+1} + \cdots.$$

Durch Differentiieren erhält man

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$
$$+ 2k a_{2k} x^{2k-1} + (2k+1) a_{2k+1} x^{2k} + \cdots.$$

Die linke Seite wird nach der binomischen Reihe entwickelt

$$1 + \binom{-1}{1} x^2 + \binom{-1}{2} (x^2)^2 + \cdots + \binom{-1}{k} (x^2)^k + \cdots$$
$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots + 2k a_{2k} x^{2k-1} + (2k+1) a_{2k+1} x^{2k} + \cdots,$$

mithin

$$2k a_{2k} = 0,$$

$$(2k+1) a_{2k+1} = \binom{-1}{k} = (-1)^k;$$

$$a_{2k} = 0 \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{a_{2k+1}} \cdot \quad \text{Die Reihe lautet somit}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \cdots.$$

Sie konvergiert für $x \leqq 1$ (absolut genommen).

Ähnlich wie bei der Sinusreihe läßt sich nachweisen, daß $\operatorname{arc\,tg} x$ zwischen der Summe der ersten k und der Summe der ersten $(k+1)$ Glieder liegt. Die Reihe liefert den kleinsten Bogen, dessen Tangente gleich x ist, also den Bogen im ersten Quadranten.

Zu der Reihe für $\operatorname{arctg} x$, die für $x > 1$ konvergiert, gelangt man durch folgende Betrachtung. Es ist $\operatorname{tg} AB = x$ und, falls Bogen $AC = \frac{\pi}{2}$ ist,

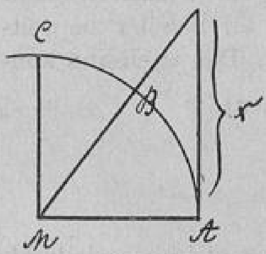

Fig. 6.

$$\operatorname{cotg} BC = x \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} BC = \frac{1}{x}, \quad \text{folglich}$$

$$AB = \operatorname{arctg} x \quad \text{und}$$

$$BC = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \cdot \quad \text{Durch Addition folgt}$$

$$AB + BC = \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^7}{7} + - \cdots\right),$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + - \cdots\right)^{*)}; \quad x \geqq 1.$$

2. Die arccotg-Reihe.

Es ist $\operatorname{tg} AB = x$ und $\operatorname{cotg} AC = x$, mithin

$$AB + BC = \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x,$$

$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x; \quad \text{demnach}$$

$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots\right)^{*)}; \quad x \leqq 1,$$

und
$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)x^{2k+1}} + \cdots; \quad x \geqq 1.$$

Zweite (direkte) Ableitung wie die der arctg-Reihe. Es ist

$$\frac{d \operatorname{arc\,cotg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{arc\,cotg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

---

*) Für negative Werte von x liefert diese Reihe einen Bogen, der größer als $\frac{\pi}{2}$ ist.

3. Die arcsin-Reihe.

Bestimmung des Differentialquotienten von $y = \arcsin x$:

$$y = \arcsin x \quad \text{oder} \quad x = \sin y,$$

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da $\arcsin 0 = 0$ ist, kann man setzen

$$\arcsin x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{2k} x^{2k} + a_{2k+1} x^{2k+1} + \cdots.$$

Durch Differentiation erhält man

$$(1-x2)^{-\frac{1}{2}} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + 2k a_{2k} x^{2k-1} + (2k+1) a_{2k+1} x^{2k} + \cdots.$$

Durch Entwickelung der linken Seite nach der binomischen Reihe folgt

$$1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1} x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2} (x^2)^2 + \cdots + (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} (x^2)^k + \cdots = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$
$$2k a_{2k} x^{2k-1} + (2k+1) a_{2k+1} x^{2k} + \cdots,$$

mithin

$$2k \cdot a_{2k} = 0,$$

$$(2k+1)\, a_{2k+1} = \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k$$
$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2^k \cdot k!}$$

$$(2^k \cdot k! = 2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k)$$

$$a_{2k+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

Die Reihe lautet somit

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots; \; x \leqq 1.$$

Es sei $S_{2k-1} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k-2)} \cdot \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$,

dann ist

$$\arcsin x = S_{2k-1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k+2)} \frac{x^{2k+3}}{2k+3} + \cdots.$$

Es ist $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{1}{2k+1} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k+2)} \cdot \frac{1}{2k+3} > \cdots$,

$$\arcsin x < S_{2k-1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} (1 + x^2 + x^4 + \cdots),$$

$$< S_{2k-1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \cdot \frac{1}{1-x^2};$$

mithin

$$S_{2k-1} < \arcsin x < S_{2k-1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{x_2{}^{k+1}}{(2k+1)(1-x^2)}.$$

4. Die arccos-Reihe.

Mit Hilfe der Gleichung $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ erhält man die Reihe für $\arccos x$.

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots\right).$$

Zweite (direkte) Ableitung wie die der arcsin-Reihe. Es ist

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

5. Reihen für π.

Die arc-Reihen lassen sich zur Berechnung von π benutzen.

Es ist $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, also $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$; mithin

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots. \quad \text{(Leibnizsche Reihe.)}$$

Zur Berechnung von π eignet sich diese Reihe wegen der zu schwachen Konvergenz nicht. Eine bessere Reihe erhält man durch $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + - \cdots\right). \quad \text{(Lagnysche Reihe.)}$$

Oder man setzt $\frac{\pi}{4}$ aus mehreren stark konvergierenden Reihen zusammen.

Wenn $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, so ist $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = 1$ und $\operatorname{tg}\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ gibt $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Mithin

$$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + - \cdots \\ + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \cdots. \quad \text{(Eulersche Reihe.)} \end{cases}$$

Andere Reihe für $\frac{\pi}{4}$ vgl. Wrobel, Arithmetik u. Algebra II und Baltzer, Elem. I.

Aus $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ folgt

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots.$$

§ 13*).

Entwickelung einer beliebigen Funktion in eine Reihe.

Es ist $f(a+x)$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln. Es sei $f(a+x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k + \cdots$.

Nach der k^{ten} Ableitung erhält man

$$f^k(a+x) = k!\,a_k + (k+1)k\cdots 3\cdot 2a_{k+1}x + \cdots; \quad x = 0 \text{ gibt } f^k(a) = k!\,a_k,$$

$$a_k = \frac{f^k(a)}{k!}.$$

Setzt man $k = 0$, so erhält a_0 die Form $\frac{f^0(a)}{0!}$, $f^0(a) = f(a)$. Für jede ganze Zahl n, die größer als 1 ist, gilt das Gesetz $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Läßt man dieses Gesetz auch für $n = 1$ gelten, so erhält man $\frac{1!}{1} = (1-1)! = 0!$. Nun ist $\frac{1!}{1} = 1$, also muß unter $0!$ der Wert 1 verstanden werden, folglich $a_0 = f(a)$. Man erhält

1) $$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!} + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}x^k + \cdots.$$

(Nach dieser Reihe sind entwickelt $(1+x)^n$, $l(1\pm x)$.)

Setzt man x an Stelle von $a+x$, so folgt

2) $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^n + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots.$$

Setzt man in 1) oder 2) $a = 0$, so folgt

3) $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^k(0)}{k!}x^k + \cdots.$$

(Nach dieser Reihe sind $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ entwickelt.)

Die unendlichen Reihen können aber nur innerhalb der Konvergenzgrenzen an Stelle der Funktionen gesetzt werden.

§ 14.

e^{ix}.

Setzt man in die Reihe für e^x an Stelle von x das imaginäre Argument ix ein, so erhält man

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\right)$$
$$= \cos x + i\sin x.$$

Nun ist, wenn k eine beliebige ganze Zahl ist,

$$\cos x + i\sin x = \cos(x + 2k\pi) + i\sin(x + 2k\pi), \quad \text{folglich}$$

$e^{ix} = e^{i(x+2k\pi)}$, d. h. die Funktion e^{ix} ist im Vergleich zu e^x, welche mit x gleichzeitig wächst oder fällt, periodisch mit der Periode $2k\pi$.

*) Dieser Paragraph kann vor § 10 gestellt werden; die hier entwickelten Reihen können dann zur Herleitung der in den §§ 10 bis 12 aufgestellten Reihen verwendet werden.

Es ist $e^{ix} = \cos x + i \sin x$,

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \quad \text{mithin}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = -\frac{i(e^{ix} - e^{-ix})}{2},$$

$$\operatorname{tg} x = -i\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}.$$ Aus der letzten Gleichung folgt

$$e^{2ix} = \frac{1 + i\operatorname{tg}x}{1 - i\operatorname{tg}x} \quad \text{und} \quad 2ix = l\,\frac{1 + i\operatorname{tg}x}{1 - i\operatorname{tg}x}.$$ (Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach der log-Reihe, so folgt

$$2ix = 2i\left(\operatorname{tg}x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - + \cdots\right),$$

oder, wenn $\operatorname{tg}x = z$, d. h. $x = \operatorname{arctg} z$ gesetzt wird,

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots).$$

Es ist $e^{i(0+2k\pi)} = \cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi)$,

$$e^{2k\pi i} = 1,$$

$$e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = i,$$

$$e^{i(\pi + 2k\pi)} = -1,$$

$$e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = -i.$$

Aus $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$ folgt $i^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$ (somit vieldeutig).

Für jede positive Zahl a gibt es eine reelle Zahl α, daß

$$e^{\alpha} = a \quad \text{ist.}$$

Aus $e^{\alpha} = a$ und $e^{2k\pi i} = 1$ folgt durch Multiplikation $e^{\alpha + 2k\pi i} = a$, mithin $la = \alpha + 2k\pi i$; la ist somit vieldeutig, $k = 0$ gibt den reellen Wert $la = \alpha$. In ähnlicher Weise erhält man

$$l(-a) = \alpha + (2k + 1)\pi i,$$

$$l(ai) = \alpha + \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i,$$

$$l(-ai) = \alpha + \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} a + bi &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= e^{lr} \cdot e^{i\varphi} \quad (\text{mithin } l(a + bi) = lr + i\varphi) \\ &= e^{lr + i\varphi}; \quad \text{folglich} \\ (a + bi)^{c+di} &= e^{(lr + i\varphi)(c + di)} \\ &= e^{c \cdot lr - d\varphi + i(c\varphi + d lr)} \\ &= R(\cos(c \cdot \varphi + d \cdot lr) + i\sin(c\varphi + d \cdot lr)) \\ &= A + Bi. \end{aligned}$$

Jede Rechenoperation, der man eine komplexe Zahl unterwirft, führt immer wieder auf eine komplexe Zahl, es gibt somit keine allgemeinere Zahl als die komplexe.

Es ist $\qquad e^{ix} = \cos x + i \sin x$, mithin

$e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n$. Da $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ ist, folgt

$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ (Moivrescher Satz).

§ 15.

Quotienten in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$.

Setzt man in die Funktionen

$$y_1 = 6x - 15 \quad \text{und}$$
$$y_2 = 2x - 5 \quad \text{für die willkürlich Veränderliche } x$$

dieselben Werte ein (z. B. 0; 1; 2; ...) und bildet den Quotienten der abhängig Veränderlichen, so erhält man stets $\frac{y_1}{y_3} = 3$. Für $x = 2\frac{1}{2}$ werden beide Funktionen gleich 0, der Quotient $\frac{y_1}{y_2}$ erscheint in der Form $\frac{0}{0}$. Gibt man x Werte, die sich der Zahl $2\frac{1}{2}$ immer mehr nähern, also 2,49; 2,499; 2,4999; ... oder 2,51; 2,501; usw., so erhält man ebenfalls $\frac{y_1}{y_2} = 3$. Für $x = 2\frac{1}{2} + \delta$ erhält man

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{6\delta}{2\delta} = 3.$$ Der Quotient gilt für jedes δ (absolut), also auch für ein unendlich kleines δ, d. h. der Quotient $\frac{y_1}{y_2}$ ist für den Wert $2\frac{1}{2}$, für welchen er die Form $\frac{0}{0}$ erhält, gleich 3.

Sind allgemein y_1 und y_2 Funktionen ersten Grades von x, welche für denselben Wert von $x = a$ verschwinden, also

$$y_1 = m_1(x - a),$$
$$y_2 = m_2(x - a),$$ so ist für jeden Wert von x, auch für $x = a$, der Quotient
$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Da m_1 und m_2 beliebig sind für verschiedene Paare von y_1, y_2, so folgt, daß der Quotient $\frac{0}{0}$ jeden Wert annehmen kann, zum Unterschied von jeder von 0 verschiedenen Zahl z, für welche der Quotient $\frac{z}{z}$ stets gleich 1 ist.

Es sei
$$y_1 = x + 2x^2 - 45,$$
$$y_2 = 19x - 2x^2 - 45.$$

Der Quotient $\frac{y_1}{y_2}$ ist bei diesen Funktionen nicht konstant, sondern abhängig von x. Den Werten 0; 1; 2; 3; 4; ... für x entsprechen die Werte 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{3}$; 4; 9... für $\frac{y_1}{y_2}$. $x = 4\frac{1}{2}$ läßt den Quotienten $\frac{y_1}{y_2}$ in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Für $x = 4\frac{1}{2} + \delta$ erhält man $\frac{y_1}{y_2} = \frac{19 + 2\delta}{1 - 2\delta}$. Läßt man δ kleiner und kleiner werden, so nähert sich der Quotient immer mehr dem Wert 19. Wird δ unendlich klein, so ist $\frac{y_1}{y_2} = 19$.

Der bei den angegebenen Beispielen eingeschlagene Weg zur Bestimmung des Quotienten gilt für alle Funktionen. Es ergibt sich somit der Satz:

Nimmt der Quotient zweier Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für ein bestimmtes x_1 die Form $\frac{0}{0}$ an, so erhält man die Größe dieses Quotienten durch den Grenzwert

$$\lim_{\delta=0}\left[\frac{f(x_1+\delta)}{\varphi(x_1+\delta)}\right].$$

Nach § 13 ist

$$\frac{f(x_1+\delta)}{\varphi(x_1+\delta)}=\frac{f(x_1)+\delta f'(x_1)+\frac{\delta^2}{1\cdot 2}f''(x_1)+\cdots}{\varphi(x_1)+\delta\varphi'(x_1)+\frac{\delta^2}{1\cdot 2}\varphi''(x_1)+\cdots}\text{ oder, da } f(x_1)=\varphi(x_1)=0 \text{ ist,}$$

$$=\frac{f'(x_1)+\frac{\delta}{1\cdot 2}f''(x_1)+\cdots}{\varphi'(x_1)+\frac{\delta}{1\cdot 2}\varphi''(x_1)+\cdots};\text{ mithin}$$

$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}=\lim_{\delta=0}\left[\frac{f(x_1+\delta)}{\varphi(x_1+\delta)}\right]=\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}.$$

Werden $f'(x_1)$ und $\varphi'(x_1)$ ferner $f''(x_1)$ und $\varphi''(x_1)$ usw. gleich Null und sind $f^k(x_1)$ und $\varphi^k(x_1)$ die ersten, welche nicht zugleich verschwinden, so folgt

$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}=\frac{f^k(x_1)}{\varphi^k(x_1)}.$$

Anmerkung.

Bestimmung des Quotienten $\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}$ ohne Anwendung der Differentialrechnung.

I. $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind ganze rationale Funktionen. Da beide für $x=x_1$ verschwinden, so lassen sie sich durch $x-x_1$ dividieren. Nach Ausführung der Division und Einsetzung von x_1 erhält man den Wert des gesuchten Quotienten.

Beispiel: $\frac{2x^2+x-45}{-2x^2+19x-45}$ hat für $x=4\frac{1}{2}$ die Form $\frac{0}{0}$. Nach Division durch $2x-9$ folgt

$$\frac{2x^2+x-45}{-2x^2+19x-45}=\frac{x+5}{-x+5};\text{ mithin }\left|\frac{2x^2+x-45}{-2x^2+19x-45}\right|_{x=4\frac{1}{2}}=\frac{5\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})}=19.$$

II. $f(x)$ und $\varphi(x)$ oder eine von beiden sind gebrochene Funktionen. Durch geeignetes Erweitern läßt sich dieser Fall auf den vorigen zurückführen.

Als **Beispiel** gelte $\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x^2-4}$. Der Bruch erhält für $x=2$ die Form $\frac{0}{0}$. Nach Erweitern mit $\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{(x+2)}+4$ folgt

$$\frac{3x+2-8}{(x^2-4)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4)}=\frac{3}{(x+2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4)}.$$

Für $x=2$ erhält man $\left|\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x^2-4}\right|_{x=2}=\frac{1}{16}.$

III. $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind goniometrische, logarithmische usw. Funktionen. Dieselben werden durch ihre unendlichen Reihen ersetzt, nach Fortheben des gemeinschaftlichen Faktors und Einsetzen von x_1 erhält man den gesuchten Wert des Quotienten.

Der bei den

agene Weg zur Bestimmung

des Quotienten gilt f

somit der Satz:

Nimmt der

d $\varphi(x)$ für ein bestimmtes x_1

die Form $\frac{0}{0}$ an, so

nten durch den Grenzwert

Nach § 13 is

$\frac{f(x_1+\delta)}{\varphi(x_1+\delta)} =$

der, da $f(x_1) = \varphi(x_1) = 0$ ist,

$=$

$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} =$

Werden $f'(x_1)$

usw. gleich Null und sind

$f^k(x_1)$ und $\varphi^k(x_1)$ die

winden, so folgt

Bestimmung des

Differentialrechnung.

I. $f(x)$ und $\varphi(x)$

ide für $x = x_1$ verschwinden, so

lassen sie sich durch $x -$

ision und Einsetzung von x_1 er-

hält man den Wert des ge

Beispiel: $\frac{2x^2 +}{-2x^2 +}$

Nach Division durch $2x - 9$ folgt

$\frac{2x^2 + x - 4}{-2x^2 + 19x -}$

$\Big|_{x=4\frac{1}{2}} = \frac{5\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})} = 19.$

II. $f(x)$ und $\varphi(x)$

nktionen. Durch geeignetes Er-

weitern läßt sich dieser Fa

Als **Beispiel** gelte

$= 2$ die Form $\frac{0}{0}$. Nach Erwei-

tern mit $\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{}$

$\frac{3x}{(x^2-4)(\sqrt[3]{(3x+}}$

$\frac{3}{{}^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}.$

Für $x = 2$ erhält

III. $f(x)$ und $\varphi(x)$

Funktionen. Dieselben werden

durch ihre unendlichen Re

schaftlichen Faktors und Ein-

setzen von x_1 erhält man d

§ 16.

Anhang.

Geometrische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten bei Kurven.

Die Gleichung der Kurve sei $y = f(x)$. In einem Punkte A $(x_1 | y_1)$ der Kurve werde die Tangente gelegt, ihre Gleichung ist $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$.

Die Abszisse eines beliebigen Punktes C der Tangente sei $x_1 + \Delta x$, es ist

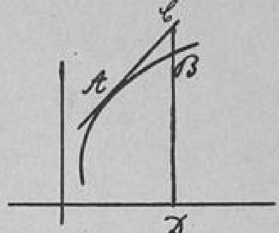

Fig. 7.

1) $CD - y_1 = f'(x_1)(x_1 + \Delta x - x_1)$

$$CD = f'(x_1) \cdot \Delta x + y_1 = f'(x_1) \cdot \Delta x + f(x_1).$$

Der Schnittpunkt von CD und der Kurve sei B, es ist

$$BD = f(x_1 + \Delta x) \quad \text{oder nach § 13}$$

2) $BD = f(x_1) + \dfrac{f'(x_1)}{1!}\Delta x + \dfrac{f''(x_1)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots.$

Durch Subtraktion folgt aus 2) und 1)

$$BC = \frac{f''(x_1)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}(\Delta x)^3 + \cdots.$$

$$\frac{BC}{(\Delta x)^2} = \frac{f''(x_1)}{2!} + \frac{f'''(x_1)}{3!} \cdot \Delta x + \cdots.$$

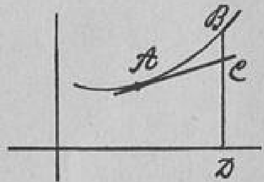

Fig. 8.

Für Δx unendlich klein folgt

$$\left|\frac{BC}{(\Delta x)^2}\right|_{\Delta x = 0} = \frac{f''(x_1)}{2!}.$$

Ist $f''(x_1)$ positiv, so liegt in der Nähe des Punktes A die Kurve „oberhalb" der Tangente, die Kurve kehrt ihre konvexe Seite der x-Achse zu — konvexe Krümmung (Fig. 8). Ist $f''(x_1)$ negativ, so liegt die Kurve „unterhalb" der Tangente und kehrt ihre konkave Seite der x-Achse zu — konkave Krümmung (Fig. 7).

Ist $f''(x_1) = 0$, so fällt im Punkte A die Kurve mit der Tangente zusammen und ist für ein unendlich kleines Stück geradlinig. Wechselt in diesem Falle $f''(x)$ das Vorzeichen, so schneidet die Tangente die Kurve. Ein solcher Punkt heißt Wendepunkt, die Tangente in ihm Wendetangente der Kurve. Wechselt $f''(x)$ in dem Punkte x_1 sein Vorzeichen nicht, so liegt die Kurve in der Nähe des Punktes A auf derselben Seite der Tangente, behält demnach ihre Krümmung bei.