Eine Erweiterung des Satzes vom Reversionspendel.

Von

Professor Baisch.

Unter den physikalischen Apparaten unserer Anstalt befindet sich ein sogenanntes Reversionspendel, an dessen leichter, hölzerner, gleichmäßig gearbeiteter Pendelstange 2 gleich schwere, linsenförmige Massen, gegen deren Gewicht das der Pendelstange nahezu verschwindet, sich beliebig verschieben lassen. An der Pendelstange sind 2 feste, stählerne Schneiden angebracht, welche als Drehpunkte für das Pendel dienen können. Von den beiden Massen befindet sich die eine zwischen den beiden Schneiden, die andere außerhalb derselben.

Das Gesetz, welches mit einem solchen Pendel nachgewiesen werden soll, lautet bekanntlich: Wenn man ein Pendel um seinen Schwingungspunkt sich drehen läßt, bleibt seine Schwingungsdauer unverändert. Will man mit unsrem Pendel dieses Gesetz nachweisen, so entsteht vor allem die Aufgabe, die beiden Massen in einen solchen Abstand von einander zu bringen, daß, wenn man das Pendel um eine der Schneiden sich schwingen läßt, sein Schwingungspunkt mit der andern zusammenfällt. Die Beschäftigung mit dieser Aufgabe gab mir die Veranlassung zu der folgenden Arbeit, durch welche ich fand, daß das Gesetz von der Reversion nur ein Einzelfall eines interessanten allgemeinen Gesetzes ist. Meine Abhandlung gründet sich auf die Gleichung, durch welche die mathematische Länge eines mit 2 Gewichten beschwerten, sonst aber gewichtlosen Pendels bestimmt wird. Ich schicke meiner Arbeit die Entwicklung dieser Gleichung voraus.

Es seien an einem gewichtlos gedachten Pendel 2 Massen, M und M^1, die eine in der Entfernung r, die andere in der Entfernung r' vom Drehpunkt angebracht. Bildet das Pendel mit seiner senkrechten Lage einen Winkel von α Grad, so erleidet infolge der Schwerkraft jeder materielle Punkt desselben in einer zum Pendel senkrechten Richtung die Beschleunigung g sin α, wo g die Beschleunigung beim freien Fall bedeutet. Die die Masse M treibende Kraft ist daher Mg sin α und ihr Drehungsmoment Mr g sin α, das Drehungsmoment beider Massen daher, wenn sie sich auf derselben Seite des Drehpunktes befinden,

$$(Mr + M'r')\ g \sin \alpha.$$

Wäre die eine Masse, z. B. M' über dem Drehpunkt angebracht, so würde sie der Bewegung der untern Masse entgegenwirken; das Drehungsmoment für beide Massen wäre dann

$$(Mr - M'r')\ g \sin \alpha.$$

Würde jede der beiden Massen unabhängig von der andern schwingen, so hätte die vom Drehpunkt entferntere eine kleinere Winkelgeschwindigkeit als die nähere, indem beide infolge der gleichen unter denselben Bedingungen auf sie wirkenden Kraft in gleicher Zeit gleiche Wege beschreiben würden. Da sie aber fest miteinander verbunden sind, so beeinflussen sie sich gegenseitig so, daß sie gleiche Winkelgeschwindigkeit annehmen. Ist infolge dessen die Beschleunigung eines Punktes in der Entfernung l vom Drehpunkt gleich w, so ist die Beschleunigung der Masse M in der Entfernung r gleich rw, die zu ihrer Bewegung notwendige Kraft daher Mrw und ihr Drehungsmoment Mr^2w. Das gesamte Drehungsmoment beider Massen ist daher, mögen sie sich auf einer Seite oder zu beiden Seiten des Drehpunktes befinden,

$$(Mr^2 + M'r'^2)\ w.$$

Dieser Wert muß dem oben für das Drehungsmoment gefundenen gleich sein. Man hat daher die Gleichung

$$(Mr + M'r')\ g \sin \alpha = (Mr^2 + M'r'^2)\ w$$

wobei das Vorzeichen für die Entfernung der über dem Drehpunkt befindlichen Masse negativ zu nehmen ist.

Da durch den gegenseitigen Einfluß beider Massen die Geschwindigkeit in der Nähe des Drehpunkts klein ist, mit der Entfernung von ihm aber wächst, so muß sich auf dem Pendel oder seiner Verlängerung ein Punkt finden, dessen Beschleunigung die ursprüngliche, also g sin α, ist. Diesen Punkt nennt man den Schwingungspunkt und seine Entfernung vom Drehpunkt die mathematische Länge des Pendels. Bezeichnet man diese mit l, so muß die Gleichung stattfinden

$$g \sin \alpha = l\ w.$$

Setzt man diesen Wert von g sin α in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man für die mathematische Länge des Pendels

$$l = \frac{Mr^2 + M'r'^2}{Mr + M'r'} \qquad (1)$$

Mittelst dieses Satzes könnte man nun den Satz vom Reversionspendel auf folgende Art beweisen. Die Abstände der beiden Massen vom Schwingungspunkt sind $l-r$ und $l-r'$. Nimmt man nun den Schwingungspunkt zum Drehpunkt, so hat man um die mathematische Länge l' des im Schwingungspunkt aufgehängten Pendels zu finden, in die vorige Gleichung $l-r$ und $l-r'$ für r und r' einzusetzen. Man erhält dadurch

$$l' = \frac{M\,(l-r)^2 + M'\,(l-r')^2}{M\,(l-r) + M'\,(l-r')}$$

Wenn man in diese Gleichung den obigen Wert von l einsetzt, ergibt sich

$$l' = l.$$

Doch nicht um diesen oder irgend einen andern speziellen Beweis für das Reversionspendel soll es sich jetzt handeln, sondern um eine allgemeinere Behandlung unserer Aufgabe, aus der sich der Satz vom Reversionspendel als Einzelfall ergibt. Als Voraussetzung der weiteren Entwicklung dient also nur die Gleichung (1).

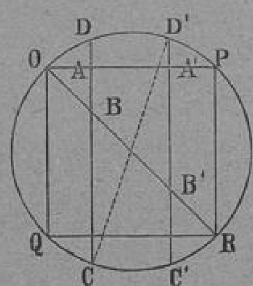
Das mathematische Pendel

a) mit 2 gleichen Massen.

Wir wollen bei einem Pendel, das an einer gewichtlosen Stange 2 verschiebbare Massen trägt, für die gegenseitige Stellung dieser Massen die Bedingung aufsuchen, unter der die mathematische Länge des Pendels sich nicht ändert. Man sieht sofort aus Gleichung (1), daß es unendlich viele Pendel gibt, die dieser Bedingung entsprechen, denn zu jedem beliebig angenommenen r oder r′ finden sich, sofern es gewisse Grenzen nicht überschreitet, je 2 Werte von r′ oder r, da Gleichung (1) in Beziehung auf r und r′ je vom zweiten Grad ist.

Die Gesamtheit solcher Pendel übersieht man am leichtesten aus folgender geometrischen Darstellung, bei der wir der Einfachheit wegen die beiden Massen zunächst als gleich annehmen wollen. Gleichung (1) vereinfacht sich hiedurch auf

$$l = \frac{r^2 + r'^2}{r + r'} \tag{2}$$



Es sei A, B C ein Pendel mit dem Aufhängepunkt A und den gleichen Massen M und M′ in den Punkten B und C so daß r = AB, r′ = AC ist.

Man ziehe AO $\perp$ AB, mache AO = AB und errichte auf der Geraden OC das Mittellot. Dieses schneidet die OB in dem Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Punkte O und C geht. Der Kreis aber schneidet die OA in einem Punkt P, die OB in R. Da nun $\sphericalangle$ OAB = OPR = 90° und OA = AB ist, so ist auch OP = PR.

Zieht man noch die Sehne OQ ∥ PR, so wird OPQR ein in den Kreis beschriebenes Quadrat, dessen Seite wir mit q bezeichnen wollen.

Nach dem Sehnensatz hat man nun

$$AO \,.\, AP = AC \,.\, AD$$

oder wenn wir die hier vorkommenden Strecken durch die Größen r, r′ und q ausdrücken,

$$r\,(q-r) = r'\,(r'-q)$$

woraus

$$q = \frac{r^2 + r'^2}{r + r'}$$

also nach Gleichung (2)

$$q = 1$$

Sehen wir nun A, B D als ein Pendel an mit dem Drehpunkt A und den gleichen Massen M und M′ in den Punkten B und D, so ist $AB = r$, $AD = r'$.

Die oben aufgestellte Sehnengleichung gibt uns hier

$$r\,(q-r) = r'\,(q+r')$$

woraus

$$q = \frac{r^2 + r'^2}{r - r'}$$

Befindet sich aber die Masse M′ über dem Drehpunkt, so muß, wie wir gesehen haben, in Gleichung (2) r′ negativ genommen werden. Man erhält also wieder

$$q = 1.$$

Dieser Beweis ändert sich nicht wesentlich, wenn man das Pendel senkrecht zu seiner Richtung bis zu seiner Grenzlage als Tangente an den Kreis verschiebt, wobei sein Aufhängepunkt sich in der obern Quadratseite bewegt. Man erhält somit den allgemeinen Satz:

> Wird ein Pendel, dessen Aufhängepunkt in der obern wagrechten Seite eines Quadrats liegt, senkrecht zu seiner Richtung verschoben und bewegen sich auf ihm 2 gleiche Massen so, daß die eine in der Diagonale des Quadrats, die andere auf dem um das Quadrat beschriebenen Kreis sich bewegt, so bewegt sich sein Schwingungspunkt auf der untern Quadratseite.

Die mathematische Länge des Pendels bleibt unverändert gleich der Quadratseite.

Verschiebt man das Pendel über das Quadrat hinaus, bis es als Tangente an den Kreis seine Grenzlage erreicht hat, so wird bei dieser Verschiebung die zuvor außen liegende Masse zur innern und umgekehrt, so daß, weil beide Massen als einander gleich angenommen sind, die innerhalb des Quadrats aufgetretenen Fälle jetzt paarweise wiederkehren, bis das Pendel als Tangente denselben Fall bietet, wie das durch den Mittelpunkt des Kreises gehende. Die Pendel, welche in unsrer Zeichnung rechts vom Quadrat sich befinden, sind einarmige Pendel, indem beide Massen unter dem Drehpunkt sind, die links vom Quadrat sind zweiarmige.

Um nicht jeden Fall doppelt zu erhalten, kann man sich daher auf eine Bewegung des Pendels von einer Quadratseite bis zur gegenüberliegenden beschränken. Liegt dabei in der Anfangslage die eine Masse in O, die andere in Q, so bewegt sich letztere im Bogen Q R, man erhält einarmige Pendel. Befinden sich aber anfangs beide Massen in O, so bewegt sich bei der Verschiebung die eine im obern Bogen O P, es entstehen die zweiarmigen Pendel.

Aus unserm allgemeinen Satz wollen wir nun 3 besonders interessante Einzelfälle herausheben. Der erste ist schon durch den oben geführten Beweis unsres Satzes unmittelbar gegeben. Das einarmige Pendel A, BC hat mit dem zweiarmigen A, BD gleiche mathematische Länge. Man kann also bei dem Pendel A, BC die untere Masse von C wegnehmen und über dem Drehpunkt bei D anbringen, ohne daß sich die mathematische Länge des Pendels ändert. Dabei haben die Punkte C und D von dem mathematischen Mittelpunkt des Pendels gleiche Entfernung.

Zieht man ferner von dem untern Punkt C unsres Pendels A, BC den Durchmesser CD′ und von D′ aus die Senkrechte D′C′, so erhält man auf ihr das Pendel A′, B′C′, welches mit dem Pendel A, BC ebenfalls gleiche mathematische Länge hat. Bei diesen beiden Pendeln ist AC = A′C′, die äußern Massen liegen also gleich tief. Dagegen liegt die innere Masse das einemal in B, das andermal in B′, im einen Fall so weit über dem mathematischen Mittelpunkt, als im andern darunter. Man kann also bei dem Pendel A, BC auch die innere Masse von B wegnehmen und in die Tiefe von B′ verschieben, ohne daß sich die mathematische Länge ändert.

Es hat drittens auch das Pendel A′, B′D′ mit Pendel A, BC gleiche mathematische Länge. Man sieht aber leicht, daß das Pendel A′, B′D′ nichts anders ist als das Pendel A, BC, in seinem Schwingungspunkt aufgehängt. Der Aufhängepunkt A′ des einen ist der Schwingungspunkt des andern. Durch die Umkehrung des Pendels ist die eine Masse gleichsam von B nach B′, die andere von C nach D verlegt. Beide Massen haben durch diese Verlegung auch hier ihre Entfernung vom mathematischen Mittelpunkt beibehalten, nur das Vorzeichen dieser Entfernungen hat sich umgekehrt.

Somit ist das Reversionspendel, auf das wir hier gestoßen sind, nur ein Einzelfall aus der unendlichen Schar von Pendeln gleicher mathematischer Länge. Am engsten schließt es sich an die beiden vorausgehenden Einzelfälle an; mit ihnen steht es unter dem gemeinschaftlichen Gesetz:

> Verlegt man bei einem Pendel, auf welchem sich an einer gewichtlosen Stange 2 gleiche Massen befinden, die eine von diesen oder beide auf die andere Seite des Mittelpunktes seiner mathematischen Länge, so daß ihre Entfernung von ihm unverändert bleibt, so bleibt die mathematische Länge des Pendels selbst unverändert.

Man kann praktisch das Reversionspendel dazu verwenden, durch Versuch die Länge eines mit 2 Massen beschwerten Pendels zu bestimmen, wenn das Gewicht der Pendelstange gegen das der beiden Massen verschwindet. Man bestimmt zu diesem Zweck für eine bestimmte Stellung beider Massen die Zahl der Pendelschwingungen in einer gegebenen Zeit und läßt es dann in umgekehrter Stellung um einen neuen Drehpunkt schwingen, den man so lange ändert, bis die Schwingungszahl der vorigen gleich ist. Der Abstand dieses neuen Drehpunkts vom ersten ist dann die gesuchte Länge. Unser oben entwickelter Satz gibt uns nun ein Mittel an die Hand, denselben Zweck ohne Umkehrung des Pendels zu erreichen. Wir können bei unserem Pendel A, BC oder A, BD die zunächst unter dem Drehpunkt befindliche Masse von B nach einem Punkt B′ verschieben oder bei Pendel A, BC die äußere Masse bei C wegnehmen und über dem Drehpunkt zu einem Punkt D verschieben, der uns dieselbe Schwingungszahl gibt, wie das ursprüngliche Pendel. Sind bei einem solchen Versuch die Abstände der verschobenen Masse vom Drehpunkt r_1 und r_2, so ist

$$l = r_1 + r_2,$$

wobei für die Masse, die über den Drehpunkt zu liegen kommt, der Abstand negativ zu nehmen ist.

Nur in einem Fall wird man für die zunächst unter dem Drehpunkt befindliche Masse keinen zweiten Punkt finden, für welchen die Schwingungszeit die gleiche wird, wenn sich nämlich die Masse im mathematischen Mittelpunkt befindet. Die vorige Gleichung geht in diesem Falle über in

$$l = 2r$$

d. h. die mathematische Länge des Pendels ist dann gleich der doppelten Entfernung der Masse vom Drehpunkt.

Das Pendel schwingt gleich schnell, ob sich die Masse M über dem mathematischen Mittelpunkt in B oder unter ihm in B′ befindet. Schwingt es wohl langsamer oder schneller, wenn man sie in einen Punkt zwischen B und B′ versetzt, ohne die andre Masse zu verschieben? Zur Beantwortung dieser Frage wollen wir zuerst untersuchen, welchen Einfluß auf die Schwingungszeit eine Tieferlegung der Masse M′ von C aus oder, was dieselbe Wirkung hat, eine Höherlegung über dem Drehpunkt über D hinaus zur Folge hat. Ohne Zweifel schwingt das Pendel dann langsamer. Es ergibt sich dies leicht aus der Gleichung für l. Befindet sich nämlich die Masse M′ über dem Drehpunkt, so hat man

$$l = \frac{r^2 + r'^2}{r - r'}$$

Je größer nun r′ wird, desto größer wird der Zähler und desto kleiner der Nenner des Bruchs, aus beiden Gründen wird also l größer. Legt man nun die Masse auf die andere Seite des mathematischen Mittelpunkts, so kommt sie unter den Schwingungspunkt zu liegen, weil sie über dem Drehpunkt jedenfalls vom mathematischen Mittelpunkt um mehr als $\frac{1}{2}$ l entfernt ist. Von einer Masse über dem Drehpunkt oder unter dem Schwingungspunkt gilt also der Satz, daß das Pendel um so langsamer schwingt, je weiter die Masse sich vom Drehpunkt entfernt. Für eine Masse zwischen diesen beiden Punkten gilt aber der Satz in dieser Form nicht unbedingt. Verschieben wir nämlich unser Pendel von links oder rechts gegen den Mittelpunkt des Kreises, so senkt sich die untere Masse M′, was ein Langsamerschwingen des Pendels zur Folge haben muß. Diese Folge wird aber durch die gleichzeitige Bewegung der Masse M in B oder B′ aufgehoben, welche sich dem mathematischen Mittelpunkt nähert. Es muß also eine Annäherung dieser Masse an den mathematischen Mittelpunkt für sich eine Beschleunigung des Pendels zur Folge haben.

Als allgemeinen Satz für alle Fälle haben wir also:

> Ein Pendel schwingt um so schneller, je mehr sich eine seiner Massen dem mathematischen Mittelpunkt nähert. Es schwingt also unter Festhaltung der andern Masse am schnellsten, wenn sich jene im mathematischen Mittelpunkt befindet.

Das Verhältnis der beiden Entfernungen vom Drehpunkt zu einander in diesem Fall finden wir leicht, wenn wir das Pendel durch den Mittelpunkt unsres Kreises gelegt denken. Der Sehnensatz gibt für diesen Fall leicht

$$r'(r' - l) = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

woraus

$$r' = \frac{l}{2}\,(1 \pm \sqrt{2})$$

wobei sich das positive Vorzeichen der Wurzel auf das einarmige, das negative auf das zweiarmige Pendel bezieht.

Da nun in unsrem Fall $r = \frac{l}{2}$ ist, so erhalten wir

$$\frac{r'}{r} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Bei dem Pendel unsrer Anstalt sind die beiden Schneiden in einem gegenseitigen Abstand von 104 cm fest angebracht. Benützen wir es also nur als Reversionspendel, so ist seine Verwendung ziemlich beschränkt. Man kann dann mit demselben nur die Richtigkeit des Reversionsgesetzes nachweisen und dabei noch zeigen, daß sich die gegebene mathematische Länge durch passende Verschiebung beider Massen auf die verschiedenste Weise gewinnen läßt. Mit Hilfe unseres Seite 5 angegebenen Satzes bekommen wir nun aber für unser Pendel noch eine weitere Verwendung. Wir sind dann nicht mehr auf eine vorgeschriebene Pendellänge beschränkt, sondern können auch andere Längen uns auswählen.

Soll z. B. die Länge des Sekundenpendels bestimmt werden, so geben wir durch Versuch den beiden Massen eine solche gegenseitige Entfernung, daß das Pendel in der Minute genau 60 Schwingungen macht; dann verschieben wir, ob wir nun das Pendel als 1- oder 2-armiges verwendet haben, die zunächst unter dem Drehpunkt befindliche Masse so lange, bis das Pendel wieder 60 Schwingungen in der Minute macht. Die Summe der beiden Entfernungen der verschobenen Masse vom Drehpunkt gibt die gesuchte Länge des Sekundenpendels.

Was wir seither auf geometrischem Wege gefunden haben, soll nun auch auf algebraischem entwickelt werden.

Bei gleichen Massen haben wir als mathematische Länge des Pendels

$$l = \frac{r^2 + r'^2}{r + r'}$$

Nehmen wir in dieser Gleichung l als unveränderliche, r und r' aber als veränderliche Größen an, so stellt uns die Gleichung die ganze Schar von Pendeln gleicher mathematischer Länge dar, die bei unsrer geometrischen Behandlung durch einen Kreis bestimmt waren.

Suchen wir zu einem gegebenen l und r das zugehörige r', so erhalten wir

$$r' = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r\,(l - r')}$$

Wir lesen aus dieser Gleichung den Satz ab:

> Ein Pendel ändert seine mathematische Länge nicht, wenn wir eine seiner Massen auf die andere Seite des mathematischen Mittelpunkts mit unverändertem Abstand von demselben verlegen.*

Unsere Gleichung zeigt uns auch unmittelbar, daß die Summe der beiden Werte von r' gleich der mathematischen Länge ist, eine Eigenschaft, die wir schon Seite 5 zur Bestimmung der mathematischen Länge benützt haben.

Wie zu einem Wert von r 2 Werte von r' gehören, so umgekehrt zu einem Wert von r' 2 Werte von r, ebenfalls von der Form $\frac{l}{2} \pm d$. Setzen wir daher

$$r = \frac{l}{2} + d$$

und führen diesen Wert in unsre obige Gleichung für r' ein, so erhalten wir

$$r' = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1^2}{2} - d^2} = \frac{1}{2} \pm d'$$

Da in dieser Gleichung d unter der Wurzel nur in der zweiten Potenz vorkommt, so bleibt r′ bei einem Wechsel des Vorzeichens von d unverändert, so daß wir für 1 absoluten Wert von d die Werte von r und r′ in 4facher Weise zusammenstellen können. Um diese Zusammenstellungen in unsrer Figur Seite 3 zu erkennen, setzen wir dort $OA = AB = r$, so daß die zugehörigen Werte von r′

$$AC = \frac{1}{2} + d^1 \text{ und } AD = \frac{1}{2} - d' \text{ sind.}$$

Es ist demnach in unsrer vorigen Gleichung für r′

$$\sqrt{\frac{1^2}{2} - d^2} = d'$$

nichts anderes, als die halbe Sehne CD, was sich auch leicht durch Rechnung ergibt. Es ist nämlich d als Abstand des Punktes B vom mathematischen Mittelpunkt des Pendels zugleich auch der Abstand der Sehne CD vom Mittelpunkt des Kreises. Das Quadrat des Halbmessers dieses Kreises ist aber $\frac{1^2}{2}$, weil die Seite des in den Kreis beschriebenen Quadrats $= 1$ ist, daher

$$\frac{1}{2} CD = \sqrt{\frac{1^2}{2} - d^2}$$

Unsre 4 durch 1 Wert von d bestimmten Pendel von gleicher mathematischer Länge sind also

1. A, BC $\quad \frac{1}{2} - d, \quad \frac{1}{2} + d'$
2. A, BD $\quad \frac{1}{2} - d, \quad \frac{1}{2} - d'$
3. A′, B′C′ $\quad \frac{1}{2} + d, \quad \frac{1}{2} + d'$
4. A′, B′D¹ $\quad \frac{1}{2} + d, \quad \frac{1}{2} - d'$

Von diesen Pendeln ist das vierte die Reversion von 1, das zweite die von 3.

Nehmen wir r′ als unveränderliche Größe und setzen $r = \frac{1}{2} + d$ in die Gleichung $1 = \frac{r^2 + r'^2}{r + r'}$ ein, so erhalten wir

$$1 = \frac{\left(\frac{1}{2} + d\right)^2 + r'^2}{\frac{1}{2} + d + r'}$$

und wenn wir noch l auflösen,

$$\frac{l^2}{4} + r'l = r'^2 + d^2$$

Seinen kleinsten Wert nimmt demnach l an, wenn $d = 0$, also $r = \frac{l}{2}$ ist.

Hierin liegt der Satz:

Ein Pendel schwingt am schnellsten, wenn sich die Masse M im mathematischen Mittelpunkt befindet.

Für $d = 0$ gibt uns die Gleichung $\frac{l^2}{4} + r'l = r'^2$

$$r' = \frac{l}{2}\,(1 \pm \sqrt{2})$$

Wir haben also wieder, wie Seite 7, oben

$$\frac{r'}{r} = 1 \pm \sqrt{2}$$

wo sich das positive Vorzeichen der Wurzel auf das einarmige, das negative auf das zweiarmige Pendel bezieht.

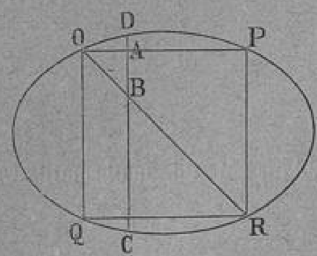
Das mathematische Pendel

b) mit 2 ungleichen Massen.

Mit Hilfe der analytischen Geometrie kann man leicht die im vorausgehenden Abschnitt behandelte Aufgabe, welche die Beschränkung enthält, daß beide Massen einander gleich sind, auf die allgemeinere ausdehnen, daß M von M′ verschieden ist. Die Gleichung für die Pendellänge ist in diesem Fall

$$l = \frac{Mr^2 + M'r'^2}{Mr + M'r'} \qquad (1)$$

Sieht man die beiden Größen r und r′ als veränderlich an und trägt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem vom Ursprung aus die eine, z. B. r auf der Abscissen-, die andere auf der Ordinatenachse ab, so stellt uns unsre Gleichung eine Kurve zweiten Grades dar. Beide Veränderliche treten in der zweiten Potenz auf und ihre Koeffizienten M und M′ sind positiv, daher ist die Kurve eine Ellipse. Da die veränderlichen Größen auch in der ersten Potenz vorkommen, ihr Produkt $r r'$ aber fehlt, so fällt der Mittelpunkt der Ellipse nicht in den Ursprung, sondern ihre Achsen sind parallel den Koordinaten verschoben.



Es sei O der Ursprung des Koordinatensystems, OP die Richtung der Abscissen-, OQ die der Ordinatenachse.

Es sei ferner OPQR ein Quadrat mit der Seite $OP = 1$. Schreibt man nun die Gleichung (1) der Ellipse in der Form

$$Mr\,(r - 1) + M'r'\,(r' - 1) = 0$$

so sieht man leicht, daß für $r = 0$ $r' = 0$ oder $= 1$ wird. Die Kurve geht also durch die Punkte O und Q.

Für $r = 1$ wird wieder $r' = 0$ oder $= 1$, die Kurve geht also durch P und R. Die Ellipse ist also dem Quadrat OPQR umschrieben.

Zur Bestimmung der Achsen der Ellipse kann man Gleichung (1) weiter umformen in

$$M\,(r^2 - rl) + M'\,(r'^2 - r'l) = 0$$

oder

$$M\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + M'\left(r' - \frac{1}{2}\right)^2 = (M + M')\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Setzt man hier

$$r - \frac{1}{2} = x \quad \text{und} \quad r' - \frac{1}{2} = y$$

so erhält man

$$Mx^2 + M'y^2 = (M + M')\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Dividirt man noch mit

$$(M + M^1)\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

und setzt

$$\frac{(M + M')\,1^2}{4M} = \alpha^2 \quad \text{und} \quad \frac{(M + M')\,1^2}{4M'} = \beta^2$$

so erhält man als Gleichung der auf ihren Mittelpunkt bezogenen Ellipse

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Die Halbachsen der Ellipse sind demnach

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M + M'}{M}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M + M'}{M'}}$$

und es verhalten sich

$$\alpha : \beta = \sqrt{M'} : \sqrt{M}$$

α liegt auf der Abscissenachse, sie ist die größere Halbachse, wenn $M' > M$.

Ist $M' = M$, so wird

$$\alpha = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

die Ellipse geht in einen Kreis über mit dem Halbmesser

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Trägt man nun auf der Abscissenachse $OA = r$ ab, so erhält man für r' 2 Werte, AC und AD, und da $AB = AO$ ist, so ist das Pendel von der Länge l

entweder A, BC mit Aufhängepunkt A und den Massen M und M′ in B und C

oder

A, BD mit Aufhängepunkt A und den Massen M und M′ in B und D.

Man hat daher wieder den allgemeinen Satz:

Wird ein Pendel, dessen Aufhängepunkt in der obern wagrechten Seite eines Quadrats liegt, senkrecht zu seiner Richtung verschoben und bewegen sich auf ihm 2 Massen so, daß die eine in der Diagonale des Quadrats, die andere auf einer um das Quadrat beschriebenen Ellipse sich bewegt, deren Achsen durch die Größe der Massen bestimmt sind, so bewegt sich sein Schwingungspunkt auf der untern Quadratseite.

Die mathematische Länge des Pendels bleibt unverändert gleich der Quadratseite.

Dabei verhält sich die wagrechte Achse der Ellipse zu ihrer senkrechten, wie die Quadratwurzel der auf der Ellipse sich bewegenden Masse zu der Quadratwurzel der sich auf der Diagonale bewegenden.

Setzt man hier die Verschiebung des Pendels über das Quadrat hinaus fort, bis es als Tangente in seiner Grenzlage ankommt, so ändert sich die gegenseitige Lage beider Massen in der Art, daß beim Austritt aus dem Quadrat die äußere Masse zur inneren wird und umgekehrt. Da die Massen aber von einander verschieden sind, so treten jetzt die innerhalb des Quadrats vorgekommenen Fälle nicht wieder auf. Die Reihe aller möglichen Fälle ist erst erschöpft, wenn das Pendel durch die ganze Ellipse von irgend einem Punkt aus so verschoben worden ist, daß es schließlich die Ellipse von dem Berührungspunkt auf der einen Seite bis zum gegenüberliegenden hin und zurück ganz durchlaufen hat.

Fangen wir z. B. damit an, daß wir die Masse M nach O, die Masse M′ nach Q verlegen und verschieben wir nun das Pendel nach rechts. M sinkt in der Diagonale OR immer tiefer und trifft schließlich in R mit M′ zusammen. Wir verschieben das Pendel in derselben Richtung weiter, M sinkt in der Verlängerung der Diagonale noch immer und erreicht seinen tiefsten Punkt, wenn das Pendel in seiner Grenzlage als Tangente angekommen ist; M′ liegt jetzt im Berührungspunkt. Beim Durchschreiten des Punktes R haben die beiden Massen ihre gegenseitige Lage in der Art geändert, daß die höher liegende zur tiefer liegenden geworden ist. Von der Tangentenlage aus bewegen wir nun das Pendel wieder rückwärts; beide Massen heben sich jetzt, M geht auf der Diagonale nach R zurück, M′ aber, seinen seitherigen Weg fortsetzend, langt gleichzeitig in P an.

Bis jetzt haben wir einarmige Pendel gehabt; setzt nun das Pendel seine rückgängige Bewegung fort, so treten von jetzt an zweiarmige Pendel auf, indem M′ auf dem Bogen PO über den Aufhängepunkt tritt. In O begegnen sich beide Massen wieder und nun tritt M in der Verlängerung der Diagonale über den Drehpunkt und erreicht seinen höchsten Punkt in der Grenzlage des Pendels als

Tangente links, während gleichzeitig M′ im Berührungspunkt anlangt. Lassen wir zum Schluß das Pendel in seine Anfangsstellung OQ zurückkehren, so sinken beide Massen nun miteinander, M geht in der Diagonale auf seinen Anfangspunkt O zurück, M′ auf der Ellipse nach Q.

Wir haben einarmige Pendel gehabt bei der Bewegung des Pendels von OQ aus nach rechts bis zur Tangentenlage und rückwärts nach PR, zweiarmige von PR aus nach links bis zur Tangente und rückwärts bis OQ. Keine Lage kommt doppelt vor, von jeder aber ihre Umkehrung.

Die weitere Besprechung dieses Pendels kann genau so weitergeführt werden wie die des Pendels mit 2 gleichen Massen und führt uns auf die gleichen Sätze. Die geometrische Behandlung entspricht dann der von Seite 5 und 6, die algebraische gibt uns aus dem Wert von l die Gleichung

$$r' = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{M'}\, r\,(l - r)}$$

aus der wir dieselben Schlüsse ziehen wie Seite 7.

Setzt man ferner

$$r = \frac{l}{2} + d$$

so erhält man aus der vorigen Gleichung

$$r' = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{M}{M'}\left(\frac{l^2}{4}\,\frac{M + M'}{M} - d^2\right)} = \frac{l}{2} \pm d'$$

Unsere Figur Seite 10 zeigt, daß wenn wir $r = AB$ setzen, der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{M}{M'}\left(\frac{l^2}{4}\,\frac{M + M'}{M} - d^2\right)} = d'$$

nichts anderes ist, als der Wert der halben Sehne CD. Wir können diesen Wert aus der Gleichung der auf ihren Mittelpunkt bezogenen Ellipse

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

leicht ableiten.

Aus ihr ergibt sich die halbe Sehne CD als

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$$

oder indem wir $x = d$ und für α und β ihre auf Seite 10 entwickelten Werte einsetzen

$$y = \sqrt{\frac{M}{M'}\left(\frac{l^2}{4}\,\frac{M + M'}{M} - d^2\right)}$$

Die Zusammenstellungen von

$$r = \frac{l}{2} \pm d \quad \text{mit} \quad r' = \frac{l}{2} \pm d'$$

geben uns die Pendel S. 8.

Setzt man

$$r = \frac{l}{2} + d$$

in die Gleichung für l ein und ordnet nach l, so erhält man

$$M \frac{l^2}{4} + M' r' l = M' r'^2 + M d^2$$

Für d = o nimmt, wenn wir r' als unveränderliche Größe annehmen, l seinen kleinsten Wert an. Es ist dann

$$r = \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad r' = \frac{l}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{M}{M'}}\right)$$

daher

$$\frac{r'}{r} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{M}{M'}}$$

entsprechend den Werten Seite 7 oder 9.

Das physische Pendel.

Die seither entwickelten Sätze gelten sämtlich auch für das physische Pendel.

Es sei O Q, Seite 3 die mathematische Länge des physischen Pendels mit dem Drehpunkt O, und es seien 2 gleiche, bewegliche Massen in O, oder nur die eine in O, die andere in Q. Verschiebt man nun das Pendel senkrecht zu seiner Richtung, so daß die eine Masse in der Diagonale des Quadrats, dessen Seite gleich O Q ist, und die andere von Q oder O aus den untern oder obern Bogen des um das Quadrat beschriebenen Kreises durchläuft, so bleibt die mathematische Länge des durch die beiden beweglichen Massen gebildeten Pendels unverändert, die Veränderung im Gang des Pendels, die durch die Verschiebung der einen Masse hervorgebracht wird, wird durch die der andern Masse aufgehoben. Folglich bleibt hiebei auch die mathematische Länge des physischen Pendels unverändert.

Sind die beiden beweglichen Massen ungleich, so ändert sich die Sache nur in der Art, daß an die Stelle des Kreises eine Ellipse tritt, deren Achsen durch die mathematische Länge des physischen Pendels und das Verhältnis der beiden Massen zu einander bestimmt sind. S. Seite 10.

Wenn man bei dem mathematischen Pendel A, B C, Seite 3 oder 10, die Masse M von B nach B′, oder die Masse M′ von C nach D verlegt, so bleibt die mathematische Länge des Pendels unverändert, also kann sich diese Größe durch eine solche Verlegung auch beim physischen Pendel nicht ändern.

Daß durch diesen Beweis auch der Beweis für das Reversionspendel gegeben ist, soll weiter unten noch genauer nachgewiesen werden.

Das mathematische Pendel schwingt am schnellsten, wenn eine der beiden verschiebbaren Massen mit dem mathematischen Mittelpunkt zusammenfällt. Da also eine Masse im mathematischen Mittelpunkt ihre größte beschleunigende Kraft ausübt, so muß auch ein physisches Pendel am schnellsten schwingen, wenn eine verschiebbare Masse mit dem mathematischen Mittelpunkt zusammenfällt. Die Aenderung der Lage dieses Punktes infolge der Verschiebung der Masse können wir uns durch folgende Betrachtung klar machen.

Ist OQ die mathematische Länge des Pendels und schiebt man vom Drehpunkt O aus eine Masse abwärts, so wirkt sie anfangs beschleunigend auf den Gang des Pendels, es hebt sich daher sein Schwingungspunkt und damit auch sein mathematischer Mittelpunkt. Die Masse und der mathematische Mittelpunkt gehen einander entgegen und das Pendel schwingt am schnellsten, wenn sie zusammentreffen.

Schiebt man die Masse weiter abwärts, so nimmt ihre beschleunigende Kraft ab, infolge dessen sinken nun der Schwingungspunkt und damit der mathematische Mittelpunkt. Letzterer folgt jetzt der Masse. Ist diese in Q angelangt, so ist auch der Schwingungspunkt wieder in Q, und Schwingungspunkt und mathematischer Mittelpunkt befinden sich wieder an ihrer ursprünglichen Stelle.

In etwas strengerer, algebraischen Form lassen sich unsre Sätze beweisen wie folgt:

1. Satz:

Wird ein Pendel, dessen Aufhängepunkt in der obern wagrechten Seite eines Quadrats liegt, senkrecht zu seiner Richtung verschoben und bewegen sich auf ihm 2 Massen so, daß die eine in der Diagonale des Quadrats, die andere auf einer um das Quadrat beschriebenen Ellipse sich bewegt, deren Achsen durch das Verhältnis der beiden Massen zu einander bestimmt sind, so bewegt sich sein Schwingungspunkt auf der untern Quadratseite.

Beweis:

Es seien m_1 m_2 m_3 . . die einzelnen Massen, aus denen das physische Pendel besteht, r_1 r_2 r_3 . . ihre entsprechenden Entfernungen vom Drehpunkt, ferner M und M′ zwei auf dem Pendel befindliche Massen mit den veränderlichen Abständen r und r′ vom Drehpunkt.

Die Gleichung für die mathematische Länge des Pendels erweitert sich hier zu

$$l = \frac{Mr^2 + M'r'^2 + m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \,..}{Mr + M'r' + m_1r_1 + m_2r_2 + \,..}$$

oder kürzer

$$l = \frac{Mr^2 + M'r'^2 + T}{Mr + M'r' + S} \qquad (1)$$

Setzt man hier $r = r' = 0$, so erhält man

$$l = \frac{T}{S} \qquad (2)$$

Soll nun dieser Wert von l für alle Fälle unverändert bleiben, so muß die Gleichung stattfinden

$$l = \frac{Mr^2 + M'r'^2}{Mr + M'r^1} \qquad (3)$$

denn

$$l = \frac{T}{S} \quad \text{und} \quad l = \frac{Mr^2 + M'r'^2}{Mr + M'r'}$$

geben

$$l = \frac{Mr^2 + M'r'^2 + T}{Mr + M'r' + S}$$

Die Bedingung der Gleichung (3) wird aber nach Seite 11 dadurch erfüllt, daß sich bei einer Verschiebung des Pendels senkrecht zu seiner Richtung die Massen M und M′ so bewegen, wie es in dem obigen Satz ausgesprochen ist.

2. Satz

Ein Pendel ändert seine mathematische Länge nicht, wenn man eine auf ihm befindliche Masse so auf die andere Seite des mathematischen Mittelpunkts verlegt, daß sich ihr Abstand von ihm nicht ändert.

Beweis:

Es seien $M\ m_1\ m_2 \ldots$ die einzelnen Massen, aus denen das physische Pendel besteht, die Entfernung der Masse M vom Drehpunkt sei $\frac{l}{2} + d$, die Enfernungen der andern Massen seien beziehungsweise $r_1\ r_2 \ldots$

Setzt man wieder

$$T = m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + \ldots$$

und

$$S = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots$$

so erhält man als mathematische Länge des Pendels

$$l = \frac{M\left(\frac{l}{2} + d\right)^2 + T}{M\left(\frac{l}{2} + d\right) + S}$$

Ordnet man noch l, so ergibt sich

$$M\frac{l^2}{4} + Tl = S + Md^2$$

Da hier d nur in der zweiten Potenz vorkommt, so ist der Wert von l derselbe, ob d positiv oder negativ ist, die mathematische Länge ändert sich nicht, ob nun die Entfernung der Masse vom Drehpunkt $\frac{l}{2} - d$ oder $\frac{l}{2} + d$ ist.

Anmerkung. Ist bei der Entfernung $\frac{l}{2} + d$ $d > \frac{l}{2}$, so wird bei einer Versetzung der Masse auf die andere Seite des mathematischen Mittelpunkts $\frac{l}{2} - d$ negativ, d. h. das Pendel wird in diesem Fall ein zweiarmiges.

3. Satz. Satz vom Reversionspendel.

Ein Pendel ändert seine mathematische Länge nicht, wenn man dessen Schwingungspunkt zum Drehpunkt macht.

Beweis:

Da man nach dem vorigen Satz eine beliebige, auf dem Pendel befindliche Masse auf die andere Seite des mathematischen Mittelpunkts bei unverändertem Abstand von demselben verlegen kann, so kann man dies auch mit sämtlichen Massen des Pendels zumal vornehmen. Ist nun die Entfernung einer Masse vom Drehpunkt $\frac{l}{2} \pm d$, so ist ihre Entfernung vom Schwingungspunkt

$$l - \left(\frac{l}{2} \pm d\right) = \frac{l}{2} \mp d$$

eine Aufhängung des Pendels im Schwingungspunkt ist demnach nichts andres, als eine Versetzung sämtlicher Massenteile desselben auf die andere Seite des mathematischen Mittelpunkts.

4. Satz.

Ein Pendel schwingt am schnellsten, wenn eine auf ihm verschiebbare Masse sich in seinem mathematischen Mittelpunkt befindet.

Beweis:

In der bei unsrem 2. Satz entwickelten Gleichung, wo

$$r = \frac{l}{2} + d$$

angenommen ist,

$$M\frac{l^2}{4} + Tl = S + Md^2$$

nimmt l seinen kleinsten Wert an für $d = 0$, wodurch

$$r = \frac{l}{2}.$$

Die vorstehenden Sätze können dazu dienen, die mathematische Länge eines physischen Pendels durch den Versuch zu bestimmen.

1. Verfahren.

Befindet sich auf dem Pendel eine verschiebbare Masse, so läßt sich seine mathematische Länge in Bezug auf die jeweilige Lage dieser Masse dadurch bestimmen, daß man zuerst durch Schwingenlassen des Pendels seine Schwingungszahl bestimmt und dann die Masse auf einen zweiten Punkt verschiebt, für den die gleiche Schwingungszahl eintritt.

Die Summe der Entfernungen der Masse vom Drehpunkt in ihren beiden Lagen mit gleicher Schwingungszahl ist die gesuchte Länge. Die Entfernung vom Drehpunkt einer über ihm liegenden Masse ist hiebei negativ zu nehmen.

Da die Masse durch ihre Verschiebung immer auf die andere Seite des mathematischen Mittelpunkts zu bringen ist, so hat die Verschiebung mit einer Annäherung an den Mittelpunkt zu beginnen, ist also nach der Richtung auszuführen, in welcher zunächst eine Beschleunigung der Pendelschwingungen erfolgt.

Tritt bei einer Verschiebung aufwärts wie abwärts immer nur eine Verzögerung ein, so befindet sich die Masse im mathematischen Mittelpunkt, in diesem Fall ist daher die mathematische Länge des Pendels die doppelte Entfernung der Masse vom Drehpunkt.

Soll nach diesem Verfahren die mathematische Länge eines Pendels bestimmt werden, auf welchem sich anfangs keine verschiebbare Masse befindet, so kann man zuerst durch Schwingenlassen des Pendels seine Schwingungszahl feststellen, hierauf unter dem Drehpunkt eine bewegliche Masse anbringen und diese soweit abwärts verschieben, bis die vorige Schwingungszahl wieder eintritt. In diesem Fall ist die Entfernung der Masse vom Drehpunkt die gesuchte Länge.

2. Verfahren.

Nachdem man durch Schwingenlassen des Pendels seine Schwingungszahl bestimmt hat, sucht man für das umgekehrte Pendel einen Drehpunkt, der die gleiche Schwingungszahl gibt. Die Entfernung der beiden Drehpunkte von einander ist die mathematische Länge des Pendels. (Reversionspendel).

Das erste Verfahren setzt eine verschiebbare Masse voraus, das zweite einen verschiebbaren Drehpunkt.

Daß bei dem einen wie bei dem andern Verfahren die Genauigkeit des Ergebnisses durch begleitende Nebenumstände, Luftwiderstand und Reibung, mehr oder weniger beeinträchtigt wird, bedarf wohl keiner besonderen Betonung.