

Kugelkreise auf Mercators Seekarte in elementarer Darstellung.

§ 1.

Das Weltbild auf den verschiedenen Karten der Atlanten ist ein ganz verschiedenes. Vergleicht man z. B. auf einer Karte des Weltverkehrs (Nr. 16 im Debesschen Schulatlas 1905) den Flächeninhalt eines Landes nahe am Pol mit dem eines Gebietes am Äquator, also etwa Nowaja Semlja mit Sumatra, so sieht man, dass das Polarland viel zu gross dargestellt ist; betrachtet man andererseits eine politische Karte von Asien (Nr. 34), so findet man die richtigen Grössenverhältnisse gewahrt, aber die Meridiane und Parallelkreise, die auf dem Globus sich stets rechtwinklig schneiden, bilden auf der Karte, namentlich an ihrem Rande, spitze Winkel, und Skandinavien z. B. erscheint auf dieser Karte viel länger und schmaler als auf dem Globus. Die kugelförmige Erde lässt sich eben nicht völlig ähnlich auf der ebenen Karte abbilden; entweder werden die Winkel der Karte gleich den entsprechenden auf dem Globus, aber dann werden die Flächenverhältnisse verändert, oder letztere bleiben gewahrt, dann ändern sich die Winkel. Je nach dem Zwecke der Karte wird man die flächentreue oder die winkeltreue Darstellung anwenden; bei politischen Karten kommt es darauf an, die Grössenverhältnisse der abgebildeten Länder richtig wiederzugeben; Seekarten dagegen müssen winkeltreu sein, weil die Fahrtrichtung des Schiffes, der Kurs, durch den Winkel bestimmt wird, den die Kiellinie mit der Kompassrichtung Nord-Süd bildet.

§ 2.

Die älteste und einfachste winkeltreue Abbildung ist die **stereographische Projektion**.

Denkt man sich die Erdkugel im Nordpol von einer Ebene berührt und vom Südpol nach einem Punkte P der Kugel einen Strahl gezogen, der die Ebene im Punkte P schneidet, so heisst P das Bild des Punktes P . So wird, durch von S ausgehende Strahlen, die ganze Kugeloberfläche auf die Ebene „projiziert“, und jedem Punkte, jeder Linie, jeder Fläche der Kugel entspricht ein gleichartiges Gebilde auf der Ebene. Während aber die dem Nordpol benachbarten Gebiete der Kugel auf dem Bilde nahezu in wahrer Grösse erscheinen, werden alle anderen vergrössert; je näher ein Punkt dem Südpol liegt, desto weiter rückt sein Bild hinaus, und der Südpol selbst lässt sich auf der Karte gar nicht darstellen, ihm entspricht der unendlich ferne Punkt. Die Meridiane bilden sich ab als gerade Linien durch N , nämlich die Schnittlinien der Meridianebenen mit der Bildebene; ihre Winkel im Bilde sind gleich denen auf der Kugel. Es ist nachzuweisen, dass die Eigenschaft der Winkeltreue allgemein gilt.

Fig. 1.

Der Winkel zweier Linien auf der Kugel wird gemessen durch den Winkel ihrer Tangenten im Schnittpunkt. Diese Tangenten sind zugleich Tangenten der Kugel und liegen deshalb in der Tangentialebene im Schnittpunkt P . Die Meridianebene durch P enthält den Radius nach dem Berührungspunkt und steht deshalb senkrecht auf der Tangentialebene; wird sie zur Zeichnungsebene gewählt, so erscheint in ihr der Projektionsstrahl SP und auf diesem das Bild \mathbf{P} des Punktes P . Sie schneidet die Kartenebene in \mathbf{PN} , die Tangentialebene in PR ; PR schneidet \mathbf{PN} in \mathbf{R} . Dann ist $\mathbf{NR} = \mathbf{RP}$ als Tangenten von \mathbf{R} an den Meridiankreis, und weil $\triangle \mathbf{NPP}$ rechtwinklig ist, muss auch $\mathbf{RP} = \mathbf{RP}$ sein. Um zunächst eine der Tangenten abzubilden, lege man durch diese und S die Ebene; diese schneidet die Schnittlinie der Tangential- und der Kartenebene in \mathbf{U} , so ist \mathbf{UP} das Bild von UP . Da nun $\mathbf{UR} \perp \mathbf{RP}$ und, wie bewiesen, $\mathbf{PR} = \mathbf{PR}$ ist, so ist $\triangle \mathbf{PRU} \cong \mathbf{PRU}$ nach Kongruenzsatz I, folglich $\angle \mathbf{RPU} = \mathbf{RPU}$. Ebenso ist, wenn PV die andere Tangente ist, $\angle \mathbf{RPV} = \mathbf{RPV}$, und durch Addition oder Subtraktion $\angle \mathbf{UPV} = \mathbf{UPV}$.*)

Die Meridiane der Kugel werden als gerade Linien abgebildet; dasselbe gilt für die kleinen Kugelkreise, deren Ebenen durch S gehen. Den Parallelkreisen dagegen entsprechen auf der Karte konzentrische Kreise. Es ist eine Besonderheit der stereographischen Projektion, dass durch sie alle Kugelkreise als Kreise dargestellt werden. Die Ebene eines Kugelkreises schneide \mathbf{NS} in C , dieselbe Ebene schneide die Zeichnungsebene in AB , so muss C auf AB liegen. Man errichte in der Zeichnungsebene in C auf CS das Lot; SA und SB schneiden die Kartenebene in \mathbf{A} und \mathbf{B} , die Senkrechte in D und E . Dann ist $\angle \mathbf{DAC} = \mathbf{BAS} = \mathbf{BNS} = \mathbf{NBS} = \mathbf{CES}$, folglich $\triangle \mathbf{CDA} \sim \mathbf{CBE}$ und $CD : CA = CB : CE$ oder $CD \cdot CE = CA \cdot CB$. Ferner ist $CE \parallel \mathbf{NB}$, da beide $\perp SC$; daraus folgt $CE : \mathbf{NB} = CD : \mathbf{NA} = CS : \mathbf{NS}$, also $CD \cdot CE = \mathbf{NA} \cdot \frac{CS}{\mathbf{NS}} \cdot \mathbf{NB} \cdot \frac{CS}{\mathbf{NS}}$ oder $CA \cdot CB = \mathbf{NA} \cdot \mathbf{NB} \cdot \left(\frac{CS}{\mathbf{NS}}\right)^2$. Für eine andere Meridianebene ist der Punkt C derselbe; wenn im übrigen die entsprechenden Punkte durch Striche unterschieden werden, so ergibt sich:

$$CA' \cdot CB' = \mathbf{NA}' \cdot \mathbf{NB}' \cdot \left(\frac{CS}{\mathbf{NS}}\right)^2$$

Da nun A, B, A', B' auf einem Kreise liegen, so ist $CA \cdot CB = CA' \cdot CB'$ und es folgt:

$$\mathbf{AN} \cdot \mathbf{NB} \cdot \left(\frac{CS}{\mathbf{NS}}\right)^2 = \mathbf{NA}' \cdot \mathbf{NB}' \cdot \left(\frac{CS}{\mathbf{NS}}\right)^2$$

oder

$$\mathbf{NA} \cdot \mathbf{NB} = \mathbf{NA}' \cdot \mathbf{NB}'$$

d. h. die Bilder der Punkte A, A', B, B' liegen wieder auf einem Kreise. Da nun A und A' ganz beliebig sind, so folgt, dass das Kartenbild des Kreises wieder ein Kreis ist.

§ 3.

Die Lage eines Punktes auf der stereographischen Karte lässt sich durch die geographische Länge und Breite des abgebildeten Punktes ausdrücken. Sei \mathbf{NT} der Anfangsmeridian, so ist $\angle \mathbf{TMQ} = \mathbf{TNQ} = \lambda$ die Länge, $\angle \mathbf{PMQ} = \varphi$ die Breite des Punktes P . Bezeichnet man \mathbf{NS} mit d , so wird $\mathbf{NP} = d \cdot \operatorname{tg} \mathbf{NSP} = d \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathbf{NMP} = d \cdot \operatorname{tg} (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)$ und $\angle \mathbf{TNP} = \lambda$. Wenn also

*) Z. T. nach Sauter, Geleich, Dinse. Kartenkunde, Sammlung Göschen 30.

die Richtung des Nullmeridians \mathbf{NT} und der Massstab der Karte gegeben sind, so trage man an \mathbf{NT} in \mathbf{N} den $\angle \lambda$ an, bestimme durch Konstruktion oder mit Hilfe der Logarithmentafel die Strecke $d \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ und trage diese auf dem freien Schenkel von λ von \mathbf{N} aus ab bis \mathbf{P} ; so ist \mathbf{P} das Bild des Punktes P . Das Bild des Äquators ist der Kreis mit d um \mathbf{N} . Will man eine vollständige Karte herstellen, so wird man die Meridiane und Parallelkreise in bestimmten Abständen konstruieren (ein einfaches Konstruktionsverfahren ist auf der Zeichnung angedeutet) und in das so erhaltene „Netz“ die Umrisse der Erdteile einzeichnen. (Die Sternkarten 1 und 3 des Debesschen Atlas sind in dieser Projektion gezeichnet).

Das Bild eines Kugelkreises wird von einem Meridian in zwei Punkten geschnitten, und zwar ist $\mathbf{NA}' \cdot \mathbf{NB}'$. Einer der Meridiane ist zugleich Durchmesser des Kugelkreises, und zwar derjenige, der durch den Pol desselben geht. Da die Ebene eines grössten Kugelkreises die Äquatorebene in einem Durchmesser schneidet, so schneidet das Bild eines grössten Kreises das Bild des Äquators in zwei gegenüberliegenden Punkten. Sei OP die Ebene eines grössten Kugelkreises, \mathbf{O} und \mathbf{P} die Bilder von O und P , so wird $\triangle OPS$ rechtwinklig, und $\mathbf{NO} \cdot \mathbf{NP} = d^2$; ist also $\angle PMQ = \varphi$, so ist $\mathbf{NP} = r = d \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$, $\mathbf{NO} = r' = d \cdot \operatorname{ctg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ (Beispiel: Die Ekliptik auf Karte 1 und 3). Will man also auf der Karte durch zwei Punkte, z. B. \mathbf{P} und \mathbf{K} , den grössten Kugelkreis legen, so bestimmt man zu einem derselben, z. B. \mathbf{K} den gegenüberliegenden Punkt \mathbf{L} durch die Proportion $\mathbf{NK} : d = d : \mathbf{NL}$ und legt durch die drei Punkte \mathbf{P} , \mathbf{K} , \mathbf{L} den Kreis.

§ 4.

Ein zwischen zwei Punkten auf dem Globus ausgespannter Faden nimmt die Form eines grössten Kugelkreises an, sodass dieser die kürzeste Verbindung der Punkte darstellt. Ein Schiff, das von einem Hafen nach einem andern fahren will, würde also die kürzeste Fahrt haben, wenn es dem grössten Kreise zwischen den beiden Punkten folgte. Die Fahrt im grössten Kreise ist aber unbequem, weil man den Kurs des Schiffes beständig ändern muss. Die Steuerung wird am leichtesten, wenn der Kurs während der ganzen Fahrt derselbe bleibt. Das Schiff fährt dann in einer Linie, die alle Meridiane — und auch alle Parallelkreise, da diese auf den Meridianen senkrecht stehen — unter demselben Winkel schneidet. Diese Linie führt den Namen **Loxodrome**; sie stellt sich dar als eine Spirale, deren Windungen auf beiden Halbkugeln kongruent mit wachsenden Breiten immer enger werden und die Pole unendlich viele Male umschliessen, ohne sie jemals zu erreichen; denn wenn die Loxodrome durch den Pol ginge, so müsste einer der Meridiane, die im Pol zusammenlaufen, sie berühren, d. h. den Winkel 0° mit ihr bilden, und das ist unmöglich, weil sie mit jedem Meridian einen bestimmten Winkel bilden soll. Ausgenommen ist hier der Fall, dass die Loxodrome mit dem Meridian die Winkel 0° oder 90° bildet, sie fällt dann mit dem Meridian oder dem Parallelkreis zusammen. Von einem bestimmten Punkt des Äquators ausgehend kann man mit einem gegebenen Schnittwinkel α , wenn noch die Drehungsrichtung festgesetzt wird, nur eine Loxodrome konstruieren, und die von den andern Punkten des Äquators mit demselben Schnittwinkel α ausgehenden lassen sich durch eine Drehung auf die erste zurückführen, d. h. alle Loxodromen mit demselben Schnittwinkel sind kongruent.

Da die stereographische Abbildung winkeltreu ist, so muss das Bild der Loxodrome die Bilder der Meridiane unter gleichem Winkel schneiden; es wird sich also als eine Spirale darstellen, welche alle von einem Punkte \mathbf{N} ausgehende Strahlen unter demselben Winkel schneidet und den Punkt \mathbf{N} in unendlich vielen Windungen umgibt.

ABC und $A'B'C'$ seien ähnliche Dreiecke. Trägt man an AC in $A \angle CAB$ und in $C \angle ABC$ an und ebenso an $A'C'$ in $A' \angle C'A'B'$ und in $C' \angle A'B'C'$, so sind die entstandenen Dreiecke ACD und $A'C'D'$ ähnlich, aber auch Viereck $ABCD \sim A'B'C'D'$, weil alle Seiten proportioniert und alle Winkel gleich sind. Fügt man die ähnlichen Dreiecke ADE und $A'D'E'$ hinzu, so sind die entstandenen Fünfecke ähnlich, und schliesslich wird

$$ABCDEFGHIK \sim A'B'C'D'E'F'G'H'I'K'.$$

Durch Verkleinerung des $\angle BAC$ und durch Vermehrung der Anzahl der aneinandergelegten Dreiecke kann man die gebrochene Linie $BCDFGHK$ übergehen lassen in eine Kurve, welche mit allen Strahlen AB, AC usw. gleiche Winkel bildet, d. h. in die oben erwähnte Spirale. Dadurch geht $B'C'D'E'F'G'H'I'K'$ in einen Spiralenbogen mit demselben Schnittwinkel über, und da alle Loxodromenbogen mit gleichem Schnittwinkel sich durch Drehung aufeinander zurückführen lassen, so gilt dasselbe auch von den ebenen Spiralen: man kann deshalb die Spiralsektoren als derselben Spirale angehörend betrachten und erhält den Satz: Sektoren derselben Spirale mit gleichen Centriwinkeln sind ähnlich.

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass die Sektoren aneinanderstossen. Sei

$$FNG = GNH = HNP \text{ usw.}, \text{ so ist Sektor } FNG \sim GNH \sim HNP \text{ und}$$

$$FN : GN = GN : HN = HN : PN \text{ usw.}$$

Setzt man

$$NP = r_0, NH = r_1, \dots, \text{ so ist } r_1 = \frac{r_1}{r} \cdot r_0, r_2 = \frac{r_1^2}{r_0} = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 \cdot r_0, r_3 = \frac{r_1^3}{r_0^2} = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^3 \cdot r_0 \dots \dots \dots$$

Die Radien $r_0, r_1 \dots$ bilden also eine geometrische Reihe. Um den einfachsten Fall hervorzuheben, sei $r_0 = d$; der Radius, der mit r_0 den $\angle \lambda^0$ einschliesst, heisse r_{λ^0} , so ist

$$r_{\lambda^0} = \left(\frac{r_1}{d}\right)^{\lambda} \cdot d, \quad (I)$$

wo r_1 noch von dem Schnittwinkel α abhängt.

§ 5.

Die Konstruktion der erwähnten Spirale ist schwer auszuführen, und deshalb ist die stereographische Karte, obgleich sie winkeltreu ist, nicht für die Schifffahrt geeignet. Man kann aber aus ihr eine andere winkeltreue Karte herleiten, auf der sich die Loxodromen als gerade Linien darstellen. Da die Parallelkreise spezielle Loxodromen sind, so müssen diese ebenfalls als gerade Linien erscheinen, die mit den Meridianen ein rechtwinkliges Netz bilden. Ein solches Netz würde man z. B. erhalten, wenn man den Äquator als gerade Linie von der Länge $2d\pi$ zeichnet, diese in 360 Teile teilt, im Abstände d die Parallele zieht, welche dem Punkte N entspricht, und von dieser aus auf den Loten in den Teilpunkten die Radien der stereographischen Karte als Ordinaten abträgt. (Dasselbe Netz im halben Massstabe würde entstehen durch Projektion der Kugel vom Nordpol aus auf einen im Äquator berührenden Cylinder und Abwicklung des Cylindermantels). Hier erscheint die Spirale als Kurve, deren gleichweit absteigende Ordinaten eine geometrische Reihe bilden. Die in gleichen Abständen gemessenen Ordinaten einer Geraden bilden eine arithmetische Reihe. Wenn nun eine Folge von Zahlen eine geometrische Reihe bildet, so bilden ihre Logarithmen eine arithmetische Reihe; die oben gestellte Forderung wird also erfüllt werden, wenn man statt der Radien ihre Logarithmen mit einem

Fig. 3 a. b.

Fig. 2.

Faktor c multipliziert als Ordinaten abträgt. Für den Äquator müsste man $c \log d$ abtragen; aus praktischen Gründen wählt man den Äquator zur Abscissenachse und muss dann alle Ordinaten um $c \log d$ verkleinern. Dadurch werden aber die Ordinaten aller Punkte innerhalb des Äquatorialkreises, d. h. der nördlichen Halbkugel, negativ. Um wie gewöhnlich auf der Karte Norden oben zu haben, muss man $c (\log r - \log d)$ nach unten oder $-c (\log r - \log d)$ nach oben abtragen. Demnach werden die Koordinaten eines Punktes, der auf der stereographischen Karte durch den Winkel λ mit dem Anfangsmeridian und die Entfernung r vom Pole N bestimmt war.

Fig. 4.

$$x = 2d\pi \cdot \frac{\lambda^0}{360^0}, \quad y = -c \log \frac{r}{d} \quad (\text{II.})$$

Derselbe Punkt ist auf der Kugel durch λ und φ bestimmt.

Es war $r = d \cdot \text{tg} (45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$, also $-c \log \text{tg} (45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = c \log \text{ctg} (45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$ und

$$x = 2d\pi \cdot \frac{\lambda^0}{360^0}, \quad y = c \cdot \log \text{tg} (45^0 + \frac{1}{2}\varphi) \quad (\text{III.})$$

Die Parallelkreise von gleicher nördlicher und südlicher Breite haben denselben Abstand vom Äquator, denn $c \log \text{tg} (45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = -c \log \text{tg} (45^0 + \frac{1}{2}\varphi)$. Nord- und Südpol finden keinen Platz auf der Karte, und die ihnen benachbarten Gebiete werden stark vergrößert; dagegen kann in der Richtung des Äquators die Karte ohne Unterbrechung fortgesetzt, also die Kugeloberfläche mehr als einmal dargestellt werden (Debes Nr. 16).

Die durch Gleichung (I) dargestellte Spirale wird abgebildet durch

$$y = -c \cdot \log \left(\frac{r\lambda^0}{d} \right) = +c \cdot \lambda \cdot \log \left(\frac{d}{r_1^0} \right) = x \cdot \frac{360^0}{2d\pi} \cdot c \log \frac{d}{r_1^0}$$

Bezeichnet man mit d den Winkel, den der vom Schnittpunkt nach Norden gehende Teil des Meridians mit dem rechts von ihm liegenden Loxodromenbogen bildet, so muss, wenn die gerade Linie den Meridian unter demselben Winkel schneiden soll wie die Loxodrome,

$$\text{ctg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{360^0}{2d\pi} \cdot c \cdot \log \frac{d}{r_1^0} \quad (\text{IV.})$$

werden. Die so erhaltene Karte ist die **Mercatorsche Seekarte**. Die Loxodromen erscheinen als gerade Linien, die sich unter demselben Winkel schneiden wie auf der Kugel; und da man beliebige Linien auf der Kugel in ihrem Schnittpunkt durch die berührenden Loxodromen ersetzen kann, so folgt, dass die Mercatorsche Seekarte winkeltreu ist.

§ 6.

Es ist noch der Faktor c zu berechnen. Dazu soll die Fläche eines Sektors der „logarithmischen“ Spirale auf der stereographischen Karte auf zwei Wegen berechnet werden.

Legt man an das Dreieck ACB das Dreieck ADC umgekehrt an, so dass C auf A , A auf C fällt, so wird wegen $\angle CAB = DAC$ ein Trapez entstehen. Legt man an dessen obere Grundlinie $\angle AED$ an, so wird wegen der Gleichheit der $\angle EDA$ und ABC die Seite ED in die Verlängerung von BC fallen. Die Anfügung des folgenden Dreiecks vervollständigt wieder

Fig. 3 a. c.

das Trapez, und so wird durch Aneinanderlegen einer beliebigen geraden Anzahl von Dreiecken immer ein Trapez entstehen. In der Figur ist das Trapez gleich dem Polygon $ABCDEFGHIK$, seine parallelen Seiten gleich AB und AK , seine Winkel an $AB = \alpha$ und $= \alpha + CAB$. Durch Verkleinerung des Winkels CAB und Vermehrung der Anzahl der Dreiecke kann man wieder die gebrochene Linie in die Spirale überführen; dann geht zugleich das Trapez in ein symmetrisches über. Dessen parallele Seiten sind die äussersten Radien des Sektors, r_0 und r_λ ; die Höhe wird $\frac{r_0 - r_\lambda}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$, mithin die Fläche des Trapezes und damit zugleich die des Sektors

$$\text{Spiralensektor} = \frac{1}{4} (r_0^2 - r_\lambda^2) \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (\text{V.})$$

Andererseits ist $\triangle AKB = \frac{1}{2} r_0 \cdot r_\lambda \cdot \sin \lambda$; $\triangle AFB = \frac{1}{2} r_0 \cdot \sqrt{r_0 r_\lambda} \cdot \sin \frac{1}{2} \lambda$, $\triangle AFK = \frac{1}{2} r_\lambda \cdot \sqrt{r_0 r_\lambda} \cdot \sin \frac{1}{2} \lambda$, also

$$\frac{\text{Viereck } AKFB}{\triangle AKB} = \frac{r_0 + r_\lambda}{2 \sqrt{r_0 r_\lambda}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \lambda}$$

Ebenso ist, wenn der Kreis mit r_0 um A die Radien in $B, C, D, E \dots R$ schneidet, $\triangle ARB = \frac{1}{2} r_0^2 \cdot \sin \lambda$, $\triangle ARB = \triangle ARB = \frac{1}{2} r_0^2 \cdot \sin \frac{1}{2} \lambda$,

$$\frac{\text{Viereck } ARB}{\triangle ARB} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \lambda}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\text{Viereck } AKFB}{\text{Viereck } ARB} = \frac{r_0 + r_\lambda}{2 \sqrt{r_0 r_\lambda}} \cdot \frac{\triangle AKB}{\triangle ARB} = \frac{r_0 + r_\lambda}{2 \sqrt{r_0 r_\lambda}} \cdot \frac{r_\lambda}{r_0}$$

Ebenso ist

$$\frac{\text{Viereck } AFDB}{\text{Viereck } ARB} = \frac{r_0 + \sqrt{r_0 r_\lambda}}{2 \sqrt{r_0^3 r_\lambda}} \cdot \frac{\triangle AFB}{\triangle ARB}$$

Nun ist aber, wegen der Ähnlichkeit der Figuren,

$$(AFDB + AFHK) : (AFB + AFK) = AFDB : AFB$$

$$\text{und } (ARB + ARK) : (ARB + ARK) = ARB : ARB,$$

also wird

$$\frac{ABDFHK}{ABRKR} = \frac{AKFB}{ARB} \cdot \frac{r_0 + \sqrt{r_0 r_\lambda}}{2 \sqrt{r_0^3 r_\lambda}}$$

In dieser Weise fortfahrend, findet man

$$\frac{ABCDEFGHIK}{AB\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{I}\mathcal{K}} = \frac{ABDFHK}{AB\mathcal{D}\mathcal{F}\mathcal{H}\mathcal{K}} \cdot \frac{r_0 + \sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}}{2\sqrt[8]{r_0^7 r_\lambda}}$$

$$= \frac{r_\lambda}{r_0} \cdot \frac{r_0 + r_\lambda}{2\sqrt{r_0 r_\lambda}} \cdot \frac{r_0 + \sqrt{r_0 r_\lambda}}{2\sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}} \cdot \frac{r_0 + \sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}}{2\sqrt[8]{r_0^7 r_\lambda}}$$

Man kann dies Schlussverfahren unbegrenzt fortsetzen und gelangt so zu der Produktdarstellung:

$$\frac{\text{Spiralensektor}}{\text{Kreissektor}} = \frac{r_\lambda}{r_0} \cdot \frac{r_0 + r_\lambda}{2\sqrt{r_0 r_\lambda}} \cdot \frac{r_0 + \sqrt{r_0 r_\lambda}}{2\sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}} \cdot \frac{r_0 + \sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}}{2\sqrt[8]{r_0^7 r_\lambda}} \dots$$

Die linke Seite ist in (V) bestimmt; setzt man darin für $\text{tg } \alpha$ den aus (IV) folgenden Wert ein, so wird sie

$$\frac{\frac{1}{2} (r_0^2 - r_\lambda^2) \cdot \frac{2 d \pi}{360^\circ \cdot c \cdot \log \frac{d}{r_1^0}}}{r_0^2 \cdot \frac{\pi \cdot \lambda}{360^\circ}}$$

Nun folgt aus (I):

$$\log \frac{d}{r_\lambda} = \lambda \cdot \log \frac{d}{r_1^0},$$

also wird ($r_0 = d$)

$$\frac{1}{2} (r_0^2 - r_\lambda^2) \cdot \frac{d}{r_0^2 \cdot c \cdot \log \frac{r_0}{r_\lambda}} = \frac{r_\lambda}{r_0} \cdot \frac{r_0 + r_\lambda}{2\sqrt{r_0 r_\lambda}} \dots$$

und schliesslich

$$c \cdot \log \frac{r_0}{r_\lambda} = \frac{d (r_0 - r_\lambda)}{\sqrt{r_0 r_\lambda}} \cdot \frac{2\sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}}{r_0 + \sqrt{r_0 r_\lambda}} \cdot \frac{2\sqrt[8]{r_0^7 r_\lambda}}{r_0 + \sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}} \dots \quad (\text{VI})$$

Setzt man hierin $r_0 = d$, $r_2 = d \cdot \sqrt[n]{0,1}$, so wird

$$c = \frac{n \cdot d \cdot (1 - \sqrt[n]{0,1})}{\sqrt[n]{0,1}} \cdot \frac{2 \sqrt[4n]{0,1}}{1 + \sqrt[2n]{0,1}} \cdot \frac{2 \sqrt[8n]{0,1}}{1 + \sqrt[4n]{0,1}} \dots$$

Es ist

$$\sqrt[2]{0,1} = 0,3162278$$

$$\sqrt[4]{0,1} = 0,5623413$$

$$\sqrt[8]{0,1} = 0,7498972$$

$$\sqrt[16]{0,1} = 0,8659643$$

$$\sqrt[32]{0,1} = 0,9305720$$

$$\sqrt[64]{0,1} = 0,9646616$$

$$\sqrt[128]{0,1} = 0,9821719$$

$$\sqrt[256]{0,1} = 0,9910458$$

$$\sqrt[512]{0,1} = 0,9955128$$

$$\sqrt[1024]{0,1} = 0,9977539$$

$$\sqrt[2048]{0,1} = 0,9988763$$

$$\sqrt[4096]{0,1} = 0,9994381$$

Man sieht, dass

$$\frac{2 \sqrt[4096]{0,1}}{1 + \sqrt[2048]{0,1}}$$

auf 7 Dezimalen gleich 1 ist, und dasselbe gilt von allen folgenden Brüchen, so dass diese die ersten 7 Stellen des Ergebnisses nicht ändern. Am einfachsten scheint es demnach, in dem obigen Ausdruck für c die Zahl $n = 1024$ anzunehmen; daraus würde

$$c = \frac{d \cdot 1024 (1 - 0,9977539)}{0,9988763} = 2,302594 d$$

entstehen. Dieser Wert ist aber nur auf 4 Dezimalen richtig, weil der durch Weglassen der folgenden Stellen der Wurzel entstandene Fehler mit 1024 multipliziert ist. Um einen genaueren Wert für c zu erhalten, muss man für n einen kleineren Wert wählen. Am genauesten, freilich auch am längsten, wird die Rechnung für $n = 1$; wegen

$$\frac{\sqrt[4]{0,1} \cdot \sqrt[8]{0,1} \cdot \sqrt[16]{0,1} \dots \sqrt[2048]{0,1}}{\sqrt[2048]{0,1}} = \frac{1}{\sqrt[2048]{0,1}}$$

wird dann der Ausdruck

$$c = \frac{0,9 \cdot d}{0,9988763 \cdot 0,6581139 \cdot 0,7811707 \cdot 0,8749471 \cdot 0,9329822 \cdot 0,9652860 \cdot 0,9823308} \cdot \frac{1}{0,9910860 \cdot 0,9955229 \cdot 0,9977564 \cdot 0,9988769}$$

und dies gibt den auf 6 Dezimalen richtigen Wert

$$c = 2,302585 \cdot d$$

Wenn c berechnet ist, so kann die Formel (VI) zur Berechnung der Logarithmen dienen, und diese Berechnung lässt sich durch Kunstgriffe erheblich vereinfachen. So ist z. B., wenn man

$$r_0 = 1, r_\lambda = \sqrt[100]{32} \cdot \sqrt{0,1} = 0,988212 \text{ setzt, } \sqrt{r_0 r_\lambda} = 0,994089, \sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda} = 0,997041, \text{ also}$$

$$2,302585 \cdot \log \frac{32}{10 \sqrt{10}} = \frac{0,011788}{0,997041 \cdot 0,997045},$$

$$5 \log 2 - 1,500000 = 0,005150$$

$$\log 2 = 0,3010300.$$

Setzt man $r_0 = 1, r_\lambda = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[8]{0,1} = 0,9998589$, so wird

$$2,302585 \cdot \log \frac{3}{4 \sqrt[8]{0,1}} = \frac{0,0001411}{0,9999294}$$

$$\log 3 - 0,6020600 + 0,1250000 = 0,0000613$$

$$\log 3 = 0,4771213.$$

$$r_0 = \sqrt[100]{98} \cdot \sqrt[128]{0,1} = 1,0022162, r_\lambda = 1 \text{ gibt } \log 98 = 1,9912261.$$

Ebenso lässt sich aus $r_0 = 1, r_\lambda = \sqrt[1600]{867} \cdot \sqrt[16]{0,1} = 0,9988055$ finden $\log 867 = \log(3 \cdot 17^2) = 2,9380191$, aus $r_0 = \sqrt[100]{99} \cdot \sqrt[256]{0,1} = 1,0010563, r_\lambda = 1$ der $\log 11$ usw.

Man kann die Produktdarstellung zu einer verhältnismässig einfachen geometrischen Näherungskonstruktion des Logarithmus verwenden. Sei $AB = r_0, AC = BG = r_\lambda$ und mit r_0 um A der Kreis beschrieben. Man beschreibe über AB als Durchmesser den Halbkreis und errichte in C auf AB das Lot, das den Halbkreis in D schneidet; man verlängere AD bis zum Schnitt mit dem Kreise um A mit r_0 in E , beschreibe über DE als Durchmesser den Halbkreis und lege an diesen von A aus die Tangente mit dem Berührungspunkt D_1 , welche den Kreis um A in E_1 schneidet. Dann errichte man über $D_1 E_1$ den Halbkreis, lege an ihn von A die Tangente AD_2 und so fort, solange der Zirkel das genaue Zeichnen der Halbkreise erlaubt. Dann errichte man auf AB in G das Lot, welches AE in H schneidet. Von H fälle man $HH_1 \perp AE_1$, ferner $H_1 H_2 \perp AE_2, \dots, H_{n-1} H_n \perp AE_n$; so ist $AH_n = c \cdot \log \frac{r_0}{r_\lambda}$.

Denn es ist $AD = \sqrt{r_0 r_\lambda}$ nach dem Kathetensatze; $AD_1 = \sqrt{r_0} \sqrt{r_0 r_\lambda}$ nach dem Tangentensatze, also $AD_1 = \sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}, AD_2 = \sqrt[8]{r_0^7 r_\lambda} \dots$. Ferner

$$AM = \frac{r_0 + \sqrt{r_0 r_\lambda}}{2}, AM_1 = \frac{r_0 + \sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}}{2}, \dots; AH:AD = AG:AC, \text{ also}$$

$$AH = \frac{\sqrt{r_0 r_\lambda} (r_0 - r_\lambda)}{r_\lambda} = \frac{r_0 (r_0 - r_\lambda)}{\sqrt{r_0 r_\lambda}}$$

$$AH_1 : AH = AD_1 : AM_1, \text{ also}$$

$$AH_1 = AH \cdot \frac{\sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}}{\frac{1}{2}(r_0 + \sqrt{r_0 r_\lambda})} = \frac{r_0 \cdot (r_0 - r_\lambda)}{\sqrt{r_0 r_\lambda}} \cdot \frac{2\sqrt[4]{r_0^3 r_\lambda}}{r_0 + \sqrt{r_0 r_\lambda}}$$

so dass AH_n dem Werte $c \log \frac{r_0}{r_\lambda}$ beliebig angenähert werden kann. Soll der Fehler $< \frac{1}{1000}$ sein, so muss $\angle E_n A E_{n-1} < 2\frac{1}{2}^\circ$, also wenn $r_0 = 10$ cm ist, der Radius des letzten Kreises < 4 mm gemacht werden. Die Figur zeigt $AB = d$, $AC = d \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2} \cdot 60^\circ)$, so dass AH_n in der Mercatorkarte zur Konstruktion des Parallelkreises von 60° benutzt ist.*)

§ 7.

Es sollen nun die geraden Linien der stereographischen Karte betrachtet werden; sie sind die Bilder von kleinen Kugelkreisen, die durch den Südpol gehen. Fällt man von **N** aus das Lot auf die Gerade und bezeichnet die Länge des Lotes mit e , seinen Winkel mit dem Anfangsmeridian mit λ_0 , so ist für irgend einen Punkt **P** auf dieser Linie:

$$r = \frac{e}{\cos(\lambda - \lambda_0)}$$

Auf der Mercatorkarte werden diese Geraden durch Kurven dargestellt, deren Gleichung

$$x = \frac{2d\pi \cdot \lambda}{360}, \quad y = -c \log \frac{r}{d} = -c \cdot \log \frac{e}{d \cdot \cos(\lambda - \lambda_0)},$$

also

$$y = c \log \cos \left(\frac{(x - x_0) \cdot 360}{2d\pi} \right) - c \log \frac{e}{d}$$

Setzt man $c \log(d/e) = y_0$, so bleibt für dieselbe Kurve y_0 ungeändert, und es ist

$$y - y_0 = c \cdot \log \cos \left(\frac{360}{2d\pi} (x - x_0) \right) \quad (\text{VII})$$

Man sieht, dass die Bilder aller Geraden der stereographischen Karte sich nur durch die Werte von y_0 und x_0 unterscheiden; das heisst aber: alle diese Kurven lassen sich durch Parallelverschiebung in einander überführen, sie sind kongruent. Stellt man also ein Lineal her, dessen Ziehkante durch die Kurve

$$y = c \cdot \log \cos \left(\frac{360}{2d\pi} \cdot x \right) \quad (\text{VIII})$$

dargestellt wird, so kann man mit diesem auf der Mercatorkarte zu jeder Geraden der stereographischen Karte das Bild konstruieren. Seien z. B. **II** und **Φ** die Bilder von **P** und **F**, so verschiebe man das Lineal auf der Mercatorkarte, so, dass seine Achse parallel zu den Meridianen bleibt, bis die Punkte **II** und **Φ** auf die Kurve fallen, so gibt die Ziehkante das Bild der Geraden **PF**.

*) Seidel (J. f. Math. 73 [1871] p. 276) erhält auf anderem Wege eine Formel, auf welche die Formel (IV) sich zurückführen lässt; doch ist die oben angegebene Form zur Berechnung der Logarithmen und besonders zur genauen Interpolation vielstelliger Logarithmen geeigneter.

Fig. 2.

Fig. 4.

Die Kurve (VIII) hat Ähnlichkeit mit einer Parabel, deren Achse nach unten gerichtet ist; sie liegt wie die Parabel zur Achse symmetrisch, aber sie hat in der Entfernung $x = \pm \frac{1}{2} d\pi$ der Ordinatenachse parallele Asymptoten. Für den Massstab 1 : 90 000 000 (ein Längengrad am Äquator = 1 mm) wird für

$x = 0^\circ$	$y = 0,00$ mm	$x = 50^\circ$	$y = -25,31$ mm
5°	— 0,22 „	55°	— 31,84 „
10°	— 0,88 „	60°	— 39,71 „
15°	— 1,99 „	65°	— 49,35 „
20°	— 3,56 „	70°	— 61,48 „
25°	— 5,64 „	75°	— 77,43 „
30°	— 8,24 „	80°	— 100,31 „
35°	— 11,43 „	85°	— 139,81 „
40°	— 15,27 „	87°	— 169,03 „
45°	— 19,86 „	89°	— 231,95 „

Für einen andern Massstab 1 : n sind diese Werte mit 90000000 : n zu multiplizieren. Die Kurve der Figur ist in dem — leider wenig rationalen — Massstabe der Karte Debes Nr. 16 gezeichnet, so dass es leicht ist sie auf Karton zu übertragen und auszuschneiden.

Die Kurve (VIII) soll im folgenden als Mercatorgerade, das Lineal, dessen Ziehkante sie bildet, als Mercatorlineal bezeichnet werden. Der Punkt $x=0$ soll als Scheitel, die Ordinatenachse als Achse der Kurve bezeichnet werden.

Da nun die Aufgabe: Zwei Punkte der Mercatorebene durch eine Mercatorgerade zu verbinden, immer eindeutig lösbar ist (nötigenfalls durch Erweiterung der Karte, m. vergl. § 5), so können alle geometrischen Konstruktionen der stereographischen Karte auf die Mercatorkarte übertragen werden. Denn wie Steiner (Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Ostwalds Klassiker Nr. 60) gezeigt hat, können alle Konstruktionen der Elementargeometrie, die sonst mit dem Zirkel und Lineal ausgeführt werden, auch mit dem Lineal allein ihre Lösung finden, wenn irgend ein fester Kreis in der Ebene gegeben ist. Als Lineal dient bei den Konstruktionen der Mercatorebene das Mercatorlineal, als fester Kreis der Äquator oder irgend ein Parallelkreis, wobei zu bemerken ist, dass als Endpunkte eines Durchmessers zwei um $d\pi$ entfernte Punkte anzusehen sind. Es gelten dann auf der Mercatorebene alle Lehrsätze der gewöhnlichen (euklidischen) Geometrie.

Diese Konstruktionen werden wesentlich erleichtert dadurch, dass der Winkel zweier Geraden auf der stereographischen Karte gleich dem Winkel der vom Pole auf sie gefällten Lote ist, bzw. diesen zu zwei Rechten ergänzt. Es ist daher der Winkel zweier Mercatorgeraden gleich der Entfernung ihrer Scheitelmeridiane, oder, was dasselbe ist, der ihrer gleichliegenden Asymptoten. Parallel sind nur die Linien, deren Asymptoten zusammenfallen; die Meridiane, d. h. Mercatorgerade mit unendlich fernem Scheitel, sind also nicht parallel. Wollte man sie als parallel betrachten, also den Winkel zweier Linien auf der Mercatorkarte allgemein als den ihrer geradlinigen Tangenten definieren, so würde man neben Dreiecken mit der Winkelsumme $2R$ auch solche mit kleinerer Winkelsumme erhalten; dann würden aber, nach einem Dehnschen Satze (Citat bei Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl., S. 24) die Kongruenzaxiome zu Widersprüchen führen.

§ 8.

Die Aufgabe:

Durch drei gegebene Punkte der Mercatorkarte den kleinen Kugelkreis zu legen

Fig. 4.

lässt sich nun in folgender Weise lösen. Seien Π , Φ und Ψ die gegebenen Punkte, so verbindet man Π und Ψ mit Φ durch Mercatorgerade, deren Scheitelmeridiane $\Pi_1 \Pi_2$ und $\Psi_1 \Psi_2$ sind, und misst den Abstand $\Pi_2 \Psi_2$. Zieht man durch Π irgend eine Mercatorgerade Γ mit dem Scheitelmeridian $\Gamma_1 \Gamma_2$, trägt auf dem Äquator $\Gamma_2 \Delta_2$ gleich und gleichgerichtet $\Pi_2 \Psi_2$ ab und zieht durch Ψ die Mercatorgerade, deren Scheitel auf dem Meridian durch Δ_2 liegt, so schneidet diese $\Pi \Gamma_1$ in einem Punkte Γ des kleinen Kugelkreises durch Π, Φ, Ψ .

Denn es ist $\angle \Pi \Phi \Psi = \Pi_1 \Phi \Psi_1 = \Pi_2 \Psi_2 = \Gamma_2 \Delta_2 = \angle \Pi \Gamma \Psi$, also liegt Γ auf dem Kreise durch Π, Φ, Ψ , nach der Umkehrung des Satzes vom Peripheriewinkel. So kann man beliebig viele Punkte des Kreises zeichnen. Ein einfacher Spezialfall ist der, dass zwei Endpunkte eines Durchmessers gegeben sind, in diesem Falle ist der Peripheriewinkel ein Rechter, also der Abstand zusammengehöriger Scheitelmeridiane $= \frac{1}{2} d\pi$.

§ 9.

Handelt es sich um einen grössten Kugelkreis, so lässt sich noch eine andere Konstruktion anwenden. Sei auf der stereographischen Karte das Bild eines grössten Kreises gezeichnet, \mathbf{M} sein Mittelpunkt, und \mathbf{KL} eine durch \mathbf{N} gehende Sehne. Fällt man von \mathbf{M} auf \mathbf{KL} das Lot \mathbf{MJ} , so ist $\mathbf{KJ} = \mathbf{LJ}$. Nun ist in § 3 am Ende bewiesen worden, dass, wenn $\mathbf{NL} = d \operatorname{tg} (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)$ ist, $\mathbf{NK} = d \cdot \operatorname{ctg} (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)$ wird. Also ist $\mathbf{NJ} = \frac{1}{2} (\mathbf{NK} - \mathbf{NL}) = \frac{1}{2} d [\operatorname{ctg} (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) - \operatorname{tg} (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)] = d \cdot \operatorname{ctg} (90^\circ - \varphi) = d \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Sieht man \mathbf{J} als das Bild eines Ortes mit der Breite ψ an, so ist

$$\varphi = 45^\circ - \frac{1}{2} \psi, \quad \psi = 90^\circ - 2\varphi. \quad (\text{IX})$$

Man kann also zu φ das zugehörige ψ finden und umgekehrt. Für negative Werte von φ erhält ψ denselben Wert wie für die gleichen positiven. Nun liegen die Mittelpunkte der Sehnen auf dem Kreise über \mathbf{MN} als Durchmesser. Wenn $\mathbf{MNT} = \lambda_0$, $\angle \mathbf{KNT} = \lambda$ gesetzt wird, so ist $\mathbf{NJ} = \mathbf{MN} \cdot \cos (\lambda - \lambda_0)$. Geht man zur Mercatorkarte über, so wird das Bild dieses Kreises dargestellt durch die Kurve

$$x = \frac{2d\pi \cdot \lambda}{360}, \quad y = -c \log \frac{\mathbf{MN}}{d} \cdot \cos (\lambda - \lambda_0),$$

und da $y_0 = -c \log \frac{\mathbf{MN}}{d}$ für dieselbe Kurve unverändert bleibt,

$$y - y_0 = -c \cdot \log \cos \left[(x - x_0) \cdot \frac{360}{2d\pi} \right]$$

Man sieht, dass man diese Kurve zeichnen kann, wenn man das Mercatorlineal umgekehrt — mit dem Scheitel nach unten — anlegt. Sollen also zwei Punkte Θ und Δ auf der südlichen Halbkugel — weil nur für Punkte der südlichen Halbkugel der Sehnenmittelpunkt auf demselben Meridian liegt — durch den grössten Kugelkreis verbunden werden, so sucht man an dem Massstab am Rande der Karte ihre Breiten $-\varphi_1$ und $-\varphi_2$ und berechnet nach Formel (IX)

Fig. 4.

die zugehörigen ψ_1 und ψ_2 . Auf den Meridianen von Θ und Λ sucht man die den Breiten ψ_1 und ψ_2 entsprechenden Punkte Θ' und Λ' und verbindet sie durch das umgekehrte Mercator-Lineal. Für jeden Punkt dieser Kurve kann man die Breite ψ ablesen und auf demselben Meridian den Punkt aufsuchen, der dem zugehörigen φ entspricht. Man erhält so nur den südlichen Halbkreis, kann aber daraus den kongruenten nördlichen finden. Liegt einer der Punkte Θ und Λ auf der nördlichen Halbkugel, so sucht man seinen Antipodenpunkt und verfährt wie oben; haben beide Punkte nördliche Breite, so kehrt man die ganze Karte um. Die Hilfskurve ist dann eine Mercatorgerade, und zwar die Polare des Punktes N in Bezug auf den Kreis.

Man kann dasselbe Verfahren anwenden, um den Bogen des grössten Kreises zwischen Θ und Λ ohne Rechnung zu finden. Man bestimmt Θ' und Λ' und verbindet sie mit dem umgekehrten Mercatorlineal; der Scheitel habe die Breite ψ_3 . Dann sucht man auf dem gefundenen Scheitelmeridian den Pol Ξ des Kugelkreises mit der Breite $\varphi_3 = 45^\circ - \frac{1}{2}\psi_3$ und den zugehörigen Punkt Ξ' mit der Breite $\psi_4 = -\psi_3$ und einer um 180° differierenden Länge; verbindet Θ' Ξ' und Λ' Ξ' mit umgekehrtem Lineal, die Scheitel Σ und X verbindet man mit aufrechtem Lineal mit Ξ ; so ist die Entfernung der Scheitelmeridiane der Mercatorgeraden gleich der sphärischen Distanz der Punkte. Denn Σ und X sind die Mittelpunkte der grössten Kreise durch Θ und Ξ und Λ und Ξ ; der Winkel dieser Kreise ist gleich der sphärischen Distanz der Punkte, und der Winkel ihrer Radien ist diesem gleich.

Für die bei Seefahrten gebrauchten Karten wird sich dieses Verfahren nicht unmittelbar anwenden lassen, weil deren Massstab ein sehr viel grösserer ist; vielleicht ist es möglich, durch Zerlegung des Mercatorlineals praktisch brauchbare Methoden zu finden und dadurch z. B. die Konstruktion der Sumnerschen Linien zu erleichtern.

Schlussbemerkung.

Wenn ich dem eigentlichen Gegenstande der vorliegenden Arbeit in den §§ 1—5 die elementare Theorie der Mercatorkarte vorausgeschickt habe, so geschah dies, um auch denen, welche Breusings vorzügliche Darstellung (Das Verebnen der Kugeloberfläche, Leipzig 1892) nicht kennen, das Verständnis des Folgenden zu ermöglichen und sie zu weiterer Beschäftigung mit der Kartenkunde anzuregen. Ich habe übrigens Breusings Leitfaden erst nach Vollendung der vorliegenden Arbeit kennen gelernt und ihn nur bei dem Zeichnen der Figur benutzt — ich habe in dieser die Tatsache ausgedrückt, dass man von Berlin in der Richtung Nordost gen Ost (unter dem Azimut 119°) abreisen müsste, um auf dem kürzesten Wege nach New-Orleans zu gelangen. Es sei noch bemerkt, dass die in § 9 angegebene Konstruktion zur Bestimmung des Gradnetzes der schiefachsigen winkeltreuen Cylinderprojektion dienen kann.





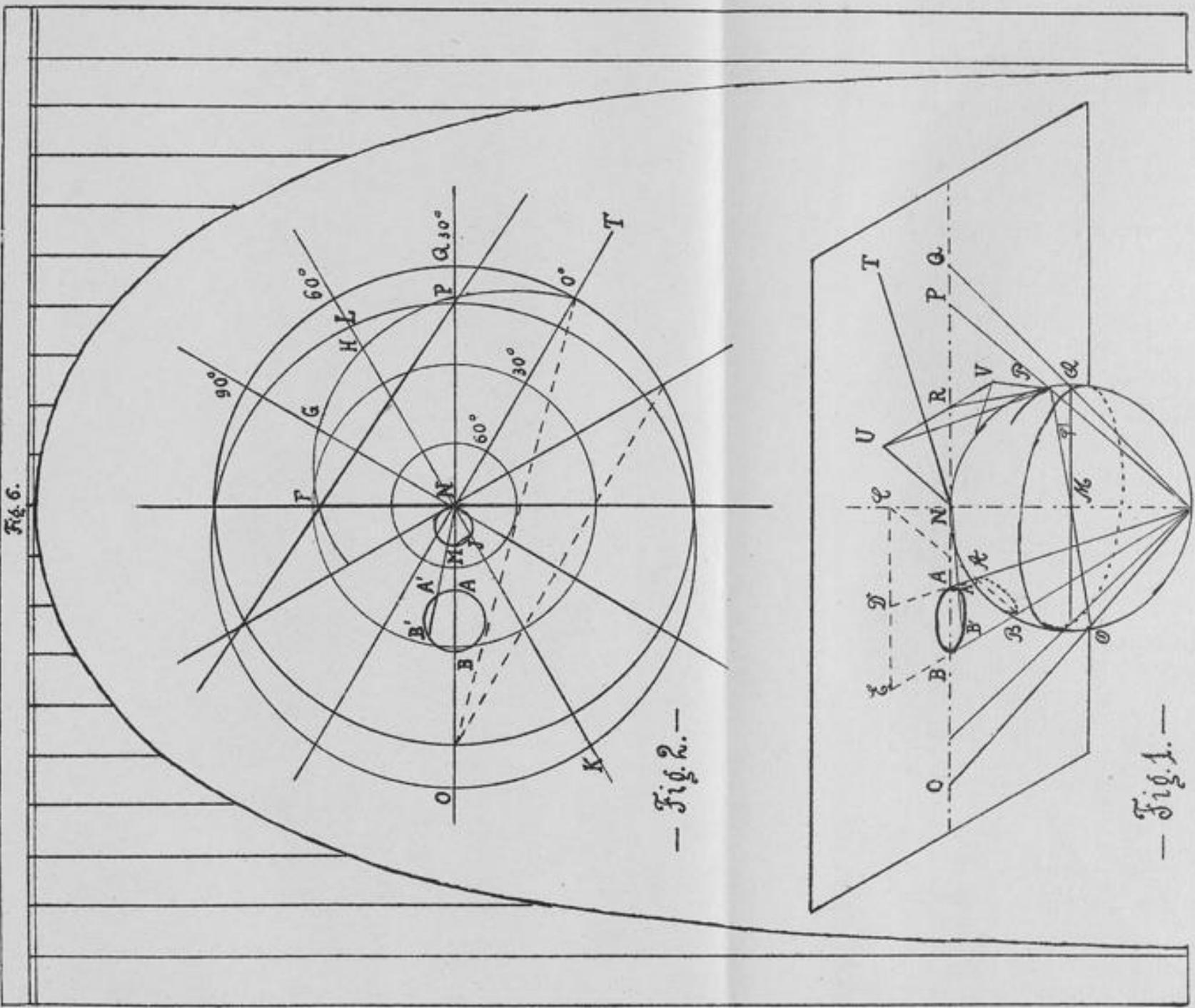


Fig. 6.

Fig. 2.

Fig. 1.

