Städtische Oberrealschule zu Halle a. S.

Der Goldene Schnitt.

Von

Richard Walckling.

Beilage des Osterprogramms 1913.

Halle a. S.
Druck von Gebauer-Schwetschke m. b. H.
1913.

1913. Progr. Nr. 377.

Die stetige Teilung.

Ist mir die Aufgabe gestellt, eine Strecke in zwei Teile zu teilen, so muß ich, um die Aufgabe zu lösen, wissen, in welchem Verhältnis die Teile zur ganzen Strecke oder die Teile zu einander stehen sollen. Von diesen Teilungen nimmt selbstverständlich die Halbierung, von den Teilungspunkten der Mittelpunkt eine bevorzugte Stellung ein. Der naive Verstand des Kindes identifiziert sogar, sehr zum Leidwesen des mathematisch geschulten Lehrers, häufig Halbieren und Teilen, wie er sich unter einem Viereck auch immer gleich ein Quadrat vorstellt. Ja manchem logisch denkenden Kopf noch sind zwei „ungleiche Hälften" nicht sehr rätselhaft. Abgesehen von dieser Halbierung gibt es natürlich unendlich viele Möglichkeiten, eine Strecke zu teilen. Das folgt einerseits aus der geometrischen Vorstellung, denn eine noch so kleine Strecke enthält doch stets unendlich viele Punkte, die Anzahl der Möglichkeiten für die Lage des Teilungspunktes ist also unbegrenzt groß; andrerseits kann ich mir das Verhältnis der Teile im Verhältnis zweier Zahlengrößen ausdrücken und habe auch so eine nie erschöpfte Mannigfaltigkeit. Im Verhältnis von Zahlen, am bequemsten von ganzen Zahlen, stellen wir uns auch meistens die Teilung einer Strecke vor. Umgekehrt können wir, wenn das Zahlenverhältnis gegeben ist, leicht mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre die Teilung ausführen, so sei z. B. AB in C im Verhältnis $2:5$ geteilt. Der so gefundene Punkt C ist jedoch nicht der einzige, für den sich die Proportion der Strecke

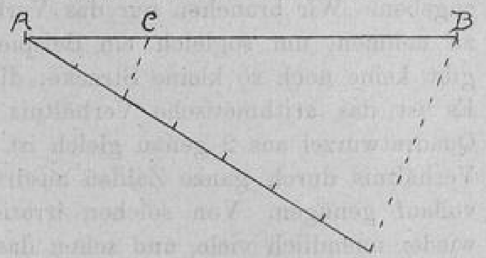

Fig. 1.

$$CA : CB = 2 : 5$$

aufstellen läßt. Es gibt noch eine zweite Lage des Punktes C, bei der auch das Verhältnis der Abstände von den gegebenen Punkten A und B den vorgeschriebenen Wert annimmt. Allerdings liegt dann C nicht wie oben auf der Strecke selbst, sondern auf der Verlängerung. Die Konstruktion beider Punkte C kann ebenfalls mit Hilfe des Proportionallehrsatzes leicht ausgeführt werden: auf zwei durch A und B gezogenen Parallelen sind Einheitsstrecken in der dem Verhältnis entsprechenden Anzahl aufzutragen (siehe Fig. 2). Auch der Punkt außerhalb der Strecke kann als „äußerer" Teilpunkt der Strecke angesehen werden; nicht die absolute, sondern die algebraische Summe der Teile gibt die gegebene Strecke. Wir werden bei unseren mathematischen Betrachtungen immer auf diesen zweiten Teilpunkt geführt werden, während ihm naturgemäß in der Praxis oft keine Bedeutung zukommt.

Da unser Zahlensystem ein dekadisches ist, so ist die Zehntelteilung für uns von besonderer Bedeutung. Der zehnmillionste Teil der Strecke, die die Länge des

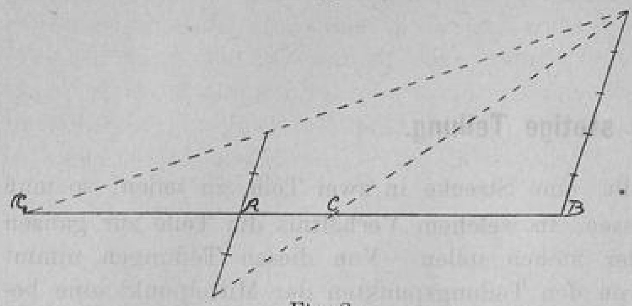

Fig. 2.

Erdquadranten hat, sollte nach der damaligen Messung genau das Meter sein, und auf unseren Metermaßstäben haben wir im Zentimeter diese Zehntelteilung. Da die alten Babylonier die 12 als die Grundzahl ihres Zahlensystems hatten und auf sie unsere ganze astronomische und mathematische Weisheit zurückgeht, so ist diese Zwölferteilung, wie bei der Sonnenbahn die Teilung in die 12 Tierkreise, der die 12 Monate entsprechen, wie die Teilung des Umkreises in 360 Teile, auch noch bei uns in Geltung. Aber es sind nicht Strecken, die wir in diesem Verhältnis geteilt denken. Denn Rute, Fuß und Zoll, die im Zwölferverhältnis stehen, gehören bei uns schon der Vergangenheit an.

Wenn es auch für ein so in ganzen Zahlen ausgedrücktes Verhältnis zweier Strecken unendlich viele Möglichkeiten gibt, so kommen wir doch damit nicht aus, wenn es gilt, das Verhältnis zweier geometrisch konstruierter Strecken in Zahlen anzugeben. Wir brauchen nur das Verhältnis von Diagonale und Seite eines Quadrates zu nehmen, um sogleich ein Beispiel für diesen „irrationalen" Fall zu haben. Es gibt keine noch so kleine Strecke, die ganzzahlig in Diagonale und Seite aufginge. Es ist das arithmetische Verhältnis $\sqrt{2}:1$, und wir wissen, daß kein Bruch der Quadratwurzel aus 2 genau gleich ist. Mit Annäherung können wir aber auch dieses Verhältnis durch ganze Zahlen ausdrücken, und häufig wird uns dies für die Praxis vollauf genügen. Von solchen irrationalen Verhältnissen haben wir natürlich auch wieder unendlich viele, und schon das obige Beispiel zeigt, daß schon die einfachsten geometrischen Konstruktionen diese irrationalen Beziehungen bringen. Daher wird man gut tun, den Ausdruck des Streckenverhältnisses durch ein Zahlenverhältnis als das meist bequemste, aber nicht als das natürliche anzusehen. Zwar lehrt uns die Akustik, daß, wenn wir die Saite eines Monochords im Verhältnis der kleinsten ganzen Zahlen abteilen, wir so die mit dem Grundton der Saite harmonierenden Obertöne bekommen. Aber diese schon von den Pythagoräern erkannte grundlegende Bedeutung der Zahl für die Harmonie darf uns nicht veranlassen, ihr für die Teilung der Strecke die Vorherrschaft zuzuerkennen. Beim Monochord teilen wir zwar die sich als Strecke darbietende gespannte Saite, aber wir tun es nur, um andere Schwingungszahlen der Töne zu erhalten. Die Teilung der Strecke ist hier also nur ein Mittel zum Zweck, die Schwingungen selbst werden als zueinander harmonisch oder nicht harmonisch vom Ohr aufgenommen. Bei der Strecke brauchen, ja dürfen wir nicht das einfachste Streckenverhältnis mit dem einfachsten Zahlenverhältnis identifizieren. Wollen wir den geometrisch natürlichsten Teilpunkt haben, so müssen wir von jeder doch stets vorhandenen Willkür eines Zahlenverhältnisses absehen und den Punkt wählen, der zwischen den so entstandenen Strecken selbst das richtige Verhältnis herstellt. Wir haben aber die ganze Strecke und ihre Teile. Oben sahen wir, daß das Halbieren eine wichtige Teilung ist: dadurch ist das Verhältnis der Teile zueinander das idealste, sie sind einander gleich. Aber gerade der Mittelpunkt gibt den Fall, daß beide Teile zur ganzen Strecke möglichst große Verschiedenheit zeigen. Die Teilung aber kann mit Recht als die natürliche bezeichnet werden, bei

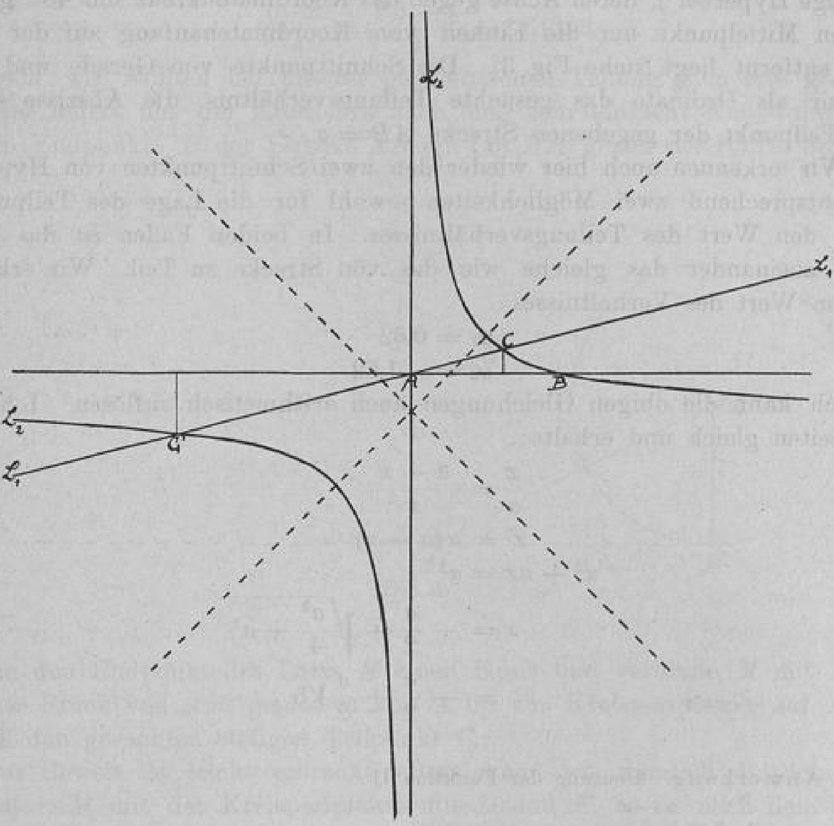

Fig. 3.

der das Verhältnis eines Teiles zum Ganzen das gleiche ist wie das Verhältnis der Teile zueinander. Da aber ein Teil stets kleiner ist als die ganze Strecke, so kann ich diese Teilung genauer bestimmen: Bei ihr verhält sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt wie der größere Abschnitt zum kleineren. Es ist die sogenannte „stetige Teilung", die Teile bilden zusammen mit der Strecke selbst eine stetige Proportion. Bezeichne ich den größeren Teil der Strecke a mit x, so ist der kleinere Teil $(a-x)$, und es steht also a zu x genau in dem gleichen Verhältnis wie x zu $(a-x)$. Welche Teilung genügt dieser Bedingung?

Ich stelle mir sowohl das Verhältnis des größeren Teiles zum Ganzen, also die Funktion:

$$\text{I)}\ y = x : a$$

als auch das Verhältnis der Teile zueinander, d. i. die Funktion:

$$\text{II)}\ y = (a - x) : x$$

graphisch dar. Dann bekomme ich graphisch für die Funktion I eine durch den Nullpunkt meines Koordinatensystems gehende Gerade, für die Funktion II eine gleichseitige Hyperbel*), deren Achse gegen das Koordinatenkreuz um 45^0 gedreht ist und deren Mittelpunkt um die Einheit vom Koordinatenanfang auf der negativen y-Achse entfernt liegt (siehe Fig. 3). Die Schnittpunkte von Gerade und Hyperbel liefern mir als Ordinate das gesuchte Teilungsverhältnis, die Abszisse selbst den stetigen Teilpunkt der gegebenen Strecke $AB = a$.

Wir erkennen auch hier wieder den zwei Schnittpunkten von Hyperbel und Gerade entsprechend zwei Möglichkeiten sowohl für die Lage des Teilpunktes wie auch für den Wert des Teilungsverhältnisses. In beiden Fällen ist das Verhältnis der Teile zueinander das gleiche wie das von Strecke zu Teil. Wir erkennen als ungefähren Wert des Verhältnisses

$$y_1 = 0{,}62$$
$$y_2 = -1{,}62$$

Ich kann die obigen Gleichungen auch arithmetisch auflösen. Ich setze die rechten Seiten gleich und erhalte:

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$$
$$x^2 = a\,(a - x)$$
$$x^2 + ax = a^2$$
$$x = -\frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$
$$= -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

*) Anmerkung. Deutung der Funktion II:

$$y = \frac{a - x}{x}$$
$$xy = a - x$$

$$x = \xi \cos\varphi - \eta \cdot \sin\varphi$$
$$y = \xi \sin\varphi + \eta \cdot \cos\varphi$$
$$\xi^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \eta^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \xi\eta \cos 2\varphi + \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi = a$$
$$\cos 2\varphi = 0$$
$$\varphi = 45^0$$
$$\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\xi^2 - \eta^2 + \xi \cdot \sqrt{2} - \eta \cdot \sqrt{2} = 2a$$
$$\left(\xi + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\eta + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 2a + 1.$$

$$x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$x_2 = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Wir bekommen hier also das Verhältnis genau

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}61803$$

oder

$$\frac{-x}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1{,}61803.$$

Doch wir wollten bei unserer geometrischen Teilung auch rein geometrisch bleiben. Da liefert uns die Kreislehre auch eine sehr einfache Konstruktion. Man errichte im Endpunkte B der Strecke AB ein Lot BM gleich der Hälfte der Strecke,

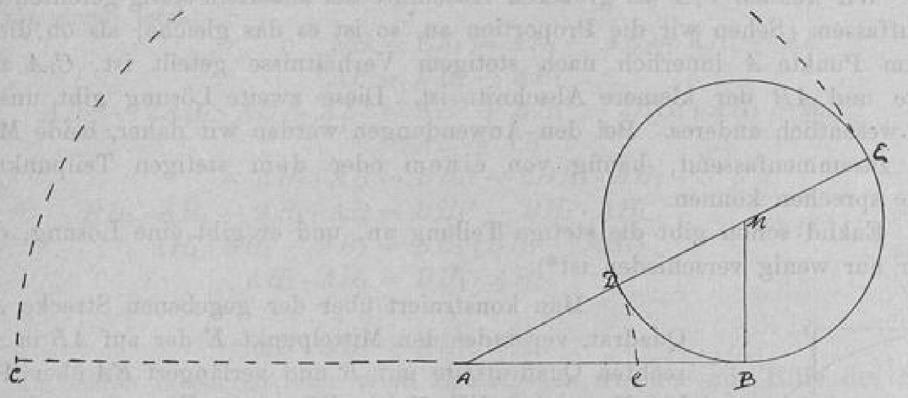

Fig. 4.

schlage um den Endpunkt des Lotes M einen Kreis und verbinde M mit A. Trage ich nun das Stück von AM, gemessen von A bis zur Kreisperipherie, auf AB ab, so erhalte ich den gesuchten stetigen Teilpunkt C.

Der Beweis ist leicht erbracht. Bezeichnen wir nämlich die Schnittpunkte der Zentrale AM mit der Kreisperipherie mit D und E, so ist nach dem Sekantensatz die Tangente mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Sekante

$$AE : AB = AB : AD.$$

Wenden wir auf diese Proportion korrespondierende Subtraktion an, so erhalten wir

$$(AE - AB) : AB = (AB - AD) : AD.$$

Es ist aber $AB = DE$ nach unserer Konstruktion, also

$$AE - AB = AD.$$

Berücksichtigen wir ferner, daß $AD = AC$ ist, so erhalten wir

$$AC : AB = BC : AC$$

oder nach Vertauschung der Glieder:

$$AB : AC = AC : BC.$$

Auch die arithmetisch gefundene zweite Lösung des äußeren Teilpunktes können wir auf diese Weise erhalten, indem wir nämlich mit dem größeren Sekantenabschnitt AE um A den Kreis schlagen, der die Verlängerung von AB über A hinaus in C_1 trifft. Auch hier ist jetzt C_1A die mittlere Proportionale zwischen C_1B und AB. Denn wenn wir wieder vom Sekantensatz ausgehen, so haben wir wie oben

$$AE : AB = AB : AD.$$

Auf diese Proportion wenden wir jetzt die korrespondierende Addition an und bekommen

$$(AE + AB) : AE = (AB + AD) : AB$$

Da $AE + AB = C_1B$

und $AB + AD = C_1A$ nach Konstruktion,

so folgt: $C_1B : C_1A = C_1A : AB.$

Wir können C_1A als größeren Abschnitt der äußerlich stetig geteilten Strecke AB auffassen. Sehen wir die Proportion an, so ist es das gleiche, als ob die ganze C_1B im Punkte A innerlich nach stetigem Verhältnisse geteilt ist, C_1A also der größere und AB der kleinere Abschnitt ist. Diese zweite Lösung gibt uns daher nichts wesentlich anderes. Bei den Anwendungen werden wir daher, beide Möglichkeiten zusammenfassend, häufig von einem oder dem stetigen Teilpunkt einer Strecke sprechen können.

Euklid schon gibt die stetige Teilung an, und er gibt eine Lösung, die von unserer nur wenig verschieden ist*).

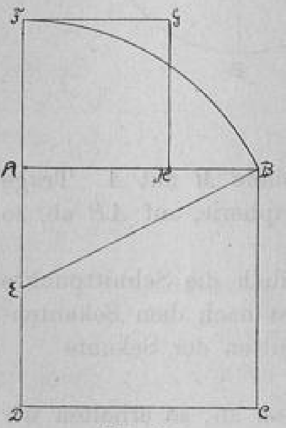

Fig. 5.

Man konstruiert über der gegebenen Strecke AB ein Quadrat, verbindet den Mittelpunkt E der auf AB in A senkrechten Quadratseite mit B und verlängert EA über A hinaus bis F, so daß EF gleich EB wird. Wenn man dann über AF das Quadrat errichtet, so erhalten wir in H den gesuchten Teilpunkt.

Beweis: Im $\Delta\ ABE$ ist nach Pythagoras

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

es ist nun $EB = EF = AE + AH$

und $AB = AH + BH$

folglich erhalten wir

$$AE^2 + 2AE \cdot AH + AH^2 = AE^2 + 2AH \cdot BH + AH^2 + BH^2$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten AE^2 und AH^2, und setzen $2AE = AB$, so behalten wir:

$$AB \cdot AH = 2AH \cdot BH + BH^2$$

oder:

$$AB \cdot AH - AH \cdot BH = AH \cdot BH + BH^2$$
$$AH\,(AB - BH) = BH\,(AH + BH)$$
$$AH \cdot AH = BH \cdot AB$$

*) 11. Satz der Elemente. Wir geben die Figur nach Zeising, Der Goldene Schnitt.

wenn wir die Gleichung als Proportion schreiben, so erhalten wir die uns gebräuchliche Form:

$$AB : AH = AH : BH.$$

Auch die Konstruktion des Euklid läßt sich auf den äußeren Teilpunkt erweitern. Ich verlängere nämlich AD über D hinaus, so daß EF_1 gleich EB wird und errichte über AF_1 das Quadrat. Dieses liefert uns durch seinen Eckpunkt in der Verlängerung von AB den Punkt H_1, der AB äußerlich nach dem Goldenen Schnitt teilt. Der Beweis geht ebenfalls vom rechtwinkligen Dreieck ABE aus

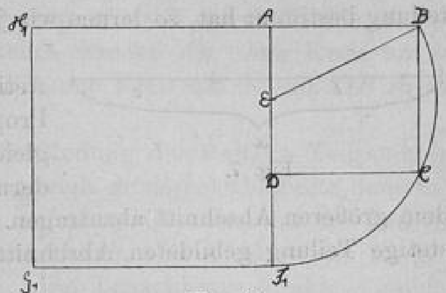

Fig. 6.

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

wir setzen darin jetzt

$$EB = EF_1 = AF_1 - AE = AH_1 - AE$$
$$AB = BH_1 - AH_1$$
$$AH_1^2 - 2AH_1 \cdot AE + AE^2 = AE^2 + BH_1^2 - 2BH_1 \cdot AH_1 + AH_1^2$$
$$2AE = AB$$
$$- AH_1 \cdot AB = BH_1^2 - 2BH_1 \cdot AH_1$$
$$BH_1 \cdot AH_1 - AH_1 \cdot AB = BH_1^2 - BH_1 \cdot AH_1$$
$$AH_1 (BH_1 - AB) = BH_1 (BH_1 - AH_1)$$
$$AH_1 \cdot AH_1 = BH_1 \cdot AB$$

oder:

$$AB : AH_1 = AH_1 : BH_1.$$

In beiden Lösungen, der alten Euklidschen wie der mit Hilfe des Kreises, mußten wir ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, dessen größere Kathete gleich der gegebenen Strecke und dessen kleinere Kathete gleich der Hälfte der gegebenen Strecke ist. Dann ist die Differenz der Hypotenuse und der kürzeren Kathete gleich dem gesuchten größeren Abschnitt der in stetiger Proportion geteilten Strecke. Das gibt arithmetisch, wenn wir die gegebene Strecke gleich 1 setzen, für die Hypotenuse die Länge

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\, 2{,}236067$$
$$= 1{,}118033.$$

Daher erhalten wir, wenn wir den größeren Abschnitt der stetig geteilten Strecke genau wie oben x nennen:

$$x = 1{,}118033 - 0{,}500$$
$$= 0{,}618033$$

und für den kleineren Abschnitt

$$a - x = 0{,}381966.$$

Von zwei Strecken aber werden wir sagen können, daß sie zu einander im stetigen Verhältnis stehen, wenn sie sich verhalten ungefähr wie $618 : 382$

oder wie $1{,}618 : 1$.

Hatten wir oben unsere Teilung als die für die Strecke „natürliche“ kennen gelernt, insofern bei ihr das Verhältnis der Teile zueinander dasselbe ist wie das des größeren Teiles zum Ganzen und weil kein willkürlich gesetztes Zahlenverhältnis die Einteilung bestimmt hat, so lernen wir jetzt erst den Namen „stetige“ Teilung verstehen*).

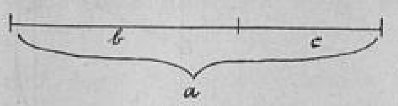

Fig. 7.

Gilt es nämlich, den größeren Abschnitt einer stetig geteilten Strecke wiederum nach stetiger Proportion zu teilen, so hat man nicht nötig, die gleiche Konstruktion von neuem vorzunehmen, sondern man braucht nur den kleineren Abschnitt auf dem größeren Abschnitt abzutragen. Nenne ich nämlich die Strecke a und die durch stetige Teilung gebildeten Abschnitte b und c, so gilt ja

$$a : b = b : c.$$

Wenden wir hierauf korrespondierende Subtraktion an, so erhalten wir

$$b : (a - b) = c : (b - c).$$

Da $a - b = c$ ist:

$$b : c = c : (b - c).$$

Es wird also damit der kleinere Abschnitt c für den größeren Abschnitt b, was der größere Abschnitt für die ganze Strecke a war. Daher können wir auch die ganze Strecke wieder als größeren Abschnitt einer stetig geteilten Strecke auffassen, deren Länge $(a + b)$ ist. Oder wenn wir wie oben beweisen und auf die Proportion

$$a : b = b : c$$

jetzt korrespondierende Addition anwenden, so erhalten wir:

$$(a + b) : a = (b + c) : b,$$

Da $b + c = a$ ist, erhalten wir:

$$(a + b) : a = a : b.$$

Anm. Wir haben ja schon bei unserer Konstruktion der stetigen Teilung eigentlich diesen Satz angewandt. Denn die zunächst stetig geteilte Strecke war die Zentrale, und wir trugen auf dem größeren Abschnitte, Durchmesser $= AB$: den kleineren Abschnitt ab und bewiesen durch korrespondierende Subtraktion, daß dann auch AB stetig geteilt ist.

Dieses Verfahren kann ich nun nach oben und unten „stetig“ fortsetzen. Habe ich einmal die Teilung ausgeführt, so kann ich durch einfaches Ab- und An-

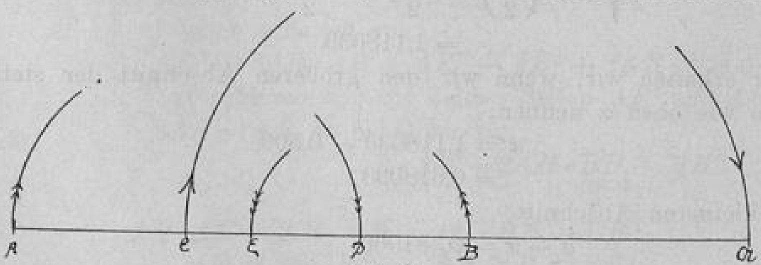

Fig. 8.

*) Diese Bezeichnung (nach Schwab) zuerst in einer deutschen Euklidausgabe von Lorenz aus dem Jahre 1781.

tragen stets neue „stetig geteilte“ Strecken bekommen. Jede so geteilte Gerade kann aufgefaßt werden als ein Glied einer unendlich langen dadurch eindeutig bestimmten Kette. In Fig. 8 ist diese Konstruktion einige Male ausgeführt. AB ist die ursprüngliche Strecke, C ihr stetiger Teilpunkt. Dann gewinnen wir $\mathfrak{A}$ durch Verlängerung von AB um BC und dadurch die in B stetig geteilte Strecke $A\mathfrak{A}$. Der Kreis um C mit CA liefert in D den stetigen Teilpunkt von BC, der Kreis um D mit DB in E den stetigen Teilpunkt von DC.

Wir können auch an der Figur, die zur Auffindung des stetigen Teilpunktes die gebräuchlichste ist, diese Konstruktion für den jeweils größeren Abschnitt dauernd fortsetzen. Alle Kreismittelpunkte M liegen dann auf einer Geraden und die Radien sind als die in den Teilpunkten errichteten Lote bestimmt. So erhalten wir in geordneter Aufeinanderfolge stetig geteilte Strecken, drei benachbarte Punkte nämlich begrenzen stetig geteilte Strecken.

Man könnte sich nun fragen, ist die stetige Teilung, für die wir ja oben das Verhältnis der Teile $(1 + \sqrt{5}) : 2$ bestimmt haben, die einzige, bei der eine solche additive bzw. subtraktive Fortsetzung möglich ist?

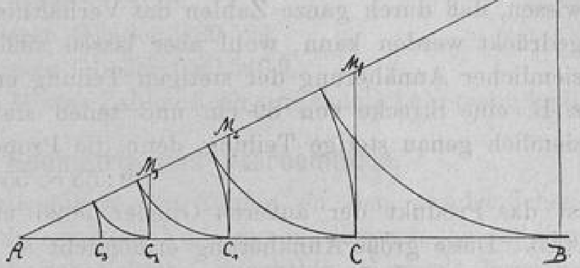

Fig. 9.

Stelle ich mir daher allgemein folgende Aufgabe:

Eine Strecke a sei im Verhältnis $m:n$ geteilt. Welchen Wert muß dieses Verhältnis haben, damit, wenn ich den kleineren Abschnitt auf den größeren abtrage, dieser in dem gleichen Verhältnis geteilt wird?

Die Abschnitte der Strecke AB sind

$$AC = \frac{m}{m+n} \cdot a$$

und

$$BC = \frac{n}{m+n} \cdot a.$$

Teilt nun D den größeren Abschnitt wieder im Verhältnis $m:n$, so sind die Abschnitte:

$$CD = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot a$$

$$AD = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot a.$$

Der größere Abschnitt der Teilstrecke CD soll nach unserer obigen Annahme gleich dem kleineren Abschnitt der ganzen Strecke sein. Wir erhalten folglich die Gleichung:

$$\left(\frac{m}{m+n}\right)^2 \cdot a = \frac{n}{m+n} \cdot a$$

oder

$$m^2 = (m + n) \cdot n$$
$$m^2 = mn + n^2$$
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 - \left(\frac{m}{n}\right) - 1 = 0$$
$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$
$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Das ist aber das Teilungsverhältnis des Goldenen Schnittes.

Übersetze ich nun die Fortsetzbarkeit der stetigen Teilung durch Abtragen und Antragen aus dem Geometrischen ins Arithmetische, so kann ich sagen, sobald ich nur erst das Verhältnis der Teile des primitiven Ganzen gefunden habe, ich alle folgenden Unterabteilungen durch einfache Subtraktion ermitteln oder auch aus einem bekannten stetigen Verhältnis neue durch einfache Addition bilden kann. Wir wissen, daß durch ganze Zahlen das Verhältnis der stetigen Teilung nicht genau ausgedrückt werden kann, wohl aber lassen sich auch ganze Zahlen angeben, die mit ziemlicher Annäherung der stetigen Teilung entsprechend sich verhalten. Haben wir z. B. eine Strecke von 89 cm und teilen sie in 55 und 34 cm ein, so haben wir ziemlich genau stetige Teilung, denn die Proportion*)

$$89 : 55 \sim 55 : 34$$

ist das Produkt der äußeren Glieder 3026 und das Quadrat des mittleren Gliedes 3025. Diese große Annäherung ermöglicht es uns, durch Subtraktion noch eine ganze Reihe derartiger Verhältnisse abzuleiten, ohne daß wir uns — wenigstens bis auf die letzten Glieder — erheblich von den Größenbeziehungen der stetigen Teilung entfernen, trotzdem an sich die Ungenauigkeit sich nicht nur bei der Wiederholung fortsetzt, sondern vergrößert.

In der folgenden Tabelle sei das mittlere Glied immer nur einmal aufgeführt.

	Produkt der äußeren Glieder	Quadrat des Mittelgliedes
89 : 55 : 34	3 026	3 025
55 : 34 : 21	1 155	1 156
34 : 21 : 13	442	441
21 : 13 : 8	168	169
13 : 8 : 5	65	64
8 : 5 : 3	24	25
5 : 3 : 2	10	9
3 : 2 : 1	3	4

* Das Zeichen $\sim$ bedeute „angenähert gleich“.

Wenn wir darauf verzichten, das Verhältnis in ganzen Zahlen auszudrücken, und Brüche zu Hilfe nehmen, um gleich das erste Verhältnis recht genau zu bestimmen, so wird die obere von Zeile zu Zeile sich verstärkende Ungenauigkeit so gut wie ganz vermieden. Nehmen wir die ursprüngliche Strecke gleich 1000 an, so werden die Teile 618,033 9887 und 381,966 0113. Alle folgenden erhalten wir durch einfache Subtraktion, und immer stehen drei aufeinander folgende zueinander im Verhältnis der stetigen Proportion. Die Reihe dieser Zahlen ist:

1000,000 0000	55,728 0904	3,105 6272
618,033 9887	34,441 8531	1,919 3671
381,966 0113	21,286 2373	1,186 2601
236,067 9774	13,155 6158	0,733 1070
145,898 0339	8,130 6215	0,453 1531
90,169 9435	5,024 9943	0,279 9539

Runden wir bei den letzten drei Zahlen ab auf:

0,733 0,453 0,28,

so bekommen wir: als Produkt der äußeren Glieder 0,20 524,

als Quadrat des mittleren Gliedes 0,20 540 9.

Wir erkennen: es ist auch in den letzten Zahlen noch eine ziemliche Genauigkeit.

Die stetige Teilung in Geometrie und Stereometrie.

Doch zurück von der abstrakten Welt der Zahlen zu den anschaulichen geometrischen Gebilden! Wir wollen das weitere Vorkommen dieser so besonderen Teilung, die die Alten darum schon als den Schnitt schlechthin „ἡ τομή“ bezeichneten, in der Geometrie des näheren erörtern. Da ist ja zunächst die Konstruktion des regelmäßigen Zehnecks und Fünfecks mit Hilfe des Goldenen Schnittes allgemein bekannt. Auch diese Kenntnis reicht zurück bis auf die Alten, Euklid behandelt diese Konstruktion der ein- und umbeschriebenen Vielecke im IV. Buche.

Denke ich mir ein regelmäßiges Zehneck vom Mittelpunkt aus in die 10 Teildreiecke zerlegt, so ist jeder der Winkel an der Spitze M dieses gleichschenkligen Teildreiecks MAB gleich $\frac{360}{10} = 36^0$, jeder der Basiswinkel also $\frac{180-36}{2} = 72^0$. Ziehe ich daher von A die Winkelhalbierende AC, so wird ein neues gleichschenkliges Dreieck ABC abgeschnitten, das wegen der Gleichheit der Winkel dem ganzen ähnlich ist. Da in ähnlichen Dreiecken die gleichliegenden Seiten proportional sind, so erhalte ich infolgedessen die Proportion

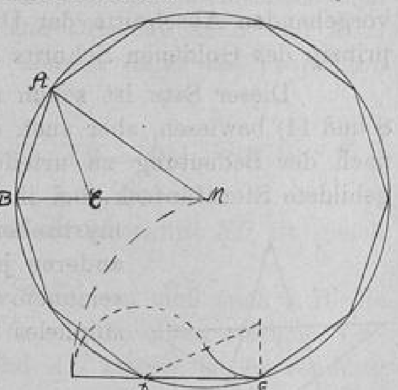

Fig. 10.

$$MB : AB = AB : BC.$$

Da $AB = AC = MC$ ist:

$$MB : MC = MC : BC.$$

C teilt also *MB* stetig, und der größere Abschnitt dieses Radius ist gleich der Seite des regelmäßigen Zehnecks. Ich kann also einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges Zehneck dadurch einbeschrieben, daß ich den Radius z. B. *MB* stetig teile und den größeren Abschnitt *MC* als Sehne bzw. Seite des regelmäßigen Zehnecks zehnmal in dem Kreise abtrage. Wenn mir aber die Seite des regelmäßigen Zehnecks gegeben ist, so kann ich dieses selbst dadurch zeichnen, daß ich zunächst den Radius des Umkreises konstruiere. Dieser Radius muß die Strecke sein, zu der die gegebene Seite der in stetiger Teilung gewonnene größere Abschnitt ist, er wird daher leicht dadurch erhalten, daß ich die Seite selbst stetig teile und sie um ihren größeren Abschnitt verlängere. In der Figur ist dies an der Seite *DE* ausgeführt.

Wie das Zehneck, so ist dann auch das regelmäßige Fünfeck durch stetige Teilung des Radius dem Kreise einzubeschreiben. Ich brauche nur, um die Seiten des Fünfecks zu erhalten, zwei durch einen Eckpunkt getrennte Eckpunkte des regelmäßigen Zehnecks miteinander zu verbinden.

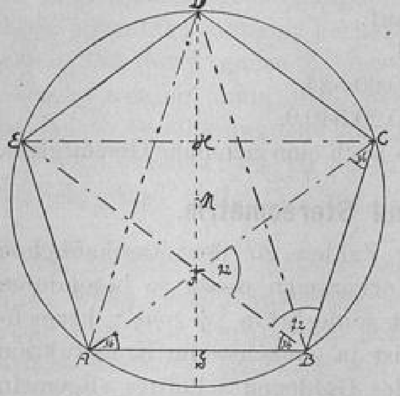

Fig. 11.

Dieses regelmäßige Fünfeck kann man beinahe als Idealfigur für den Goldenen Schnitt bezeichnen. Denn ziehe ich in ihm die Diagonalen oder, wie ich auch sagen kann, verbinde ich die Eckpunkte so, daß ich ein sogenanntes „gekreuztes“ Fünfeck erhalte, so stehen diese Diagonalen (oder auch „sekundäre Seiten“) des Fünfecks zu dessen „primären“ Seiten im Verhältnis der Abschnitte einer stetig geteilten Strecke, und diese Seiten schneiden sich teils untereinander, teils mit den aus ihren Eckpunkten zu ziehenden Durchmessern des umbeschriebenen Kreises dergestalt, daß die daraus hervorgehenden Abschnitte der Diagonalen wie der Halbmesser sämtlich dem Teilungsprinzip des Goldenen Schnitts entsprechen.

Dieser Satz ist schon seinem Hauptinhalte nach bei Euklid (Elemente XIII, 8 und 11) bewiesen, aber auch den Pythagoräern muß er schon bekannt gewesen sein, nach der Bedeutung zu urteilen, die das „Pentagramm“, das aus den Diagonalen gebildete Sternfünfeck, bei ihnen hatte. Und welche Bedeutung diese Figur in der mystischen Mathematik weiter behalten hat, zeigt uns unter anderen jene Stelle des Faust, wo das auf die Türschwelle gezeichnete Pentagramm den als Pudel hineingeschlüpften Mephistopheles hindert, wieder hinauszukommen.

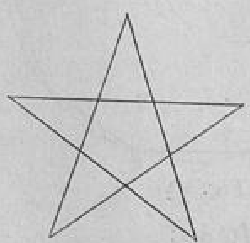
Fig. 12.

Mephistopheles:

Gesteh ich's nur: Daß ich hinausspaziere,
Verbietet mir ein kleines Hindernis,
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle —

Faust:

Das Pentagramma macht dir Pein?
Ei sage mir, du Sohn der Hölle,
Wenn das dich bannt, wie kamst du denn herein?
Wie ward ein solcher Geist betrogen?

Mephistopheles:

Beschaut es recht! es ist nicht gut gezogen;
Der eine Winkel, der nach außen zu,
Ist, wie du siehst, ein wenig offen.

Faust:

Das hat der Zufall gut getroffen!

Welch treffliche Mahnung empfangen wir hier für exaktes Zeichnen, es hätte dem Teufel den Eintritt verwehrt!

Von den oben angedeuteten Sätzen des Fünfecks möchte ich hier nur zwei ausführlich beweisen, da wir sie später zu anderen Zwecken nötig haben. Das ist zunächst der, daß zwei benachbarte Diagonalen sich stetig teilen und der größere Abschnitt der Diagonale gleich der Seite des regelmäßigen Fünfecks ist, und dann, daß auch die Höhe des Fünfecks von der Diagonale stetig geteilt wird. Wir nehmen in unserer Fig. 11 die Diagonale AC, die von der anderen BE in F geschnitten wird. Dann können wir zunächst die Winkelwerte der Dreiecke ABC und ABF bestimmen. Denn der Peripheriewinkel über der Fünfeckssehne ist gleich $\frac{360}{5} : 2$ oder gleich 36^0. Mithin ist

$$\begin{aligned} &< CAB = 36^0 \\ &< FBA = 36^0 \\ &< ACB = 36^0. \end{aligned}$$

Als Außenwinkel ist also $< CFB = 72^0$ und auch für CBF bleibt nach dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck 72^0 übrig. Die Dreiecke AFB und ACB sind also gleichschenklig und einander ähnlich. Wir können daher die Proportion aufstellen:

$$AC : AB = AB : AF$$

oder da auch $AB = BC = CF$ ist:

$$AC : FC = FC : AF.$$

F ist also der stetige Teilpunkt von AC und der größere Abschnitt FC ist gleich der Seite des Fünfecks.

Teilen sich aber sämtliche Diagonalen in dieser Weise, so muß auch z. B. die Höhe DG des Fünfecks in H durch die Diagonale EC in demselben stetigen Verhältnis geteilt werden, denn die Parallelität von EC und AB macht die Anwendnng des Proportionallehrsatzes möglich.

Der Goldene Schnitt setzt uns auch in den Stand, an einer einzigen recht einfachen Figur die Seiten der einfachsten und ursprünglichsten unter den einem Kreise einzubeschreibenden regulären Polygone zu konstruieren. Zeichnen wir nämlich ein Rechteck, dessen kürzere Seite gleich dem größeren Abschnitte der nach stetiger Proportion geteilten längeren Seite ist, und teilen in diesem Rechteck $ABCD$ die Seiten wieder nach dem Goldenen Schnitt in den Punkten E, F, G, H und ziehen durch diese Punkte die Parallelen zu den Seiten, die sich in I schneiden mögen, dann ist, wenn wir AE als Radius betrachten:

1. AF die Seite des regulären Dreiecks,
2. AG „ „ „ „ Vierecks,
3. AI „ „ „ „ Fünfecks,
4. AE „ „ „ „ Sechsecks,
5. BE „ „ „ „ Zehnecks.

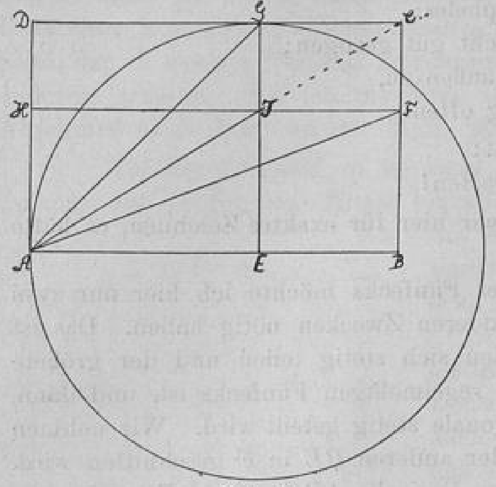

Fig. 13.

Beweis zu 1:

$$\overline{AF}^2 = \left[r + \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2$$

$$= \left(\frac{r}{2}\right)^2 [(\sqrt{5}+1)^2 + (\sqrt{5}-1)^2]$$

$$= \left(\frac{r}{2}\right)^2 . 12$$

$$= 3\,r^2$$

$$AF = r\sqrt{3};$$

zu 2:

$$AG^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2$$

$$AG = r\sqrt{2};$$

zu 3:

$$\overline{AI}^2 = r^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2$$

$$= \frac{r^2}{4}(4 + 6 - 2\sqrt{5}$$

$$AI = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

zu 4:

$$AE = r;$$

zu 5:

BE würde, auf AE abgetragen, AE stetig teilen.

Schließlich sei noch eine Figur gegeben, die sich durch die Fülle stetig geteilter Linien auszeichnet. Man zerlegt ein Quadrat mit der Seite $2a$ in 4 Teilquadrate mit der Seite a, zieht die Diagonalen der Quadrate und Rechtecke und trägt auf den Rechtecksdiagonalen vom Mittelpunkte der Quadratseite eine Strecke gleich der halben Quadratseite ab, z. B. $GI = GD = a$. Diesen Teilpunkt verbindet man mit den Ecken des Quadrates und verlängert die Verbindungslinie bis zum Schnitt mit den Quadratseiten. Dann werden Seiten und Diameter und Diagonalen und Transversalen durch einander in Abschnitte zerlegt, die in ihrem Verhältnis zueinander auf die eine oder andere Weise dem Gesetze des Goldenen Schnittes entsprechen.

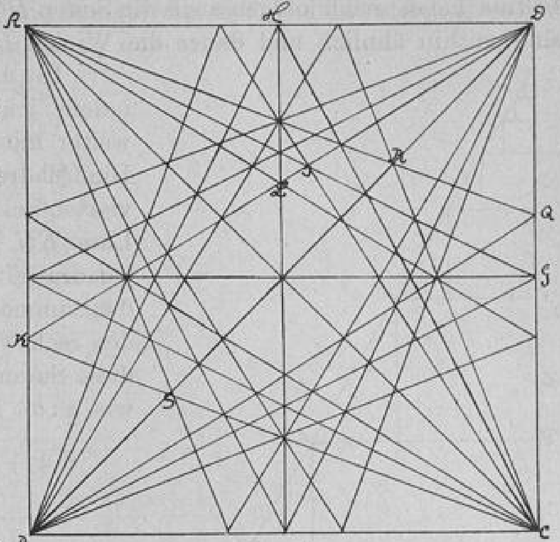

Fig. 14.

Von allen den Fällen seien nur folgende bewiesen:

1. K teilt AB nach dem Goldenen Schnitt,

denn $AG = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$

und $AI = a\sqrt{5} - a$

$$= a(\sqrt{5} - 1) = \frac{2a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

da nun $\triangle AIK \backsim GID$ ist, so ist

$$AI : AK = GI : GD$$
$$= 1 : 1$$

folglich auch $AK = AI = \frac{2a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

2. L ist der stetige Teilpunkt der halben Seite.

Denn nach dem Proportionalsatz verhält sich:

$$HL : HD = AK : AD$$
$$HL = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

3. CK schneide die Diagonale des Quadrates BD in S; dann ist $\triangle KBS \backsim DCS$; es verhält sich also

$$BS : DS = KB : DC$$
$$= \frac{2a}{2}(3 - \sqrt{5}) : 2a,$$

d. h. wie der k l e i n e r e Abschnitt zur ganzen Strecke.

Wenn ich aber auf der Diagonale BD von D aus das gleiche Stück $DR = BS$ abtrage, was ja schon durch die CK symmetrische Linie AQ geschieht, so wird BR in S stetig geteilt, ebenso natürlich DS in R.

Ein Satz, den wir bei unseren späteren stereometrischen Konstruktionen gebrauchen, möge die Anwendung der stetigen Teilung in der Geometrie beschließen. Dieser Satz lautet:

Zeichne ich ein Quadrat $ABCD$ mit der Seite a und verlängere die von A ausgehenden Seiten um b so, daß sie AE und AF in B und D stetig geteilt sind, und zeichne nun mit der Seite b über dem gegebenen Quadrat ein neues Quadrat $DGHF$, so liegt der Eckpunkt C auf der Verbindungslinie EH. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt sofort aus unserem oben bewiesenen Satze, daß der größere Abschnitt einer stetig geteilten Strecke wieder dadurch stetig geteilt wird, daß der kleinere Abschnitt darauf abgetragen wird. Im Dreieck CBE stellt also das Verhältnis $CB : BE = a : b$ das Verhältnis von Major zu Minor einer stetig geteilten Strecke dar und das gleiche Verhältnis haben nach obigen auch die Seiten HG und GC. Die Dreiecke HGC und CBE sind mithin ähnlich und daher die Winkel HCG und CEB einander gleich.

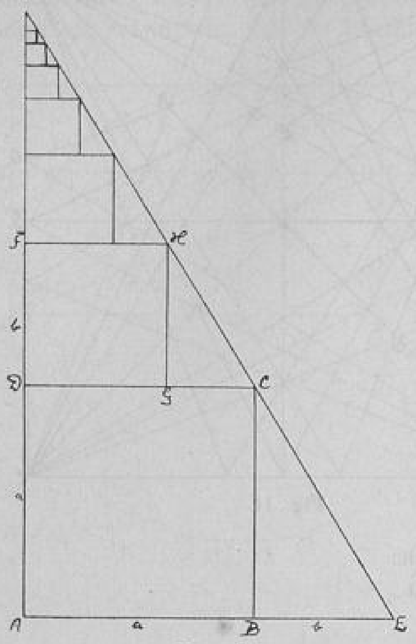

Fig. 15.

In dieser Weise könnte ich nun fortfahren, indem ich immer mit dem Rest, also zunächst weiter mit GC, ein neues Quadrat darüber zeichne. Die Quadrate werden dann immer kleiner und ihre vierten Ecken werden immer in der Verlängerung der Linie EH liegen. Bilde ich die Summe aller dieser Quadratseiten $a, b \ldots$, so muß ich als Grenzwert der Summe eine Strecke erhalten, die der Kathete AW des rechtwinkligen Dreiecks AEW gleich ist. Und diese Summe muß sich zu $(a + b)$ genau so verhalten wie $a : b$. Bilde ich diese Summe, so ist der Quotient

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad \text{also}$$

$$s = \frac{a}{1 - q}$$

$$= \frac{a}{1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

$$= \frac{2a}{3 - \sqrt{5}} = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

Es ist aber

$$a + b = a + \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$= \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Also

$$\frac{s}{a + b} = \frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} + 1} = \frac{(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 1)}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

und ebenso verhält sich auch

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{5} - 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Es ist also von der ganzen Strecke AW die Strecke AF der größere Abschnitt und die ganze Strecke kann gewonnen werden, indem ich immer den größeren Abschnitt der letzten stetig geteilten Strecke antrage. Wir finden also durch die Betrachtungen unsere früheren Sätze bestätigt und ergänzt.

Man kann schließlich auch noch die Summe dieser unendlich vielen Quadrate aus den Abschnitten stetiger Teilung bestimmen und erhält so:

Da

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

so ist

$$q = \frac{b^2}{a^2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

folglich

$$s = \frac{a^2}{1-q} = \frac{a^2}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a^2}{2-3+\sqrt{5}} = \frac{2a^2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2a^2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{a^2}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Man kann also die Gesamtheit aller Quadrate auffassen als ein Quadrat, dessen Inhalt sich zu dem unseres ursprünglichen verhält wie der größere zum kleineren Teil einer stetig geteilten Größe.

Die Anwendung des Goldenen Schnittes in der Stereometrie möge hier nur an der Konstruktion des regelmäßigen Ikosaeders und Dodekaeders gezeigt werden. Auch diese Anwendung war bereits den Mathematikern des Altertums bekannt. Ja dieser Bekanntschaft mit der von uns jetzt „stetig" genannten Teilung ist es hauptsächlich zu verdanken, wenn es ihnen gelang, die Theorie der regulären Körper schon so früh bis zu jenem Grade der Vollständigkeit auszubilden, von dem uns andeutungsweise die Fragmente des Pythagoräers Philolaos und der Timäos des Plato, in ausführlicher Darstellung aber die Elemente Euklids und die ihnen angehängten Bücher Zeugnis ablegen. Wir geben hier in aller Kürze die Konstruktion des Ikosaeders:

Man zeichnet das Achsenkreuz und nimmt senkrecht zu den Achsen a die Seite des das Ikosaeder begrenzenden gleichseitigen Dreiecks an, die Länge dieser Seite $2b$ macht man gleich dem größeren Abschnitt der nach stetiger Proportion geteilten vollen Achse $2a$.

Beweis. Ich beweise, daß $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck ist

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = AD^2 + CE^2 + DE^2 = b^2 + a^2 + c^2$$

wo c der kleinere Abschnitt der stetig geteilten Strecke a ist, deren größerer b ist.

Wegen des stetigen Verhältnisses ist nun

$$a = \frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

$$c = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$AC^2 = b^2 + \frac{b^2}{4}(6 + 2\sqrt{5}) + \frac{b^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})$$

$$= 4\,b^2$$

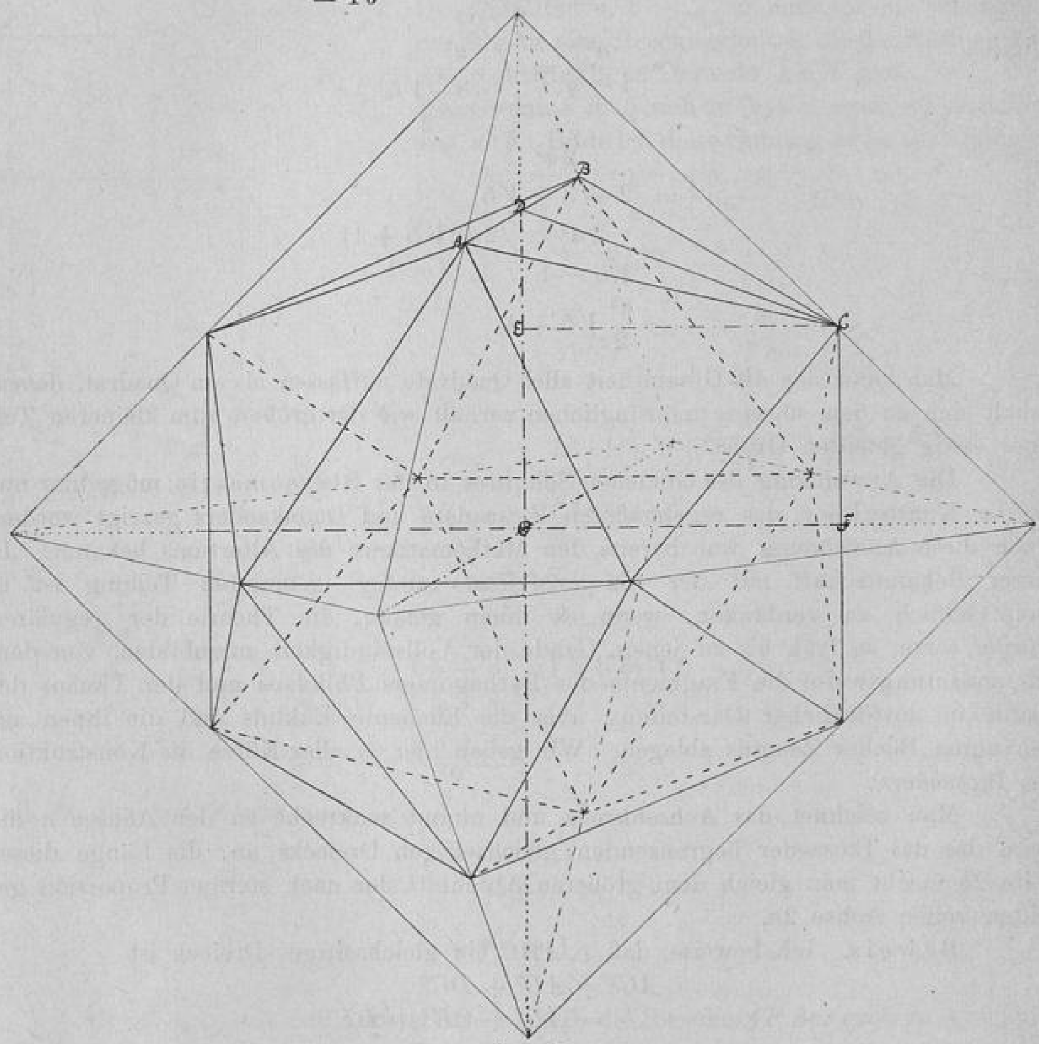

Fig. 16.

und daher ist

$$AC = 2\,b.$$

Dasselbe läßt sich auf gleichem Wege von allen anderen Seiten beweisen.

Man kann auch von einer anderen Ausgangsfigur mit Hilfe des Goldenen Schnitts zum Ikosaeder kommen. Denn verlängert man die Achsen um den größeren Abschnitt, so gehen die Verbindungslinien der Endpunkte durch die Eckpunkte des Ikosaeders. Daraus folgt: Teilt man die Halbachsen eines Oktaeders nach dem Goldenen Schnitte, und zwar so, daß der größere Teil vom Mittelpunkte des Achsenkreuzes O ausgeht, und zieht man durch die Teilpunkte jeder vollen Achse paarweise

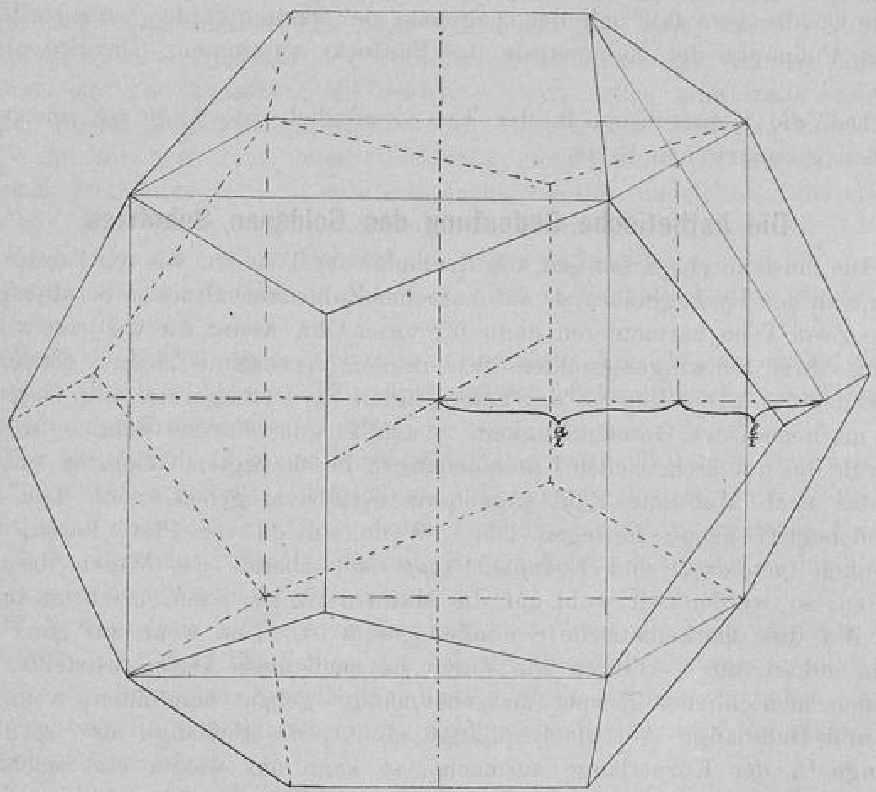

Fig. 17.

Parallele bis zu den Kanten, aber so, daß alle drei Achsenrichtungen zur Geltung kommen, so werden die Kanten in den Punkten eines Ikosaeders getroffen. Das Oktaeder wird abgestumpft, von jeder Abstumpfungsfläche aber wird nur die Hälfte der Ecken benutzt.

Auch die Konstruktion des regelmäßigen Dodekaeders beruht auf den Sätzen der stetigen Teilung. Das Dodekaeder wird von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt. Man zeichne nun einen Würfel, dessen Kante gleich der Diagonale des regelmäßigen Fünfecks ist. Im Würfel zeichne man das Achsenkreuz und verlängere jede Halbachse, die wir wieder, als halbe Würfelkante, gleich $\frac{a}{2}$ annehmen wollen, um ihren durch stetige Teilung gewonnenen größeren Abschnitt $\frac{b}{2}$. Dieser Teil ist ja dann, nach dem oben bewiesenen Satze vom regelmäßigen Fünfeck, gleich der halben Seite des das Dodekaeder begrenzenden regelmäßigen Fünfecks. Verbindet man nun den so erhaltenen Endpunkt einer Achse mit dem zugehörigen Halbierungspunkt einer Quadratseite, so ist durch diese Verbindungslinie und die Quadratseite die Ebene bestimmt, in die man die begrenzende Seitenfläche des Dodekaeders zu legen hat. Die Quadratseite fällt mit der Diagonale, der Endpunkt der vorliegenden Achse mit dem Fußpunkt der Symmetrale des Fünfecks zusammen. Die Seitenlänge ist gleich b.

Daß die Konstruktion in der Tat so möglich ist, folgt aus unserem oben bewiesenen geometrischen Satze.

Die ästhetische Bedeutung des Goldenen Schnittes.

Die musikalische Schönheit, die Harmonie der Töne ist, wie wir bereits oben erwähnten, von den Pythagoräern als auf einfachen Zahlenverhältnissen beruhend erkannt worden. Zwei Töne harmonieren dann für unser Ohr, wenn, wie wir jetzt wissen, das Verhältnis ihrer Schwingungszahlen sich in dem Verhältnis kleiner ganzer Zahlen ausdrücken läßt. „Die Zahl ist das Sein“ sagten die Pythagoräer, alles Gesetzmäßige ist eine mathematische Gesetzmäßigkeit. Auch für das Formal-Schöne, so glaubten schon früh die mit ästhetischen Untersuchungen beschäftigten Gelehrten, muß es ein bestimmtes nach Maß und Zahl angebbares Kriterium geben, nach dem sich der Schönheitsbegriff genau festlegen läßt. Wenn wir da von Plato hören, daß Abgemessenheit (*μετριότης*) und Ebenmaß (*ξυμμετρία*) überall das Wesen des Schönen ausmachen, so werden wir wohl auf die Mathematik gewiesen, erfahren aber nicht, welcher Art dies mathematische Schönheitsgesetz ist. Und wenn auf ganz anderem Wege, in induktivem Verfahren wie Vitruv, so auch unser Dürer feststellte, daß wir dann einen menschlichen Körper als „ebenmäßig“ gebaut empfinden, wenn die Gesichts- und Handlänge $^1/_{10}$, die Kopflänge als $^1/_8$, die Fußlänge als $^1/_6$, die Ellenbogenlänge $^1/_4$ der Körperlänge ausmacht, so kann uns wieder eine solche mathematische Präzision des Schönen nicht befriedigen. Wir vermissen hierin ein inneres einheitliches Gesetz, nach dem etwa ein Maß aus dem anderen hervorginge, alle Zahlenverhältnisse sind einzeln gefunden als Abstraktion einer Fülle von Abmessungen. Da hat nun ein Mathematiker aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts, Adolph Zeising (* 1810 zu Ballenstedt, † 1876 zu München), in einer Fülle von Schriften darzutun sich bemüht, daß die Teilung einer Strecke dann den befriedigendsten Eindruck auf unser Auge macht, wenn sie stetig geteilt ist. Und er verallgemeinerte, daß jeder irgendwie in zwei Teile gespaltene Gegenstand dann dem ästhetischen Prinzip unterliege, wenn das Ganze zum größeren Teile wie dieser zum kleineren sich verhalte.

Und zwar sucht er zunächst zu beweisen, daß die stetige Teilung ihrem Wesen nach die idealste Teilung darstelle, wie Luca Paciuolo nennt: divina proportione (Florenz 1509). Er knüpft an Platos Überlegungen an (Timäos 31 B): Zwei Dinge allein aber ohne ein drittes zusammenzufügen ist unmöglich, denn in der Mitte muß irgendein verknüpfendes Band sein. Der Bänder schönstes aber ist das, welches sich und das Verbundene so viel als möglich zu Einem macht. Dies aber auf das Schönste zu bewirken, ist die Proportion (*ἀναλογια*) da. Diese Proportionalität, so sagt Zeising*), ist danach diejenige Schönheit, welche den Gegensatz von Einheit und Unendlichkeit, von Gleichheit und Verschiedenheit dadurch zur Harmonie aufhebt, daß sie das ursprünglich als Einheit zu denkende Ganze, mit der Zweiteilung beginnend, in ungleiche Teile teilt, diesen Teilen aber ein solches Maß gibt, daß die Ungleichheit der Teile durch eine Gleicheit der Verhältnisse zwischen dem Ganzen und seinen Teilen einerseits und zwischen den beiden anderen Teilen andrerseits ausgeglichen wird. Ein diesem Begriff entsprechendes Proportionalgesetz wird also lauten müssen:

Wenn die Einteilung oder Gliederung eines Ganzen in ungleiche Teile als proportional erscheinen soll, so muß das Verhältnis der ungleichen Teile zueinander dasselbe sein, wie das Verhältnis der Teile zum Ganzen.

Es genügt ein einziger Schritt, um dieses aufgestellte Gesetz aus der Sphäre der Allgemeinheit unmittelbar in das Gebiet der mathematischen Bestimmtheit hinüberzuführen. Es muß lauten:

Wenn die Einteilung eines Ganzen in ungleiche Teile als proportional erscheinen soll, so muß sich der kleinere Teil zum größeren rücksichtlich seines Maßes ebenso verhalten wie der größere zum Ganzen.

Das ist aber die von uns oben behandelte stetige Teilung. Und nun hat sich Zeising die Aufgabe gestellt, allenthalben auf dem ungeheuren Gebiete der Formen die Richtigkeit des von ihm gefundenen Grundgesetzes am speziellen Falle nachzuweisen. So ungeheuer diese Riesenaufgabe erscheint, er ist ihr in der Tat bis zu einem gewissen Grade gerecht geworden.

Nicht überallhin können wir ihm folgen. Wenn wir auch verstehen, daß der Erfinder im begreiflichen Idealismus sein Prinzip überall in Geltung zu sehen glaubte, so können wir in vielen Einzelheiten unmöglich seine Ansicht teilen. Aber das Wenige, was wir im folgenden bringen, wird uns sicherlich von der Richtigkeit der Grundidee überzeugen.

Vor allem ist es da der menschliche Körper, der in seinen Dimensionen der stetigen Teilung gesetzliche Proportionen aufweist. Wir wollen am menschlichen Idealkörper Apolls von Belvedere — nur in den wichtigsten Teilen, nicht bis in alle Einzelheiten — das Verhältnis dieser Maße kennen lernen. Es verhält sich da der kürzere Oberkörper (vom Scheitel bis zum Nabel) zum längeren Unterkörper (vom Nabel bis zur Sohle) wie dieser zur ganzen Körperlänge. Diese teilende Linie (J in der Figur) ist auch am Skelett besonders gekennzeichnet, es ist die Lücke zwischen den unteren

*) Zeising, Neue Lehre von der Proportionalität des menschlichen Körpers. Leipzig 1854.

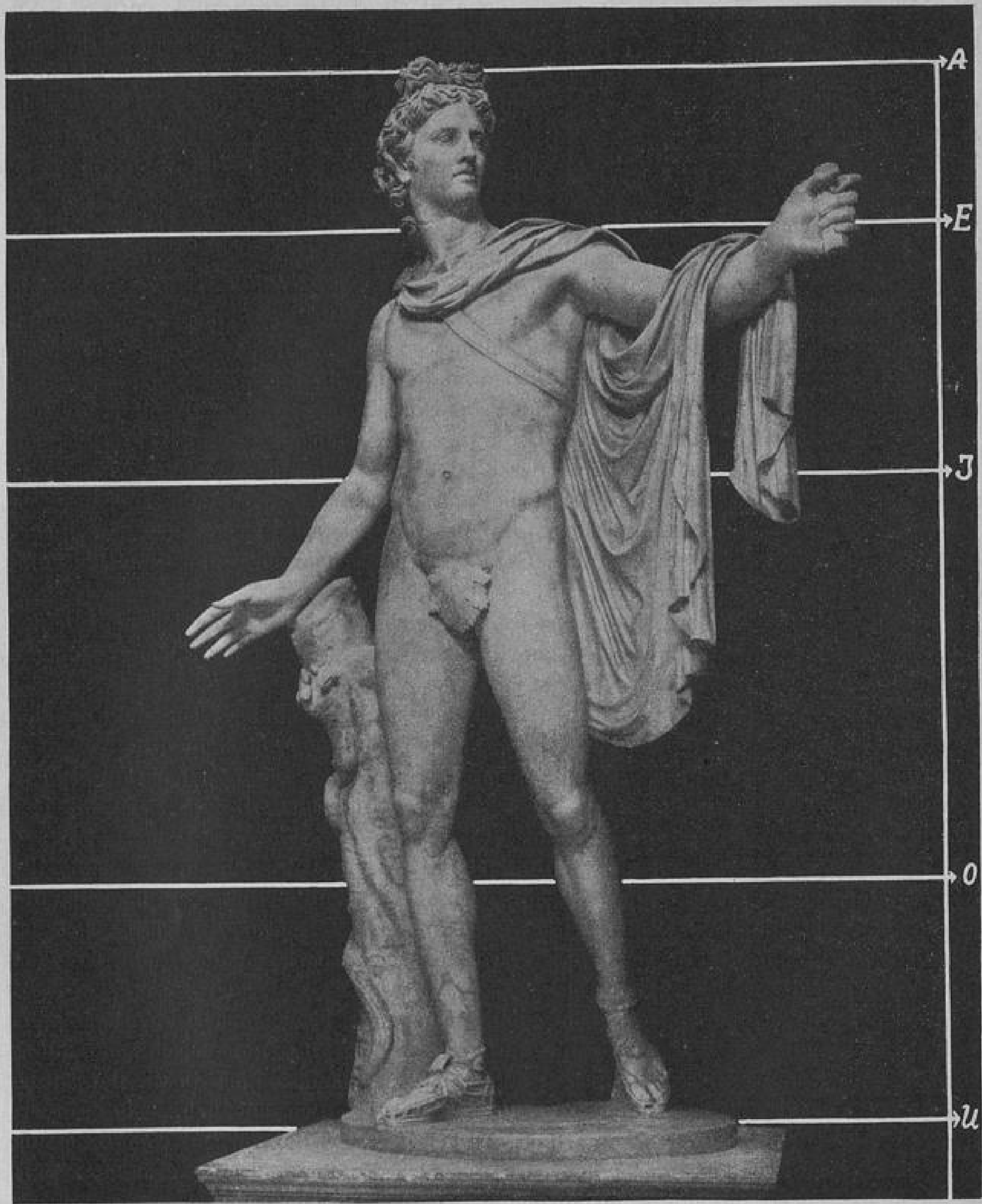

Fig. 18.

Rippen und dem Kamm der Hüftknochen, am bekleideten Körper fällt sie mit dem Gürtel zusammen. Auch in anderer Weise unterscheiden sich Ober- und Unterkörper: Der obere Teil hat den Charakter der Einheit, des Insichharrens, der untere zeigt ein Bild der Entzweiung, der Spaltung, des Aussichherausgehens. So können wir das Ganze als eine Dreieinigkeit auffassen. Aber auch bei der weiteren Einteilung finden wir die divina proportione bestätigt. Wie am Oberkörper der Hals, so ist am Unterkörper das Knie der augenfälligste Einschnitt. Die Linie, die den Rumpf vom Halse trennt, die Schulterhöhe, in unser Figur die Linie E, teilt AJ stetig. Beim Knie dürfen wir nicht das Knie selbst nehmen, sondern den Einbug unter dem Knie, den auch Albrecht Dürer schon als Teilpunkt für Maße nimmt. Auch diese Linie O der Kniebucht, des sougenouil, teilt JU nach dem Goldenen Schnitt, so daß sich die Länge des ganzen Unterkörpers zur Länge des Oberschenkels wie dieser zum Unterschenkel verhält. Man kann die Einteilung noch weiter vornehmen, so können wir den Kopf im besonderen durch eine Linie in der Höhe des Randes der Augenhöhlen einteilen, und wir finden, daß die Maße der unteren Kopfpartie (vom Orbitalrande bis zum Kehlkopf) in mittlerer Proportion stehen zur Höhe der oberen Kopfpartie und der Länge des ganzen Kopfes. Doch es würde zu weit führen, auf alles hier einzugehen. Nur ein Bild der Hand sei hier noch gegeben, bei der als dem nächst dem Kopfe ausgebildetsten Gliede des menschlichen Körpers sich das mathematische Gesetz der Gliederung mit am besten zeigt.

Wir sehen also:

1. Die Hinterhand Oq (von der Handwurzel bis zu den Knöcheln) verhält sich zur Vorderhand qU (von den Knöcheln bis zur Spitze des Mittelfingers) wie diese zur ganzen Hand OU.
2. Das hintere Fingerglied qr (von den Knöcheln bis zur mittleren Gelenkfalte des Zeige- oder Goldfingers) verhält sich zu den beiden vorderen Fingergliedern rU (von der genannten Gelenkfalte bis zur Mitte des Mittelfingers) wie sich diese zur ganzen Vorderhand qU verhalten.
3. Das Mittelglied des Zeige- oder Goldfingers rs verhält sich zum Rest der Hand sU (von der mittleren Gelenkfalte des Vordergelenkes vom Zeige- und Goldfinger bis zur Mitte des Mittelfingers) wie dieser Rest zur Summe der beiden Vorderglieder.

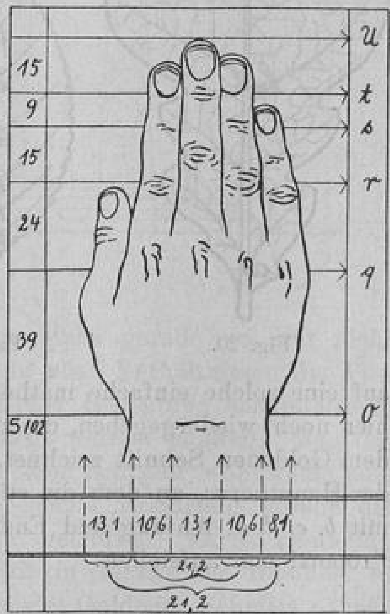

Fig. 19.

Auch die Ausdehnungen in der Breite des menschlichen Körpers lassen sich untereinander und zu den Maßen der Höhen in Verhältnisse bringen, die den mathematischen Proportionen des Goldenen Schnittes gleichkommen. Das Grundgesetz hierfür würde so lauten: Die Ausdehnung in der Breite muß zur Ausdehnung in der Höhe in dem Verhältnis stehen, daß die durch symmetrische Teilung gewonnene Hälfte der Breite dem kürzeren Oberteil der Totalhöhe gleich ist, mithin zum längeren Unterteil sich ebenso verhält wie dieser Unterteil zur Totalhöhe.

So viel vom menschlichen Körper. Aber auch in andern Naturerscheinungen manifestiert sich mit merkwürdiger Präzision das Proportionalgesetz des Goldenen Schnittes. Wir wollen nicht wie Zeising im Makrokosmos, am Sternenhimmel, in dem Abstande der Planeten, in der Gestaltung der Erde seine Bestätigung suchen, wir wollen auch nicht die mikroskopische Welt, das Gefüge der Mineralien und das Zellgewebe der Pflanzen, auf dieses mathematische Grundgesetz hin untersuchen. Es wäre falsch, wenn man annähme, man könnte die Größengestaltung dieser beiden Welten

Fig. 20.

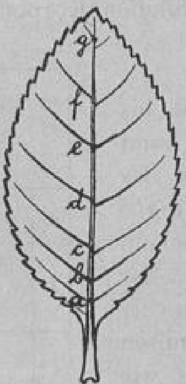

Fig. 21.

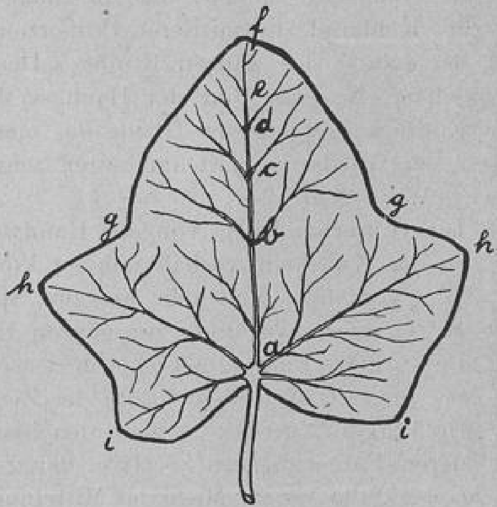

Fig. 22.

auf eine solche einfache mathematische Formel bringen. Nur ein paar Blätter seien hier noch wiedergegeben, die zeigen, in welch merkwürdiger Weise die Natur nach dem Goldenen Schnitt zeichnet. Markieren wir uns bei einem Eichenblatt die Punkte des Hauptnervs, an dem die stärksten Nervenäste entspringen und bezeichnen wir sie mit b, c, d, e, Anfang und Ende derselben aber mit a und f, so lassen sich folgende Proportionen aufstellen:

$$cb : ba = ba : ca$$
$$fe : ec = ec : fc$$
$$ed : dc = dc : ec$$

Außerdem ist ce gleich der Hälfte der äußeren Breite des Blattes, so daß sich auch diese Dimensionen den obigen einordnen. Bei Rosenblatt und Efeublatt, deren

Skizzen wir ebenfalls geben, sind ziemlich die gleichen Verhältnisse leicht festzustellen.

Rosenblatt:	$ab : bc = bc : ac$	Efeublatt:	$fe : ed = ed : fd$
	$bc : cd = cd : bd$		$ed : dc = dc : ec$
	$ad : dg = dg : ag$		$dc : cb = ca : db$
	$ef : ed = ed : fd$		$cb : ba = ba : ca$
	$gf : fd = fd : dg$		

Wahre Triumphe feiert das ästhetische Gesetz auf Grund der Teilung nach dem Goldenen Schnitt in der **Baukunst**. Vor allem sind es die Bauten der Perikleischen Periode, die als klassische Kronzeugen für dies ästhetische Teilungsprinzip gelten können. Allerdings könnte hier eingewandt werden, daß die Abmessungen dieser Bauten nicht mit dem Gefühl, sondern mit dem Verstande

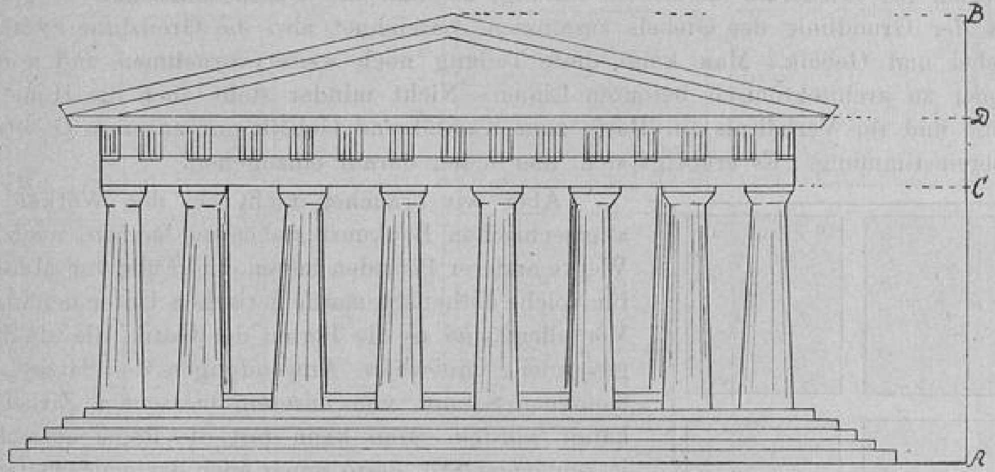

Fig. 23.

gewählt sind, daß nicht das Schönheitsbedürfnis die Maße gerade so und nicht anders bestimmte, sondern daß für die Tempelbauten in allen Verhältnissen die Proportionen der schon damals bekannten und mit mystischer Bedeutung ausgestatteten stetigen Teilung, der Teilung schlechthin, zugrunde gelegt werden mußten. Mag das für manche Größen zutreffen, für alle Einzelheiten war dem Künstler wohl kaum eine solche Fessel aufgelegt. Und vor allem wird durch solche Erklärung gerade die ästhetische Wirkung des Goldenen Schnittes selbst nicht getroffen. Es ist zweifellos, daß für alle Zeiten diese athenischen Bauten den Stil in klassischer Reinheit zu verkörpern scheinen, und wenn gerade hier das Gesetz des Goldenen Schnitts nahezu mit mathematischer Präzision regiert, so möchte man um so mehr an eine solche mathematische Grundlage des ästhetischen Gesetzes glauben. Es mag sein, daß der Künstler bewußt die Maße im stetigen Verhältnis wählte, aber er tat es, weil es so das künstlerisch wirksamste Verhältnis anwandte.

Bei dem schönsten und vollendetsten Werke der griechischen Architektur, dem Parthenon zu Athen, beträgt die Breite 32 m, die Höhe aber, gemessen von der Grundlinie der Treppe bis zur Spitze des Giebels 20 m. Vergleichen wir diese Maße, so erkennen wir, daß ziemlich genau die Breite mittlere Proportionale ist zwischen der Höhe und der Summe beider. Teilen wir nämlich die Summe (52 m) stetig, so bekommen wir als Abschnitte 32,136 und 19,864, Werte also, die bis auf unbedeutende Bruchteile den oben angegebenen Maßen entsprechen. In ebenso überraschender Weise stimmt die Einteilung der Höhe AB mit unserem Gesetz überein. Teilt man nämlich diese nach dem Goldenen Schnitt, so reicht der längere Unterteil AC gerade bis zur Grundlinie des Gebälks, der kürzere Oberteil CB von da bis zur Spitze des Giebels; der erstere umfaßt also die Höhe der Säulen nebst den Stufen, der letztere hingegen die Höhe des Gebälks nebst der Höhe des Giebels. Unterwirft man den Oberteil BC wiederum derselben Teilung, so fällt die Durchschnittslinie D gerade mit der Grundlinie des Giebels zusammen, bezeichnet also die Grenzlinie zwischen Giebel und Gebälk. Man kann diese Teilung noch weiter vornehmen und kommt immer zu architektonisch betonten Linien. Nicht minder steht auch die Höhe der Säule und ihr Verhältnis zur Basis, zum Kapitäl und Gebälk mit unserem Gesetz in Übereinstimmung. Es erübrigt sich, hier näher darauf einzugehen.

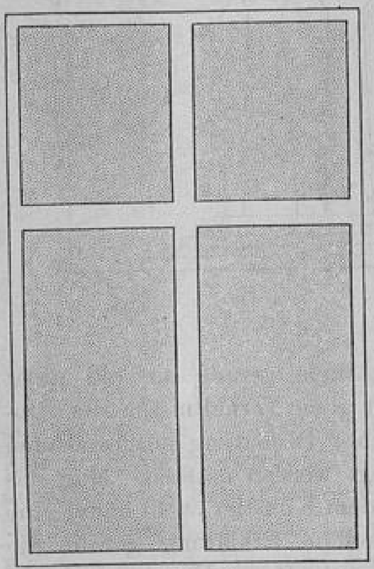

Fig. 24.

Aber wir brauchen nicht bei den Werken der altgriechischen Baukunst stehen zu bleiben, auch die Werke anderer Perioden bieten eine Fülle von Material für solche ästhetisch-mathematischen Untersuchungen. Vor allem sind es die Perlen der Gotik, die als Stein gewordene, unbewußte Anwendungen des Satzes vom Goldenen Schnitt von unserem messenden Zirkel erkannt worden. Man kann fast die Regel aufstellen, je reiner der Stil, desto reiner auch das mathematische Gesetz. Aber wir wollen uns nicht in alle diese Einzelheiten verlieren, vielmehr möge es gestattet sein, an einem fast trivialen Beispiele die ästhetische Bedeutung des Goldenen Schnittes auch für die heutige Baukunst darzutun. Wir nehmen ein Fenster, und zwar ein ganz gewöhnliches rechteckiges Fenster, das bei unseren modernen Bauten immer noch das allgemeinste ist. In welchem Verhältnis müssen Höhe zu Breite stehen, damit das Fenster nicht „zu schmal" und nicht „zu breit" erscheint? Wir müssen hier ausschalten alle die Fälle, wo das Fenster für ganz bestimmte Zwecke gebaut ist. Diese können es erfordern, daß das Fenster z. B. recht breit gemacht werden muß, und wenn es so diesem seinem Zwecke am besten angepaßt ist, wird es uns auch so am schönsten erscheinen. Diese Nebenzwecke verschleiern unser Problem, wir nehmen sie daher nicht als gegeben an. Wir nehmen auch nicht an, daß vielleicht gerade ein durch seine Dimensionen unschön, zum mindesten auffallend wirkendes Fenster vom Baumeister beabsichtigt ist, das sich dann sehr wohl dem Ganzen schön einfügen kann. Wir nehmen vielmehr hier das Fenster an sich und es soll uns ein Beispiel mit zwei Gegenbeispielen vor Augen führen, daß in der Tat dann das Fenster in seinen Ausmessungen wohl proportioniert erscheint, wenn die Breite der größere Abschnitt der stetig geteilten Höhe des Fensters ist, oder was dasselbe ist, wenn die Höhe mittlere Proportionale zwischen der Breite und der Summe beider ist. Ist bei derselben Höhe die Breite kleiner, so erscheint das Fenster unangenehm lang, umgekehrt stark gedrückt. Das Fensterkreuz teilt dann weiter die Höhe stetig.

Wir müssen aber, wenn wir diese Dimensionen in der Höhe und Breite miteinander vergleichen, unter anderem eines zunächst berücksichtigen. Wir wissen,

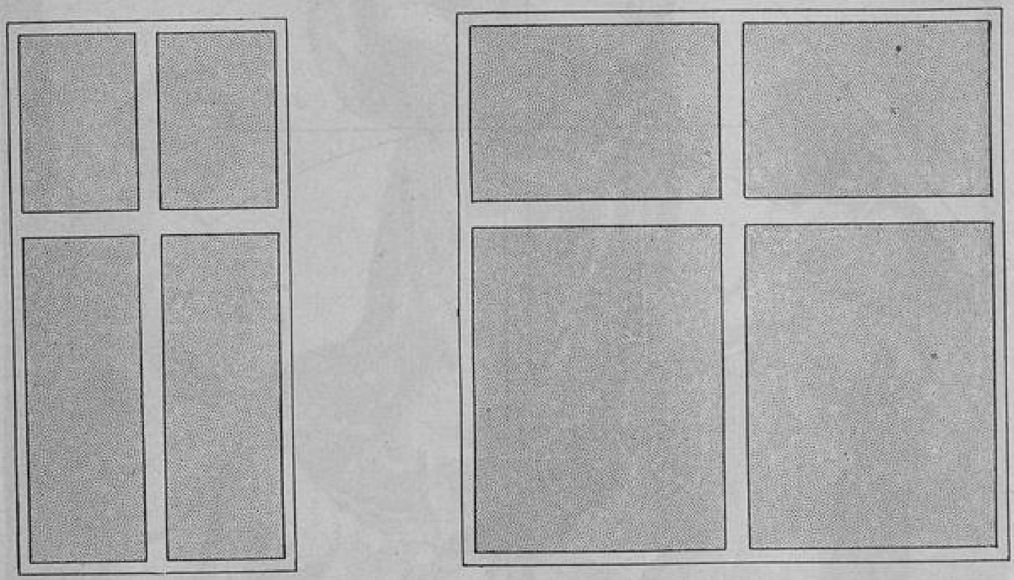

Fig. 24a.

daß, wenn wir uns nach Anschauung ein Quadrat an die Tafel oder Wand zeichnen, dieses sich beim Ausmessen fast nie als Quadrat erweist, sondern stets haben wir die Höhe länger genommen als die Breite. Wir werten also Dimensionen in diesen zwei Richtungen nicht gleich stark, wir dürfen also, wo es sich um ästhetisches Empfinden, also bloße Anschauung handelt, nicht genau die Einheiten in der Höhe und in der Breite einander gleichsetzen, die Größen nicht ohne weiteres in eine mathematische Relation setzen. Und zweitens kommt es natürlich sehr darauf an, wie die Räume ausgefüllt sind. Gardinen und Vorhänge, die im wesentlichen den oberen Teil des Fensters einnehmen, geben Konstanten ab, die wir abziehen müssen, wollen wir das Grundgesetz in der mathematischen Reinheit erkennen.

Fig. 25.

So sehen wir an diesem so an sich einfachsten Falle des Fensters schon, wie außerordentlich verwickelt die Beziehungen in der Praxis werden. Es ist unmöglich, alle formale Schönheit etwa auf eine mathematische Konstruktion zurückführen zu wollen. Haben wir da schon in der Baukunst Schwierigkeiten, so ist das selbstverständlich in der Plastik und vor allem der Malerei noch viel stärker der Fall. Und doch! Selbst auf dem letzteren Gebiete, wo die Farben, das Stoffliche eine so vorherrschende Rolle spielen, können wir doch in bezug auf die Anordnung wieder unseren Goldenen Schnitt als ästhetischen Erläuterer zu Hilfe zu rufen. Wir wählen eines der größten Werke aller Zeiten: die Sixtinische Madonna. Wir werden sehen, in welch wunderbarer Weise der Zusammenklang von Symmetrie, Gruppierung und Goldenem Schnitt hier stattfindet*), bei einem Gemälde, das in jeder Hinsicht, also auch in bezug auf die Anordnung, stets für eines der edelsten Meisterwerke der Kunst gehalten worden ist.

Wir können das Bild in seiner Längsrichtung in doppelter Weise in zwei symmetrische Teile zerlegen, einmal geometrisch halbierend durch die Linie AB, andererseits ästhetisch durch eine Linie, die das Gesicht der Madonna als Längsachse schneidet und zur ersteren parallel ist, wir nennen sie JK. Beide haben für die Gesamtanordnung ihre Bedeutung, wir wollen die eine die geometrische, die andere die ästhetisehe Achse des Bildes nennen. Beide stören sich nicht, sie erscheinen vielmehr gleichsam nur wie zwei verschiedene Äußerungen ein und derselben Achse. Schon beim ersten Anblick des Bildes haben wir den Eindruck des künstlerisch wichtigen pyramidalen Aufbaues. Aber es ist erstaunlich, wie sehr er mit der Achse zusammenpaßt. Denn eine Linie, die den Kopf des heil. Sixtus und den der Madonna berührt, schneidet nur wenig loses Haar von dem Kopfe des Christenkindes ab und trifft die Achse JK gerade in dem Punkte P, in welchem auch die symmetrische Linie, die von dem Kopf der heil. Barbara ausgehend den Kopf der Madonna ähnlich berührt, die Achse schneidet. Diese beiden Linien LP und MP sind gleich lang. Analog können wir bei den Engelköpfen verfahren. Für die weitere Anordnung der Figuren und vor allem deren Größen gibt uns die Teilung durch den Goldenen Schnitt die Maßbestimmungen. Teilen wir nämlich die Längsachse stetig, so bekommen wir in C den Punkt, der genau mit der Fußsohle des Christuskindes zusammenfällt. Teilen wir beide Abschnitte stetig, so bekommen wir im Teilpunkte D des größeren Abschnittes die Fußspitze der Madonna, im Teilpunkt E des kleineren Abschnittes deren linken Augenwinkel. Der Schnittpunkt der Linien PM und AB, wir nennen ihn F, der gleichzeitig die Grenze des Kopfes der Madonna angibt, ist für den letzteren oberen Abschnitt AE der goldene Teilungspunkt. Ebenso gibt auch der stetige Teilpunkt des untersten Abschnittes die Schulter des größeren Engels an.

Die Anordnung und Maßbestimmung der Hauptfigur ist damit vollkommen gegeben. Aber auch für die Nebenfiguren können wir eine innige Beziehung zu

*) Siehe die ausführliche ästhetische Analysierung dieses Gemäldes bei Dr. Riegel, Grundriß der bildenden Künste, Hannover 1865.

den konstruierten Punkten feststellen. Denn die Halsgruben beider Heiligen sind von der Fußspitze der Madonna gleich weit und zwar ebenso weit entfernt wie die Fußsohle des Christuskindes. Schläfe der Barbara und Nasenspitze des heil. Sixtus liegen aber auf einer Horizontale, die durch C hindurchgeht.

Es ist hier nicht der Ort, darzutun, wie der Künstler trotz der strengen geometrischen Anordnung in seinem Werke freie Bewegung und malerische Auffassung gegeben hat.

Aber nicht nur Raffaels unsterbliches Werk, auch viele andere Gemälde auch der modernen Malerei lassen sich in ähnlicher Weise mathematisch-ästhetisch betrachten, und immer, mehr oder weniger offensichtlich, liegt bei Einteilung und Gruppierung die Teilung nach dem goldenen Schnitt zu Grunde. Man wird erstaunt sein, wie häufig man ihm begegnet, wenn nur erst der Blick dafür geschärft ist. Es soll damit natürlich in keiner Weise behauptet werden, daß die Künstler, an ihrer Spitze Raffaelo Santi, auf die Leinwand die teilenden Linien gezeichnet und darauf die Teilungspunkte nach dem goldenen Schnitt mathematisch konstruiert hätten, und dann erst auf diesem geometrisch gezeichneten Gradnetz das Gemälde entstanden wäre. Das malerische Gefühl trifft die edelsten Maße und Verhältnisse und bedarf keiner vom Verstande geliehenen Krücken. Der Künstler empfindet die Harmonie der Maße und Verhältnisse, ohne ihre geometrische Übereinstimmung zu erkennen, er trägt die Gesetze seiner Kunst lebendig in sich und übt sie unbewußt aus.

Was erst, nachdem Jahrtausende verflossen,
Die alternde Vernunft erfand,
Lag im Symbol des Schönen und des Großen
Voraus geoffenbart dem kindischen Verstand.

Es war unmöglich, in dem engen Rahmen einer Programmarbeit alles zu geben, was eine Monographie des goldenen Schnittes enthalten müßte. Zu reich ist der Stoff, zu groß die Gebiete, auf die das mathematische Gesetz angewandt wurde oder in denen es sich wunderbar offenbart. Die vorliegende Arbeit soll nur einen knapp gefaßten Überblick geben über das, was zu sagen wäre. Es war die Absicht, aus der Fülle dessen, was zum Teil schon in einer reichen Literatur niedergelegt ist, das herauszuheben, was heutzutage noch für uns allgemein von Interesse und Bedeutung ist. Auch so schon gewinnt der starre mathematische Satz Blut und Leben, und auch bei diesem kurzen Streifzuge verstehen wir das Wort vom „goldenen“ Schnitt, von der „göttlichen“ Teilung.

---

den konstruierten P gruben beider Heiligen sind
von der Fußspitze d ebenso weit entfernt wie die
Fußsohle des Christ Nasenspitze des heil. Sixtus
liegen aber auf eine geht.

Es ist hier Künstler trotz der strengen
geometrischen Anord regung und malerische Auf-
fassung gegeben hat.

Aber nicht h viele andere Gemälde auch
der modernen Maler mathematisch-ästhetisch be-
trachten, und imme h, liegt bei Einteilung und
Gruppierung die Teil Grunde. Man wird erstaunt
sein, wie häufig man Blick dafür geschärft ist. Es
soll damit natürlich daß die Künstler, an ihrer
Spitze Raffaelo Santi inien gezeichnet und darauf
die Teilungspunkte n tisch konstruiert hätten, und
dann erst auf diesen tz das Gemälde entstanden
wäre. Das malerisch und Verhältnisse und bedarf
keiner vom Verstand ler empfindet die Harmonie
der Maße und Verhä ereinstimmung zu erkennen,
er trägt die Gesetze übt sie unbewußt aus.

ssen,

Großen
stand.

Es war unmö er Programmarbeit alles zu
geben, was eine Mono halten müßte. Zu reich ist
der Stoff, zu groß die he Gesetz angewandt wurde
oder in denen es sic gende Arbeit soll nur einen
knapp gefaßten Überb wäre. Es war die Absicht,
aus der Fülle dessen, n Literatur niedergelegt ist,
das herauszuheben, w nein von Interesse und Be-
deutung ist. Auch so tische Satz Blut und Leben,
und auch bei diesem das Wort vom „goldenen"
Schnitt, von der „gött