Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichtes haben in den letzten Jahrzehnten sicher bedeutende Fortschritte gemacht. Als Beweis hierfür kann man das fast vollständige Verschwinden des noch vor dreifsig Jahren weit verbreiteten Vorurteiles ansehen, dafs zum Erfassen der mathematischen Wahrheiten besondere Anlagen nötig seien. Man mufs wohl diese Wendung hauptsächlich darauf zurückführen, dafs die ungeheueren Fortschritte der Technik und der Naturwissenschaften die Aufmerksamkeit von selbst auf die Pflege der Mathematik lenkten, der geistigen Nährmutter aller exaktwissenschaftlichen Forschung, und dafs nun der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten in, wenn auch langsamer Anerkennung seiner Wichtigkeit allmählich in die Hände wirklich mathematisch geschulter Lehrer kam. Eine Anzahl tüchtiger Männer dieser Art haben dann, der eine hier, der andere dort, durch Wort und Schrift und nicht zum wenigsten durch das Beispiel den mathematischen Unterricht gefördert und gehoben. Man blättere nur die Literaturangaben in den ersten Jahrgängen der Hoffmannschen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht durch! Welch eine Menge von neuen Lehrbüchern und Aufgabensammlungen sind in dem Zeitraume von fünfundzwanzig Jahren, der etwa mit dem Jahre 1860 beginnt, erschienen! Nicht als ob etwa hiermit gesagt werden soll, dafs jedes dieser Bücher einen Fortschritt bedeutet; aber dieser Umstand zeigt doch, welch ein reges Leben sich auf diesem Gebiete entfaltete. Und der Erfolg ist ja auch nicht ausgeblieben, dafs der mathematische Lehrstoff dem Verständnis aller Schüler, die überhaupt einer höheren geistigen Ausbildung fähig sind, zugänglich gemacht wird.

Der Fortschritt gegen früher zeigt sich besonders bei dem so wichtigen geometrischen Anfangsunterricht. Früher hielt man sich streng an die Elemente Euklids. Diese geben wohl ein hohes Muster systematischer Anordnung, aber es fehlt jede Darlegung des inneren Zusammenhanges der geometrischen Wahrheiten. Wird dieser dem Schüler nicht klargelegt, d. h. wird nicht der neue Satz vor Augen und Ohren der Schüler mit ihrer Hilfe aus dem früheren entwickelt, so versagt die Mehrzahl der Schüler, zumal wenn ihnen schon in den ersten Stunden zugemutet wird, die euklidischen Beweise zu verstehen. Man läfst deshalb jetzt einen propädeutischen Unterricht in der Geometrie vorausgehen, der rein auf Anschauung gegründet ist. Dem Schüler müssen zuerst die mathematischen Grundgebilde: Körper, Flächen etc. vorgeführt werden, er lernt mit Zirkel und Lineal umgehen, er addiert, subtrahiert Strecken und Winkel, mifst diese und lernt ihre Gröfse schätzen. Er erfährt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so schon durch Messung, wie grofs die Winkelsumme im Dreieck, im Viereck ist u. s. w. So vorbereitet sieht er dann ohne weiteres, wenn etwa zum Beweise des Satzes über die Nebenwinkel übergegangen wird, dafs diese Winkel schon addiert sind, und dafs ihre Summe ein gestreckter Winkel ist.

Erfahrungsgemäfs macht dann den Schülern anfangs noch die Aufstellung von Voraussetzung und Behauptung Schwierigkeiten. Hier kann jemand einwenden: wenn dem wirklich so ist, dann weg auch mit diesem euklidischen Zopf! Und in der Tat ist schon in einigen Lehrbüchern, z. B. in dem Holzmüllerschen und schon früher in dem von H. Müller, die Aufstellung der Voraussetzung und der Behauptung vor den Beweisen unterblieben. Mir scheint hierin aber eine grofse Schädigung des mathematischen Unterrichtes zu liegen. Diese Meinung beruht freilich auf meiner Ansicht über den Wert der Mathematik als Lehrgegenstand. Ich bin der Ansicht, dafs der direkte praktische Nutzen, den die Schüler der höheren Schulen von der Mathematik haben, recht gering ist. Ein Landmann mit guter Volksschulbildung mifst die Gröfse seines Ackers so genau aus, wie der Abiturient einer Oberrealschule, er rechnet sich die Amortisationsdauer seines landschaftlichen Darlehns, freilich auf sehr umständliche Weise, so richtig aus, wie dieser. In richtiger Erkenntnis dieser Tatsache hat eine bestimmte Richtung unter den Mathematiklehrern die Forderung aufgestellt, dafs der mathematische Unterricht so einzurichten sei, dafs die Schüler mehr praktischen Nutzen aus ihm zu ziehen befähigt würden, ja dafs das System der Schulmathematik von vornherein mit Rücksicht auf die sich naturgemäfs darbietenden Verwendungen (Physik, Chemie, Astronomie etc.) aufgebaut werde. Meines Erachtens nach liegt hierin eine Verkennung des wahren Bildungswertes der Mathematik. Man braucht ja nicht soweit zu gehen wie Schrader in seiner Erziehungs- und Unterrichtslehre, der geradezu ausspricht: Die Aufgabe der Mathematik ist nicht Mathematik zu lehren, sondern durch Mathematik den Geist zu bilden. Auf keinen Fall darf die Bedeutung der Mathematik als vorzügliches formales Bildungsmittel zu gering geschätzt werden. Vor allem haben wohl die Realschulen, denen das Lateinische fehlt, alle Veranlassung, dasjenige im mathematischen Unterrichte zu pflegen, wodurch die Schüler im folgerichtigen Denken geübt werden. Aus diesem Grunde würde ich es auch für falsch halten, wenn man den Quartanern und Tertianern beim Beweisen eines Satzes die Aufstellung von Voraussetzung und Behauptung erlassen wollte, nur weil es vielen Schülern recht schwer fällt. Freilich mufs ihnen der Lehrer in jeder Weise bei dieser Aufgabe helfen, und das kann er nicht besser, als wenn die zum Beweise nötige Figur stets sorgfältig, genau der Voraussetzung entsprechend gezeichnet wird. Auf der Unterstufe ist es durchaus zu vermeiden, dafs der Schüler einen Satz etwa an einer fertigen Figur beweist; einen klaren Einblick in das Wesen der Sache gewinnt er erst durch eine richtige, selbst entworfene Figur. Selbst der Obertertianer mufs zum Beweise des dritten Ähnlichkeitssatzes, soll ihm die Sache wirklich klar werden, immer wieder zwei Dreiecke zeichnen, die im Verhältnis der Seiten übereinstimmen, wenn auch diese Konstruktion umständlich ist und Zeit in Anspruch nimmt; nie soll er beim Beweise etwa zwei Dreiecke benutzen, die aus anderen Gründen ähnlich sind. Verfährt man stets so, dann wird in dem Schüler auch das Gefühl der Notwendigkeit des Beweisens geweckt, er mufs merken, dafs man nicht beweist, um zu beweisen, sondern dafs der Beweis erst Sicherheit verleihen soll darüber, dafs das, was man aus gewissen Annahmen gefolgert hat, auch richtig ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei einigen Sätzen ist nun das genau der Voraussetzung entsprechende Entwerfen der Figur nicht ganz leicht, z. B. bei dem Satz: Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn je zwei Gegenwinkel gleich sind. Gerade hier lohnt es sich aber doch auch: bei den Versuchen, der Vorausetzung entsprechend zu zeichnen, enthüllt sich zugleich der Beweis.

Ähnlich ist es in einem anderen Falle, wo sich das strikte Festhalten an jener didaktischen Forderung durch eine klarere Einsicht in das Wesen der Sache bezahlt macht. Es betrifft das Kapitel der regulären Polygone. In den Lehrbüchern pflegt nach kurzer Definition der Regularität der Polygone der Satz zu folgen: In und um ein jedes reguläre Polygon läfst sich ein Kreis beschreiben. Wie soll der Tertianer die Voraussetzung erfüllen, nämlich mit Zirkel und Lineal ein reguläres Polygon zeichnen? Er kann im günstigen Falle zu einem regulären Dreieck, Viereck, Sechseck seine Zuflucht nehmen. Wie soll er aber den Satz in seiner Allgemeinheit beweisen! Die Verfasser einer Anzahl von Lehrbüchern scheinen dieser Schwierigkeit so aus dem Wege gehen zu wollen, dafs sie mit dem Satze beginnen: Teilt man die Kreisperipherie in eine Anzahl gleicher Teile und verbindet die Teilpunkte, so entsteht ein reguläres Polygon. Aber wie wird die Kreisperipherie in n gleiche Teile geteilt? Mit Zirkel und Lineal läfst sich das ja auch nicht allgemein ausführen. Und steht man schliefslich beim Beweis des obigen Satzes als einer Umkehrung des zuletzt angeführten Satzes nicht vor derselben Schwierigkeit? Diese wird aber gehoben, wenn man dies Kapitel so behandelt, wie mein nun verstorbener Lehrer F. Meyer, weiland Professor am Halleschen Stadtgymnasium, schon im 17. Bande der obengenannten Hoffmannschen Zeitschrift auf Seite 506 vorschlägt. Soviel ich sehe ist dieser Anregung noch kein Lehrbuch gefolgt; es bewährt sich wieder einmal die Erfahrung, dafs viele Aufsätze in der pädagogischen Literatur, mögen sie noch so gehaltreich sein, leider eindruckslos bleiben. Und wenn ich selbst seit vielen Jahren in meinem Unterrichte von der Meyerschen Anregung Gebrauch mache, so verdanke ich diese so interessante Behandlung des Kapitels der regulären Polygone auch nicht jenem Artikel der genannten Zeitschrift, sondern der lebendigen Stimme des geliebten Lehrers, der nicht nur ich, sondern viele seiner Schüler so gern gefolgt sind.

Ich will nun im folgenden eine ausführliche Behandlung des genannten Gegenstandes geben; es sei im voraus bemerkt, dafs ich in gleicher Weise schon öfters in der Obertertia mit bestem Erfolge unterrichtet habe. Die Überschrift unseres Kapitels würde lauten:

Der reguläre Streckenzug und die regulären Polygone.

Definition: Ein regulärer Streckenzug ist eine gebrochene Linie, deren Teile gleich sind und unter gleichen, in demselben Sinne aufeinanderfolgenden Winkeln aneinanderstofsen. — Schliefst sich der reguläre Streckenzug nach einer Umdrehung, so nennt man ihn ein reguläres Polygon.

Satz: Um und in einen jeden regulären Streckenzug läfst sich ein Kreis beschreiben.

Voraussetzung: $A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = \ldots$

$A_1 \hat{A}_2 A_3 = A_2 \hat{A}_3 A_4 = A_3 \hat{A}_4 A_5 = \ldots$

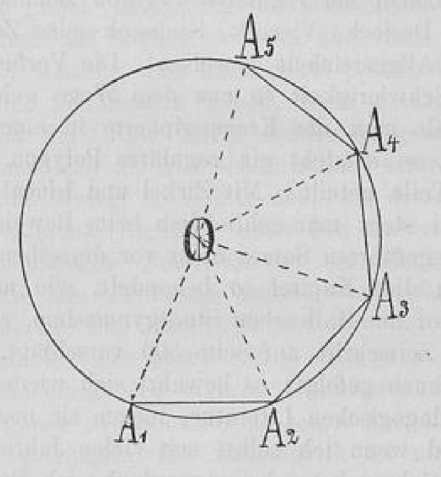
Behauptung: In und um $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \ldots$ läfst sich ein Kreis beschreiben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Beweis verläuft natürlich ganz wie der entsprechende von den regulären Polygonen in den Lehrbüchern. Man legt zuerst durch drei Punkte A_1, A_2, A_3 den Kreis mit dem Mittelpunkte O und zeigt, dafs dieser auch durch die Punkte A_4, $A_5 \ldots$ geht, dafs also

$$O A_1 = O A_2 = O A_3 = O A_4 = O A_5 = \ldots$$

Dabei empfiehlt es sich, die Lote von O auf die Strecken $O A_1 A_2$, $A_2 A_3 \ldots$ zunächst gar nicht zu fällen. Ihre Gleichheit folgt ja schliefslich ohne weiteres aus dem Satze: In kongruenten Dreiecken sind die homologen Höhen gleich. Ferner empfiehlt es sich, die



Kongruenz der Dreiecke $O A_1 A_2$, $O A_2 A_3$, $O A_3 A_4$ etc. nicht der Reihe nach, sondern zuerst die Kongruenz des ersten und dritten, dann die des zweiten und vierten, dann die des dritten und fünften u. s. f. nachzuweisen. So stimmen $O A_1 A_2$ und $O A_3 A_4$ in den Seiten $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$, $O A_2$ und $O A_3$ und den eingeschlossenen Winkeln $O A_2 A_1$ und $O A_3 A_4$ überein; diese Winkel sind nämlich das Ergebnis der Subtraktion gleicher Winkel. Dasselbe gilt für das zweite und vierte, dritte und fünfte Dreieck in ganz analoger Weise. So zu verfahren ist deshalb empfehlenswert, weil so ein tieferer Einblick in das Wesen der Sache vermittelt wird, wie sich zeigt, wenn gewisse, unten erwähnte Umkehrungen unseres Satzes bewiesen werden sollen.

Da die Beweismethode davon unabhängig ist, ob sich der Streckenzug einmal schliefst oder nicht, so ist zugleich mit obigem der Satz bewiesen:

In und um ein jedes reguläre Polygon läfst sich ein Kreis beschreiben.

Hierauf hätten nun wie sonst in den Lehrbüchern die Erklärungen zu folgen:

Der gemeinschaftliche Mittelpunkt des um- und einbeschriebenen Kreises heifst Mittelpunkt des Streckenzuges (oder regulären Polygons), der Radius des umbeschriebenen Kreises der grofse Radius (r), der des einbeschriebenen Kreises der kleine Radius (ϱ) des regulären Streckenzuges.

Der gleiche Winkel, unter dem die Teile des Streckenzuges aneinanderstofsen, heifst der Streckenzugswinkel, der, den zwei aufeinanderfolgende grofse Radien bilden,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Centriwinkel, und ein Dreieck, das letztere mit dem zugehörigen Teile des Streckenzuges einschließen, das Bestimmungsdreieck des regulären Streckenzuges oder Polygons. Die Wichtigkeit dieses Dreiecks ist zu betonen: Man kann sich den Streckenzug entstanden denken durch fortgesetztes Umwälzen eines gleichschenkligen Dreiecks, eben des Bestimmungsdreiecks. So erhält man auch mit Hilfe eines größeren Pappdreiecks am besten die nötigen Figuren an der Wandtafel. Aus der Betrachtung des Bestimmungsdreiecks folgt nun unmittelbar die wichtige Relation

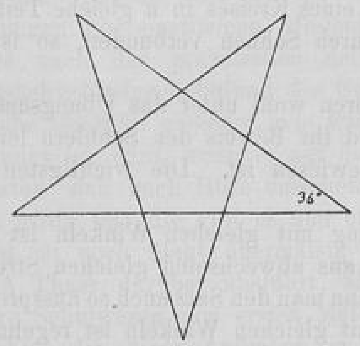
$$\text{Centriwinkel} + \text{Streckenzugswinkel} = 180^0,$$

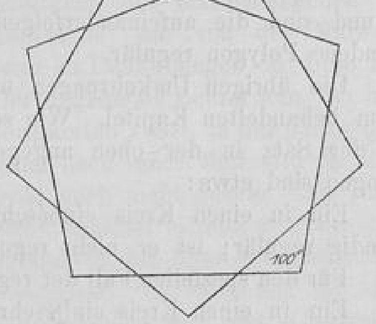
also auch

$$\text{Centriwinkel} + \text{Polygonwinkel} = 180^0.$$

Aus der Größe des Centriwinkels läßt sich nun leicht erkennen, ob ein regulärer Streckenzug ein reguläres Polygon ist. Geht der Centriwinkel nämlich genau in 360^0 auf, so schließt sich der reguläre Streckenzug nach der ersten Umdrehung, und man hat es mit einem regulären Polygon zu tun. Ein regulärer Streckenzug ist also dann ein reguläres Polygon, wenn der Centriwinkel, d. i. nach obigem das Supplement des Streckenzugswinkels, ohne Rest in 360^0 enthalten ist.

Es kann nun auch die Frage entschieden werden, ob ein Streckenzug bei gegebener Gradzahl des Winkels sich schließt oder nicht, eine interessante Beleuchtung der Inkommensurabilität. Ist nämlich die Gradzahl des Streckenzugswinkels eine ganze oder gebrochene, so schließt sich der Streckenzug immer, wenn auch erst nach mehreren Umdrehungen.





Ist z. B. der Winkel 36^0, so ist der Centriwinkel 144^0. $\frac{360^0}{144^0}$ ist keine ganze Zahl, wohl aber ist $\frac{360^0 \cdot 2}{144^0} = 5$. Der Streckenzug schließt also nach der zweiten Umdrehung und besteht aus fünf Strecken: es ist der bekannte Drudenfuß oder das Pentagramm. Ist der Winkel des Streckenzuges 100^0, so ist der Centriwinkel $180^0 - 100^0 = 80^0$. $\frac{360^0}{80^0}$ ist keine ganze Zahl, wohl aber $\frac{360^0 \cdot 2}{80^0}$, nämlich 9, d. h. der Streckenzugswinkel mit einem Winkel von 100^0 schließt nach der zweiten Umdrehung und besteht aus neun Strecken.

Beispiele dieser Art behandeln die Schüler mit grofsem Interesse; es empfiehlt sich hier natürlich auch, entsprechende Figuren anfertigen zu lassen. Auch im Linearzeichnen läfst sich davon Gebrauch machen.

An die wichtige Formel für das reguläre Polygon, die sich sofort aus dem Bestimmungsdreieck ergab,

$$\text{Centriwinkel} + \text{Polygonwinkel} = 180^0,$$

schliefsen sich nun weitere Betrachtungen. Es folgt leicht, dafs im regulären n-Eck

$$\text{der Centriwinkel} = \frac{360^0}{n},$$

also

$$\text{der Polygonwinkel} = 180^0 - \frac{360^0}{n}.$$

Diese Formel kann man ja auch noch auf anderem Wege, ausgehend von der Winkelsumme im allgemeinen n-Eck, herleiten.

Indem man in dieser Formel für n spezielle Werte setzt, erkennt man schliefslich leicht, dafs sich mit Zirkel und Lineal zunächst nur zwei Reihen regulärer Polygone in einen Kreis einzeichnen lassen: 1. Reguläres Dreieck, Sechseck, Zwölfeck u. s. f.; 2. Quadrat, reguläres Achteck, Sechzehneck u. s. f.

Von den Umkehrungen des Satzes, von dem wir ausgingen, verdient höchstens eine in das System aufgenommen zu werden:

Jeder in einen Kreis einbeschriebener Streckenzug mit gleichen Strecken ist regulär. Schliefst ein solcher Streckenzug nach einer Umdrehung, so erhält der Satz natürlich die Form, in der er öfters gebraucht wird: Ist der Umfang eines Kreises in n gleiche Teile geteilt, und sind die aufeinanderfolgenden Teilpunkte durch Sehnen verbunden, so ist das entstandene Polygon regulär.

Die übrigen Umkehrungen unseres Satzes gehören wohl unter das Übungsmaterial zu dem behandelten Kapitel. Wie schon erwähnt, wird ihr Beweis den Schülern leichter, wenn der Satz in der oben angegebenen Ordnung bewiesen ist. Die wichtigsten Umkehrungen sind etwa:

Ein in einen Kreis einbeschriebener Streckenzug mit gleichen Winkeln ist nicht notwendig regulär; ist er nicht regulär, so besteht er aus abwechselnd gleichen Strecken.

Für den speziellen Fall der regulären Polygone kann man den Satz auch so aussprechen:

Ein in einen Kreis einbeschriebenes Polygon mit gleichen Winkeln ist regelmäfsig, wenn es eine ungerade Seitenzahl hat; hat es dagegen eine gerade Seitenzahl, so sind die Seiten nur abwechselnd gleich.

Ein um einen Kreis beschriebener Streckenzug mit gleichen Winkeln ist immer regulär, (also auch ein Polygon mit gleichen Winkeln, das einem Kreis umschrieben ist).

Ein um einen Kreis beschriebener Streckenzug mit gleichen Seiten ist nicht notwendig regulär, die Winkel sind nur abwechselnd notwendig gleich.

Für den speziellen Fall, dafs sich der Streckenzug nach einer Umdrehung schliefst, kann dieser Satz auch so lauten:

Ein um einen Kreis beschriebenes Polygon mit gleichen Seiten ist regulär, wenn es ungerade Seitenzahl hat; besitzt es gerade Seitenzahl, so brauchen die Winkel des Polygons nur abwechselnd gleich zu sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ich bin mit meinen Ausführungen zu dem Kapitel der regulären Polygone zu Ende. Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, dafs diese von F. Meyer vorgeschlagene Behandlung dieses Kapitels eine vermehrte Einsicht in das Wesen der Sache schafft, und dafs die Schüler dem Gegenstand mit erhöhtem Interesse folgen. Dafs es an der notwendigen Zeit für diese Behandlungsweise fehlte, lässt sich nicht wohl behaupten, da das Kapitel auch so in ganz wenig Stunden zu absolvieren ist. Es wäre deshalb durchaus erwünscht, wenn die Sache auch in die Lehrbücher Aufnahme fände.

Eingekleidete oder Textgleichungen im Unterricht.

Sachlich besteht keine Beziehung zwischen diesem Kapitel und dem vorigen. Auch hier aber hat mein verstorbener Lehrer F. Meyer eine Behandlung dieses schwierigen Gegenstandes vorgeschlagen, die mir einen grofsen Fortschritt zu bedeuten scheint; auch hier habe ich mich in langjährigem Unterrichte von der Brauchbarkeit seiner Methode überzeugt. Wenn der Lehrer zu den Anwendungen der Gleichungen, zu den sogenannten Textgleichungen kommt, dann überzeugt er sich sehr bald davon, dafs die Sache den Schülern meist recht schwer wird. Schüler, die auch schwierigere Buchstabengleichungen gewandt und sicher lösten, versagen nun mit einem Male, ja es zeichnen sich zuweilen gerade solche Schüler aus, die sich vorher ewig verrechneten. Leider kommt es nun wegen der Schwierigkeiten, welche die eingekleideten Gleichungen bieten, vielfach dahin, dafs sie zu Stiefkindern des mathematischen Unterrichtes werden, dafs man keine Zeit dazu hat. Das ist aber sehr zu bedauern, und in diesem Bedauern werden diesmal beide Richtungen übereinstimmen, diejenigen, die eine Fortbildung des mathematischen Unterrichtes nach der praktischen Seite wollen, und diejenigen, die von der Mathematik hauptsächlich eine Schulung des Geistes erwarten. Denn zu Denkübungen ist diese mathematische Disziplin geeignet, wie kaum eine andere. Der angehende Lehrer nun, der hiervon überzeugt ist, wird, wenn er auf die erwähnten Schwierigkeiten stöfst, in der pädagogischen Literatur sich nach Hilfe umsehen. Er sucht womöglich nach einer Methode, die für alle Fälle giltig ist; die gibt es nun nicht und wird es wohl auch nicht geben. Das fragliche Gebiet ist noch nicht übermäfsig reich angebaut. Sehr treffend scheint mir das zu sein, was A. Thaer darüber ausführt, als er diesen Gegenstand in den Jahresberichten für das höhere Schulwesen zum ersten Male (Jahrgang 1887) bespricht. Er weist auf die Ähnlichkeit hin, die diese Aufgaben in ihren Ansprüchen entschieden mit den Konstruktionsaufgaben haben. Auch hier seien aus dem Chaos zunächst Gruppen entwickelt und dann seien auch Theorien gekommen. Vorläufig läge aber die Gruppenbildung bei den eingekleideten Gleichungen noch ziemlich im Argen, wenn auch schon einzelne Gruppen durcharbeitet seien.

Die Sache verhält sich auch wohl heute noch ähnlich. Schon damals lag Bardeys Anleitung zur Auflösung eingekleideter Aufgaben vor. Für die Methodik unseres Unterrichtsgegenstandes ist daraus nicht viel zu entnehmen. Der Herausgeber der zweiten Auflage, von der unten noch die Rede sein wird, sagt selbst, dafs das Buch nicht sowohl eine Anleitung zur Lösung von Textaufgaben überhaupt gibt, als vielmehr eine ausführliche Darstellung der Lösungen der Aufgaben eines bestimmten Abschnittes. Mehr bietet ein Aufsatz von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. E. Böttcher im 23. Hefte der Lehrproben und Lehrgänge über Gleichungen und ihren Ansatz. Er geht in dem Teile, in dem es sich um den Ansatz der Gleichungen handelt, auf eine alte, schon von Jakob Bernoulli dem älteren aufgestellte Regel zurück: Wir brauchen mit diesen algebraischen Zeichen, den Unbekannten, nichts anderes vorzunehmen, als was wir tun würden, wenn wir nach Belieben eine bestimmte Zahl hergenommen hätten und wollten nun mit ihr die Probe machen, ob es jene gewünschte Zahl, die wir suchen, ist oder nicht. Diese Regel stimmt auch mit der von Bardey im 20. Abschnitt seiner Aufgabensammlung gegebenen überein. I. E. Böttcher zeigt an einigen Beispielen, wie sie fruchtbringend zu verwerten ist. Es ist sicher, daſs der Anfänger bei gewissen Aufgaben durch diese Regel Nutzen haben kann, trotzdem zweifle ich, ob der Durchschnittsschüler für sich allein allzuviel damit anfangen kann, ob also ihre allgemeine Anwendung zu einem wirklichen Fortschritte in der Behandlung der Textaufgaben führt. Meines Erachtens liegt auch die Bedeutung des Böttcherschen Aufsatzes nicht in der Neubelebung jener alten Regel, sondern in dem vielen Beherzigenswerten, was er sonst über die Behandlung der Gleichungen überhaupt ausführt. Hier findet sich vieles in methodischer und didaktischer Hinsicht Wertvolle.

Ganz neuerdings hat F. Pietzker eine zweite Auflage zu Bardeys Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben herausgegeben, die nur dem Namen nach eine zweite Auflage, in Wirklichkeit ein ganz neues Buch ist. Er behandelt darin eine groſse Zahl von Musterbeispielen, deren Gruppierung er nicht mit Rücksicht auf die Zahl der auftretenden Unbekannten oder auf den Grad der herauskommenden Gleichungen bewirkt hat, sondern lediglich nach den für den Ansatz in Betracht kommenden Gesichtspunkten. Das bedeutet nach den obigen Ausführungen von A. Thaer einen entschiedenen Fortschritt. Daſs diese Gruppenbildung nicht derartig durchgeführt ist, daſs nicht manche Aufgabe in verschiedenen Gruppen Platz finden könnte, betont der Verfasser in der Einleitung selbst. Was nun die Lösungen der z. T. schwierigen Aufgaben angeht, so sind sie, wie von vornherein zu erwarten stand, sehr klar und elegant entwickelt unter ausführlicher Besprechung der in Betracht kommenden Gesichtspunkte und Gedankenprozesse. Es ist zweifellos, daſs man hieraus recht wohl lernen kann, wie man eine schwierigere Textgleichung anzugreifen hat, um zu einer Lösung zu gelangen; ich glaube aber nicht, daſs der Lehrer aus diesen Lösungen für seinen Unterricht in methodischer Hinsicht allzuviel schöpfen kann. Der Schüler will ein gewisses Schema haben, nachdem er sich richtet, ihm ist es eine nicht unwesentliche Unterstützung, wenn die Lösung einer Aufgabe in einer ganz bestimmten Form verläuft. Daſs dies nur bis zu einem gewissen Grade möglich ist, ist von vornherein klar. Was wirklich in dieser Hinsicht zu erreichen ist, scheint mir nun in der Anweisung enthalten zu sein, die F. Meyer zur Lösung der Textgleichungen gibt. Er widmet dem Gegenstand in seinen auch sonst so beachtenswerten Elementen der Arithmetik und Algebra ein kurzes Kapitel mit der Überschrift: Synthesis der Wortgleichungen. Hier sind nach kurzen theoretischen Erörterungen auch zwei Musterbeispiele durchgeführt, aus denen deutlich erhellt, wie mein verstorbener Lehrer solche Textaufgaben gelöst wissen will. Aber auch hier kenne ich sein Verfahren weniger aus diesem Kapitel seines Buches, als aus seinem Unterrichte und gelegentlichen Gesprächen.

Die Lösung einer Aufgabe hat natürlich mit der Einführung der Unbekannten zu beginnen; dies geschieht, indem direkt auf die gestellte Frage zu antworten ist. Dabei ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

genau festzuhalten, daſs die Buchstaben x, y Maſszahlen sind, zu denen die Benennung oder Maſseinheit genau so hinzuzusetzen ist, als wie zu den natürlichen Zahlen. Darauf folgt die Bildung des Ansatzes oder, wie F. Meyer seine Schüler schreiben lieſs, der „Wortgleichung“, d. h. es wird die Stelle im Text aufgesucht, die zur Aufstellung einer Gleichung führt, wobei aber die quantitative Bestimmung der beteiligten Gröſsen zunächst unterbleibt, also diese zunächst nur in „Worten“ in der Gleichung stehen. Erst nach Aufstellung der Wortgleichung wird an die zahlenmässige Bestimmung aller in der Gleichung vorkommenden Gröſsen durch bekannte und unbekannte Zahlen gegangen. Ich halte dies für sehr wichtig, weil hierdurch ein zielloses Herumrechnen, zu dem auch der willige Schüler neigt, nach Möglichkeit vermieden wird. Von vornherein ist darauf aufmerksam zu machen, daſs bei der zuletzt genannten Operation in sehr vielen Fällen der Regeldetrischluſs helfen muſs. Der Schüler muſs also ihn mit groſser Fertigkeit zu handhaben verstehen lernen, auch wenn Buchstabengröſsen in Betracht kommen. Die so ermittelten Werte der in der Wortgleichung vorkommenden Gröſsen werden nun weiter in diese eingesetzt, und dann wird die Unbekannte ermittelt. Bei mehreren Unbekannten müssen natürlich so viel Wortgleichungen aufgestellt werden, als Unbekannte unterschieden werden, und es ist natürlich zuletzt auch ein System von mehreren Gleichungen aufzulösen. Schlieſslich ist mit Hilfe der durch die Gleichungen für die Unbekannte gewonnenen Zahlenwerte eine endgiltige Antwort auf die in der Aufgabe gestellten Fragen zu geben, etwaige mehrfache Werte der Unbekannten sind auf ihre Brauchbarkeit zu untersuchen.

Für die Behandlung einer Aufgabe würde sich demnach etwa folgende Disposition ergeben — der Kürze wegen wird nur auf den Fall einer Unbekannten Rücksicht genommen: —

1. Einführung der Unbekannten.
2. Aufstellung der Wortgleichung.
3. Zahlenmäſsige Bestimmung der in letzterer vorkommenden Gröſsen.
4. Einsetzung der so gewonnenen Gröſsen in die Wortgleichung.
5. Auflösung der Bestimmungsgleichung.
6. Endgiltige Antwort auf die in der Aufgabe gestellten Fragen.

Zunächst soll das Gesagte durch einige einfache Beispiele erläutert werden:

Heis, § 63, 97. Ein Vater ist 30, sein Sohn ist 2 Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird der Vater 5 mal so alt sein, als der Sohn?

Lösung: Es wird direkt auf die Frage geantwortet: Der Vater ist nach x Jahren 5 mal so alt wie sein Sohn. Die Wortgleichung steckt hier natürlich im zweiten Satz, sie lautet:

Alter des Vaters in x Jahren = dem fünffachen Alter des Sohnes in x Jahren.

Die Berechnung der im Ansatz vorkommenden Gröſsen ist hier auſserordentlich leicht. Jetzt ist der Vater 30 Jahre alt, in x Jahren $(30 + x)$ Jahre, der Sohn jetzt 2, in x Jahren $(2 + x)$ Jahre. Durch Einsetzung dieser Werte in die Wortgleichung folgt

$$30 + x = 5\,(2 + x)$$
$$20 = 4\,x$$
$$x = 5.$$

Antwort: In 5 Jahren ist der Vater 5 mal so alt wie sein Sohn.

Hier war die Aufstellung der Wortgleichung besonders leicht. Zuweilen liefern mehrere Stellen des Textes Gleichungen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Heis, § 63, 51. Ein Landwirt hat eine Herde Gänse und eine Herde Schafe, im ganzen 432 Stück. Da er sich mit der Gänsezucht nicht weiter befassen will, so tauscht er sämtliche Gänse gegen Schafe ein und erhält für je 32 der ersteren 3 der letzteren. Hierdurch sieht er sich im Besitze von 200 Schafen. Wieviel Gänse hat er umgetauscht?

Lösung: Er hat x Gänse umgetauscht. Hier könnte man aus drei Stellen Gleichungen entnehmen. Bald sieht man aber, dass man den ersten Satz besser dazu benutzt, die ursprüngliche Zahl der Schafe, nämlich 432—x, kennen zu lernen. Auch die Gleichung:

Wert von 32 Gänsen = Wert von 3 Schafen

wird wohl nur bei der Umrechnung der umgetauschten Gänse verwendet. Also bleibt der Satz: Hierdurch sieht er sich im Besitz von 200 Schafen. In Gleichungsform:

Ursprüngliche Zahl der Schafe + Zahl der durch Umtausch erlangten Schafe = 200 Schafe.

Die ursprüngliche Zahl der Schafe beträgt 432 — x, nun hilft der Dreisatz weiter

$$\begin{array}{lcl} 32 \text{ Gänse} & \text{———} & 3 \text{ Schafe} \\ 1 \text{ Gans} & \text{———} & {}^{3}/_{32} \text{ „} \\ x \text{ Gänse} & \text{———} & {}^{3}/_{32}\, x \text{ „} \end{array}$$

Durch Einsetzen in die Wortgleichung folgt

$$\begin{aligned} 432 - x + {}^{3}/_{32}\, x &= 200 \\ 232 &= {}^{29}/_{32}\, x \\ x &= 256 \end{aligned}$$

Antwort: Der Landwirt hat 256 Gänse umgetauscht.

Es ist klar, daſs von allen den 6 Punkten unserer obigen Disposition der zweite: Aufstellung der Wortgleichung dem Schüler die meiste Schwierigkeit macht. Hier heiſst es eben: Übung macht den Meister; nur allmählich gelangt der Schüler zu einer gewissen Fertigkeit, die Stelle des Textes zu erkennen, in der die Wortgleichung begraben liegt. Es mögen im folgenden zunächst noch einige typische Beispiele in unserer Behandlungsweise ausgeführt werden.

Meier Hirsch XIV, 105. Ein Wasserbehälter kann durch 3 Röhren entleert werden und zwar durch die erste in 2, durch die zweite in 3, durch die dritte in 4 Stunden; in welcher Zeit wird er bei gleichzeitiger Öffnung aller drei Röhren entleert?

Lösung: Der Behälter wird bei gleichzeitiger Öffnung aller 3 Röhren in x Stunden entleert. Die Wortgleichung lautet:

Die Wassermenge, welche die 3 Röhren in x Stunden zusammen wegführen = Inhalt v des Behälters.

Die erste Röhre entfernt

$$\begin{array}{lcl} \text{in 2 Stunden} & \text{————————} & v \text{ cbm,} \\ \text{„ 1 Stunde} & \text{————————} & \dfrac{v}{2} \text{ „} \\ \text{„ x Stunden} & \text{————————} & \dfrac{v}{2}\, x \text{ „} \end{array}$$

ebenso die zweite in der gleichen Zeit $\frac{v}{3}$ x cbm, die dritte $\frac{v}{4}$ x cbm. Durch Einsetzen in die Wortgleichung folgt

$$\frac{v}{2}x + \frac{v}{3}x + \frac{v}{4}x = v$$

Die Division durch v ergiebt

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

$$6x + 4x + 3x = 12$$

$$x = \frac{12}{13}$$

Antwort: Der Behälter wird in $\frac{12}{13}$ Stunden, also in ca. $55\,^1/_2$ Min. entleert.

Wrobel, § 35, 68. Ein Gärtner kaufte eine Anzahl Rosenstöcke für 50 M. Hiervon behielt er 6 für sich und verkaufte die anderen für 51 M, dabei verdiente er an jedem 25 Pf. Wieviel Stöcke waren es anfänglich, und wie grofs war der Einkaufspreis für jeden?

Lösung: Es waren anfänglich x Rosenstöcke, es kostete also jeder im Einkauf $\frac{50}{x}$ M. Die Wortgleichung lautet:

Verkaufspreis — Einkaufspreis eines Stockes = Gewinn an einem Stocke.

Der Gewinn an einem Stocke beträgt 25 Pf. = $^1/_4$ M. Im Verkauf kosten

(x—6) Rosenstöcke ———————— 51 M.

1 Rosenstock $\frac{51}{x-6}$ „

Der Einkaufspreis eines Stockes betrug $\frac{50}{x}$ M, der Gewinn an einem Stocke $^1/_4$ M. Durch Einsetzen in die Wortgleichung folgt

$$\frac{51}{x-6} - \frac{50}{x} = \frac{1}{4}$$

$$204x - 200 + 1200 = x^2 - 6x$$

$$x^2 - 10x = 1200$$

$$x = 5 \pm \sqrt{1225}$$

$$x_1 = 40$$

$$x_2 = -30$$

Antwort: Es waren anfänglich x Rosenstöcke; jeder kostete $\frac{50}{40}$ M = 1,25 M. Da es eine negative Anzahl Rosenstöcke nicht gibt, hat die zweite Wurzel nur algebraische Bedeutung.

Bardey XX, 24, 53. Eine Anzahl von Personen verzehrte in einem Wirtshause für 24 M. Wäre die Zahl der Personen um 2 geringer gewesen, und hätte jede Person für 25 Pf mehr verzehrt, so hätte sich die Rechnung auf 25 M belaufen. Wie grofs war die Anzahl der Personen, und wieviel verzehrte jede?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lösung: Die Anzahl der Personen betrug x, da sie zusammen 24 M verzehrten und angenommen wird, dafs die Zeche einer jeden Person gleich war, so verzehrte jede $\frac{24}{x}$ M. Die Wortgleichung lautet:

Die Zeche einer Person im angenommenen Falle — wirkliche Zeche = $\frac{1}{2}$ M.

Im angenommenen Falle sollen verzehren

$$(x-2)\text{ Personen} \;\text{———————}\; 25 \text{ M}$$
$$1 \text{ Person} \;\text{———————}\; \frac{25}{x-2} \text{ "}$$

Die wirkliche Zeche betrug $\frac{24}{x}$ M. Durch Einsetzen in die Wortgleichung folgt

$$\frac{25}{x-2} - \frac{24}{x} = \frac{1}{2}$$
$$50x - 48x + 96 = x^2 - 2x$$
$$x^2 - 4x = 96$$
$$x = 2 \pm \sqrt{100}$$
$$x_1 = 10$$
$$x_2 = -8.$$

Antwort: Die Anzahl der Personen betrug 12, jede verzehrte für 2 M. Da es eine negative Anzahl Personen nicht gibt, hat die zweite Wurzel nur eine algebraische Bedeutung.

Zwei Beispiele aus der Zinzeszins- und Rentenrechnung.

1. A leiht zur Vollendung seiner Ausbildung im Berufe 3000 M in jährlichen Raten von 1000 M unter der Bedingung, dafs er, beginnend 5 Jahre nach Empfang der letzten Rate, zur Tilgung der Schuld mitsamt Zinseszinsen fünfmal jährlich die Summe von 900 M zurückzahlt. Sämtliche Zahlungen geschehen an demselben Datum. Wieviel Prozent bezahlt A?

Lösung: Der Zinsfufs beträgt $x\,\%_0$, der Verzinsungsfaktor ist dann $1 + \frac{100}{x}$, er wird der Kürze wegen mit q bezeichnet. Die Wortgleichung lautet:

Der bare Wert der ersten 3 Zahlungen = dem baren Werte der 5 Rückzahlungen.

A möge die erste Rate heute erhalten, so ist ihr barer Wert 1000 M, die nächste Rate ist ein Jahr später fällig, also ist ihr barer Wert $1000\,q^{-1}$, ebenso der der dritten $1000\,q^{-2}$ M; ihre Summe

$$1000 + 1000\,q^{-1} + 1000\,q^{-2} = 1000\,q^{-2}\,(1 + q + q^2)$$
$$= 1000\,q^{-2}\,\frac{q^3-1}{q-1}$$

Die erste Rückzahlung ist von heute ab in 7 Jahren fällig, also ihr barer Wert $900\,q^{-7}$ und so der bare Wert der folgenden $900\,q^{-8}$, $900\,q^{-9}$ M etc.; ihre Summe ist

$$900\,q^{-2} + 900\,q^{-8} + 900\,q^{-9} + 900\,q^{-10} + 900\,q^{-11} = 900\,q^{-11}\,\frac{q^5-1}{q-1}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Einsetzen in die Wortgleichung folgt

$$1000\,q^{-2}\,\frac{q^3-1}{q-1} = 900\,q^{-11}\,\frac{q^5-1}{q-1}$$

$$10\,q^9\,(q^3-1) = 9\,(q^5-1)$$

$$10\,q^{12} - 10\,q^9 - 9\,q^5 + 9 = 0.$$

Mit Hilfe einer Näherungsmethode wird ermittelt $q = 1{,}0522$.

Antwort: Der Zinsfuſs beträgt also 5,22%.

2. Ein Kirschbaum hat in den letzten 10 Jahren durchschnittlich jährlich 10 M Reinertrag gebracht. Unter Berücksichtigung aller inbetracht kommenden Verhältnisse kann man annehmen, daſs er noch 15 Jahre auf gleicher Höhe des Ertrages stehen bleibt, und daſs er noch 10 weitere Jahre danach eine Rente vom halben Betrage gewährt. Welchen Ertragswert hat der Baum, wenn als Zinsfuſs 4% angenommen wird?

Lösung: Der Ertragswert des Baumes beträgt x M. Die Wortgleichung lautet:

Der Ertragswert = dem baren Werte der Reinerträge in den einzelnen Jahren. Es sei hier nebenbei bemerkt, daſs es sich meistens nicht lohnt, mit der Rentenformel zu operieren, daſs die Schüler viel leichter zu einem Ergebnis gelangen, wenn auf die baren Werte der einzelnen Renten zurückgegangen wird.

Es möge nun angenommen werden, daſs die nächste Ernte in Jahresfrist erfolgt, so ist ihr barer Wert $10 \,.\, 1{,}04^{-1}$, der der folgenden $10 \,.\, 1{,}04^{-2}$ M u. s. w., der sechszehnten $5 \,.\, 1{,}04^{-16}$ M, der siebzehnten $5 \,.\, 1{,}04^{-17}$ M und endlich der letzten $5 \,.\, 1{,}04^{-25}$ M. Die Summe der baren Werte aller Reinerträge ist

$$10 \,.\, 1{,}04^{-1} + 10 \,.\, 1{,}04^{-2} + \ldots + 10 \,.\, 1{,}04^{-15} + 5 \,.\, 1{,}04^{-16} + 5 \,.\, 1{,}04^{-17} + \ldots + 5 \,.\, 1{,}04^{-25}$$
$$= 10 \,.\, 1{,}04^{-15}\,(1 + 1{,}04 + 1{,}04^2 + \ldots + 1{,}04^{14}) + 5 \,.\, 1{,}04^{-25}\,(1 + 1{,}04 + \ldots + 1{,}04^9)$$
$$= \frac{10 \,.\, (1{,}04^{15}-1)}{1{,}04^{15} \,.\, (1{,}04-1)} + \frac{5\,(1{,}04^{10}-1)}{1{,}04^{25}\,(1{,}04-1)}.$$

Durch Einsetzen in die Wortgleichung folgt

$$x = \frac{10\,(1{,}04^{15}-1)}{1{,}04^{15}\,(1{,}04-1)} + \frac{5\,(1{,}04^{10}-1)}{1{,}04^{25}\,(1{,}04-1)}.$$

Die logarithmische Rechnung liefert

$$x = 111{,}18 + 22{,}52 = 133{,}70.$$

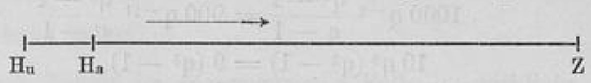
Antwort: Der Ertragswert des Baumes ist 133,70 M.

Es mögen auch einige Bewegungsaufgaben folgen; hier wird es immer gut sein, wenn, wie auch J. E. Böttcher in dem oben erwähnten Aufsatz verlangt, eine einfache Figur die Auffassung stützt.

Heis, § 63, 162. Ein Hase, der von einem Hunde verfolgt wird, hat 90 Sprünge voraus und macht in derselben Zeit 5 Sprünge, in welcher der Hund deren 4 macht. Wenn nun 7 Hasensprünge an Gröſse soviel betragen als 5 Hundesprünge, wieviel Sprünge muſs der Hund noch machen, um den Hasen einzuholen?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lösung: Der Hund mufs noch x Sprünge machen, um den Hasen einzuholen. Da es sich hier um ein Einholen handelt, lautet die Wortgleichung:



Weg HuZ des Hundes — Weg HaZ des Hasen = 90 Hasensprünge.

Es ist klar, dafs bei der numerischen Bestimmung dieser Gröfsen überall dieselbe Längeneinheit zugrunde gelegt werden mufs, wohl am besten die eines Hasensprunges.

Der Weg des Hundes beträgt x Hundesprünge, das sind nach Angabe des Textes $\frac{7}{5}$ x Hasensprünge; der Hase macht in derselben Zeit 5 Sprünge, wo der Hund nur 4 fertig bringt, also kommen

auf 4 Hundesprünge ——— 5 Hasensprünge

„ 1 Hundesprung ——— $\frac{5}{4}$ Hasensprung

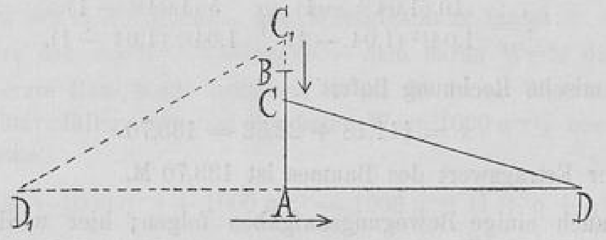
„ x Hundesprünge ——— $\frac{5}{4}$ x Hasensprünge.

Durch Einsetzen in die Wortgleichung folgt

$$\frac{7}{5}x - \frac{5}{4}x = 90$$
$$28x - 25x = 90 \cdot 20$$
$$x = 600.$$

Antwort: Der Hase macht noch 600 Sprünge.

Wrobel, § 35, 100. Auf dem Schenkel eines rechten Winkels bewegt sich aus einer Entfernung von 40 m nach dem Scheitel hin ein Körper mit der konstanten Geschwindigkeit von 2 m pro Sekunde, während gleichzeitig vom Scheitel aus auf dem anderen Schenkel ein zweiter Körper sich mit einer Geschwindigkeit von 16 m fortbewegt. Wann wird die Entfernung beider Körper 100 m betragen?



Lösung: Die Entfernung beider Körper wird nach x Sekunden 100 m betragen. Die Wortgleichung ergiebt sich aus dem Lehrsatze von Pythagoras:

Das Quadrat der Entfernung des ersten Körpers vom Scheitel nach einer Bewegung von x Sekunden, vermehrt um das Quadrat des Weges des zweiten Körpers in x Sekunden $= 100^2$, oder kürzer

$$CD^2 = CA^2 + AD^2.$$

Der erste Körper ist anfänglich 40 m vom Scheitel entfernt, er legt zurück

in 1 Sekunde ——————— 2 m
in x Sekunden ——————— 2 x m.

Es ist also nach x Sekunden seine Entfernung vom Scheitel gleich $(40 - 2x)$ m. Der Weg des zweiten in x Sekunden ist 16 x m. Durch Einsetzen in die Wortgleichung folgt:

$$(40 - 2x)^2 + (16x)^2 = 100^2.$$

Man findet leicht

$$x_1 = 6,\ x_2 = -5\,{}^5/_{13}.$$

Antwort: Die Körper haben nach 6 Sekunden eine Entfernung von 100 m. Die negative Wurzel läfst diesmal eine räumliche Deutung zu. Man hat sich zu denken, dafs die Bewegung beider Körper in gleichem Sinne schon vor dem Zeitpunkte vor sich geht, in dem sie in der Aufgabe beginnt. Dann haben die beiden Körper schon $5\,{}^5/_{13}$ Sekunden vorher einmal eine Entfernung von 100 m gehabt.

Bardey-Pietzker, 50. Zwei Körper A und B bewegen sich auf einer geschlossenen Bahn, auf der sie sich bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung alle 20 Sekunden begegnen, während bei gleicher Bewegungsrichtung der schnellere Körper den langsameren alle 50 Sekunden überholt. Nimmt die Geschwindigkeit des langsameren um 5 m zu, die des schnelleren um ebensoviel ab, so braucht bei gleicher Bewegungsrichtung der letztere immer 100 Sekunden, um den ersteren wieder einzuholen. Welche Strecken legen beide Körper in der Sekunde zurück, wie lang ist die Bahn?

Antwort: Der schnellere Körper A legt in der Sekunde x m, B y m zurück, die Bahn ist z m lang.

Die erste Wortgleichung folgt aus dem ersten Satz, sie lautet

1. Weg des A in 20 sec + Weg des B in 20 sec = Länge der Bahn.

Die beiden anderen Wortgleichungen folgen ebenso leicht.

2. Weg des A in 50 sec — Weg des B in 50 sec = Länge der Bahn.
3. Weg des A in 100 sec bei einer um 5 m verringerten Geschwindigkeit — Weg des B bei einer um 5 m vermehrten Geschwindigkeit = Länge der Bahn.

A legt in 1 sec x m, also in 20 sec 20 x m, in 50 sec 50 x m zurück, bei verringerter Geschwindigkeit in 1 sec $(x - 5)$ m, in 100 sec $100(x - 5)$ m; entsprechend sind die Wege des B: 20 y m, 50 y m, $100(y + 5)$ m. Durch Einsetzung in die Wortgleichung folgt

$$1.\quad 20x + 20y = z$$
$$2.\quad 50x - 50y = z$$
$$3.\quad 100(x - 5) - 100(y + 5) = z.$$

Man findet: $x = 35$, $y = 15$, $z = 1000$

Antwort: Der schnellere Körper A legt in der Sekunde 35 m, der langsamere B 15 m zurück, die Bahn ist 1000 m lang.

Den Schlufs mögen zwei bekannte Aufgaben physikalischen Inhaltes machen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Die archimedische Aufgabe: Die Krone des Königs Hiero wog a kg, ihr spezifisches Gewicht betrug s; sie bestand aus Gold und Silber. Wenn nun das spezifische Gewicht des Goldes s_1, des Sibers s_2 ist, wieviel Gold und wieviel Silber enthielt die Krone?

Lösung: Die Krone enthielt x kg Gold, also (a — x) kg Silber. Die Wortgleichung lautet:

Das spezifische Gewicht der Krone = s.

Unter dem spezifischen Gewicht versteht man das Gewicht der Volumeneinheit; das spezifische Gewicht des Goldes ist s_1, d. h. es wiegt 1 l Gold s_1 kg, oder es haben Rauminhalt

$$s_1 \text{ kg Gold} \text{ ——— } 1 \text{ l}$$

$$1 \text{ kg Gold} \text{ ——— } \frac{1}{s_1} \text{ l}$$

$$x \text{ kg Gold} \text{ ——— } \frac{x}{s_1} \text{ l.}$$

Ähnlich folgt, daſs (a — x) kg Silber ein Volumen von $\frac{a-x}{s_2}$ l haben. Die Krone enthält x kg Gold und (a — x) kg Silber. Durch Addition folgt

$$x \text{ kg Gold} + (a - x) \text{ kg Silber haben ein Volumen von } \left(\frac{x}{s_1} + \frac{a-x}{s_2}\right) \text{ l,}$$

also $\quad a \text{ kg der Legierung} \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad \left(\frac{x}{s_1} + \frac{a-x}{s_2}\right) \text{ l.}$

Umgekehrt folgt, es wiegen

$$\left(\frac{x}{s_1} + \frac{a-x}{s_2}\right) \text{ l} \text{ ——— } a \text{ kg}$$

$$1 \text{ l} \text{ ——— } \frac{a}{\frac{x}{s_1} + \frac{a-x}{s_2}} \text{ l.}$$

Durch Einsetzen in die Wortgleichung folgt:

$$\frac{a}{\frac{x}{s_1} + \frac{a-x}{s_2}} = s$$

$$\frac{x}{s_1} + \frac{a-x}{s_2} = \frac{a}{s}.$$

Die Auflösung dieser linearen Gleichung mag der Kürze wegen unterbleiben.

2. Heis, § 108, 15a. Welchen Raum durchfällt ein in einen Brunnen hinabgeworfener Stein, den man nach t Sekunden aufschlagen hört, wenn die Geschwindigkeit des Schalles gleich s ist?

Lösung: Der Stein durchfällt einen Raum von x m. Die Wortgleichung lautet:
Die Fallzeit t_1 + Zeit t_2, die der Schall braucht, um den Raum x zurückzulegen, = t Sekunden.

Die Wegformel liefert für den freien Fall

$$x = \frac{1}{2} g \, t_1^2,$$

also

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

Die Bewegung des Schalles ist als eine gleichförmige anzusehen, also ist hier der Weg

$$x = s \cdot t_2,$$

also

$$t_2 = \frac{x}{s}.$$

Durch Einsetzen in die Wortgleichung folgt

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{s} = t.$$

Auch hier mag die Auflösung der quadratischen Gleichung unterbleiben.

Hiermit sei die Reihe der Beispiele abgeschlossen, sie ist ohnehin länger geworden, als ursprünglich beabsichtigt war. Aber zeigt nicht das Beispiel am besten, was man will? Freilich kommt in den behandelten Aufgaben doch nur ein kleiner Teil der Gröfsenbeziehungen vor, die man bei der Aufstellung der sogenannten Wortgleichung kennen mufs. Am meisten kann wohl der Grundsatz benutzt werden: Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile, oder unter Voraussetzung der Gleichheit der Teile: Das Ganze ist gleich dem Vielfachen eines Teiles. Meist gibt, wie F. Meyer ausführt, die Notwendigkeit, zuweilen auch Gerechtigkeit und Billigkeit u. dergl. den Ausschlag, wenn das Urteil formuliert werden soll, welches für die Begriffssphäre, aus der das Exempel entlehnt wurde, charakteristisch ist. Bei Mischungsaufgaben ist der Nutzen gleich dem Schaden, bei Verteilung des Gewinnes sind die Gewinnanteile den Geschäftseinlagen proportional, bei verschiedenen Zahlungsarten müssen die baren Werte gleich sein. Andere solche schon aus dem Rechenunterrichte bekannte Beziehungen sind: Brutto = Netto + Tara, Verkaufspreis = Einkaufspreis + Gewinn, Endkapital = Anfangskapitel + Zinsen u. a. m.

Bei Bewegungsaufgaben spielt neben dem oben angeführten Grundsatze natürlich auch die grundlegende Gleichung für die gleichförmige Bewegung eine grofse Rolle: Weg = Geschwindigkeit mal Zeit.

Handelt es sich um Textgleichungen geometrischen Inhaltes, so hilft oft der Lehrsatz des Pythagoras, oft bilden Flächen- und Inhaltsformeln aus Planimetrie und Stereometrie den Ausgang. Sollen sich Kreise berühren, so kommt die Relation in Betracht: Zentrale gleich Summe oder Differenz der Radien, u. s. w.

Aus der Physik kann man oft die Definition des spezifischen Gewichtes benutzen: Spezifisches Gewicht = Gewicht der Volumeneinheit oder = Quotient aus absolutem Gewicht und Volumen. Vielfach liefert auch das archimedische Prinzip den Ansatz, u. s. w.

Sollen nun die Schüler eine gewisse Fertigkeit im Lösen von Textgleichungen erlangen, so ist natürlich auf allen Stufen Übung nötig. Allmählich kommen sie so selbst zu einer Gruppierung der Aufgaben nach der Art, wie sich die Wortgleichung ergibt. Bisher sind leider die Exempel der Aufgabensammlungen meist nur nach der Zahl der Unbekannten und dem Grad der resultierenden Gleichung geordnet, ich würde es für einen Fortschritt in pädagogischer Beziehung halten, wenn die Anordnung des Übungsmaterials mehr nach dem genannten Gesichtspunkte erfolgte. Ich denke aber, dafs hierzu die Herausgeber der Aufgabensammlungen bald gedrängt würden, wenn bei Behandlung der Textaufgaben die Aufsuchung der Wortgleichung im F. Meyerschen Sinne in den Vordergrund gerückt würde.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Freilich etwas mehr Zeit, als es bisher wohl vielfach geschehen ist, muſs unserem Gegenstand auch schon auf der untersten Stufe gewidmet werden, und er verdient es ja auch, denn sein Nutzen für die geistige Ausbildung der Schüler ist gröſser als der von manchem andern Kapitel der Arithmetik. Darum möchte ich hier auch einem Lieblingsgedanken von A. Thaer das Wort reden, nämlich den arithmetischen Unterricht mit der Auflösung einfacher Gleichungen zu beginnen. Das läſst sich für die Oberrealschule besonders leicht ausführen, da ja hier schon für Quarta ein einleitender Unterricht in der Arithmetik vorgeschrieben ist. Und zwar würde man dabei wohl am besten mit eingekleideten Aufgaben einfachster Art beginnen, wie sie die Aufgabensammlungen meist an erster Stelle bringen. Ich zweifele nicht daran, daſs auch hieraus unserem Unterrichtszweige ein nicht unbedeutender Nutzen erwüchse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Freilich etwas mehr [illegible] schehen ist, mufs unserem Gegenstand auch schon au [illegible] len, und er verdient es ja auch, denn sein Nutzen fü [illegible] er ist gröfser als der von manchem andern Kapitel d [illegible] hier auch einem Lieblingsgedanken von A. Thaer da [illegible] ischen Unterricht mit der Auflösung einfacher Gleic [illegible] h für die Oberrealschule besonders leicht ausführen, [illegible] leitender Unterricht in der Arithmetik vorgeschrieben [illegible] wohl am besten mit eingekleideten Aufgaben einfa [illegible] gabensammlungen meist an erster Stelle bringen. Ich [illegible] raus unserem Unterrichtszweige ein nicht unbedeuten [illegible]