Der Anfangsunterricht in der Arithmetik bewegt sich heute auf unsren höheren Schulen in zwei grundverschiedenen Bahnen.

Ein Teil der mit der Schulung der Jugend in diesem Fache Betrauten lehnt eine ihrem Charakter entsprechende allgemeine Begründung der arithmetischen Gesetze in der Überzeugung ab, daſs eine solche die Fassungskraft der Schüler übersteige, und begnügt sich damit, den im Rechenunterricht oder weiterhin noch an bestimmten Zahlen gewonnenen Erkenntnissen ohne weiteres Allgemeingiltigkeit zuzuschreiben. Es wird auf diesem für beide Teile zunächst sehr gangbaren Wege ein breiter Raum für die Lösung von Aufgaben frei, und das Können macht auſserordentlich rasche Fortschritte. Bezeichnend ist es indessen, daſs die Vertreter der in Frage stehenden Richtung die Güte der abfallenden Früchte selbst nicht allzuhoch anzuschlagen pflegen und der so betriebenen Arithmetik eine ebenbürtige Stellung neben der Geometrie nicht einzuräumen vermögen. Es macht sich hier eben das Gefühl geltend, daſs die jener Wissenschaft innewohnende formal bildende Kraft nur in höchst unvollkommener Weise zur Geltung kommt. In der That ist nicht einzusehen, woher bei der angegebenen Lehrweise die Einsicht in die zur Anwendung gelangenden Gesetze und ihren organischen Zusammenhang kommen soll. Wenn schon der Philologe im Betriebe seiner Sprache ungern auf die grammatikalische Unterlage verzichten möchte, so erscheint es in einer Wissenschaft von einem so rein logischen Aufbau, wie ihn die Arithmetik nachweislich besitzt, vollends unerfindlich, daſs sie ohne das allgemeine Wesen erfassende Begründung mit einem im Verhältnis zur aufgewandten Zeit stehenden geistigen Nutzen betrieben werden könne.

Das in den letzten Jahrzehnten zu Tage getretene ernste und unablässige Streben, dem mathematischen Unterricht in allen Teilen die Gestaltung zu geben, welche ihn befähigt, seiner obersten Aufgabe gerecht zu werden, fortgesetzt die Denkkraft zu wecken und zu üben, mufste so notwendig besonders auf dem Gebiete der Arithmetik ein Abschwenken vom alten Kurse zur Folge haben. Es drängte die dickleibigen Aufgabensammlungen, welche in ehemaligen Tagen die Herrschaft besafsen, mehr und mehr in den Hintergrund und liefs Werke entstehen, die sich die Aufgabe stellen, theoretische Begründung und praktische Übung in innige Verbindung zu setzen, um die Anwendung von inhaltlich erfafsten Gesetzen und somit eine wirklich geistige Zucht, welche sich auch auf die erstreckt, denen von Haus aus der mathematische Blick abgeht, zu gewährleisten.

Allgemein tritt hier indessen die Eigentümlichkeit hervor, dafs das Fundament der ganzen Wissenschaft, die vier Spezies, namentlich für algebraische Zahlen, eine merkwürdig kurze Behandlung erfährt, und dafs Gründlichkeit erst allmählich im Fortschreiten eintritt, eine Erscheinung, die ihresgleichen in geometrischen Lehrbüchern gewifs nicht hat. Vor allem aber findet der Zahlbegriff eine Erklärung, die vor einer strengen Prüfung nicht stichhaltig ist und die weiterhin Widersprüche und Irrtümer im Gefolge hat. Diese Erklärung war bis vor kurzem die allgemein übliche, was seine Ursache in der Sprödigkeit hatte, welche die Zahlen den Versuchen einer Begriffsanalyse entgegensetzten. Erst neuerdings ist es gelungen, den Widerstand zu beseitigen und den Zahlbegriff, und damit auch die Rechengesetze, mehr wissenschaftlich zu begründen. Aus dieser Thatsache erwächst meines Erachtens die Pflicht zu prüfen, wieweit die erzielten Resultate und die daraus zu ziehenden Folgerungen im Schulunterricht verdienen berücksichtigt zu werden oder geradezu auf Berücksichtigung Anspruch erheben können. Letzteres wird der Fall sein, sobald es sich um Berichtigung von Irrtümern handelt, wenn die Abstraktion, welche die Hauptschwierigkeit in der Erfassung arithmetischer Lehren bildet, hierbei nicht das Fassungsvermögen der Lernenden übersteigt.

Diese Erwägungen sollen die Veröffentlichung der nachstehenden Untersuchungen rechtfertigen, die, soweit nicht Quellen zitiert sind, auf Selbständigkeit Anspruch machen. Dieselben wollen darthun, dafs der alte Zahlbegriff wissenschaftlich haltlos ist, und denselben durch einen andern ersetzen, sie wollen, auf diesem fußend, eine Begründung liefern, wo eine solche vermißt wird, dieselbe verschärfen, wo sie lückenhaft erscheint. Allbekanntes ist dagegen thunlichst vermieden, und liegen den folgenden Zeilen die Absichten Frickscher Lehrproben durchaus ferne. Vielleicht findet man in denselben einiges, was das Bedürfnis für einen wissenschaftlichern Ausbau der Schularithmetik steigert oder bei einem solchen Verwertung finden kann.

In allen mir bekannten Lehrbüchern der Arithmetik, mögen sie für den Schulunterricht bestimmt sein, oder sich höhere Ziele stecken, wird als wesentliche Grundlage für die Gewinnung der Zahlen die Verknüpfung von Gegenständen hingestellt, die nach den einen als gleich, nach den andern als gleichartig aufzufassen sind. Bald sind es die angeblich so entstehenden Vorstellungen, die sich nach Menge, Häufigkeit und dergl. unterscheiden sollen, bald die dafür eingeführten Zeichen, welche als Zahlen bezeichnet werden. Gegen die letzte Erklärung kann sofort eingewendet werden, daß bei der Unendlichkeit der Zahlenreihe von Haus aus zur allgemeinen Entwicklung der Zahlengesetze auch unendlich viele Zeichen vorhanden sein müßten. Dieser Konsequenz scheinen sich auch verschiedene Autoren nicht haben entziehen zu können, indem sie die allgemeinen Zahlzeichen als Vertreter dekadischer Zahlzeichen hinstellen. Nun setzt aber doch die Bildung des dekadischen Zahlensystems bereits die allgemeinen Gesetze der Addition voraus, während jene Auffassung die Sache umkehrt. Zudem wird durch dieselbe das Formale in der Verbindung allgemeiner Zahlen ungebührlich in den Vordergrund gedrängt, und tritt ein Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik in Parallele mit einem Kochbuch, das nur Rezepte für das Rechnen mit dekadischen Zahlen enthält.

Diese Arithmetik der Zeichen zieht aber noch eine andere Folge nach sich, die nur geeignet ist, die allerbedenklichste Verwirrung anzurichten. Sie führt nämlich dazu, zusammengesetzte Zahlen als etwas Unfertiges aufzufassen, wofür die noch immer verbreitete Erklärung ein sprechender Beweis ist: „Unter der Summe zweier

Zahlen a und b versteht man die Zahl c, die soviel Einheiten enthält als a und b zusammen. Man drückt dies durch die Gleichung aus $a + b = c$ und nennt $a + b$ die Summenform und c die Summe.“ Man scheint darnach in $a + b$ etwas Inhaltleeres zu sehen, und wie man die Gleichheit deuten und den gegenseitigen Ersatz von $a + b$ und c rechtfertigen will, ist nicht zu ergründen.

Forscht man dem Grunde dafür nach, daſs die Zahlzeichen so zur Hauptsache gemacht werden, so läſst sich dieser unschwer entdecken; er ist nämlich darin zu finden, daſs die Vorstellungen, deren Träger jene Zeichen sein sollen, bei einer etwas genaueren Betrachtung unter den Händen zerrinnen, und der Versuch, auf dieselben bei Deduktionen zurückzugreifen, vollkommen miſslingt. Man gehe doch ernstlich daran, sich Dinge nur rücksichtlich der Eigenschaften vorzustellen, die sie gemeinsam haben, und prüfe die Gesamtvorstellung. Ist es nicht immer wieder ein einziges Ding, in das sie zusammenflieſsen? Darum kommt auch Reichel*) nicht herum, indem er sagt: „Es darf nur Gleichartiges an den Gegenständen zu unsrer Auffassung gebracht werden, und die Thatsache des Unterschiedenseins ist zwar anzuerkennen, im übrigen darf jedoch auf diese Unterschiede nicht eingegangen werden. Z. B. die Worte „ein Mann und ein Knabe“ bezeichnen noch keine Vorstellung in diesem Sinn; zu einer solchen gehen wir erst über, wenn wir die Art der Unterschiede vernachlässigen und sagen: „ein Mensch und ein Mensch“. Das Widersinnige in dieser Erklärung besteht in der Zumutung, das nicht zu sehen, was man sieht, oder das aus der Vorstellung zu streichen, was vorher als ein wesentlicher Bestandteil hingestellt worden ist. Auch Schröder**) stützt sich auf Betrachtungen, die im wesentlichen auf dasselbe hinauslaufen, wenn er erklärt: „Die Anforderung, Dinge zu zählen, kann vernünftiger Weise nur gestellt werden, wo solche Gegenstände vorliegen, welche deutlich von einander unterscheidbar, zum Beispiel räumlich oder

---

*) Die Grundlagen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe. Teil I, S. 5.

**) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Erster Band, S. 3, ff.

zeitlich von einander getrennt oder gegeneinander abgegrenzt erscheinen", und weiterhin: „Sobald man Dinge zählt, werden diese als gleich angesehen. Jedes der zu zählenden Dinge wird eine Einheit genannt. Von dem Begriff der Einheit können wir uns erheben zu dem Begriff der Menge, indem wir die Vorstellungen von mehreren Einheiten in Gedanken verbinden......"

Aber selbst zugestanden, daſs auf die angegebene Weise sich Vorstellungen bilden lieſsen, die den Charakter des Unterschiedenseins tragen, so könnten so doch nur verhältnismäſsig wenige und kleine Zahlen erklärt werden. Denn wer vermag über eine gewisse, recht niedrige Grenze hinaus Gegenstände in die Anschauung aufzunehmen und ihre Unterschiede und das Gemeinsame gleichzeitig festzuhalten? Und wie soll man gar imstande sein, die in einer allgemeinen Zahl enthaltene unendliche Menge von Einzelvorstellungen beisammen zu haben?

Es nötigen diese Ergebnisse zu dem Schlusse, daſs, soweit überhaupt die Anschauung zur Zahlbildung benutzt werden kann, es gerade die Verschiedenheiten der betrachteten Gegenstände sind, die einen nicht aus ihr herauszuhebenden Bestandteil ausmachen, während die Gleichheit auf ein anderes Gebiet übertragen wird. Das fühlt auch Schröder*) und erklärt: „Es muſs nunmehr noch die Frage ventiliert werden, was unter der sogenannten Häufigkeit (Vielheit, Anzahl) eines Dinges zu verstehen sei, soweit wenigstens, als dieser Begriff nur fähig ist, erklärt zu werden. In dieser Beziehung ist zunächst hervorzuheben, daſs, wenn überhaupt von der Häufigkeit eines Dinges soll gesprochen werden können, der Name dieses Dinges stets ein Gattungsname, ein allgemeines Begriffswort (notitio communis) sein muſs. Jener Gattungsname oder Begriff wird die Benennung der auf die angegebene Weise gebildeten Zahl genannt und macht das Wesen ihrer Einheit aus. Die Benennung einer Zahl ist also stets das Ergebnis einer Abstraktion; sie ist ein „allgemeiner Begriff, der verschiedene Bestimmungsweisen zuläſst" (Riemann), und zwar ist dieser Begriff übergeordnet den sämtlichen

---

*) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, S. 6.

zu zählenden Dingen, von welchen er die ihnen ausschliefslich gemeinsamen Merkmale in sich vereinigt und von den übrigen Merkmalen diejenigen als unwesentlich umschliefst, die zur gegenseitigen Unterscheidung oder Individualisierung derselben dienen." Dies möchte ich als eine Bestätigung für das auffassen, was zunächst im folgenden dargelegt werden soll, dafs nämlich der Prozefs der Zahlbildung ein durchaus logischer ist, und dafs insbesondere die Anzahl sich aus der kollektiven Eigenschaft des Begriffs ergiebt, dem die Gegenstände untergeordnet sind, wofür die Anschauung nie einen Ersatz bieten kann.

I. Absolute Zahlen.

Dafs das arithmetische Lehrgebäude auf rein logischer Grundlage und ohne jede Zuhilfenahme der Anschauung aufgebaut werden kann, ist für den Bereich der absoluten ganzen Zahlen von Dedekind in seiner Schrift: „Was sind und was sollen die Zahlen?" nachgewiesen worden. Die Resultate der dort niedergelegten, in ihrer Bedeutung, wie mir scheint, noch viel zu wenig gewürdigten Untersuchungen sind, soweit sie im Schulunterrichte meines Erachtens für axiomatisch gelten müssen und können, hier vorausgesetzt.

Die von Dedekind in § 6 der erwähnten Schrift gegebene Definition der Reihe der natürlichen Zahlen oder Ordinalzahlen ist hier bis auf zwei Punkte acceptiert. Einmal erscheint es mir notwendig, die dort völlig allgemein gelassene Beziehung φ, durch welche die die Zahlen darstellenden Gegenstände einander zugeordnet sind, dahin zu beschränken, dafs die Rolle derselben dem Begriffe zugewiesen wird, unter welchem die Gegenstände zu denken sind. Sodann aber ist ferner die sofortige Aufnahme der Null in die Zahlenreihe eine unabweisliche Folge. Wie das gemeint sei, soll unter Benutzung geometrischer Begriffe erläutert werden.

Versteht man unter zwei parallelen Linien zwei solche, die sich bei unbegrenzter Verlängerung nicht schneiden, und die so durch Punktbewegung entstanden gedacht werden, dafs, wenn man die beiden Linien durch zwei andere ebensolche, die eine in a und b, die andere in c und d schneidet, der erzeugende Punkt sich in der einen von a nach b, in der andern von c nach d bewegt hat, und denkt man sich eine begrenzte Gerade $\alpha\beta$, die ihren Ursprung aus α nimmt, so schreibt man jeder dazu parallelen die Richtung der $\alpha\beta$ und jeder kongruenten die Länge derselben zu. Man erhält so den Begriff der „Richtung und Länge von $\alpha\beta$“ als die Gesamtheit der gemeinschaftlichen Merkmale aller zu $\alpha\beta$ parallelen und ihr kongruenten Geraden. Denkt man sich eine Gerade a b, welche parallel und kongruent $\alpha\beta$ ist, so fällt sie unter jenen Begriff, ohne daſs man indessen nötig hat, sie darunter zu denken. Geschieht dies aber, so wird a b der beiden Merkmale des Parallelismus und der Kongruenz entkleidet, sie werden abstrahiert und dem Begriffe überwiesen. Der Gegenstand a b wird nunmehr nur noch durch den Punkt b vertreten, der durch den Begriff auf den Punkt a bezogen, ihm zugeordnet, zugefügt oder sein Abbild ist, und unter diesem Gesichtspunkt verliert a b den Charakter einer Anschauung. Ist b c eine weitere solche Gerade, so wird sie bei gleicher Auffassung durch den durch den Begriff auf b bezogenen Punkt c ersetzt u. s. w. Die Punkte a, b, c ..... bezw. die Gegenstände, welche sie vertreten, heiſsen natürliche Zahlen; jeder heiſst auf den folgend, welchem er durch deu Begriff zugeordnet ist, und a stellt die Null dar, wenn diese besagt, daſs unter den Begriff nichts fällt. Aus der Annahme der unbegrenzten Fügung entsteht nun die vollständige Reihe der durch den Begriff geordneten natürlichen Zahlen, die in der Ausdrucksweise Dedekinds ein einfach unendliches System bildet. Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, daſs die Folge rein begrifflicher und nicht räumlicher Natur ist.

Sind die unter den Begriff gedachten Strecken a b, c d .... nicht zugeordnet, so besteht die Zuordnung darin, daſs man c mit b zusammenfallen läſst, wobei durchaus nichts im Wege steht a b, c d .... unverändert in der Anschauung zu erhalten. In der für sich betrachteten c d stellt c wieder die Null dar.

Der Begriff selber soll die Einheit genannt werden; er allein verdient diesen Namen, der sich indessen erst später rechtfertigen wird. Die unter die Einheit fallenden Gegenstände sollen als Einer bezeichnet werden. Sofern die Merkmale der Einheit als „Länge“

und „Richtung“ auf $\alpha\beta$ übertragen sind, kann man sie die Einheitsstrecke nennen. Die auf die Zahl a folgende werde durch a′ bezeichnet. Durch a = b aber soll ausgedrückt werden, dafs a und b dieselbe Zahl bedeuten.

Diese Erklärungen lassen sich nun ohne weiteres auf andere Gegenstände übertragen, und man kann allgemein sagen: Werden Gegenstände unter einen Begriff gedacht, so geht jeder in einen durch den Begriff auf 0 bezogenen Punkt über, wo 0 die oben angegebene Bedeutung hat. Durch Fügung der so gedachten Gegenstände, die darin besteht, dafs man in den einen Gegenstand vertretenden Punkt den Nullpunkt eines weiteren übergehen läfst und so fort, erhält man Ordinalzahlen. Von den den Gegenständen sonst zukommenden eigentümlichen Merkmalen ist dabei abstrahiert, d. h. dieselben werden in der Anschauung belassen, wenn sie sich überhaupt darin befinden.

Hat man eine durch die Einheit φ geordnete unendliche Zahlenreihe, φ-Reihe, und eine solche, in der die Zuordnung durch die Einheit ϑ bewirkt wird, so lassen sich die Zahlen der ϑ-Reihe denen der φ-Reihe der Reihe nach zuordnen, d. h. man kann jene diesen so durch eine Beziehung ψ entsprechen lassen, dafs durch dieselbe die Null der φ-Reihe in die Null der ϑ-Reihe übergeht und dafs, wenn ν irgend eine Zahl der ϑ-Reihe bezeichnet und $\nu = \psi$ (n) ist, $\nu' = \psi$ (n′) ist, und die umgekehrte Beziehung $\overline{\psi}$ bildet entsprechend die zweite Reihe in der ersten ab. Gleiches gilt von jeder andern unendlichen Zahlenreihe. Bezeichnet man die n zugeordnete Zahl jeder Zahlenreihe als die n-te, so ist n selbst die n-te Zahl der φ-Reihe. Wird n in dieser Hinsicht gebraucht, also als Vertreter aller n zugeordneten Zahlen, so gelten alle für Zahlen der φ-Reihe bewiesenen Sätze auch für die entsprechenden jeder beliebigen andern; man hat nur nötig, die Beziehung φ durch die für die betreffende Reihe charakteristische zu ersetzen. Die φ-Reihe soll als die Grundreihe oder als die Zahlenreihe schlechtweg bezeichnet werden. Sind die Zahlen irgend zweier unendlichen Reihen der Reihe nach denen der φ-Reihe zugeordnet, so sind die Zahlen der beiden Reihen selbst einander der Reihe nach zugeordnet.

Man kann mithin jede andere Reihe zur Grundreihe machen, ihr die Zahlenbeziehung entlehnt und in ihr die Zahlengesetze entwickelt denken.*)

Der betretene Weg scheint mir der einzige zu sein, auf dem die Null einen objektiven Sinn erhält. Die Negation des gegenständlichen Seins nämlich kommt bei Licht betrachtet immer einer contradictio in adjecto gleich. Zudem vermittelt die Null, wie sich später zeigen wird, bei der hier gegebenen Definition einen stetigen Übergang aus der positiven in die negative Zahlenreihe.

Addition der natürlichen Zahlen.

Da, wie oben erörtert worden ist, wir von der a, wenn sie als Kardinalzahl in der gewöhnlichen Weise definiert wird, keine Vorstellung haben, so ist auch $a + b$ als die Zahl, die so viele Einer enthält als a und b zusammen, unfaſsbar, und somit schweben die beiden Träger der sämtlichen Rechengesetze für absolute Zahlen, die Gleichungen $a + b = b + a$ und $a + (b + c) = (a + b) + c$, vollständig in der Luft. Damit ergiebt sich die Unzulässigkeit der sogenannten independenten Behandlung der Addition. Auf Wissenschaftlichkeit und überzeugende Kraft kann nur die rekurrente Definition der Addition Anspruch machen und dieselbe Form des Beweises der Gesetze derselben. Damit tritt der Schluſs von n auf $n + 1$, wie diese Beweisart gewöhnlich genannt wird, dessen logische Grundlage Dedekind gleichfalls dargethan hat, in sein Recht.

Um von Haus aus den prinzipiellen Unterschied klarzulegen, der zwischen zwei identischen Operationen und ihren Ergebnissen vorhanden ist, je nachdem den Zahlen ein psychologischer oder ein logischer Charakter beigemessen wird, soll der rekurrente Additionsprozeſs unter beiden Gesichtspunkten einem Vergleich unterzogen werden.

Helmholtz**) definiert, indem er das Zählen als ein Verfahren bezeichnet, welches darauf beruht, daſs wir uns imstande befinden,

*) Vgl. Dedekind § 10 und § 3, 33 — 35.

**) „Zählen und Messen". Abhandlung in der E. Zeller gewidmeten Festschrift.

die Reihenfolge, in der Bewufstseinsakte nacheinander eingetreten sind, im Gedächtnis zu behalten, und indem er die auf a folgende Zahl mit (a + 1) bezeichnet, folgendermafsen: „Ich bezeichne als (a + b) diejenige Zahl der Hauptreihe, auf welche ich stofse, wenn ich bei (a + 1) 1, bei [(a + 1) + 1] 2 u. s. w. zähle, bis ich b gezählt habe. Die Bezeichnung dieses Verfahrens läfst sich zusammenfassen in folgende Gleichung (H. Grafsmanns Axiom der Addition):

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1).“$$

Drei Punkte sind in der oben ausgesprochenen Absicht aus dem Vorstehenden herauszuheben: einmal, dafs die Erreichung der (a + b) eine subjektive Wanderung bedingt, sodann, dafs die (a + b) direkt aus der vorbergehenden Zahl entspringt, da auch (a + 1) nach der Erklärung diesen Ursprung hat, und schliefslich, dafs die Klammern in (a + 1), [(a + 1) + 1] u. s. w. als etwas durchaus Überflüssiges erscheinen, weil ihnen eine Bedeutung nicht beigelegt ist.

Dedekind weist dagegen nach, dafs es in der durch die Beziehung φ geordneten Reihe der natürlichen Zahlen eine eindeutige Abbildung ψ ergiebt, welche den Gleichungen $\psi\,(1) = a'$, wo a die auf a folgende Zahl bedeutet, und $\psi\,(b') = [\psi\,(b)]'$ genügt. Wird ψ (b) durch a + b bezeichnet und die Summe von a und b genannt, so ist dieselbe durch die Gleichungen bestimmt

1) $a + 1 = a'$ und

2) $a + b' = (a + b)'$, woraus wiederum folgt

$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$

Die Gleichung 1) fafst zunächst, indem a' mit a + 1 bezeichnet wird, die zwischen 1 und a' liegenden Einzelabbildungen in eine einzige zusammen, und für diese Zusammenfassung versagt eben die Anschauung ihren Dienst. Die Gleichung 2) führt sodann die Abbildung jeder Zahl auf die der vorhergehenden zurück. Hier haben wir es also direkt mit einer Funktion des zweiten Summanden zu thun, dessen Zerlegung nicht erforderlich ist. Die Klammer aber bedeutet jedesmal, dafs die davon umschlossene Zahl als ursprüngliche der φ-Reihe gilt oder, in der gewöhnlichen Beziehungsweise, als eine einfache.

Bei der hier vorausgesetzten Natur der Zahlen ist ferner $a + b$ nicht als eine Aufgabe zu fassen des Inhalts: Man soll b zu a addieren. Vielmehr hat man sich auf den Standpunkt zu stellen, den bereits Martin Ohm*) vertreten hat, indem er in Bezug auf das Ziffernrechnen sagt: „Was man indessen dort addieren und subtrahieren nennt, ist in der That kein Addieren und Subtrahieren mehr, sondern nur ein Umformen der durch das wirkliche Addieren und das wirkliche Subtrahieren erhaltenen Formen $24 + 35$ oder $35 - 24$ in die neuen Formen 59 und 11" und weiterhin: „Objektiv angesehen besteht also das Addieren und das Subtrahieren in nichts anderm, als in dem Hinschreiben dieser Formen $a + b$ und $a - b$." Das sogenannte angezeigte Addieren ist also ein wirkliches Addieren, und, was man gewöhnlich das Addieren von b zu a nennt, stellt die Ausführung der Addition in $a + b$ oder die Ausrechnung dieses Ausdrucks dar. Dieselbe würde also in der Ersetzung von $a + b$ durch c bestehen, wenn $a + b = c$ vorausgesetzt wird; angezeigt aber wird sie durch $(a + b)$. $a + b$, $(a + b)$ und c bezeichnen also dasselbe, nur unter verschiedener Auffassung der Entstehung, aber nicht in verschiedenen Phasen. c kann der Wert von $a + b$ genannt werden. Man ist nunmehr auch in der Lage $a + b + c$ und $(a + b) + c$ als drei- und zweiteilige Summen zu unterscheiden. Die Berechnung von $4 + 3 + 2$ liefert sofort 9, diejenige von $(4 + 3) + 2$ erst $7 + 2$ und dann 9.

Nimmt man nun die 0 zum Ausgangspunkte der Zahlenreihe, so wird die Addition erklärt durch

3) $a + 0 = 0$ und

4) $a + b' = (a + b)'$,

---

*) Der Geist der mathematischen Analysis und ihr Verhältnis zur Schule.

woraus für $b = 0$ sofort folgt, wenn man die auf 0 folgende Zahl mit 1 bezeichnet,

$$a + 1 = (a + 0)' = a',$$

womit man aus 4) wieder folgern kann

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Die in $a + 0$ enthaltene Abbildung würde, wenn als Einheit die Länge und Richtung einer Geraden genommen wird, durch die Länge und Richtung der Strecke zwischen 0 und a dargestellt werden.

Es mögen nun nach Dedekind die Beweise für die beiden Grundgleichungen der Addition folgen. Ich sehe nicht ein, warum man dieselben den Schülern vorenthalten soll, wenn man es in der Geometrie für nötig hält, Dinge zu beweisen, deren Richtigkeit ohnehin niemand bezweifeln würde. An die Stelle von 1 habe ich 0 zu setzen.

5) $a + b' = a' + b$.

Beweis. Die Gleichung ist richtig für $b = 0$, da $a + 0' = a + 1 = a'$ und $a' + 0 = a'$ ist.

Ist $a + b' = a' + b$, so ist auch $(a + b')' = (a' + b)'$, also nach 4) auch $a + (b')' = a' + b'$. Die Gleichung gilt mithin auch für die auf b folgende Zahl b'.

6) $(a + b)' = a' + b$.

Der Beweis folgt aus 4) und 5).

7) $a + 0 = 0 + a$.

Beweis. Die Gleichung ist richtig für $a = 0$. Ist ferner $a + 0 = 0 + a$, so ist auch $(a + 0)' = (0 + a)'$, folglich $a' + 0 = 0 + a'$ nach 6) und 4).

8) $a + b = b + a$.

Beweis. Die Gleichung ist wahr für $b = 0$ nach 7). Ist $a + b = b + a$, so ist auch $(a + b)' = (b + a)'$, mithin $a + b' = b' + a$ nach 4) und 6).

9) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Beweis. Die Gleichung ist richtig für $c = 0$ nach 3). Ist $a + (b + c) = (a + b) + c$, so ist auch $\big(a + (b + c)\big)' = \big((a + b) + c\big)'$, folglich $a + (b + c)' = (a + b) + c'$, $a + (b + c') = (a + b) + c'$ nach 4).

Mittels der Gleichungen 8) und 9) läſst sich nun das allgemeine Additionsgesetz ableiten: Zu einer mehrteiligen Summe wird eine zweite addiert, indem man jeden Summanden der zweiten zu je einem Summanden der ersten addiert.

Die Kardinalzahlen und die Addition der benannten Zahlen.

Setzt man in 4) $a = 0$ und $b = 0$, so erhält man $0 + 1 = (0 + 0)' = 1$. Sofern die 1 in $0 + 1$ auf 1 oder die erste Zahl führt, kann sie als erste 1, abgekürzt $\underset{(1)}{1}$, bezeichnet werden. Setzt man in 4) ferner $a = 0$ und $b = 1$, so folgt $0 + 2 = (0 + \underset{(1)}{1})' = 0 + \underset{(1)}{1} + 1$ oder, indem man wieder den Gesichtspunkt geltend macht, der zur Bezeichnung $\underset{(1)}{1}$ geführt hat, und berücksichtigt, daſs $0 + 2 = 2 + 0 = 2$ ist, $0 + 2 = 0 + \underset{(1)}{1} + \underset{(2)}{1}$. Allgemein ist sodann

$$a = 0 + a = 0 + \underset{(1)}{1} + \underset{(2)}{1} + \ldots\ldots + \underset{(a)}{1}.$$

Man kann in dieser Hinsicht sagen: Jede Zahl läſst sich als eine Summe von Einsen darstellen oder kann aus Einsen zusammengesetzt gedacht werden, die auch die Einsen der Zahl genannt werden. Daſs es verschiedene Einsen gebe, wenn auch der Bequemlichkeit des Ausdrucks halber die Mehrzahl gebraucht wird, soll damit durchaus nicht anerkannt werden; vielmehr bezeichnet der Ausdruck

„verschiedene Einsen“ nur die oben angegebene Beziehung einer und derselben Eins zu verschiedenen Zahlen. $\underset{(a')}{1}$ kann die auf $\underset{(a)}{1}$ folgende 1 genannt werden, sofern diese im Ausdruck $0 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots$ auf a, jene auf die folgende Zahl a′ führt. Unter demselben Gesichtspunkt kann man den Übergang von einer Zahl zur folgenden auch einen Fortschritt um 1 nennen und sagen: Man erhält $a + b$, indem man von a aus in der Zahlenreihe um b Einsen fortschreitet. Doch ist dies nicht mehr die ursprüngliche Bildung der Summe.

Denkt man sich nun für a $0 + a$ gesetzt, diese in $0 + 1 + 1 + \ldots\ldots + \underset{(a)}{1}$ aufgelöst und jeder der Zahlen von 1 bis a einen aufserhalb der Reihe befindlichen Einer zugeordnet, so sind diese Einer auch den Einsen zugeordnet oder stehen in Beziehung dazu und werden folglich, wenn man sie damit identifiziert, durch den einmal gedachten Begriff, unter den die 1 fällt, gesammelt oder vereinigt, womit sich der Name Einheit erst voll rechtfertigt. Man sagt, man habe a Einer und nennt a deren Anzahl; in dieser Hinsicht heifst a Kardinalzahl und drückt stets eine Eigenschaft des sammelndeu Begriffs aus. Die Einheit soll in dieser Bedeutung mit E, jeder Einer mit e bezeichnet werden; dafs a Einer vorliegen, soll durch a e oder a E ausgedrückt werden. Man nennt a e bezw. a E benannte Zahl oder Zahlgröfse, e oder E die Benennung und sagt, die Einer seien gezählt. Dafs $a\,e + b\,e = (a + b)\,e$, wenn man unter $a\,e + b\,e$ die Zahlgröfse versteht, die a Einer und b Einer enthält, welche sämtlich verschieden sind, folgt aus der Gleichung $(0 + a) + (0 + b) = 0 + (a + b)$, sofern dieselbe die Einsen der a und der b in die der $(a + b)$ verwandelt, also die Möglichkeit ausdrückt, die in $a\,e + b\,e$ enthaltenen Einer den Einsen der $(a + b)$ zuzuordnen. Nach dem, was über die Zuordnung der Ordinalzahlreihen gesagt worden ist, kann man die Zählung von Dingen, die unter eine andere Einheit fallen, auch in der Grundreihe vornehmen.

Die drei übrigen Spezies für die absoluten Zahlen.

Hinsichtlich derselben kann ich mich kurz fassen, da es mir nicht erforderlich und ratsam erscheint, von der gewohnten Behandlungsweise im grofsen und ganzen abzugehen.

Sind a und b zwei Zahlen der Zahlenreihe, und geht b der a voraus, ist kleiner oder niedriger wie a, so giebt es stets eine und nur eine Zahl, zu welcher b addiert a ergiebt. Die so gedachte Zahl ist die Differenz von a und b; sie wird in dieser Beziehung durch $a - b$ bezeichnet, und ihre Bildung wird die Subtraktion der b von a genannt. Als ursprüngliche Zahl der Zahlenreihe gedacht wird sie mit $(a - b)$ angezeigt. Es ist somit $a - b$ definiert durch $a - b + b = (a - b) + b = a$. Dafs man $a - b$ auch erhält, indem man von a aus in der Zahlenreihe um b Einsen rückwärts schreitet, sowie dafs $a e - b e$, a Einer vermindert um b Einer, gleich $(a - b) e$, folgt leicht aus dem Früheren.

Die Beweise der Gesetze, welche sich auf die Verbindung der Addition und Subtraktion beziehen, können bei einiger Gewissenhaftigkeit jedenfalls nicht, wie das so häufig geschieht, der Anschauung entnommen werden, sondern sind auf Grund der Definition der Subtraktion und der Additionsgesetze zu führen. Darüber, ob es erspriefslich ist, die Regeln für die Addition und Subtraktion von Aggregaten zunächst unter Beibehaltung des Charakters dieser zu entwickeln, können die Meinungen auseinander gehen. Ich halte es wegen der dadurch zu erzielenden Vereinfachung der Beweisführung und der Regeln selbst für vorteilhaft, hier die beiden ersten Spezies für algebraische Zahlen zu erledigen und die Aggregate sofort den algebraischen Summen zu subsumieren; einmal mufs es doch geschehen.

Das Produkt von a und b kann, glaube ich, nach wie vor durch $b + b + \ldots\ldots + \underset{(a)}{b}$ definiert werden, nachdem die Bedeutung von $1 + 1 + \ldots . + \underset{(a)}{1}$ festgestellt worden ist, und die Multiplikationssätze können unter Zurückgehen auf die Additionsgesetze bewiesen werden.

Der Quotient von a und b wird als die Zahl gedacht, welche mit b multipliziert a ergiebt. Derselbe ist scharf vom Bruche $\frac{a}{b}$

zu unterscheiden, wenn nicht der Ohmsche Ausspruch gelten soll: „Form verloren, alles verloren.“ Dafs man $\frac{a}{b}$ nicht in der gewöhnlichen Weise erklären kann, ist klar, da weder die Einheit noch die Eins teilbar sind. Seine Entstehung hat man sich folgendermafsen zu denken: Ordnet man der 0 der Grundreihe die 0 einer andern Zahlenreihe zu, der 1 die b der zweiten Reihe, der 2 die 2 b u. s. w., so bezeichnet man die angeführten Zahlen der zweiten Reihe mit $\frac{0}{b}, \frac{b}{b}, \frac{2\,b}{b}$ u. s. w. und die a te mit $\frac{a}{b}$. Die Zuordnung wird durch das Gleichheitszeichen ausgedrückt, so dafs $\frac{0}{b} = 0$, $\frac{b}{b} = 1$, $\frac{2\,b}{b} = 2$ u. s. w. ist. Die neue Zahlenreihe heifst die der b tel. Die Erklärungen der 4 Spezies lassen sich nun ohne weiteres auf die neue Reihe übertragen und damit auch die daraus gewonnenen Gesetze. Insonderheit kann man für $\frac{a}{b}$ setzen $0 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots\ldots + \underset{(a)}{\frac{1}{b}}$, wo der Index die früher angegebene Bedeutung hat. Dafs $a : b = \frac{a}{b}$, ist besonders zu beweisen, und die Multiplikation mit einem Bruche ist durch eine Definition einzuführen.

Ist nun die Einheit der zweiten Reihe E_1 und $b\,E_1 = 1\,E$, so kann man sich jeden Einer derselben aus einem Einer der Grundreihe durch Teilung in b gleiche Teile entstanden denken. Man kann dies ausdrücken durch $1\,E_1 = \frac{1}{b}\,E$, womit der unter E_1 fallende Gegenstand symbolisch unter E gebracht wird. Dem festgesetzten Begriffe der Anzahl zufolge ist sodann

$$a\,E_1 = \frac{a}{b}\,E \text{ und } b\,E_1 = \frac{b}{b}\,E = 1\,E.$$

II. Algebraische Zahlen.

Führt die Fügung eines Gegenstandes unter einem Begriffe von einer Zahl zur vorhergehenden, so nennen wir den Begriff die negative Einheit und jeden darunter fallenden Gegenstand einen negativen Einer. Die negative Einheit und die ursprüngliche, die positive, sollen entgegengesetzt heifsen; der Übergang von der einen zur andern werde als Umkehrung der erstern bezeichnet. Die negative Einheit soll zunächst mit φ_1 bezeichnet werden und bedeutet bei unserer geometrischen Darstellung die Länge und Richtung von $\beta\alpha$. Denkt man sich von der 0 ausgehend unter der negativen Einheit, indem man dieselbe als durch φ bestimmt ansieht, Einer aneinander gefügt, so erhält man das unendliche System der negativen Ordinalzahlen, während die natürlichen Zahlen aus absoluten zu positiven werden. Die a geht nach der üblichen Bezeichnung in (+ a) über. Nimmt man an, dafs die Zahlen der negativen Zahlenreihe oder φ_1-Reihe denen der positiven der Reihe nach zugeordnet sind, so wird die (+ a) entsprechende mit (— a) bezeichnet. Diese geht wieder in a über, sobald man den Gegensatz fallen läfst. Jede Zahl der gesamten Reihe, welche die algebraische heifst, kann sowohl durch φ als durch φ_1 abgebildet gedacht werden. Man sagt, die Zahlen folgen in positiver Richtung aufeinander, wenn man sie sich durch φ geordnet denkt, andernfalls in negativer.

Addition algebraischer Zahlen.

Sind algebraische Zahlen gegeben, so kann man dieselben als solche einer erweiterten absoluten φ-Reihe auffassen, indem man sich eine negative Zahl, welche in der negativen Zahlenreihe auf alle in Frage kommenden negativen Zahlen folgt, als Ausgangspunkt (relativen Nullpunkt) denkt. Indem man für die neue Zahlenreihe die Definitionen der Addition und Subtraktion aufrecht erhält, kann man jede positive Zahl (+ a) unter der Form 0 + a und jede negative (— b) unter 0 — b auffassen, und es gelten für solche Ausdrücke die für Summen und Differenzen der ursprünglichen Reihe gültigen Rechengesetze unter der Voraussetzung, dafs der Ausgangspunkt so gewählt gedacht wird, dafs das Resultat immer wieder in der erweiterten Reihe liegt. Für die Ausführung der Addition zweier algebraischen Zahlen ergiebt sich so folgendes:

$$(+ a) + (+ b) = (0 + a) + (0 + b)$$
$$= (0 + 0) + (a + b) = 0 + (a + b) = + (a + b);$$

$$(+ a) + (- b) = (0 + a) + (0 - b)$$
$$= (0 + 0) + (a - b) = + (a - b), \text{ wenn } a > b \text{ ist;}$$

$$(+ a) + (- b) = (0 + a) + (0 - b) = \big((0 + 0) - b\big) + a$$
$$= 0 - (b - a) = - (b - a), \text{ wenn } b > a \text{ ist;}$$

$$(- a) + (- b) = (0 - a) + (0 - b)$$
$$= 0 - (a + b) = - (a + b).$$

Da man in einer Summe algebraischer Zahlen die Summanden als absolute Summen und Differenzen auffassen darf, können dieselben auch miteinander vertauscht werden. Daraus folgt weiterhin, dafs auch eine algebraische Summe addiert werden darf, indem man die Addenden einzeln addiert, und zu einer solchen, indem man zu einem Addenden addiert.

Diese gewöhnliche Art der mathematischen Behandlung der algebraischen Addition, welche wohl kaum anders gerechtfertigt werden kann als es geschehen ist, hat, so einfach sie auch erscheinen mag, zwei gewichtige Gründe gegen sich. Einmal ist der Ausgangspunkt der Zahlenreihe ein durchaus unbestimmter und schwankender, sodann werden die Zahlen ihrem ursprünglichen Charakter entfremdet. Es möge daher eine andere Ableitung der Gesetze der Addition algebraischer Zahlen folgen, von der ich glaube, dafs sie dem Wesen der Sache angemessener und unanfechtbar ist. Die Berechtigung zu den zu benutzenden Definitionen ergiebt sich aus dem 125. Absatz der Dedekindschen Schrift. Der Vollständigkeit halber ist der Fall, dafs die Summanden positiv sind, noch einmal mitbehandelt. Die 0 ist als Anfangspunkt der positiven Zahlenreihe mit $(+ 0)$, als Ausgangspunkt der negativen mit $(- 0)$ bezeichnet. Die auf $(+ a)$ und $(- a)$ in positiver Richtung folgenden Zahlen sind $(+ a)'$ und $(- a)'$, die in negativer folgenden $(+ a)_{\prime}$ und $(- a)_{\prime}$ genannt, so dafs

$((\pm a)')_, = (\pm a) = ((\pm a)_,)'$, $(+a)' = (+a')$ und $(-a)_, = (-a')$.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ (\pm a) + (+0) = (\pm a), \\[1ex] 2)\ (\pm a) + (+b)' = [(\pm a) + (+b)]'. \end{array}\right\} \text{Erklärung der Addition der positiven Zahl.}$$

3) $[(\pm a) + (+b)]' = (\pm a)' + (+b)$.

Beweis. Die Gleichung ist richtig für $b = 0$, da $[(\pm a) + (+0)]' = (\pm a)'$ und $(\pm a)' + (+0) = (\pm a)'$ ist. Gilt die Gleichung

$[(\pm a) + (+b)]' = (\pm a)' + (+b)$, so ist auch

$\{[(\pm a) + (+b)]'\}' = [(\pm a)' + (+b)]'$, folglich auch

$\{(\pm a) + (+b)'\}' = (\pm a) + (+b)'$, mithin gilt die Gleichung

auch für die auf $(+b)$ folgende Zahl $(+b)'$.

$$\left.\begin{array}{l} 4)\ (\pm a) + (-0) = (\pm a), \\[1ex] 5)\ (\pm a) + (-b)_, = [(\pm a) + (-b)]_,. \end{array}\right\} \text{Erklärung der Addition der negativen Zahl.}$$

6) $[(\pm a) + (-b)]_, = (\pm a)_, + (-b)$.

Beweis. Wahr für $b = 0$, da $[(\pm a) + (-0)]_, = (\pm a)_,$ und $(\pm a)_, + (-0) = (\pm a)_,$ ist. Ist

$[(\pm a) + (-b)]_, = (\pm a)_, + (-b)$, so ist auch

$\{[(\pm a) + (-b)]_,\}_, = [(\pm a)_, + (-b)]_,$

$\{(\pm a) + (-b)_,\}_, = (\pm a)_, + (-b)_,$.

7) $(\pm a)_, + (+b)' = (\pm a) + (+b)$.

Beweis. Wahr für $b = 0$, da $(\pm a)_\prime + (+0)' = [(\pm a)_\prime + (+0)]' = (\pm a)$ und $(\pm a) + (+0) = (\pm a)$ ist. Ist

$$(\pm a)_\prime + (+b)' = (\pm a) + (+b), \text{ so ist auch}$$

$$[(\pm a)_\prime + (+b)']' = [(\pm a) + (+b)]'$$

$$(\pm a)_\prime + ((+b)')' = (\pm a) + (+b)'.$$

8) $(\pm a)' + (-b)_\prime = (\pm a) + (-b)$.

Beweis. Wahr für $b = 0$, da $(\pm a)' + (-0)_\prime = [(\pm a)' + (-0)]_\prime = ((\pm a)')_\prime = (\pm a)$ und $(\pm a) + (-0) = (\pm a)$. Ist

$$(\pm a)' + (-b)_\prime = (\pm a) + (-b), \text{ so ist auch}$$

$$[(\pm a)' + (-b)_\prime]_\prime = [(\pm a) + (-b)]_\prime$$

$$(\pm a)' + ((-b)_\prime)_\prime = (\pm a) + (-b)_\prime.$$

9) $[(\pm a) + (-b)]' = (\pm a) + (-b)'$.

Beweis. Wahr für $b = 0$, da $[(\pm a) + (-0)]' = (\pm a)'$ und $(\pm a) + (-0)' = (\pm a)' + (-0)$ (nach 8) $= (\pm a)'$. Ist

$$[(\pm a) + (-b)]' = (\pm a) + (-b)', \text{ so ist auch}$$

$$\{[(\pm a) + (-b)]'\}_\prime = [(\pm a) + (-b)']_\prime$$

$$\{[(\pm a) + (-b)]_\prime\}' = (\pm a) + ((-b)')_\prime$$

$$\{(\pm a) + (-b)_\prime\}' = (\pm a) + ((-b)_\prime)'.$$

10) $[(\pm a) + (-b)]' = (\pm a)' + (-b)$.

Beweis. Wahr für $b = 0$, da $[(\pm a) + (-0)]' = (\pm a)'$ und $(\pm a)' + (-0) = (\pm a)'$. Ist

$$[(\pm a) + (-b)]' = (\pm a)' + (-b), \text{ so ist auch}$$

$$\{[(\pm a) + (-b)]'\}_{\prime} = [(\pm a)' + (-b)]_{\prime}$$

$$\{[(\pm a) + (-b)]_{\prime}\}' = (\pm a)' + (-b)_{\prime}$$

$$\{(\pm a) + (-b)_{\prime}\}' = (\pm a)' + (-b)_{\prime}.$$

11) $[(\pm a) + (+b)]_{\prime} = (\pm a) + (+b)_{\prime}$.

Beweis. Wahr für $b = 0$, da $[(\pm a) + (+0)]_{\prime} = (\pm a)_{\prime}$ und $(\pm a) + (+0)_{\prime} = (\pm a)_{\prime} + 0$ (nach 7) $= (\pm a)_{\prime}$. Ist

$$[(\pm a) + (+b)]_{\prime} = (\pm a) + (+b)_{\prime}, \text{ so ist auch}$$

$$\{[(\pm a) + (+b)]_{\prime}\}' = [(\pm a) + (+b)_{\prime}]'$$

$$\{[(\pm a) + (+b)]'\}_{\prime} = (\pm a) + ((+b)_{\prime})'$$

$$\{(\pm a) + (+b)'\}_{\prime} = (\pm a) + ((+b)']_{\prime}.$$

12) $[(\pm a) + (+b)]_{\prime} = (\pm a)_{\prime} + (+b)$.

Beweis. Wahr für $b = 0$, da $[(\pm a) + (+0)]_{\prime} = (\pm a)_{\prime}$ und $(\pm a)_{\prime} + (+0) = (\pm a)_{\prime}$. Ist

$$[(\pm a) + (+b)]_{\prime} = (\pm a)_{\prime} + (+b), \text{ so ist auch}$$

$$\{[(\pm a) + (+b)]_{\prime}\}' = [(\pm a)_{\prime} + (+b)]'$$

$$\{[(\pm a) + (+b)]'\}_{\prime} = (\pm a)_{\prime} + (+b)'$$

$$\{(\pm a) + (+b)'\}_{\prime} = (\pm a)_{\prime} + (+b)'.$$

Die Gleichungen 2), 3), 9) und 10) lassen sich zusammenfassen in

13) $[(\pm a) + (\pm b)]' = (\pm a) + (\pm b)' = (\pm a)' + (\pm b)$,

ebenso 5), 6), 11 und 12) in

14) $[(\pm a) + (\pm b)]_{\prime} = (\pm a) + (\pm b)_{\prime} = (\pm a)_{\prime} + (\pm b)$.

15) $(+ a) + (\pm 0) = (\pm 0) + (+ a)$.

Beweis. Wahr für $a = 0$, da $(+ 0) + (\pm 0) = 0$ und $(\pm 0) + (+ 0) = 0$. Ist

$(+ a) + (\pm 0) = (\pm 0) + (+ a)$, so ist auch

$[(+ a) + (\pm 0)]' = [(\pm 0) + (+ a)]'$

$(+ a)' + (\pm 0) = (\pm 0) + (+ a)'$

16) $(- a) + (\pm 0) = (\pm 0) + (- a)$.

Beweis wie für 15).

17) $(\pm a) + (+ b) = (+ b) + (\pm a)$.

Beweis. Wahr für $b = 0$, da $(\pm a) + (+ 0) = (\pm a)$ und $(+ 0) + (\pm a) = (\pm a)$. Ist

$(\pm a) + (+ b) = (+ b) + (\pm a)$, so ist auch

$[(\pm a) + (+ b)]' = [(+ b) + (\pm a)]'$

$(\pm a) + (+ b)' = (+ b)' + (\pm a)$.

18) $(\pm a) + (- b) = (- b) + (\pm a)$.

Zu beweisen wie 17).
Die Gleichungen 17) und 18) lassen sich zusammenfassen in

19) $(\pm a) + (\pm b) = (\pm b) + (\pm a)$.

20) $(\pm a) + \big((\pm b) + (+ c)\big) = \big((\pm a) + (\pm b)\big) + (+ c)$.

Beweis. Wahr für $c = 0$, da $(\pm a) + \big((\pm b) + (+ 0)\big) =$ $(\pm a) + (\pm b)$ und $\big((\pm a) + (\pm b)\big) + 0 = (\pm a) + (\pm b)$. Ist

$(\pm a) + \big((\pm b) + (+ c)\big) = \big((\pm a) + (\pm b)\big) + (+ c)$, so ist auch

$$\Big[(\pm a) + \big((\pm b) + (+ c)\big)\Big]' = \Big[\big((\pm a) + (\pm b)\big) + (+ c)\Big]'$$

$$(\pm a) + \big((\pm b) + (+ c)\big)' = \big((\pm a) + (\pm b)\big) + (+ c)'$$

$$(\pm a) + \big((\pm b) + (+ c)'\big) = \big((\pm a) + (\pm b)\big) + (+ c)'.$$

21) $(\pm a) + \big((\pm b) + (- c)\big) = \big((\pm a) + (\pm b)\big) + (- c)$.

Zu beweisen wie 20).

Die Gleichungen 20) und 21) lassen sich zusammenfassen in

22) $a + (b + c) = (a + b) + c$,

wo a, b und c algebraische Zahlen sind. Hieraus folgt in Verbindung mit 19) nun wieder das allgemeine Additionstheorem für algebraische Zahlen.

23) $(+ a) + (+ b) = \big(+ (a + b)\big)$.

Beweis. Wahr für $b = 0$, da $(+ a) + (+ 0) = (+ a)$ und $\big(+ (a + 0)\big) = (+ a)$. Ist

$(+ a) + (+ b) = \big(+ (a + b)\big)$, so ist auch

$$[(+ a) + (+ b)]' = \big(+ (a + b)\big)'$$

$$(+ a) + (+ b)' = \big(+ (a + b)'\big)$$

$$(+ a) + (+ b') = \big(+ (a + b')\big).$$

24) $(-a) + (-b) = (-(a+b))$.

Beweis. Wahr für $b = 0$, da $(-a) + (-0) = (-a)$ und $(-(a+0)) = (-a)$. Ist

$$(-a) + (-b) = (-(a+b)), \text{ so ist auch}$$

$$[(-a) + (-b)]_{\prime} = (-(a+b))_{\prime}$$

$$(-a) + (-b)_{\prime} = (-(a+b)')$$

$$(-a) + (-b') = (-(a+b')).$$

25) $(+a) + (-a) = 0$.

Beweis. Wahr für $a = 0$. Ist

$$(+a) + (-a) = 0, \text{ so ist auch}$$

$$(+a)' + (-a)_{\prime} = 0 \text{ nach 8), folglich}$$

$$(+a') + (-a') = 0.$$

26) $(+a) + (-b) = (+(a-b))$, wenn $a > b$ ist.

Beweis. $(+a) + (-b) = (+(b+c)) + (-b) = [(+b) + (+c)] + (-b) = [(+b) + (-b)] + (+c) = 0 + (+c) = (+c) = (+(a-b))$.

27) $(+a) + (-b) = (-(b-a))$, wenn $b > a$ ist.

Beweis. $(+a) + (-b) = (+a) + (-(a+c)) = (+a) + [(-a) + (-c)] = [(+a) + (-a)] + (-c) = (-(b-a))$.

Denkt man sich φ_1 absolut, so geht (— a) in a über. Sind den Einsen dieser a negative Einer zugeordnet, so bilden dieselben, wie gezeigt worden ist, die Zahlgröfse a (— E), wenn die negative Einheit mit (— E) bezeichnet wird. Wird dagegen φ_1 relativ gedacht, so kann man für (— a) nach 4) und 16) 0 + (— a) setzen und diese Zahl mit Hilfe von 5) in dem früher angegebenen Sinn auflösen in $0 + (-\underset{(1)}{1}) + (-\underset{(2)}{1}) + \ldots. + (-\underset{(a)}{1})$. Die Einer von a (— E) sind jetzt den (— 1) in diesem Ausdruck zugeordnet, und man kann, indem man für denselben (— a) setzt und erwägt, dafs (— E) durch E bestimmt gedacht wird, a (— E) symbolisch durch (— a) E ausdrücken und in derselben Hinsicht a (+ E) durch (+ a) E.

Nach Früherem, und da sich die positiven und die negativen Einer paarweise aufheben, ist a (+ E) + b (+ E) = (a + b) (+ E), a (— E) + b (— E) = (a + b) (— E), a (+ E) + b (— E) = (a — b) (+ E), wenn a > b, und a (+ E) + b (— E) = (b — a) (— E), wenn b > a. Unter Berücksichtigung der Gleichungen 23), 24), 26) und 27) und der eingeführten Symbole kann man den Inhalt der vier vorstehenden Gleichungen auch durch die folgenden ausdrücken:

28) $(+a)\,E + (+b)\,E = \big((+a) + (+b)\big)\,E,$

29) $(-a)\,E + (-b)\,E = \big((-a) + (-b)\big)\,E,$

30) $(+a)\,E + (-b)\,E = \big((+a) + (-b)\big)\,E.$

Hierdurch wird es ermöglicht, aus jeder Summe algebraischer benannter Zahlen die Benennungen auszuscheiden.

Subtraktion algebraischer Zahlen.

Erklärung. Die Differenz zweier algebraischen Zahlen ist die Zahl, zu welcher die zweite addiert die erste ergiebt.

Lehrsatz. Eine algebraische Zahl wird subtrahiert, indem man sie mit umgekehrtem Vorzeichen addiert.

31) $(+a) - (+b) = (+a) + (-b)$,

32) $(-a) - (+b) = (-a) + (-b)$,

33) $(+a) - (-b) = (+a) + (+b)$,

34) $(-a) - (-b) = (-a) + (+b)$.

Beweis für 34). Wäre $(-a) - (-b) > (-a) + (+b)$, d. h. müſste man zu $(-a) + (+b)$ eine positive Zahl $(+m)$ addieren, um $(-a) - (-b)$ zu erhalten, so wäre

$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b) + (+m).$$

Durch Addition von $(-b)$ auf beiden Seiten ergäbe sich

$$\big((-a)-(-b)\big) + (-b) = (-a) + \big((+b)+(-b)\big) + (+m)$$

$(-a) = (-a) + (+m)$, was unmöglich ist.

Für die Annahme, daſs die linke Seite kleiner als die rechte ist, wird der Beweis entsprechend geführt. Die übrigen Gleichungen werden ebenso bewiesen.

Erklärung. Eine algebraische Summe wird abgekürzt geschrieben, indem man die Operationszeichen und die Klammern fortläſst und, wenn das erste Glied positiv ist, auch das Relationszeichen desselben.

Lehrsatz. Eine algebraische Summe wird subtrahiert, indem man die Addenden einzeln subtrahiert, also mit umgekehrten Vorzeichen addiert.

35) $\pm a - (\pm b \pm c \ldots\ldots) = \pm a - (\pm b) - (\pm c) \ldots\ldots$
$= \pm a \mp b \mp c \ldots\ldots$

Beweis. Wäre $\pm a - (\pm b \pm c \ldots\ldots) = \pm a \mp b \mp c \ldots\ldots + (+m)$, so wäre $\pm a = \big(\pm a \mp b \mp c \ldots\ldots + (+m)\big) + \big((\pm b) + (\pm c) \ldots\ldots\big)$

$= (\pm a) + (\mp b \pm b) + (\mp c \pm c) \ldots\ldots + (+m) = (\pm a) + (+m)$.

Damit ist die algebraische Subtraktion auf die Addition zurückgeführt.

Es erübrigt nun nur noch zu zeigen, dafs man auch Aggregate als algebraische Summen addieren und subtrahieren darf. Fafst man die Einheit absoluter Zahlen als positiv auf, so geht a in $(+ a)$, b in $(+ b)$ über. Diese Auffassung ist auch in $a + b$ gestattet, da $(+ a) + (+ b) = + (a + b)$, welche Zahl im Resultate wieder in $a + b$ übergeht, wenn man die Einheit wieder absolut werden läfst. Auch für $a - b$ kann man unter gleicher Auffassung für Rechnungszwecke $(+ a) - (+ b)$ oder $(+ a) + (- b)$ setzen, da, wenn $a > b$ ist, $(+ a) + (- b) = + (a - b)$, woraus wieder bei absoluter Einheit $a - b$ wird. Man kann also $a + b$ und $a - b$ ohne Änderung der Schreibweise als algebraische Summen betrachten. Daraus läfst sich, da ein Aggregat durch Additionen und Subtraktionen absoluter Zahlen entsteht, folgern, dafs es als algebraische Summe aufgefafst werden kann, indem man die Operationszeichen als Relationszeichen betrachtet. Sind zwei Aggregate durch Addition oder Subtraktion verbunden, und hat das eine den Wert m, das andere den Wert n, so ist das Resultat $m \pm n$. Fafst man die Aggregate als algebraische Summen auf, so nehmen sie die Werte $(+ m)$ und $(+ n)$ an. Werden sie also auch in der Verbindung als algebraische Summen betrachtet, so erhält man $(+ m) \pm (+ n) = + (m \pm n)$, also wieder $m \pm n$, wenn man die Einheit wieder absolut nimmt. Man kann also Aggregate auch als algebraische Summen addieren und subtrahieren.

Multiplikation algebraischer Zahlen.

Erklärungen. Haben φ und φ_1 die frühere Bedeutung, so sei $\varphi \cdot \varphi = \varphi$, $\varphi \cdot \varphi_1 = \varphi_1$, $\varphi_1 \cdot \varphi = \varphi_1$ und $\varphi_1 \cdot \varphi_1 = \varphi$. Die Ausdrücke $\varphi \cdot \varphi$, $\varphi \cdot \varphi_1$ u. s. w. nennt man Produkte, ihre Bildung Multiplikation. Die Einheit φ wurde durch das Zeichen $+$, φ_1 durch $-$ angezeigt, so dafs man auch sagen kann $+ \cdot + = +$, $+ \cdot - = -$, $- \cdot + = -$, $- \cdot - = +$. Unter dem Produkte zweier algebraischer Zahlen versteht man das Produkt der absoluten Werte mit dem Produkte der Einheiten als Einheit. Folglich ist

36) $(+a)(+b) = (+ab)$,

37) $(-a)(+b) = (-ab)$,

38) $(+a)(-b) = (-ab)$,

39) $(-a)(-b) = (+ab)$.

Lehrsatz. Im Produkte zweier algebraischen Zahlen können Multiplikator und Multiplikandus vertauscht werden.

40) $(+a)(+b) = (+b)(+a)$,

41) $(-a)(+b) = (+b)(-a)$,

42) $(+a)(-b) = (-b)(+a)$,

43) $(-a)(-b) = (-b)(-a)$.

Die Gleichungen ergeben sich aus 36) — 39) und aus $ab = ba$.

Lehrsatz. Eine algebraische Zahl wird mit einer absoluten Zahl multipliziert, indem man ihren absoluten Wert multipliziert.

44) $a(+b) = (+ab)$, 45) $a(-b) = (-ab)$.

Beweis. $a(\pm b) = \pm b \pm b \pm \ldots\ldots \pm \underset{(a)}{b}$

$$= \pm (b + b + \ldots\ldots + \underset{(a)}{b}) = (\pm ab).$$

Lehrsatz. Mit einer positiven Zahl wird multipliziert, indem man mit ihrem absoluten Werte multipliziert.

46) $(+a)(+b) = a(+b)$, 47) $(+a)(-b) = a(-b)$.

Die Gleichung 46) folgt aus 36) und 44), 47) aus 38) und 45).

Lehrsatz. Mit einer negativen Zahl wird multipliziert, indem man mit dem absoluten Werte multipliziert und das Vorzeichen des Produkts umkehrt.

$$48)\ (-a)(+b) = (-a(+b)),\quad 49)\ (-a)(-b) = (-a(-b)).$$

48) folgt aus 37) und 44), 49) aus 39) und 45).

Lehrsatz. Eine algebraische Summe wird mit einer absoluten Zahl multipliziert, indem man die Summanden einzeln multipliziert.

$$50)\ a(\pm b \pm c \pm \ldots\ldots) = a(\pm b) + a(\pm c) + \ldots\ldots$$

Beweis.
$$
\begin{aligned}
a(\pm b \pm c \pm \ldots\ldots) &= (\pm b \pm c \pm \ldots\ldots) \\
&\quad + (\pm b \pm c \pm \ldots\ldots) \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + (\pm b \pm c \underset{(a)}{\pm} \ldots\ldots) \\
&= (\pm b \pm b \pm \ldots\ldots \underset{(a)}{\pm b}) \\
&\quad + (\pm c \pm c \pm \ldots\ldots \underset{(a)}{\pm c}) \\
&\qquad \vdots \\
&= a(\pm b) + a(\pm c) + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Lehrsatz. Eine algebraische Summe wird mit einer positiven Zahl multipliziert, indem man die Summanden multipliziert.

$$51)\ (+a)(\pm b \pm c \pm \ldots\ldots) = (+a)(\pm b) + (+a)(\pm c) + \ldots\ldots$$

Beweis.
$$
\begin{aligned}
&(+a)(\pm b \pm c \pm \ldots\ldots) \\
&= a(\pm b \pm c \pm \ldots\ldots) \text{ (nach 44) und 45))} \\
&= a(\pm b) + a(\pm c) + \ldots\ldots \text{ (nach 50))} \\
&= (+a)(\pm b) + (+a)(\pm c) + \ldots\ldots \text{ (nach 44) und 45)).}
\end{aligned}
$$

Lehrsatz. Eine positive Zahl wird mit einer algebraischen Summe multipliziert, indem man mit den Summanden multipliziert und die Produkte addiert.

52) $(\pm b \pm c \pm \ldots\ldots)(+a) = (\pm b)(+a) + (\pm c)(+a) + \ldots\ldots$

Der Beweis folgt aus 51), 36) und 38).

Lehrsatz. Eine algebraische Summe wird mit einer negativen Zahl multipliziert, indem man die Summanden multipliziert.

53) $(-a)(\pm b \pm c \pm \ldots) = (-a)(\pm b) + (-a)(\pm c) + \ldots$

Beweis. $(-a)(\pm b \pm c \pm \ldots) = -a(\pm b \pm c \pm \ldots)$

$$= -(a(\pm b) + a(\pm c) + \ldots)$$

$$= 0 - (a(\pm b) + a(\pm c) + \ldots)$$

$$= 0 - a(\pm b) - a(\pm c) - \ldots$$

$$= 0 + (-a(\pm b)) + (-a(\pm c)) + \ldots$$

$$= (-a)(\pm b) + (-a)(\pm c) + \ldots$$

Lehrsatz. Eine negative Zahl wird mit einer algebraischen Summe multipliziert, indem man mit den Summanden multipliziert und die Produkte addiert.

54) $(\pm b \pm c \pm \ldots)(-a) = (\pm b)(-a) + (\pm c)(-a) + \ldots$

Der Beweis folgt aus 53), 37) und 39).

Lehrsatz. Eine Summe wird mit einer andern multipliziert, indem man jeden Summanden der einen mit jedem der andern multipliziert.

Der Beweis folgt aus 51), 52), 53) und 54).

Lehrsatz. Zwei Aggregate können als algebraische Summen miteinander multipliziert werden.

Beweis. Haben die Aggregate die Werte m und n, so ist ihr Produkt m n. Faſst man die Aggregate als algebraische Summen auf, so erhält das eine den Wert (+ m), das andere (+ n), das Produkt ist mithin (+ m) (+ n) = (+ m n), also nach Fortlassung des Relationszeichens wieder m n.

Division algebraischer Zahlen.

Erklärungen. $\varphi : \varphi = \varphi$, $\varphi_1 : \varphi = \varphi_1$, $\varphi : \varphi_1 = \varphi_1$, $\varphi_1 : \varphi_1 = \varphi$. Die Ausdrücke $\varphi : \varphi$, $\varphi_1 : \varphi$ u. s. w. heifsen Quotienten, ihre Bildung heifst Division der ersten Einheit durch die zweite, jene wird Dividend, diese Divisor genannt. Den Inhalt der vier Gleichungen kann man auch wiedergeben durch $+ : + = +$, $- : + = -$, $+ : - = -$, $- : - = +$.

Unter dem Quotienten zweier algebraischer Zahlen versteht man den Quotienten der absoluten Werte mit dem Quotienten der Einheiten als Einheit. Es ist also

55) $(+ a) : (+ b) = \left(+ \frac{a}{b}\right)$,

56) $(- a) : (+ b) = \left(- \frac{a}{b}\right)$,

57) $(+ a) : (- b) = \left(- \frac{a}{b}\right)$,

58) $(- a) : (- b) = \left(+ \frac{a}{b}\right)$.

Folgerung. Der Quotient zweier algebraischer Zahlen ist die Zahl, die mit der zweiten multipliziert die erste ergiebt.

Lehrsatz. Eine algebraische Summe wird durch eine algebraische Zahl dividiert, indem man jeden Summanden dividiert.

$(\pm a \pm b \pm \ldots\ldots) : (\pm m) = (\pm a) : (\pm m) + (\pm b) : (\pm m) + \ldots\ldots$

Beweis. Wäre $(\pm a \pm b \pm \ldots\ldots) : (\pm m) =$
$(\pm a) : (\pm m) + (\pm b) : (\pm m) + \ldots\ldots + (+ n)$,

so wäre $\pm a \pm b \pm \ldots\ldots =$
$(\pm m) \left((\pm a) : (\pm m) + (\pm b) : (\pm m) + \ldots\ldots + (+ n)\right)$

$\pm a \pm b \pm \ldots\ldots = \pm a \pm b \pm \ldots + (\pm m n)$, was unmöglich ist.

Lehrsatz. Zwei Aggregate können als algebraische Summen durcheinander dividiert werden.

Beweis. Haben die Aggregate die Werte m und n, so ist ihr Quotient m : n. Werden sie als algebraische Summen aufgefaſst, so erhalten sie die Werte $(+ m)$ und $(+ n)$, ihr Quotient wird mithin $(+ m) : (+ n) = (+ (m : n))$. Nach Weglassung des Relationszeichens hat man also wieder m : n.

Druck von Edwin Groening in Danzig.

Lehrsatz. Zw … Summen
durcheinander dividi …

Beweis. Habe … so ist ihr
Quotient m : n. W … aufgefaſst,
so erhalten sie die … tient wird
mithin $(+ m) : ($ … ssung des
Relationszeichens ha …