Eine Verallgemeinerung der Cylinderfunktionen.

Übersicht.

I.

Die **Bessel**sche Cylinderfunktion $y = J^{\nu}(x)$, das Integral der Differentialgleichung[1])

$$x^2 y^{(2)} + x y^{(1)} + (x^2 - \nu^2)\, y = 0$$

entsteht aus der hypergeometrischen Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, dem Integrale der **Gauss**schen Differentialgleichung

$$x(1-x)\, y^{(2)} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\, x]\, y^{(1)} - \alpha\beta y = 0$$

durch doppelten Grenzübergang; es ist nämlich[2]):

$$J^{\nu}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \lim_{\substack{\lambda=\infty \\ \mu=\infty}} F\left(\lambda, \mu, \nu+1, -\frac{x^2}{\lambda\mu}\right)$$

[1]) Differentiationen nach den unabhängigen Variabeln werden im folgenden durch eingeklammerte Ziffern bezeichnet: $y^{(1)} = \frac{dy}{dx}$, $y^{(2)} = \frac{dy^2}{dx^2}$ u. s. w.

[2]) Hansen, Leipziger Abhandl. B. II, p. 252; 1855.

Durch einfachen Grenzübergang entsteht aus der hypergeometrischen Reihe eine Gruppe von Funktionen, die, von einem Exponentialfaktor abgesehen, die Lösungen der **Laplace**schen Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 x)\, y^{(2)} + (a_1 + b_1 x)\, y^{(1)} + (a_0 + b_0 x)\, y = 0$$

darstellen. Diese Funktionen nun weisen zahlreiche Analogieen mit den **Bessel**schen Cylinderfunktionen auf, die sie als Spezialfälle umfassen, und es soll im folgenden versucht werden, diese Beziehungen im einzelnen zu verfolgen.

Die Bezeichnungen schliessen sich an die von **N. Nielsen** in seinem „Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen“ [1]) gebrauchten an.

II.

Aus der **Gauss**schen Differentialgleichung

$$x(1-x)\, y^{(2)} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\, x]\, y^{(1)} - \alpha\beta y = 0$$

entsteht durch die Substitution $x \left\| \dfrac{x}{\alpha} \right.$

$$\alpha x \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) y^{(2)} + \alpha \left[\gamma - \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) x\right] y^{(1)} - \alpha\beta y = 0;$$

geht man nach Division durch α zur Grenze für $\alpha = \infty$ über, so bleibt

$$x y^{(2)} + (\gamma - x)\, y^{(1)} - \beta y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Das erste Integral dieser Differentialgleichung entsteht aus der hypergeometrischen Reihe

$$F\left(\alpha, \beta\ \gamma, \frac{x}{\alpha}\right) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma 1} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{\alpha^2} + \cdots$$

durch den Grenzübergang für $\alpha = \infty$; es wird

$$\mathfrak{J}_1 = 1 + \frac{\beta}{\gamma \cdot 1} \cdot x + \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots, \quad (2)$$

eine für alle endlichen Werte von x konvergierende Entwickelung. Aus der Integraldarstellung der hypergeometrischen Reihe ergibt sich

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma\ \ \beta)} \int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1} \cdot \lim_{\alpha=\infty} \left(1 - \frac{xv}{\alpha}\right)^{-\alpha} \cdot dx$$

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 e^{xv}\, v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1}\, dv, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

[1]) Leipzig 1904, B. G. Teubner; im folgenden als „Nielsen Hb.“ zitiert.

die für $\beta > 0$, $\gamma < \beta$ gültig ist. Durch die Substitution $v \,\|\, 1-v$ geht dieses Integral über in

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \cdot e^{x} \int_0^1 e^{-xv}\, v^{\gamma-\beta-1} (1-v)^{\beta-1}\, dv;$$

dies ist aber nichts anderes als die Integralform der Reihe

$$\mathfrak{J}_1 = e^{x}\left(1 - \frac{\gamma-\beta}{\gamma\cdot 1}\cdot x + \frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2} x^2 - + \cdots\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Es geht hieraus hervor, dass $\mathfrak{J}_1$ endlich wird, wenn β oder $\gamma-\beta$ negative ganze Zahlen sind. Das zweite Integral der Differentialgleichung (1) ergibt sich als

$$\mathfrak{J}_2 = \lim_{\alpha=\infty} x^{1-\gamma}\, F\left(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, \frac{x}{\alpha}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &= x^{1-\gamma}\left[1 + \frac{\beta-\gamma+1}{(2-\gamma)\cdot 1}\cdot x + \frac{(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)\cdot 1\cdot 2}\cdot x^2 - + \cdots\right] \ldots \ldots \\ &= e^{x} x^{1-\gamma}\left[1 - \frac{\beta}{(2-\gamma)\cdot 1}\cdot x + \frac{\beta(\beta+1)}{(2-\gamma)(3-\gamma)\cdot 1\cdot 2}\cdot x^2 - + \cdots\right] \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Reihen werden unbrauchbar für ganzzahlige Werte von γ; die Berechnung der zweiten Integrale für solche Werte wird im Abschnitt IV erfolgen, nachdem die Bezeichnungen entsprechend abgeändert sind.

III.

Setzt man

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{1}{A}\cdot z^{-\nu} e^{iz} J^{\nu,\varkappa}(z)$$

$$x = 2iz, \beta = \nu + \varkappa + \tfrac{1}{2}, \gamma = 2\nu + 1$$

so geht die Differentialgleichung (1) über in

$$z^2 J^{(2)} + z J^{(1)} + (z^2 - 2ikz - \nu^2) J = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Man sieht, dass für $\varkappa = 0$ die Besselsche Differentialgleichung resultiert. Die Integrale werden, wenn A passend gewählt wird,

$$J^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{(2z)^{\nu} e^{-iz}}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\nu+\varkappa+s+\frac{1}{2})(2iz)^s}{s!\;\Gamma(2\nu+s+1)} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$= \frac{(2z)^{\nu} e^{iz}\,\Gamma(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\nu-\varkappa+s+\frac{1}{2})(-2iz)^s}{s!\;\Gamma(2\nu+s+1)} \quad \ldots \quad (9)$$

Es besteht die Beziehung

$$J^{\nu,-\varkappa}(-z) = e^{\nu\pi i}\frac{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})} J^{\nu,\varkappa}(z) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Als zweites Integral der Differentialgleichung (7) ergibt sich, wenn 2ν nicht ganzzahlig ist, zunächst die Funktion $J^{-\nu,\varkappa}(z)$.

Ersetzt man in (8) die Gammafunktionen des Zählers durch die bestimmten Integrale

$$\frac{\Gamma(n)}{t^n} = 2\int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n-1} dx,$$

so ergibt sich, wenn zunächst $\Re(2zi) < 0$ vorausgesetzt wird,

$$J^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{2(2z)^\nu e^{-iz}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2\nu+2\varkappa+2s} e^{\frac{x^2}{2iz}} dx}{s!\,\Gamma(2\nu+s+1)(-2iz)^{\nu+\varkappa+\frac{1}{2}}}$$

$$J^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{2(2z)^{-\varkappa-\frac{1}{2}} e^{-iz+\left(\nu+\varkappa+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{\frac{x^2}{2iz}} x^{2\varkappa} J^{2\nu}(2x)\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

und ebenso erhält man aus (10)

$$J^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{2(2z)^{\varkappa-\frac{1}{2}} e^{iz-\left(\nu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{2}} \Gamma\left(\nu+\varkappa+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2iz}} x^{-2\varkappa} J^{2\nu}(2x)\, dx \quad . \quad (12)$$

von denen bei reellen Werten von z das erste konvergiert, wenn

$$\nu > 0, -2\nu - 1 < 2\varkappa < \tfrac{3}{2}$$

$$\text{oder} \quad \nu < 0, -\tfrac{1}{2} < 2\varkappa < -2\nu + 1$$

das zweite, wenn

$$\nu > 0, -\tfrac{3}{2} < 2\varkappa < -2\nu + 1$$

$$\text{oder} \quad \nu < 0, 2\nu - 1 < 2\varkappa < \tfrac{1}{2}$$

ist. Setzt man in Formel (12) die Entwickelung[1])

$$\frac{J^{2\nu}(2x)}{x^{2\varkappa}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2\nu-2\varkappa+2s)\,\Gamma(2\nu-2\varkappa+s)}{\Gamma(2\nu+s+1)} \binom{2\varkappa}{s} J^{2\nu-2\varkappa+2s}(2x)$$

ein, so wird

$$J^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{(2z)^\varkappa\,\Gamma\left(\nu+\varkappa+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2\nu-2\varkappa+2s)\,\Gamma(2\nu-2\varkappa+s)}{\Gamma(2\nu+s+1)} \binom{2\varkappa}{s} i^s J^{\nu-\varkappa+s}(z) \cdot (13)$$

Ist $2\varkappa$ eine ganze Zahl, so wird die Reihe endlich.

---

[1]) Nielsen Hb. p. 275, (3).

Eine andere Integraldarstellung ergibt sich in folgender Weise. Das Cauchysche Theorem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(w)\,dw}{w - z}$$

gibt

$$e^{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{e^{w}\,dw}{w - z},$$

also

$$\frac{z^{n}}{n!} = \frac{z^{n}}{2\pi i}\int_{(C)} e^{w} \cdot w^{-n-1}\,dw = \frac{z^{n}}{2\pi \cdot r^{n}}\int_{0}^{2\pi} e^{re^{i\varphi} - ni\varphi}\,d\varphi$$

$$\frac{r^{n}}{n!} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{re^{i\varphi} - ni\varphi}\,d\varphi,$$

ein Spezialfall einer **Nielsen**schen Formel[1]), den schon **Poisson** kennt.

Wenn also γ als ganze Zahl vorausgesetzt wird, so ist

$$\frac{z^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!} - \frac{(\gamma-\beta)\ z^{\gamma}}{\gamma!\ 1!} + \frac{(\gamma-\beta)\,(\gamma-\beta+1)\ z^{\gamma+1}}{(\gamma+1)!\ \ 2!} - + \cdots$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{ze^{i\varphi} - (\gamma-1)i\varphi}\,d\varphi\left[1 - \frac{\gamma-\beta}{1}\cdot e^{-i\varphi} + \frac{(\gamma-\beta)\,(\gamma-\beta+1)}{1\cdot 2}\cdot e^{-2i\varphi} - + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{ze^{i\varphi} - (\gamma-1)i\varphi}\left(1 + e^{-i\varphi}\right)^{\beta-\gamma} d\varphi$$

$$= \frac{2^{\beta-\gamma}}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{ze^{i\varphi} - (\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\beta - 1)i\varphi}\,[\cos\tfrac{1}{2}\varphi]^{\beta-\gamma}\,d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot 2^{\beta-\gamma}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{z\cos 2\varphi}\cos\,[z\sin 2\varphi]\cos[\,(\gamma+\beta-2)\,\varphi]\cos^{\beta-\gamma}\varphi\,d\varphi \tag{14}$$

Es entsteht also schliesslich

$$J^{\nu,\varkappa}\left(\frac{z}{2i}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}z}\,\Gamma(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})\left(\frac{i}{z}\right)^{\nu}\cdot 2^{\nu+\varkappa+\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} e^{z\cos 2\varphi}\cos(z\sin 2\varphi)\cos(3\nu+\varkappa-\tfrac{1}{2})\,\varphi\cos^{-(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}\varphi\,d\varphi \tag{15}$$

so dass z. B.

$$J^{0}\left(\frac{z}{2i}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}z}\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} e^{z\cos 2\varphi}\cos(z\sin 2\varphi)\cos\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}$$

---

[1]) Nielsen Hb. p. 121, (4).

wird. Setzt man in Gleichung (14) $\beta=\gamma=1$, so entsteht

$$1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{z\cos\varphi}\cos(z\sin\varphi)\,d\varphi;$$

wenn hierin $e^{z\cos\varphi}$ nach Potenzen von z entwickelt und das **Bessel**sche Integral [1])

$$J^{\nu}(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(x\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu}\,d\varphi$$

angewandt wird, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$1=\sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{s}\frac{1}{s!}J^{s}(z)$$

Setzt man dagegen in (14) $\gamma=\beta=n+1$, so entsteht, wenn man wieder 2φ mit φ vertauscht,

$$\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{z\cos\varphi}\cos(z\sin\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi;$$

benutzt man nun die Entwickelung [2])

$$\cos(z\sin\varphi)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_{2s}J^{2s}(z)\cos 2s\varphi$$

so folgt

$$\frac{z^n}{n!}=\sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_{2s}J^{2s}(z)\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{z\cos\varphi}\cdot\cos n\varphi\cdot\cos 2s\varphi\,d\varphi$$

Nun ist aber [3])

$$J^{n}(x)=\frac{1}{\pi i^{n}}\cdot\int_0^{\pi} e^{ix\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi$$

und es wird schliesslich

$$\frac{z^n}{n!}=\frac{i^n}{2}\sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_{2s}(-1)^{s}J^{2s}(z)\left[J^{n+2s}\left(\frac{z}{i}\right)+J^{n-2s}\left(\frac{z}{i}\right)\right]$$

worin $\varepsilon_s=1$ für $s=0$, $\varepsilon_s=2$ für $s>0$ und $J^{-\nu}(z)=J^{\nu}(z)$ zu setzen ist

---

[1]) Nielsen Hb. p. 51, (1).
[2]) Nielsen Hb. p. 65, (1).
[3]) Nielsen Hb. p. 56, (1).

IV.

Die Formel (3) geht durch die Substitution $v = \frac{1}{2}(1-t)$ über in

$$J^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{+1} e^{-itz}(1-t)^{\nu+\varkappa-\frac{1}{2}}(1+t)^{\nu-\varkappa-\frac{1}{2}}\,dt \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

die für $\varkappa = 0$ in das oben erwähnte **Bessel**sche Integral übergeht. Erstreckt man das Integral (16) um ein Rechteck mit den Ecken -1, $+1$, $+1-ih$, $-1-ih$ und lässt h ins Unendliche wachsen, so verschwindet das Integral von $+1-ih$ bis $-1-ih$ und es bleibt

$$\int_{-1}^{+1} e^{-itz}(1-t)^{\nu+\varkappa-\frac{1}{2}}(1+t)^{\nu-\varkappa-\frac{1}{2}}\,dt - i\int_{0}^{\infty} e^{-zt-iz}(it)^{\nu+\varkappa-\frac{1}{2}}(2-it)^{\nu-\varkappa-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$+\, i\int_{0}^{\infty} e^{+iz-zt}(2+it)^{\nu+\varkappa-\frac{1}{2}}(-it)^{\nu-\varkappa-\frac{1}{2}}\,dt = 0$$

Daraus ergibt sich in bekannter Weise die asymptotische Darstellung

$$J^{\nu,\varkappa}(z) \backsim (2z)^{\varkappa-\frac{1}{2}}\frac{e^{iz-(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left[1 + \frac{\nu^2-(\varkappa-\frac{1}{2})^2}{1}\cdot\frac{i}{2z} + \frac{\left[\nu^2-(\varkappa-\frac{1}{2})^2\right]\left[\nu^2-(\varkappa-\frac{3}{2})^2\right]}{1\cdot 2}\left(\frac{i}{2z}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$+\,\frac{(2z)^{-\varkappa-\frac{1}{2}}e^{-iz+(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{2}}\,\Gamma(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}\left[1 - \frac{\nu^2-(\varkappa+\frac{1}{2})^2}{1}\cdot\frac{i}{2z}\right.$$

$$\left.+\,\frac{\left[\nu^2-(\varkappa+\frac{1}{2})^2\right]\left[\nu^2-(\varkappa+\frac{3}{2})^2\right]}{1\cdot 2}\left(\frac{i}{2z}\right)^2 - + \cdots\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Es soll nun der erste Summand dieses Ausdrucks mit $H_1^{\nu,\varkappa}(z)$, der zweite mit $H_2^{\nu,\varkappa}(z)$ bezeichnet werden, so dass also

$$\left.\begin{aligned} H_1^{\nu,\varkappa}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\frac{(2z)^{\varkappa}e^{iz-(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})\frac{i\pi}{2}}}{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}\int_0^{\infty} e^{-v}v^{\nu-\varkappa-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iv}{2z}\right)^{\nu+\varkappa-\frac{1}{2}}dv \ \ldots \\ H_2^{\nu,\varkappa}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\frac{(2z)^{-\varkappa}e^{-iz+(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})\frac{i\pi}{2}}}{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}\int_0^{\infty} e^{-v}v^{\nu+\varkappa-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{iv}{2z}\right)^{\nu-\varkappa-\frac{1}{2}}dv \ \ldots \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

sind. Man kann sich leicht überzeugen, dass beide Funktionen H_1 und H_2 Integrale der Differentialgleichung (7) sind; also müssen sie sich durch $J^{\nu,\varkappa}$ und $J^{-\nu,\varkappa}$ linear ausdrücken lassen.

Sei

$$H_1^{\nu,\varkappa}(z) = \alpha_1 J^{\nu,\varkappa}(z) + \beta_1 J^{-\nu,\varkappa}(z)$$

dann ist

$$\lim_{z=0}\left[(2z)^\nu H_1^{\nu,\varkappa}(z)\right] = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}}\;\frac{\Gamma(2\nu)\, e^{(\varkappa-\frac{1}{2})\pi i}}{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}$$

$$\lim_{z=0}\left[(2z)^\nu J^{\nu,\varkappa}(z)\right] = 0\ ,\ \lim_{z=0}\left[(2z)^\nu J^{-\nu,\varkappa}(z)\right] = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\;\frac{\Gamma(-\nu+\varkappa+\frac{1}{2})}{\Gamma(-2\nu+1)}$$

so dass also

$$\beta_1 = \frac{2\,\Gamma(2\nu)\,\Gamma(1-2\nu)\, e^{(\varkappa-\frac{1}{2})\pi i}}{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})\,\Gamma(-\nu+\varkappa+\frac{1}{2})} = -\frac{i\, e^{\varkappa\pi i}\cos(\nu-\varkappa)\pi}{\sin\nu\pi\cos\nu\pi}$$

resultiert. Setzt man zunächst $\varkappa > 0$ voraus, so ist

$$\lim_{z=\infty}\left[(2z)^{\frac{1}{2}-\varkappa} H_1^{\nu,\varkappa}(z)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{2}},\ \lim_{z=\infty}\left[(2z)^{\frac{1}{2}-\varkappa} J^{\nu,\varkappa}(z)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{2}}$$

$$\lim_{z=\infty}\left[(2z)^{\frac{1}{2}-\varkappa} J^{-\nu,\varkappa}(z)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-(-\nu-\varkappa+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{2}}$$

und es wird

$$2 = \alpha_1 + \beta_1\, e^{\nu\pi i}$$

woraus nach einigen Umformungen entsteht

$$\alpha_1 = \frac{i\, e^{-(\nu-\varkappa)\pi i}\cos(\nu+\varkappa)\pi}{\sin\nu\pi\cdot\cos\nu\pi}$$

Es ist somit

$$H_1^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{i\, e^{\varkappa\pi i}}{\sin\nu\pi\cdot\cos\nu\pi}\left[e^{-\nu\pi i}\cos(\nu+\varkappa)\pi\cdot J^{\nu,\varkappa}(z) - \cos(\nu-\varkappa)\pi\cdot J^{-\nu,\varkappa}(z)\right]\quad .\ .\ (19)$$

Analog ergibt sich

$$H_2^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{i\, e^{\varkappa\pi i}\cos(\nu-\varkappa)\pi}{\sin\nu\pi\cdot\cos\nu\pi}\left[-e^{+\nu\pi i} J^{\nu,\varkappa}(z) + J^{-\nu,\varkappa}(z)\right]\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (20)$$

als Verallgemeinerung der von **Nielsen** [1]) für die **Hankel**schen Cylinderfunktionen angeführten Formeln.

---

[1]) Nielsen Hb. p. 17, (3) (4).

Durch Einführung des Ausdrucks (12) in (19), des Ausdrucks (11) in (20) erhält man

$$H_1^{\nu,\varkappa}(z)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot(2z)^{\varkappa-\frac{1}{2}}e^{iz+(\nu+3\varkappa-\frac{1}{2})\frac{\pi i}{2}}\cos(\nu+\varkappa)\pi\frac{\Gamma(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2iz}}x^{-2\varkappa}H_1^{2\nu}(2x)\,dx \quad . \quad . \quad (21)$$

$$H_2^{\nu,\varkappa}(z)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}(2z)^{-\varkappa-\frac{1}{2}}e^{-iz-(\nu-3\varkappa-\frac{1}{2})\frac{\pi i}{2}}\cos(\nu-\varkappa)\pi\int_0^\infty e^{+\frac{x^2}{2iz}}x^{2\varkappa}H_2^{2\nu}(2x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Definiert man

$$Y^{\nu,\varkappa}(z)=\frac{1}{2i}\left(H_1^{\nu,\varkappa}(z)-H_2^{\nu,\varkappa}(z)\right)$$

so ergeben die Gleichungen (19) und (20)

$$Y^{\nu,\varkappa}(z)=\frac{1}{\sin\nu\pi\cdot\cos\nu\pi}\left[\tfrac{1}{2}\left(\cos 2\nu\pi+e^{2\varkappa\pi i}\right)J^{\nu,\varkappa}(z)-e^{\varkappa\pi i}\cos(\nu-\varkappa)\pi\cdot J^{-\nu,\varkappa}(z)\right] \quad (23)$$

Wenn 2ν gleich einer ganzen Zahl $2n$ wird, so ist $J^{-\nu,\varkappa}(z)=i^{2\nu}J^{\nu,\varkappa}(z)$ und der Ausdruck (23) wird unbestimmt; differentiiert man Zähler und Nenner nach ν und setzt dann $\nu=n$, so erhält man

$$\begin{aligned}Y^{n,\varkappa}(z)=\frac{e^{\varkappa\pi i}}{\pi}\Bigg\{&[2\cos\varkappa\pi\log 2z+\pi\sin\varkappa\pi]\;J^{n,\varkappa}(z)\\&+2\,\frac{(2z)^n e^{-iz}}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(n+\varkappa+s+\frac{1}{2})}{s!\,\Gamma(2n+s+1)}[\Psi(n+\varkappa+s+\tfrac{1}{2})-\Psi(s+1)-\Psi(2n+s+1)](-2iz)^s\\&-2\cdot(2z)^{-n}\cdot\frac{e^{-iz}}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{s=2n-1}\frac{\Gamma(-n+\varkappa+s+\frac{1}{2})\,\Gamma(2n-s)}{s!}(-2iz)^s\Bigg\}\end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Auch dieser Ausdruck wird unbrauchbar, wenn $-n+\varkappa+\frac{1}{2}$ eine negative ganze Zahl ist; dann bricht aber die asymptotische Reihe (17) für $H_2^{n,\varkappa}(z)$ ab und gibt ein endliches zweites Integral, mit dessen Hilfe man $Y^{n,\varkappa}(z)$ erhalten kann. Ist dagegen auch $+n+\varkappa+\frac{1}{2}$ eine negative ganze Zahl, so wird $H_1^{n,\varkappa}(z)$ endlich; der Wert von $H^{n,\varkappa}(z)$ lässt sich jedoch nicht aus Gleichung (17) bestimmen, sondern folgt aus (20) durch Grenzübergang in der Form

$$H_2^{n,\varkappa}(z)=\frac{e^{-iz-(2n+1)\frac{\pi i}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{s=2n-1}\frac{(-i)^s\cdot s!\;(2z)^{n-s-1}}{\Gamma(n-\varkappa+s+\frac{1}{2})\,\Gamma(2n-s)}$$

die also für ganzzahlige Werte von $2n$ und $n-\varkappa+\frac{1}{2}$ gilt.

Die Funktionen H_1 und H_2 genügen den Relationen

$$\left.\begin{aligned} H_1^{\nu,-\varkappa}\left(z\, e^{\pi i}\right) &= e^{-(\nu+2\varkappa+1)\pi i}\,\frac{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})}\,H_2^{\nu,\varkappa}(z)\,; \\ H_2^{\nu,-\varkappa}\left[z\, e^{-\pi i}\right] &= e^{+(\nu-2\varkappa+1)\pi i}\,\frac{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})}\,H_1^{\nu,\varkappa}(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{25a}$$

$$\left.\begin{aligned} H_1^{-\nu,\varkappa}(z) &= e^{\nu\pi i}\,H_1^{\nu,\varkappa}(z)\,; \\ H_2^{-\nu,\varkappa}(z) &= e^{-\nu\pi i}\,\frac{\cos(\nu+\varkappa)\pi}{\cos(\nu-\varkappa)\pi}\,H_2^{\nu,\varkappa}(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{25b}$$

V.

Die Formel (12) gibt durch partielle Integration

$$J^{\nu,\varkappa}(z) = 2\,(2z)^{\varkappa-\frac{1}{2}}\, e^{iz-(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{2}}\,\frac{\Gamma(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}\cdot iz\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2iz}}\,\frac{d}{dx}\left(x^{-2\varkappa-1}\,J^{2\nu}(2x)\right)dx$$

Da nun

$$\frac{2\nu\, J^{2\nu}(2x)}{x} = J^{2\nu-1}(2x) + J^{2\nu+1}(2x),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\nu}\cdot\frac{d}{dx}\left[x^{-2\varkappa}\left(J^{2\nu-1}(2x)+J^{2\nu+1}(2x)\right)\right] = \frac{1}{x^{2\varkappa}}\Bigg(&\frac{2\nu-2\varkappa-1}{2\nu(2\nu-1)}\,J^{2\nu-2}(2x) \\ &-\frac{8\varkappa\nu}{2\nu(2\nu-1)(2\nu+1)}\,J^{2\nu}(2x) - \frac{2\nu+2\varkappa+1}{2\nu(2\nu+1)}\,J^{2\nu+2}(2x)\Bigg) \end{aligned}$$

ist, so wird

$$\frac{2\nu}{z}\,J^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{\nu+\varkappa-\frac{1}{2}}{\nu-\frac{1}{2}}\,J^{\nu-1,\varkappa}(z) - \frac{2\varkappa\nu i}{(\nu-\frac{1}{2})(\nu+\frac{1}{2})}\,J^{\nu,\varkappa}(z) + \frac{\nu-\varkappa+\frac{1}{2}}{\nu+\frac{1}{2}}\,J^{\nu+1,\varkappa}(z)\;. \tag{26}$$

Differentiiert man die Formel (12), so erhält man

$$\frac{d\,J^{\nu,\varkappa}(z)}{dz} = (\varkappa-\tfrac{1}{2})\,\frac{J^{\nu,\varkappa}(z)}{z} + i\,J^{\nu,\varkappa}(z) + \frac{1}{z}\cdot(\nu-\varkappa+\tfrac{1}{2})\,(\nu+\varkappa-\tfrac{1}{2})\,J^{\nu,\varkappa-1}(z)$$

und mit der Hilfe von Formel (11)

$$\begin{aligned} \frac{d\,J^{\nu,\varkappa}(z)}{dz} &= (\varkappa-\tfrac{1}{2})\,\frac{J^{\nu,\varkappa}(z)}{z} + i\,J^{\nu,\varkappa}(z) - 2i\cdot 2\,(2z)^{-\varkappa-\frac{1}{2}}\, e^{-iz+(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{2}}\int_0^\infty e^{+\frac{x^2}{2iz}}\,x^{2\varkappa}\,\frac{J^{2\nu}(2x)}{x^2}\,dx \\ &= \frac{(\varkappa-\frac{1}{2})(\nu+\varkappa-\frac{1}{2})}{2\nu(\nu-\frac{1}{2})}\,J^{\nu-1,\varkappa}(z) - \frac{(\varkappa-\frac{1}{2})\,2\varkappa\nu i}{2\nu(\nu-\frac{1}{2})(\nu+\frac{1}{2})}\,J^{\nu,\varkappa}(z) + \frac{(\varkappa-\frac{1}{2})(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}{2\nu(\nu+\frac{1}{2})}\,J^{\nu+1,\varkappa}(z) \\ &\quad + i\,J^{\nu,\varkappa}(z) + \left[\frac{J^{\nu-1,\varkappa}(z)}{2\nu(\nu-\frac{1}{2})} - i\,\frac{2\nu\,J^{\nu,\varkappa}(z)}{2\nu(\nu-\frac{1}{2})(\nu+\frac{1}{2})} - \frac{J^{\nu-1,\varkappa}(z)}{2\nu(\nu+\frac{1}{2})}\right](\nu-\varkappa+\tfrac{1}{2})(\nu+\varkappa-\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

Nach einigen Reduktionen wird dann

$$\frac{2\,d\,J^{\nu,\varkappa}(z)}{dz} = \frac{\nu+\varkappa-\frac{1}{2}}{\nu-\frac{1}{2}}\,J^{\nu-1,\varkappa}(z) - \frac{i\varkappa}{(\nu-\frac{1}{2})(\nu+\frac{1}{2})}\,J^{\nu,\varkappa}(z) - \frac{\nu-\varkappa+\frac{1}{2}}{\nu+\frac{1}{2}}\,J^{\nu+1,\varkappa}(z) \quad . \quad . \quad (27)$$

Aus den Gleichungen (26) und (27) erhält man noch

$$\left.\begin{aligned} \frac{dJ^{\nu,\varkappa}(z)}{dz} &= -\frac{\nu J^{\nu,\varkappa}(z)}{z} + \frac{\nu+\varkappa-\frac{1}{2}}{\nu-\frac{1}{2}}\,J^{\nu-1,\varkappa}(z) - \frac{i\varkappa}{\nu-\frac{1}{2}}\,J^{\nu,\varkappa}(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &= +\frac{\nu J^{\nu,\varkappa}(z)}{z} - \frac{\nu-\varkappa+\frac{1}{2}}{\nu+\frac{1}{2}}\,J^{\nu+1,\varkappa}(z) + \frac{i\varkappa}{\nu+\frac{1}{2}}\,J^{\nu,\varkappa}(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\}(28)$$

Wesentlich andere Differentialformeln ergeben sich aus der Reihe (8), nämlich

$$\frac{d^{r}}{dz^{r}}\left(J^{\nu,\varkappa}(z)\cdot(2z)^{-\nu}e^{+iz}\right) = (2i)^{r}\cdot\left(J^{\nu+\frac{1}{2}r,\varkappa+\frac{1}{2}r}(z)\,(2z)^{-\nu-\frac{1}{2}r}\,e^{+iz}\right)$$

$$\frac{d^{r}}{dz^{r}}\left(J^{\nu,\varkappa}(z)\,(2z)^{\nu}e^{iz-\nu\pi i}\right) = 2^{r}\left(J^{\nu-\frac{1}{2}r,\varkappa-\frac{1}{2}r}(z)\,(2z)^{\nu-\frac{1}{2}r}\,e^{iz-(\nu-\frac{1}{2}r)\pi i}\right)$$

so dass man die **Taylor**sche Reihe aufstellen kann:

$$J^{\nu,\varkappa}(x+y) = [2\,(x+y)]^{\nu}\,e^{-iy}\sum_{r=0}^{r=\infty}\left(\frac{y^{2}}{2\,x}\right)^{\frac{1}{2}r}\cdot\frac{J^{\nu+\frac{1}{2}r,\varkappa+\frac{1}{2}r}(x)}{r!}$$

Von Interesse sind noch die Formeln, die aus (11) und (12) folgen:

$$\left.\begin{aligned} J^{\nu,\varkappa-\frac{1}{2}}(z) &= \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{z}{2}}\left(J^{\nu-\frac{1}{2},\varkappa}(z) - i\,J^{\nu+\frac{1}{2},\varkappa}(z)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ J^{\nu,\varkappa+\frac{1}{2}}(z) &= \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{z}{2}}\left((\nu+\varkappa)\,J^{\nu-\frac{1}{2},\varkappa}(z) + i\,(\nu-\varkappa)\,J^{\nu+\frac{1}{2},\varkappa}(z)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\}(29)$$

Die Formeln (26), (27), (28) gelten ebenso für die Funktionen $H_1^{\nu,\varkappa}(z)$, $H_2^{\nu,\varkappa}(z)$ und $Y^{\nu,\varkappa}(z)$; sie entsprechen den Fundamentalformeln der Cylinderfunktionen; wie diese, können sie zur Definition der Funktionen dienen. Die Formeln (29) gelten dagegen nur für die Funktion $J^{\nu,\varkappa}(z)$.

Nach einer bekannten Methode [1]) wird

$$J^{\nu,\varkappa}(z)\,\frac{d\,Y^{\nu,\varkappa}(z)}{dx} - Y^{\nu,\varkappa}(z)\,\frac{d\,J^{\nu,\varkappa}(z)}{dx} = \frac{A}{z}$$

[1]) Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen Bd. I, p. 29, 30. Leipzig 1895; Fuchs, Crelles Journal Bd. 66, p. 128. (1866).

und nach Formel (28)

$$J^{\nu,\varkappa}(z)\,Y^{\nu-1,\varkappa}(z)-J^{\nu-1,\varkappa}(z)\,Y^{\nu,\varkappa}(z)=\frac{\nu-\frac{1}{2}}{\nu+\varkappa-\frac{1}{2}}\cdot\frac{A}{z}$$

Da nun in der Umgebung des Punktes $z=0$ nach (8) und (23) die Entwickelungen gelten

$$J^{\nu,\varkappa}(z)=\frac{(2z)^{\nu}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu+1)}(1+\delta_1 z),\quad Y^{\nu,\varkappa}(z)=\frac{-e^{\varkappa\pi i}(2z)^{-\nu}\,\Gamma(2\nu+1)}{\nu\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}\cdot(1+\delta_2 z)$$

so ergibt sich

$$J^{\nu,\varkappa}(z)\frac{d}{dz}Y^{\nu,\varkappa}(z)-Y^{\nu,\varkappa}(z)\frac{d}{dz}J^{\nu,\varkappa}(z)=\frac{2}{\pi z}\cdot e^{\varkappa\pi i}\frac{\Gamma(\nu+\varkappa+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}$$

$$J^{\nu,\varkappa}(z)\,Y^{\nu-1,\varkappa}(z)-J^{\nu-1,\varkappa}(z)\,Y^{\nu,\varkappa}(z)=\frac{2}{\pi z}\cdot e^{\varkappa\pi i}\frac{\Gamma(\nu+\varkappa-\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu-\varkappa+\frac{1}{2})}(\nu-\tfrac{1}{2})$$

Durch wiederholte Anwendung der Formel (26) auf diesen Ausdruck findet man für

$$J^{\nu,\varkappa}(z)\,Y^{\nu-p,\varkappa}(z)-J^{\nu-p,\varkappa}(z)\,Y^{\nu,\varkappa}(z)$$

ein dem **Lommel**schen[1]) analoges Polynom, dessen Koeffizienten aber keinem einfachen Gesetze gehorchen.

VI.

Von den Spezialfällen der hier behandelten Funktionen sind, abgesehen von den für $\varkappa=0$ entstehenden eigentlichen Cylinderfunktionen, zwei Gruppen hervorzuheben. Die eine entsteht, wenn man in den Gleichungen des Abschnitts II den Parameter $\beta=0$ setzt, also $\varkappa=-\nu-\frac{1}{2}$; da aber in diesem Falle $J^{\nu,-\nu-\frac{1}{2}}(z)$ unendlich wird, so vertauscht man die Vorzeichen von $\varkappa$ und ν, setzt mithin $\varkappa=\frac{1}{2}-\nu$. Dann wird

$$J^{-\nu,\frac{1}{2}-\nu}(z)=\frac{(2z)^{-\nu}e^{-iz}}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(-2\nu+s+1)(2iz)^{s}}{s!\,\Gamma(-2\nu+s+1)}=\frac{e^{iz}}{(2z)^{\nu}\cdot\sqrt{\pi}}$$

$$J^{\nu,\frac{1}{2}-\nu}(z)=\frac{(2z)^{\nu}\cdot e^{iz}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(+2\nu)}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(2\nu+s)(-2iz)^{s}}{s!\,\Gamma(2\nu+s+1)}$$

$$=\frac{(2z)^{\nu}\cdot e^{iz}}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2\nu)}\cdot\left[\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2\nu+1}\cdot\frac{2iz}{1!}+\frac{1}{2\nu+2}\frac{(2iz)^2}{2!}-\frac{1}{2\nu+3}\cdot\frac{(2iz)^3}{3!}+-\cdots\right]$$

[1]) Nielsen Hb. p. 22 ff.

$$J^{\nu,\frac{1}{2}-\nu}(z)=\frac{(\frac{1}{2}z)^{-\nu}e^{iz}}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2\nu)}\int_0^z e^{-2iz}z^{2\nu-1}dz$$

Daraus ergeben sich die Darstellungen

$$H_1^{\nu,\frac{1}{2}-\nu}(z)=\frac{2(2z)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{iz-\nu\pi i},\ H_2^{\nu,\frac{1}{2}-\nu}(z)=-2\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\frac{e^{iz}}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2\nu)}\cdot\int_z^\infty e^{-2iz}z^{2\nu-1}dz$$

$H_2^{\nu,\frac{1}{2}-\nu}(z)$ ist also nichts anderes als **Schlömilchs**[1]) „unvollständige Gammafunktion“, welche den Integralsinns, Integrallogarithmus, das **Kramp**sche Wahrscheinlichkeitsintegral und die **Fresnel**schen Integrale als Spezialfälle einschliesst. Aus der Formel (8) folgt

$$\int_0^z e^{-2iz}z^{2\nu-1}dz=\Gamma(2\nu)z^{2\nu}e^{-2iz}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(2iz)^s}{\Gamma(2\nu+s+1)}$$

aus Formel (17)

$$\int_x^\infty e^{-x}x^{2\nu-1}dx\sim x^{2\nu-1}e^{-x}\left[1-\frac{(2\nu-1)}{x}+\frac{(2\nu-1)(2\nu-2)}{x^2}-+\cdots\right]$$

die von **Nielsen**[2]) angeführt werden, die letztere für die oben angeführten Spezialfälle, die erstere allgemein. Aus Formel (13) dagegen erhält man

$$\int_0^z e^{-2iz}z^{2\nu-1}dz=\frac{\sqrt{2z\pi}\cdot e^{-iz}}{2^{2\nu}\Gamma(2\nu-1)}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(4\nu+2s-1)\Gamma(4\nu+s-1)}{(2\nu+s-1)(2\nu+s)\cdot s!}(-i)^s J^{2\nu+s-\frac{1}{2}}(z)$$

Für $\nu=\frac{1}{4}$, den Fall des Wahrscheinlichkeitsintegrals, erhält man die Entwickelung[3])

$$\int_0^z e^{-2iz}\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{z}\,e^{-iz}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\varepsilon_s(-i)^s J^s(z)}{s^2-\frac{1}{4}}$$

die von **Nielsen**[4]) gegeben wird in der Form

$$\frac{2e^{+\frac{1}{2}x^2}K(x)}{x}=2J^0\left(\frac{x^2}{2i}\right)-\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{4i^{-s}}{4s^2-1}J^s\left(\frac{x^2}{2i}\right)$$

---

[1]) Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis II, 1895 p. 265.

[2]) Nielsen Hb. p. 100 ff.; p. 229, p. 244, (6); p. 230, (22) bis (24).

[3]) Der Zähler des ersten Gliedes der Summe, $(4\nu-1)\Gamma(4\nu-1)$, nimmt für $\nu=\frac{1}{4}$ die unbestimmte Form $0\cdot\infty$ an; da aber $(4\nu-1)\Gamma(4\nu-1)=\Gamma(4\nu)$ ist, so wird der Koeffizient des Zählers im ersten Gliede $=1$, während er bei den folgenden Gliedern $=2$ wird.

[4]) Nielsen Hb. p. 73, (12); ein Druckfehler, der sich dort findet, ist oben berichtigt.

Eine zweite Sondergruppe bilden die Funktionen, in denen $\nu = \frac{1}{4}$ ist. Hier gibt Formel (22) die Integraldarstellung

$$H_2^{\frac{1}{4},\varkappa}(z) = \frac{4i}{\pi} \cdot (2z)^{-\varkappa-\frac{1}{2}} e^{-iz+\left(3\varkappa-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi i}{2}} \int_0^\infty e^{\frac{x^2}{2iz}} x^{2\varkappa-\frac{1}{2}} e^{-2ix} dx$$

$$= \frac{4i}{\pi} (2z)^{-\varkappa-\frac{1}{2}} e^{+iz+\left(3\varkappa-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi i}{2}} \int_0^\infty e^{\frac{1}{2iz}(x-2z)^2} x^{2\varkappa-\frac{1}{2}} dx$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Temperatur u eines homogenen Körpers, der durch eine Ebene begrenzt wird, die konstant auf der Temperatur 0 gehalten wird, während zur Zeit $t=0$ die Temperatur seiner Punkte gleich der λ^{ten} Potenz ihres Abstandes x von der Grenzebene ist[1]),

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \alpha^\lambda \left(e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2t}} \right) d\alpha$$

sich in der Form darstellen lässt

$$u = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi x} \left(2a\sqrt{t}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{8a^2t}+\frac{\pi i}{8}} H_1^{\frac{1}{4},\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}} \left(\frac{x^2}{8a^2it}\right)$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ lässt sich also die Wärmeleitungsfunktion nach Formel (29) durch **Hankel**sche Cylinderfunktionen ausdrücken.

Die Wärmeleitungsfunktion gestattet eine Entwickelung in eine trigonometrische Reihe, die im folgenden hergeleitet werden soll.

Setzt man 2ν als ganze Zahl voraus, so kann man die Hansensche Formel[2])

$$J^n(z) = \frac{i^n}{\pi} \int_0^\pi e^{-iz\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi$$

in das Integral (11) einsetzen und die Integrationsfolge vertauschen; dann ist

$$J^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{2(2z)^{-\varkappa-\frac{1}{2}} e^{-iz+\left(\nu+\varkappa+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{i^{2\nu}}{\pi} \int_0^\pi \cos 2\nu\varphi \, d\varphi \int_0^\infty e^{\frac{x^2}{2iz}} x^{2\varkappa} e^{-2ix\cos\varphi} dx$$

Das innere Integral geht durch die Substitution

$$x\cos\varphi = t, \quad z \cdot \cos^2\varphi = \xi$$

über in

[1]) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. II p. 94. Braunschweig 1901.
[2]) Nielsen, Hb. p. 56, (1).

$$\frac{1}{\cos^{2\varkappa+1}\varphi}\int_0^\infty e^{\frac{t^2}{2i\xi}}\, t^{2\varkappa}\, e^{-2it}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{i\cos^{2\varkappa+1}\varphi}\int_0^\infty e^{\frac{t^2}{2i\xi}}\, t^{2\varkappa+\frac{1}{2}}\, H_2^{\frac{1}{2}}(2t)\, dt$$

also nach Formel (22)

$$= \frac{\pi}{4\, i\cos^{2\varkappa+1}\varphi}\cdot\frac{(2\,\xi)^{\varkappa+\frac{3}{4}}\, e^{i\xi+(-3\varkappa-1)\frac{\pi i}{2}}}{\cos\varkappa\pi}\, H_2^{\frac{1}{4},\varkappa+\frac{1}{4}}(\xi)$$

$$= \frac{\pi}{4\, i\cos\varkappa\pi}\cdot(2\,z)^{\varkappa+\frac{3}{4}}\, e^{iz\cos^2\varphi-(3\varkappa+1)\frac{\pi i}{2}}\, H_2^{\frac{1}{4},\varkappa+\frac{1}{4}}(z\cdot\cos^2\varphi)\sqrt{\cos\varphi}$$

so dass der ursprüngliche Ausdruck die Form annimmt

$$J^{\nu,\varkappa}(z) = \frac{\sqrt[4]{2z}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{e^{\left(3\nu-2\varkappa-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}}{\cos\varkappa\pi}\cdot\int_0^\pi e^{-iz\sin^2\varphi}\, H_2^{\frac{1}{4},\varkappa+\frac{1}{4}}(z\cos^2\varphi)\sqrt{\cos\varphi}\,\cos 2\nu\varphi\, d\varphi$$

Ist nun 2ν eine gerade Zahl $= 2n$, so wird

$$J^{n,\varkappa}(z) = \frac{\sqrt[4]{2z}}{i^n\sqrt{\pi}}\int_0^\pi e^{-iz\sin^2\varphi}\, J^{-\frac{1}{4},\varkappa+\frac{1}{4}}(z\cos^2\varphi)\sqrt{\cos\varphi}\cdot\cos 2n\varphi\, d\varphi \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

ist dagegen 2ν eine ungerade Zahl $= 2n+1$, dann erhält man

$$J^{n+\frac{1}{2},\varkappa}(z) = \frac{\sqrt[4]{2z}}{i^{n+1}\sqrt{\pi}}\int_0^\pi e^{-iz\sin^2\varphi}\, J^{+\frac{1}{4},\varkappa+\frac{1}{4}}(z\cos^2\varphi)\sqrt{\cos\varphi}\,\cos(2n+1)\varphi\, d\varphi \quad .\ . \quad (31)$$

Für $\varkappa = 0$ führt die erste Formel auf das **Hausen**sche Integral zurück; die zweite wird, wenn wie gewöhnlich

$$K(x) = \int_0^x e^{-x^2}\, dx$$

gesetzt wird,

$$J^{n+\frac{1}{2}}(z) = \frac{2}{i^n\pi}\sqrt{\frac{1}{i\pi}}\int_0^\pi e^{iz\cos 2\varphi}\, K(\sqrt{2iz}\cdot\cos\varphi)\cos(2n+1)\varphi\, d\varphi \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Die allgemeinen Formeln für die Entwickelung in eine trigonometrische Reihe geben dann

$$\sqrt{\pi}\sqrt[4]{2z\cos^2\varphi}\cdot e^{-iz\sin^2\varphi}\, J^{-\frac{1}{4},\varkappa+\frac{1}{4}}(z\cos^2\varphi) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_{2s}\, i^s\, J^{s,\varkappa}(z)\cos 2s\varphi \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

und

$$\sqrt{\pi}\sqrt[4]{2z\cos^2\varphi}\cdot e^{-iz\sin^2\varphi}\, J^{+\frac{1}{4},\varkappa+\frac{1}{4}}(z\cos^2\varphi) = 2\sum_{s=0}^{s=\infty} i^s J^{s+\frac{1}{2},\varkappa}(z)\cos(2s+1)\varphi \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

als trigonometrische Reihen für die Wärmeleitungsfunktion. Für $\varkappa = 0$ reduziert sich (32) auf die bekannte Formel[1])

$$e^{ix\cos 2\varphi} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s\, i^s J^s(x) \cos 2s\varphi;$$

die zweite gibt die Entwickelung

$$\sqrt{\frac{1}{i\pi}}\, K(\sqrt{2i\varkappa}\cdot\cos\varphi)\, e^{i\varkappa\cos 2\varphi} = \sum_{s=0}^{s=\infty} i^s J^{s+\frac{1}{2}}(\varkappa)\cos(2s+1)\varphi$$

und wenn man $2i\varkappa = \xi^2$ schreibt,

$$e^{\frac{1}{2}\xi^2\cos 2\varphi} K(\xi\cos\varphi) = \sqrt{\pi}\sum_{s=0}^{s=\infty} i^{s+\frac{1}{2}} J^{s+\frac{1}{2}}\left(-\frac{i\xi^2}{2}\right)\cos(2s+1)\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Den Spezialfall $\varphi = 0$ gibt **Nielsen**[2])

$$e^{\frac{1}{2}\xi^2} K(\xi) = \sqrt{\pi}\sum_{s=0}^{s=\infty} i^{s+\frac{1}{2}} J^{s+\frac{1}{2}}\left(-\frac{i\xi^2}{2}\right);$$

setzt man $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ und schreibt ζ für $\frac{1}{2}\xi\sqrt{2}$, so erhält man

$$K(\zeta) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2i\pi}\left[J^{\frac{1}{2}}\left(-i\zeta^2\right) - iJ^{\frac{3}{2}}\left(-i\zeta^2\right) + J^{\frac{5}{2}}\left(-i\zeta^2\right) - iJ^{\frac{7}{2}}\left(-i\zeta^2\right) + - \ldots\right]$$

VII.

Die Wärmeleitungsfunktionen haben die Eigentümlichkeit, dass ihr Quadrat sich einfach durch ein Integral elementarer Funktionen darstellen lässt.

Das Produkt u irgend zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y^{(2)} + py^{(1)} + qy = 0$$

genügt der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$u^{(3)} + 3pu^{(2)} + \left(p^{(1)} + 4q + 2p^2\right)u^{(1)} + \left(2q^{(1)} + 4pq\right)u = 0$$

Aus der Differentialgleichung (1)

$$y^{(2)} + \left(\frac{\gamma}{x} - 1\right)y^{(1)} - \frac{\beta}{x}y = 0$$

[1]) Nielsen Hb. p. 65, (3); die Nielsensche Formel enthält einen Druckfehler.

[2]) Nielsen Hb. p. 107, (4); auch diese Formel ist durch einen Druckfehler entstellt.

gewinnt man so die Gleichung

$$u^{(3)}+3\left(\frac{\gamma}{x}-1\right)u^{(2)}+\left[2\left(\frac{\gamma}{x}-1\right)^2-\frac{4\beta}{x}-\frac{\gamma}{x^2}\right]u^{(1)}+\left[\frac{2\beta}{x^2}-\frac{4\beta}{x}\left(\frac{\gamma}{x}-1\right)\right]u=0$$

mit den Lösungen $(\mathfrak{J}_1)^2$, $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$ und $(\mathfrak{J}_2)^2$. Die Gleichung vereinfacht sich für $\gamma=\frac{1}{2}$; dann wird

$$xu^{(3)}+3\left(\tfrac{1}{2}-x\right)u^{(2)}+[2x-2(1+2\beta)]\,u^{(1)}+4\beta u=0$$

Die Lösung dieser Gleichung lässt sich als bestimmtes Integral

$$u=\int_\alpha^\beta e^{xt}\,w(t)\,dt$$

darstellen; dann wird

$$x\int_\alpha^\beta e^{xt}\,w\,dt\left[t^3-3t^2+2t\right]+\int_\alpha^\beta e^{xt}\,w\,dt\left[\tfrac{3}{2}t^2-2(1+2\beta)\,t+4\beta\right]=0$$

und durch partielle Integration des ersten Terms

$$\left[e^{xt}\,w\left\{t(t-1)(t-2)\right\}\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta e^{xt}\,dt\left\{w^{(1)}\left[t^3-3t^2+2t\right]+w\left[3t^2-6t+2\right]\right\}$$

$$+\int_\alpha^\beta e^{xt}\,w\,dt\left[\tfrac{3}{2}t^2-2(1+2\beta)\,t+4\beta\right]=0$$

oder

$$\int_\alpha^\beta e^{xt}\,dt\left\{w^{(1)}\left[t(t-1)(t-2)\right]-w\left[-3t^2+(4-4\beta)\,t+4\beta-2\right]\right\}=0$$

$$\left[e^{xt}\,w\,t(t-1)(t-2)\right]_\alpha^\beta=0$$

Die Differentialgleichung in der geschwungenen Klammer, die **Laplace**sche Transformierte der Differentialgleichung dritter Ordnung [1]), lässt sich schreiben

$$\frac{w^{(1)}}{w}=\frac{-\frac{3}{2}t^2+(4-4\beta)\,t+4\beta-2}{t(t-1)(t-2)}=\frac{2\beta-1}{t}-\frac{\frac{1}{2}}{t-1}-\frac{2\beta}{t-2}$$

---

[1] Schlesinger, Handbuch der linearen Differentialgleichungen I, p. 407 ff. Leipzig 1895.

und hat die Lösung

$$w = t^{2\beta-1}(t-1)^{-\frac{1}{2}}(t-2)^{-2\beta}$$

Für α, β stehen die Werte 0, 1, 2, $\pm\infty$ zur Verfügung. Beispielsweise wird

$$\int_0^1 t^{2\beta-1}(t-1)^{-\frac{1}{2}}(t-2)^{-2\beta} e^{xt}\,dt = const.\ e^{x}\int_0^1 \frac{e^{-xv}}{\sqrt{v}}(1-v)^{2\beta-1}(1+v)^{-2\beta}\,dv$$

$$= e^{x}\sqrt{x}\left\{A\left[J^{\frac{1}{4},\varkappa}\left(\frac{x}{2i}\right)\right]^2 + B\,J^{\frac{1}{4},\varkappa}\left(\frac{x}{2i}\right)J^{-\frac{1}{4},\varkappa}\left(\frac{x}{2i}\right) + C\left[J^{-\frac{1}{4},\varkappa}(z)\right]^2\right\}$$

Da sich die linke Seite nach steigenden Potenzen von x mit ganzzahligen Exponenten entwickeln lässt, so muss $B=0$ sein. Für grosse Werte von $x>0$ muss das Integral wie $x^{-\frac{1}{2}}$ verschwinden [1]; führt man also rechts die asymptotische Entwickelung (17) ein, so müssen die den Faktor e^{x} enthaltenden Glieder sich wegheben, d. h. es ist

$$A + iC = 0\ , \ C = Ai$$

Damit wird

$$\int_0^1 \frac{e^{-xv}}{\sqrt{v(1-v^2)}}\left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{2\varkappa} dv = A\sqrt{x}\left\{\left[J^{\frac{1}{4},\varkappa}\left(\frac{x}{2i}\right)\right]^2 + i\left[J^{-\frac{1}{4},\varkappa}\left(\frac{x}{2i}\right)\right]^2\right\}$$

Für $x=0$ wird

$$\frac{A\,i^{\frac{3}{2}}\left[\Gamma(\varkappa+\frac{1}{2})\right]^2}{\pi^2} = \int_0^1 v^{-\frac{1}{2}}(1-v)^{2\beta-1}(1+v)^{-2\beta}\,dv$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(2\beta)}{\Gamma(2\beta+\frac{1}{2})}F(\tfrac{1}{2}, 2\beta, 2\beta+\tfrac{1}{2}, -1)$$

---

[1]) Es ist, wenn $xv=\tau$ gesetzt wird,

$$\int_0^1 \frac{e^{-xv}}{\sqrt{v}}\cdot(1-v)^{2\beta-1}(1+v)^{-2\beta}\,dv = \int_0^x \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{x\tau}}\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{2\beta-1}\left(1+\frac{\tau}{x}\right)^{-2\beta} d\tau,$$

also

$$\lim_{x=\infty}\left[\sqrt{x}\int_0^1 \frac{e^{-xv}}{\sqrt{v}}\cdot(1-v)^{2\beta-1}(1+v)^{-2\beta}\,dv\right] = \lim_{x=\infty}\int_0^x \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau = \int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau = \sqrt{\pi}$$

Man kann durch Verwendung dieses Grenzwertes die Konstante A bestimmen, wenn man beiderseits mit $\sqrt{x}$ multipliziert und nach Einführung der asymptotischen Entwickelung zur Grenze für $x=\infty$ übergeht.

wo $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ wie im ersten Abschnitt die hypergeometrische Reihe bedeutet. Nach einer **Euler**schen Formel[1]) ist die rechte Seite gleich

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(2\beta)}{\Gamma(2\beta+\frac{1}{2})}\,2^{-2\beta}\,F(2\beta, 2\beta, 2\beta+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

Hierauf aber kann man die **Gauss**sche Formel[2])

$$F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}\,F(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}, x)$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\,\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\sqrt{x}\,F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \beta+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, x)$$

anwenden, indem man $x=0$ setzt; dann wird einfach

$$\frac{A\cdot i^{\frac{3}{2}}\left[\Gamma(\varkappa+\frac{1}{4})\right]^2}{\pi^2} = \frac{\pi\cdot\Gamma(2\beta)}{\left[\Gamma(\beta+\frac{1}{2})\right]^2}\cdot 2^{-2\beta}$$

$$A = \frac{\pi^2\, i^{-\frac{3}{2}}\, 2^{2\varkappa-\frac{3}{2}}}{\Gamma(2\varkappa+\frac{1}{2})}$$

Man erhält schliesslich

$$\int_0^1 \frac{e^{-xv}}{\sqrt{v(1-v^2)}}\left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{2\varkappa} dv = \frac{\pi^2\cdot 2^{2\varkappa-1}}{i\cdot\Gamma(2\varkappa+\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{x}{2i}}\left(\left[J^{\frac{1}{4},\varkappa}\left(\frac{x}{2i}\right)\right]^2 + i\left[J^{-\frac{1}{4},\varkappa}\left(\frac{x}{2i}\right)\right]^2\right)$$

Für $\varkappa=0$ entsteht daraus ein Ausdruck, der sich auch aus einem **Nielsen**schen Integrale[3]) gewinnen lässt; für $\varkappa=\frac{1}{4}$ ergibt sich nach den Resultaten des Abschnitts VI

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2 v}\,dv}{\sqrt{v}(1+v)} = \frac{\pi}{2}e^{x^2} - 2\,e^{x^2}\left[K(x)\right]^2$$

oder

$$\left[K(x)\right]^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 e^{-x^2(1+v^2)}\frac{dv}{1+v^2}$$

---

[1]) Nielsen Hb. p. 376, (F_8). Man erhält dasselbe Ergebnis, wenn man auf das Integral für $F(\frac{1}{2}, 2\beta, 2\beta+\frac{1}{2}, -1)$ die Substitution $v \,\|\, 1-v$ anwendet.

[2]) Nielsen Hb. p. 376, (F_{12}).

[3]) Nielsen Hb. p. 215, (4).

VIII.

Es seien u und v Lösungen der Differentialgleichungen

$$\begin{array}{l|c|c|c} x^2 u^{(2)} + x u^{(1)} + u(x^2 - 2i\varkappa x - \nu^2) = 0 & v & v^{(1)} & v \\ x^2 v^{(2)} + x v^{(1)} + v(x^2 + 2i\varkappa x - \nu^2) = 0 & -u & u^{(1)} & u \end{array}$$

Werden die Gleichungen der Reihe nach mit den beigeschriebenen Faktoren multipliziert und addiert, so entsteht [1])

$$x^2 \frac{d}{dx}(u^{(1)} v - u v^{(1)}) + x(u^{(1)} v - u v^{(1)}) - 4 i \varkappa x u v = 0 \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

$$x^2 (u^{(2)} v^{(1)} + u^{(1)} v^{(2)}) + 2 x u^{(1)} v^{(1)} + (u v^{(1)} + u^{(1)} v)(x^2 - \nu^2)$$
$$+ (u^{(1)} v - u v^{(1)}) 2 i \varkappa x = 0 \quad \ldots \ldots \quad (\beta)$$

$$x^2 (u^{(2)} v + u v^{(2)}) + x(u^{(1)} v + v^{(1)} u) + 2 u v (x^2 - \nu^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (\gamma)$$

Setzt man nunmehr $uv = y$, so erhält man

$$\frac{d}{dx}\left[x(u^{(1)} v - u v^{(1)})\right] = 4 i \varkappa y \quad \ldots \ldots \quad (\delta)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 u^{(1)} v^{(1)}\right] + y^{(1)}(x^2 - \nu^2) + 2 i \varkappa x (u^{(1)} v - u v^{(1)}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (\varepsilon)$$

$$x^2 y^{(2)} - 2 x^2 u^{(1)} v^{(1)} + x y^{(1)} + 2 y (x^2 - \nu^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (\zeta)$$

Durch Differentiation von (ζ) folgt nach (ε)

$$x^2 y^{(3)} + 3 x y^{(2)} + 4 y^{(1)}\left[x^2 - \nu^2 + \tfrac{1}{4}\right] + 4 x y + 4 i \varkappa x (u^{(1)} v - u v^{(1)}) = 0 \quad \ldots \quad (\eta)$$

und nach abermaligem Differentiieren unter Rücksicht auf (δ)

$$x^2 y^{(4)} + 5 x y^{(3)} + 4 y^{(2)}(x^2 - \nu^2 + 1) + 12 x y^{(1)} + 4(1 - 4\varkappa^2) y = 0 \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

als Differentialgleichung für das Produkt

$$J^{\pm\nu,\varkappa}(x)\, J^{\pm\nu,-\varkappa}(x).$$

---

[1]) Das oben angewandte Verfahren ist dem von **G. Kirchhoff** in seiner Abhandlung „Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt" (Wiedemanns Annalen Bd. 10, 1880, p. 506) zur Reihenentwickelung von $J^0(x)\, J^0(ix)$ benutzten nachgebildet.

Die zu $x=0$ gehörende detuminierende Fundamentalgleichung[1]) hat die Wurzeln $\rho=+2\nu, 1, 0, -2\nu$; der ersten von diesen entspricht die Entwickelung

$$J^{\nu,\varkappa}(z)\,J^{\nu,-\varkappa}(z)=\frac{(2z)^{2\nu}}{\pi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\nu+\varkappa+s+\frac{1}{2})\,\Gamma(\nu-\varkappa+s+\frac{1}{2})\,(-4z^2)^s}{s!\,\Gamma(2\nu+s+1)\,\Gamma(2\nu+2s+1)} \quad . \; . \; . \quad (37)$$

Weil nun

$$\frac{\Gamma(\nu+\varkappa+s+\frac{1}{2})\,\Gamma(\nu-\varkappa+s+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu+2s+1)}=\int\limits_0^1 t^{\nu+\varkappa+\varrho-\frac{1}{2}}(1-t)^{\nu-\varkappa+\varrho-\frac{1}{2}}\,dt$$

ist, so kann man (37) schreiben:

$$J^{\nu,\varkappa}(z)J^{\nu,-\varkappa}(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 t^{\varkappa-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\varkappa-\frac{1}{2}}\,dt\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(2z\sqrt{t(1-t)}\right)^{2\nu+2s}}{s!\,\Gamma(2\nu+s+1)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 J^{2\nu}\left[4z\sqrt{t(1-t)}\right]t^{\varkappa-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\varkappa-\frac{1}{2}}\,dt$$

oder

$$J^{\nu,\varkappa}(z)\,J^{\nu,-\varkappa}(z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}J^{2\nu}(2z\sin 2\varphi)\,tg^{2\varkappa}\varphi\,d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Für die Wurzel $\rho=0$ ergibt sich die Entwickelung, wo die Konstanten so bestimmt sind, dass die Funktion links eine gerade Funktion ist:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(\nu+\varkappa)\pi\,J^{\nu,\varkappa}(z)\,J^{-\nu,-\varkappa}(z)+\cos(\nu-\varkappa)\pi\,J^{-\nu,\varkappa}(z)\,J^{\nu,-\varkappa}(z)\\
&\qquad=\frac{2\cos\nu\pi\cos\varkappa\pi}{\pi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\varkappa+s+\frac{1}{2})\,\Gamma(-\varkappa+s+\frac{1}{2})\,(-4z^2)^s}{(2s)!\,\Gamma(\nu+s+1)\,\Gamma(-\nu+s+1)}
\end{aligned}\right\}$$

und ebenso die Entwickelung für $\rho=1$: (39)

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(\nu+\varkappa)\pi\,J^{\nu,\varkappa}(z)\,J^{-\nu,-\varkappa}(z)-\cos(\nu-\varkappa)\pi\,J^{-\nu,\varkappa}(z)\,J^{\nu,-\varkappa}(z)\\
&\qquad=\frac{2\nu\sin\nu\pi\sin\varkappa\pi}{\pi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\varkappa+s+1)\,\Gamma(-\varkappa+s+1)\,(2iz)^{2s+1}}{(2s+1)!\,\Gamma(\nu+s+\frac{3}{2})\,\Gamma(-\nu+s+\frac{3}{2})}
\end{aligned}\right\}$$

[1]) Schlesinger, a. a. O. I, p. 158.

Durch ein Verfahren, das dem oben angewandten analog ist, ergeben sich hier die Integrale

$$\cos(\nu+\varkappa)\pi\, J^{\nu,\varkappa}(z)\, J^{-\nu,-\varkappa}(z) + \cos(\nu-\varkappa)\pi\, J^{-\nu,\varkappa}(z)\, J^{\nu,-\varkappa}(z)$$

$$= \frac{2\cos\varkappa\pi}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Pi^{2\nu}(2z\sin 2\varphi)\, tg^{2\varkappa}\varphi\, d\varphi$$

$$\cos(\nu+\varkappa\pi\, J^{\nu,\varkappa}(z)\, J^{-\nu,-\varkappa}(z) - \cos(\nu-\varkappa)\pi\, J^{-\nu,\varkappa}(z)\, J^{\nu,-\varkappa}(z)$$

$$= \frac{2\nu i\sin\varkappa\pi}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{X}^{2\nu}(2z\sin 2\varphi)\, tg^{2\varkappa+1}\varphi\, d\varphi$$

wo $\Pi^{\nu}(x)$ und $\mathrm{X}^{\nu}(x)$ die von **Nielsen** [1]) definierten Funktionen sind

$$\Pi^{\nu}(x) = \frac{2\cos\frac{1}{2}\nu\pi}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x\cos\varphi)\cos\nu\varphi\, d\varphi$$

$$\mathrm{X}^{\nu}(x) = \frac{2\sin\frac{1}{2}\nu\pi}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x\cos\varphi)\cos\nu\varphi\, d\varphi$$

Für grosse Werte von z ergeben sich aus der Differentialgleichung (36) die asymptotischen Entwickelungen:

$$\left.\begin{aligned} H_1^{\nu,\varkappa}(z)\, H_2^{\nu,-\varkappa}(z) &\sim \frac{(2z)^{2\varkappa-1}\cos(\nu+\varkappa)\pi}{\pi^2}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,\Gamma(2s-2\varkappa+1)\,\Gamma(\nu-\varkappa+s+\frac{1}{2})\,\Gamma(-\nu-\varkappa+s+\frac{1}{2})}{s!\,\Gamma(-2\varkappa+s+1)(4z^2)^s} \\ H_2^{\nu,\varkappa}(z)\, H_1^{\nu,-\varkappa}(z) &\sim \frac{(2z)^{-2\varkappa-1}\cos(\nu-\varkappa)\pi}{\pi^2}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,\Gamma(2\varkappa+2s+1)\,\Gamma(\nu+\varkappa+s+\frac{1}{2})\,\Gamma(-\nu+\varkappa+s+\frac{1}{2})}{s!\,\Gamma(2\varkappa+s+1)(4z^2)^s} \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

IX.

Die zahlreichen bestimmten Integrale mit den Funktionen $J^{\nu,\varkappa}(z)$, die man nach den von Nielsen im zweiten Abschnitt seines Handbuches entwickelten Methoden auswerten kann, müssen hier übergangen werden; nur eins, das von den übrigen erheblich abweicht, soll noch Platz finden.

Aus (8) folgt

$$e^{iz^3} J^{\nu,\varkappa}(z^3) = \frac{(2z^3)^{\nu}}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\nu+\varkappa+s+\frac{1}{2})(2iz^3)^s}{s!\,\Gamma(2\nu+s+1)}$$

[1]) Nielsen Hb. p. 47, (12a) (13a.)

und damit wird

$$\int_0^\infty e^{-yz} e^{iz^3} J^{\nu,\varkappa}(z^3) z^\lambda dz = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2i)^s \Gamma(\nu+\varkappa+s+\frac{1}{2}) \Gamma(3s+3\nu+\lambda+1)}{s!\,\Gamma(2\nu+s+1) y^{3s+3\nu+\lambda+1}}$$

Nun ist[1])

$$\Gamma(3s+3\nu+\lambda+1) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{3^{3s+3\nu+\lambda+1}}{\sqrt{3}} \cdot \Gamma\left(s+\nu+\frac{\lambda+1}{3}\right) \Gamma\left(s+\nu+\frac{\lambda+2}{3}\right) \Gamma\left(s+\nu+\frac{\lambda}{3}+1\right)$$

Setzt man dies ein und vergleicht mit (40), so findet man, dass $\lambda = -\frac{1}{2}, \varkappa = \frac{1}{2}$ gesetzt werden muss; damit wird dann

$$\int_0^\infty e^{-yz+iz^3} J^{\nu,\frac{1}{2}}(z^3) \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{y\pi i^{\nu+\frac{1}{2}}}{3\sqrt{2}\cos(\frac{1}{3}-\nu)\pi} H_2^{\frac{1}{3},\nu}\left(\sqrt{\frac{iy^3}{54}}\right) H_1^{\frac{1}{3},-\nu}\left(\sqrt{\frac{iy^3}{54}}\right)$$

oder, nach (29)

$$\int_0^\infty e^{-yz+iz^3}\left[J^{\nu-\frac{1}{2}}(z^3) + iJ^{\nu+\frac{1}{2}}(z^3)\right] dz = \frac{y\pi i^{\nu+\frac{1}{2}}}{3\cos(\frac{1}{3}-\nu)\pi} \cdot H_2^{\frac{1}{3},\nu}\left(\sqrt{\frac{iy^3}{54}}\right) H_1^{\frac{1}{3},-\nu}\left(\sqrt{\frac{iy^3}{54}}\right)$$

Diese einfache, aber nicht unanfechtbare Herleitung wird bestätigt durch die Differentialgleichung vierter Ordnung, der beide Seiten der Gleichung genügen.

[1]) Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis II, p. 256; Braunschweig 1895.