Ueber Flächen, welche durch veränderliche Kegelschnitte erzeugt werden

von

Professor Strobel.

Von den Flächen, welche durch irgendwelche Bewegung eines allgemeinen, veränderlichen Kegelschnitts erzeugt werden, bieten sich naturgemäss diejenigen zuerst der Untersuchung dar, welche durch Kreise mit konstant bleibendem oder veränderlichem Halbmesser entstehen. Solche Flächen mit kreisförmigen Erzeugenden sind als Röhrenflächen, Cycliden, anallagmatische Flächen für sich allein und in Verbindung mit andern Problemen von vielen Mathematikern behandelt worden; beispielsweise seien hier angeführt: Cayley, memoirs on quartic surfaces, Proceedings of the London math. soc. Band III, 1871. Casey, on cyclides and sphero-quartics, Philos. Trans. Band 161. Dupin, applications de géometrie et de méc. Maxwell, über Cycliden im engeren Sinn, quaterly journal, IX. Moutard, sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre, nouvelles Annales III, 2° série; sur les lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre, Comptes rendus, 59 II. Ribaucour, sur une propriété des surfaces enveloppes de sphères, Comptes rendus, LXVII; sur les systèmes cycliques, ebendaselbst LXXVI; sur les faisceaux de cercles, LXXVI. Darboux, théorie générale des surfaces, I u. IV, pag. 495 u. ff.; sowie an vielen anderen Orten dieses Werkes; leçons sur les systèmes orthogonaux, Paris 1898; aufs eingehendste wurden die Flächen mit kreisförmigen Erzeugenden jedoch wohl untersucht von M. G. Demartres und zwar in den beiden Abhandlungen: sur les surfaces à génératrice circulaire, Annales de l'école normale supérieure, II, 3° série, 1885, und mémoire sur les surfaces qui sont divisées en carrées par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales, Annales IV, 1887. Obgleich nun Demartres in diesen Veröffentlichungen gewisse Differentialeigenschaften der genannten Flächen durchaus allgemein und umfassend entwickelt und berücksichtigt, so sieht er doch von den eigentlichen gestaltlichen Flächenverhältnissen vollständig ab, letztere sollen daher in dem ersten Teil vorliegender Arbeit zur Behandlung kommen. Der zweite Abschnitt, welcher nur noch kurz angedeutet werden konnte, beschäftigt sich dagegen mit Flächen, die durch allgemeine, veränderliche Kegelschnitte entstehen. Beiden Teilen ist eine einfache Erzeugungsmethode zu Grunde gelegt, welche der Verfasser sonst nirgends fand; dem beschränkten Umfang der Abhandlung gemäss wurden die Untersuchungen immer nur so weit ausgedehnt, dass sich von den hiebei auftretenden Kurven und Flächen wenigstens eine Skizze fertigen liess, während die Betrachtung aller übrigen Eigenschaften der Flächen und der Transformation, der Abbildung auf die Leitfläche usw. zunächst unterbleiben musste.

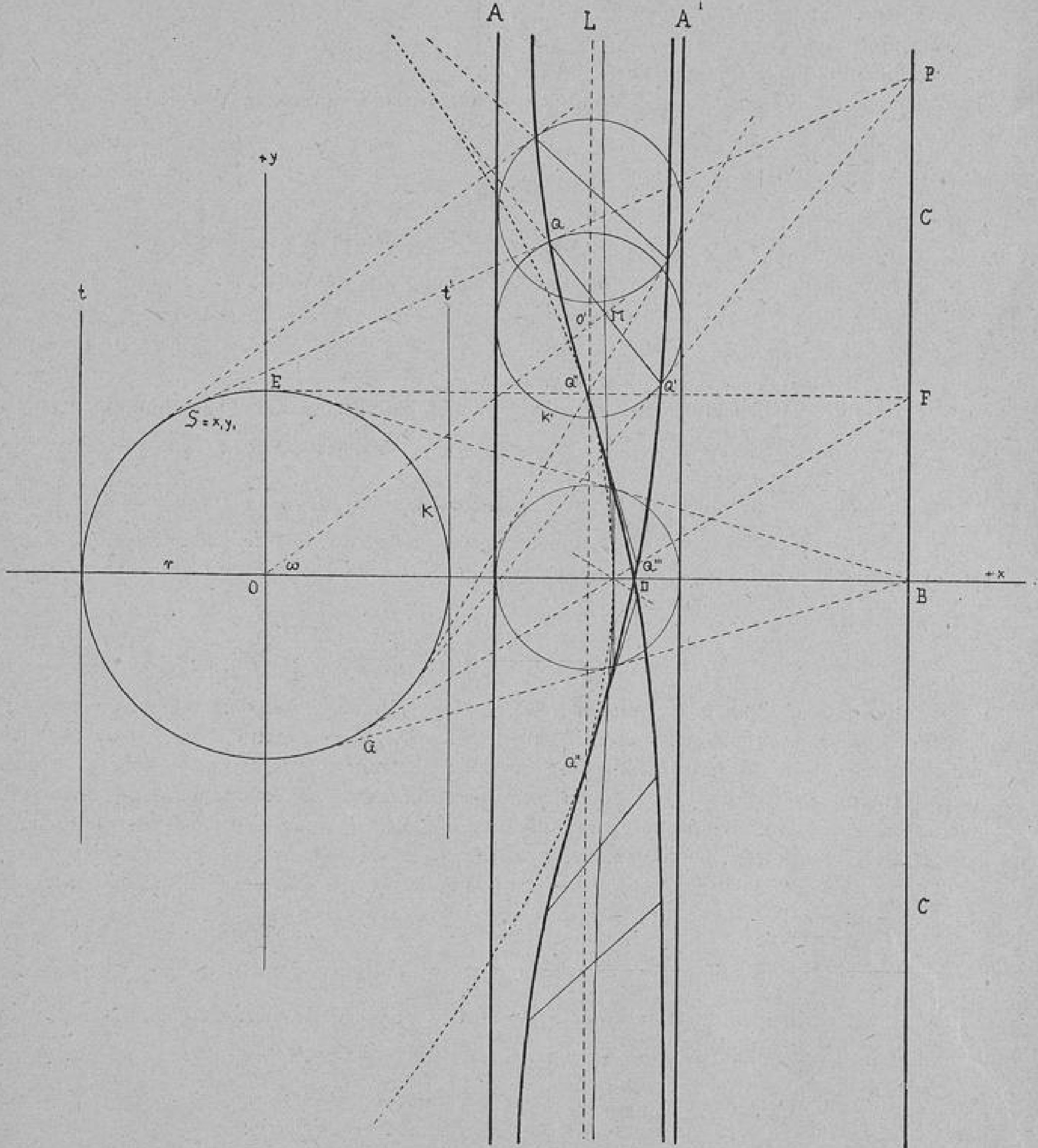
I. Ueber Flächen mit kreisförmigen Erzeugenden.

A. Vorbetrachtungen in der Ebene.

Legt man in irgend einem Punkt S eines Kreises K eine Tangente an denselben, verlängert die Tangente bis zum Schnitt P mit einer Kurve C und teilt das Stück PS in dem beliebigen Verhältnis m : n, so beschreibt der Teilpunkt Q beim Fortrücken von S eine gewisse Kurve. Ist der Einfachheit halber das Verhältnis m : n = 1, so wird die Strecke PS halbiert. Für die Gestalt der Ortskurve von Q lassen sich nun durch geometrische Betrachtungen schon sehr wertvolle Anhaltspunkte ermitteln.

1. C eine Gerade.

Es folgt sofort, dass die beiden Kreistangenten t und t' ∥ C zwei Asymptoten A und A' ebenfalls ∥ C je in der mittleren Entfernung der t und t' von C liefern, weiter ist die Ortskurve symmetrisch zu dem Lot OB vom Kreismittelpunkt O auf C und besitzt auf diesem Lot einen Doppelpunkt D; ferner vermag die Kurve, von imaginären oder isolierten Punkten abgesehen, nur innerhalb des von beiden Asymptoten eingeschlossenen Flächenstreifens zu verlaufen; sie ist also damit im wesentlichen bestimmt, wie Figur 1 zeigt. Da aber von jedem Punkt P der C zwei Tangenten an K möglich sind, und die Mittelpunkte sämtlicher Sekanten von P nach K auf dem Kreise K' mit Halbmesser $\frac{r}{2}$, so kann die Ortskurve auch erzeugt werden durch die Endpunkte Q und Q' der veränderlichen Sehne QQ' eines mit konstantem Halbmesser $\frac{r}{2}$ beschriebenen Kreises K', dessen Mittelpunkt O' sich auf der Geraden L fortbewegt, die parallel A und A' in der mittleren Entfernung gezogen wird. Die Kreise K' beschreiben hierbei die Fläche, innerhalb welcher die Kurve allein liegen kann, diese Fläche sei von jetzt an die Asymptotenfläche der Ortskurve genannt, und zwar, ob sie unendlich ferne Punkte einschliesst oder ganz im endlichen sich erstreckt; die Sehnen umhüllen ebenfalls eine gewisse Kurve, hier z. B. eine Parabel, ihre Winkelgeschwindigkeit w ist gleich der Winkelgeschwindigkeit der Zentrale OO' von K und K'. Die Mittelpunkte M sämtlicher Sehnen bilden die Fusspunktskurven der Parabel in Beziehung auf den Pol O. Hat man die Parabel sowie den Punkt O, so ist demnach die Ortskurve ebenfalls gegeben, desgleichen genügen hiezu die Parabel und L, denn diese Gerade muss Asymptote der Fusspunktskurve unserer Parabel sein, sie schneidet die Kurve ganz allgemein im Punkt Q'', dessen Entfernung von $C = \frac{OB}{2}$, von OB aber = r ist. In dem Punkt Q'' berührt die Parabel die Ortskurve und die Sehne Q'' Q''' ist hier sowohl an letztere wie an die Parabel Tangente, stellt also die Wendetangente der Ortskurve im Wendepunkt Q'' dar. Dass die Punkte Q auch die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von K und K' sind, braucht wohl nicht weiter ausgeführt zu werden.



Figur 1.

Analytische Behandlung der Ortskurve.

O B werde als x Axe, der dazu senkrechte Durchmesser von K als y Axe gewählt, dann ergiebt sich:

1. Gleichung von K : $x_1^2 + y_1^2 = r^2$
2. Tangente im Punkt $(x_1\, y_1)$: $xx_1 + yy_1 = r^2$
3. Gleichung der L : $x = a$ also die Coordinaten von Q:

$$\left\{\begin{aligned} 2\,x &= x_1 + a \\ 2\,y &= 2\,\frac{r^2 - xx_1}{y_1} = \frac{2\,r^2 - x_1^2 - ax_1}{y_1} = \frac{y_1^2 + r^2 - ax_1}{y_1} \end{aligned}\right\} \text{ mithin die Coordinaten}$$

von $S = (x_1\, y_1)$: $\left\{\begin{aligned} x_1 &= 2\,x - a \\ y_1 &= y \pm \sqrt{y^2 + ax_1 - r^2} = y \pm \sqrt{y^2 - r^2 + 2\,ax - a^2} \end{aligned}\right\}$

Setzt man diese Werte in die erste Gleichung ein, so folgt:

$$(2\,x - a)^2 + (y \pm \sqrt{y^2 + 2\,ax - a^2 - r^2})^2 - r^2 = o \text{ oder ausquadriert}$$

$$2\,x^2 - ax + y^2 - r^2 = \pm \sqrt{y^2 + ax - a^2\,r^2} \text{ d. h. endlich}$$

4. $(2\,x^2 + y^2 - ax - r^2) - y^2\,(y^2 + 2\,ax - a^2 - r^2) = o$

Aus dieser Gleichung der Ortskurve können unmittelbar die Doppelpunkte $2\,x^2 + y^2 - ax - r^2 = o$ $y = o$ oder $x = \frac{1}{4}\left\{a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2}\right\}$ ersehen werden, von welchen der zweite jedenfalls einem isolierten Punkt entspricht, während $x = \frac{1}{4}\left\{a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2}\right\}$ den schon geometrisch abgeleiteten Doppelpunkt D auf das x Axe liefert, zu welcher die Kurve symmetrisch ist. Die Form (4) zeigt weiter, dass die Kurve die Parabel $y^2 + 2\,ax - a^2 - r^2 = o$ berührt und zwar in den Punkten

$$\left\{\begin{aligned} y &= a \\ y &= \pm \sqrt{r^2 - a^2} \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \\ y &= \pm r \end{aligned}\right\}.$$

Bei der in Figur 1 angenommenen Lage ist letzterer Punkt der schon genannte Q″, während der erstere imaginär wäre, indem $a > r$. Da die Ortskurve die Parabel nicht schneiden darf, sondern stets rechts von derselben verlaufen muss (wieder isolierte Punkte ausgenommen), so ist die Parabel eine wichtige Hilfskurve zur Bestimmung der Ortskurve, indem sie die Asymptotenfläche beträchtlich verengert. Um die schon geometrisch nachgewiesenen Asymptoten zu erhalten, hat man die Gleichung (4) etwas umzuformen:

$$(2\,x^2 - ax - r^2)^2 + 2\,y^2\,(2\,x^2 - ax - r^2) + y^4 - y^4 - y^2\,(2\,ax - a^2 - r^2) = o \text{ oder}$$

$$(2\,x^2 - ax - r^2)^2 + y^2\,(4\,x^2 - 4\,ax + a^2 - r^2) = o \text{ woraus}$$

$$\left(x - \frac{a + \sqrt{a^2 + 8\,r^2}}{4}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{a - \sqrt{a^2 + 8\,r^2}}{4}\right)^2 + y^2\left(x - \frac{a + r}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{a - r}{2}\right) = o$$

Das erste quadratische Produkt ergiebt wieder die Doppelpunkte, das zweite die Asymptoten parallel zur y Axe in den Abständen $\frac{a + r}{2}$ und $\frac{a - r}{2}$ von derselben.

Zur Untersuchung der Eigenschaften des Punktes Q″ genügt es, die Schnittpunkte der Geraden Q″ Q‴ mit der Kurve zu bestimmen, man erhält hierzu

$$\left\{\begin{aligned} &\text{Gleichung der Q″ Q‴ durch Q″} \perp \text{O F}: \quad y = r = -\frac{a}{r}\left(x - \frac{a}{2}\right) \\ &\text{Gleichung der Ortskurve } (2\,x^2 - ax - r^2)^2 + y^2\,(4\,x^2 - 4\,ax + a^2 - r^2) = o \end{aligned}\right\} \text{ also}$$

$$\{x(2x-a)-r^2\}^2+y^2\{(2x-a)^2-r^2\}=o \text{ ausmultipliziert}$$

$$x^2(2x-a)^2+y^2(2x-a)^2-2r^2x(2x-a)+r^2(r^2-y^2)=o \text{ und da } r-y=\frac{a}{20}(2x-a)$$

$$(2x-a)\{2x^2(2x-a)+2y^2(2x-a)-4r^2x+ar(r+y)\}=o$$

Wird die grosse Klammer in passender Weise zusammengefasst, so liefert dies

$$(2x-a)(r-y)[4rx^2-4ax(r+y)+a^2y+a^2(r+y)]=o \text{ oder}$$

$$(2x-a)(r-y)(2x-a)(r(2x-a)-2ay)=o$$

Mittelst $2x-a=\frac{2r}{a}(r-y)$ ist $r(2x-a)-2ay=\frac{2r^2}{a}(r-y)-2ay=\frac{2}{a}\left(r^3-y(a^2+r^2)\right)$.

Die Schnittpunktsgleichung lässt sich demnach unter Weglassung der Konstanten auf die Form bringen $(r-y)^3\left(y-\frac{r^3}{a^2+r^2}\right)=o$ welche nachweist, dass die Kurve in Q″ dreipunktig geschnitten wird, Q″ Q‴ also hier die Wendetangente darstellt; der vierte Schnittpunkt $y=\frac{r^3}{a^2+r^2}$ ist der Punkt Q‴, was eine einfache Rechnung zeigen würde.

Umhüllungskurve der Kreissehnen.

Die Coordinaten des Punktes waren $\left\{\begin{aligned} x &= \frac{x_1+a}{2} \\ y &= \frac{y_1^2+r^2-ax_1}{2y_1}\end{aligned}\right\}$

Die des Punktes P sind $\left\{\begin{aligned} x_0 &= a \\ y_0 &= \frac{r^2-ax_1}{y_1}\end{aligned}\right\}$ also mit Benützung von Liniencoordinaten

Gleichung des Punktes Q: $ux+vy+1=o$ oder $u(x_1+a)y_1+v(y_1^2+r^2-ax_1)+2y_1=o$ (5)

Gleichung des ∞ fernen Punktes der zu O P senkrechten Richtung Q Q¹:

$$uy_0-rx_0=o \text{ oder } u(r^2-ax_1)-av\,y_1=o \quad (6)$$

(5) und (6) liefern nach Elimination von $x_1\ y_1$ mit $x_1^2+y_1^1-r^2=o$ die Umhüllungskurve. Es wird nun $r^2-ax_1=\frac{a\,v\,y_1}{u}$

$$u(x_1+a)y_1+v\left(y_1^2+\frac{a\,v\,y_1}{u}\right)+2y_1=o \text{ nach Vereinfachung mit } y_1:$$

$$ux_1+vy_1 = -(2u+ar^2+au^2)\frac{1}{u}; \text{ da aber auch}$$

$$vy_1 = (r^2-ax_1)\frac{u}{a}=r^2\frac{u}{a}-ux, \text{ so ist}$$

$$ux_1+r^2\frac{u}{a}-ux_1=-(2u+av^2+au^2)\frac{1}{u} \text{ oder endlich}$$

$r^2u^2+a^2u^2+a^2r^2+2\ au=o=u^2(a^2+r^2)+a^2v^2+2au$ als Gleichung der gesuchten Kurve. Eine Diskussion in Liniencoordinaten würde dieselbe ohne weiteres als unsere Parabel erkennen lassen, zur vollen Uebereinstimmung soll sie jedoch in gewöhnliche Coordinaten übergeführt werden. Wenn Θ Homogenitätsvariable von $\varphi=u^2(a^2+r^2)+a^2v^2+2au\Theta=o$, so folgt hiezu

$$\left\{\begin{aligned} \varrho\, x &= \frac{\delta\varphi}{\delta u} = 2\,u\,(a^2+r^2)+2\,a \\ \varrho\, y &= \frac{\delta\varphi}{\delta v} = 2\,a^2\,v \\ \varrho\,\omega &= \frac{\delta\varphi}{\delta\Theta} = 2\,au \end{aligned}\right\} \quad \text{woraus}$$

$$x = \frac{u\,(a^2+r^2)+a}{au} \qquad y = \frac{av}{u} \text{ d. h.}$$

$$u = \frac{a}{-(a^2+r^2)+ax} \quad v = \frac{y}{-(a^2+r^2)+ax}$$ und in gewöhnlichen Coordinaten

$$a^2(a^2+r^2)+a^2y^2+2\,a^2\left\{ax-(a^2+r^2)\right\} = o \text{ oder}$$

$y^2+2\,ax-(a^2+r^2) = o$ in Uebereinstimmung mit dem schon früher gesagten.

Besondere Fälle der Ortskurve.

Die allgemeine Gleichung $(2\,x^2+y^2-ax-r^2)^2-y^2\,(y^2+2\,ax-a^2-r^2) = o$ liefert interessante Spezialfälle für die Werte $a = r$, $a = o$ und $a = -\frac{r}{2}$, nämlich:

für $a = r$: $(2\,x^2+y^2-rx-r^2)-x^2\,(y^2+2\,rx-2\,r^2) = o$ oder

$$(x-r)\left\{(y-r)\left(\left(x+\frac{r}{2}\right)^2+x\,y^2\right\} = o$$

es ist folglich die Tangente t^1 hier Bestandteil der Kurve, letztere selbst also im übrigen von der dritten Ordnung; ihr Verlauf, ihre Wendepunkte Q″ und ihre Asymptoten siehe Figur 2 unter No. II. Die Doppelpunkte auf der x Axe sind $x = r$, wo t^1 die Restkurve berührt, und $x = -\frac{r}{2}$, die Parabel berührt in $x = r$ die Kurve und natürlich auch im Wendepunkt Q″ für $x = \frac{r}{2}$, $y = r$.

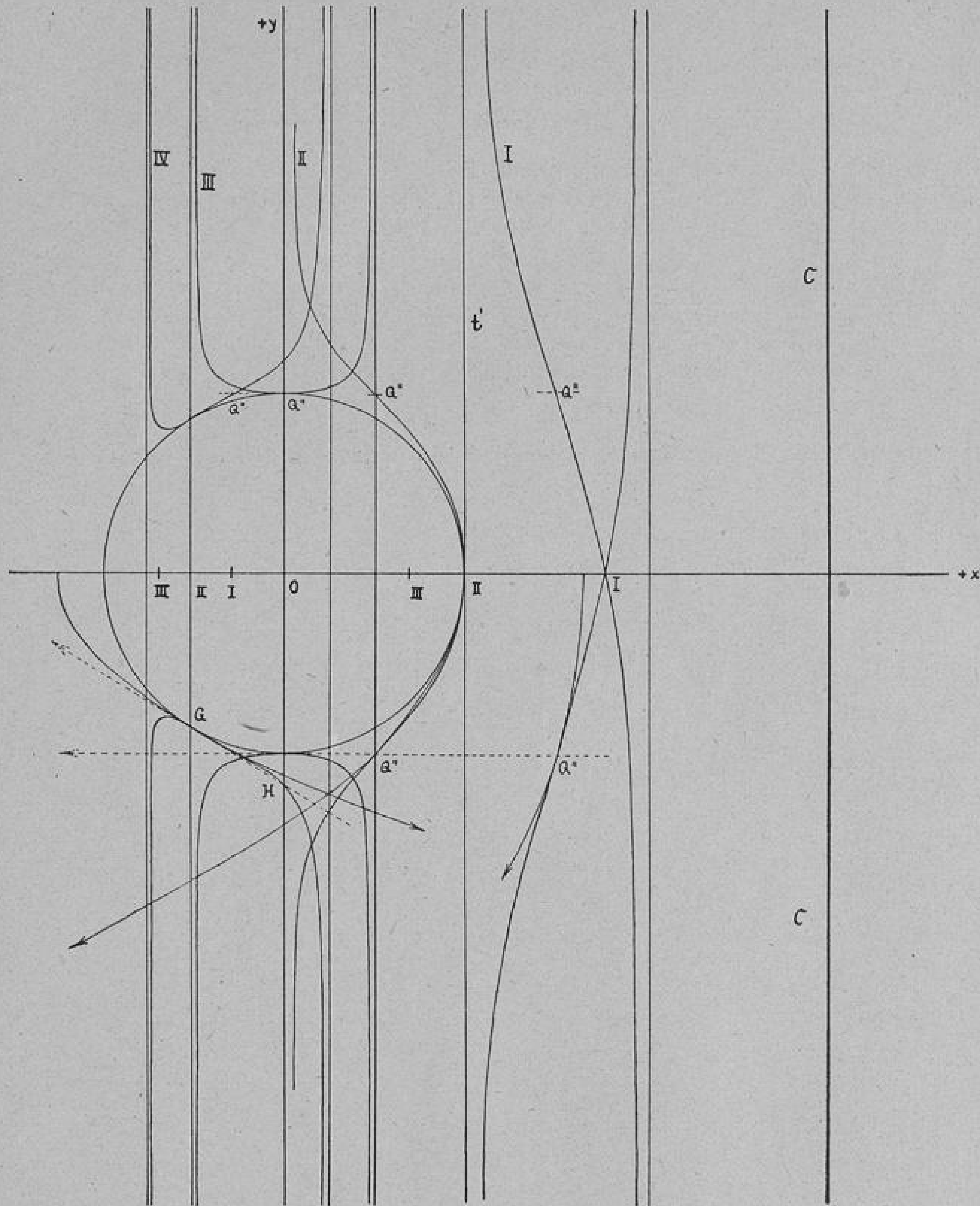
Für $a = o$ ist $(2\,x^2+y^2-r^2)^2-y^2\,(y^2-r^2) = o$,
d. h. man erhält eine zur x und y Axe symmetrische Kurve

$$\left(x+\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2\left(x-\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2+y^2\left(x+\frac{r}{2}\right)\left(x-\frac{r}{r}\right) = o$$

mit den beiden isolierten Punkten $x \pm \frac{r}{2}\sqrt{2} = o$ auf der x Axe und den Asymptoten $x = \pm\frac{r}{2}$, sie berührt den Leitkreis im Schnitt mit der y Axe; die Parabel zerfällt in das Parallelenpaar $y^2-r^2 = o$; Figur 2 No. III.

Ist $a \geqq r$, so zeigt die Kurve einen eigentlichen Doppelpunkt auf der x Axe, wenn aber $a < r$, so werden beide Doppelpunkte zu isolierten Punkten, wie aus obigem zu entnehmen.

Den Fall $a = -\frac{r}{2}$ siehe Figur 2 No. IV; G oder $x = a$ ist der Berührungspunkt der Kurve mit dem Leitkreis, er wird für $a > r$ natürlich imaginär, dagegen für $a \lesseqgtr r$ reell. Da die Kurve IV die Parabel in den beiden Punkten $x = a$ und $x = \frac{a}{2}$ berühren muss, so hat sie ausser $x = a$ noch einen weiteren Wendepunkt in diesem Bereich. Dass dem so ist, ergiebt sich aus folgendem:



Figur 2.

Gleichung von IV: $(4\,x^2 + rx - 2\,r^2)^2 + 4\,y^2\,(4\,x^2 + rx - 2\,r^2) + y^2\,(4\,rx + 5\,r^2) = 0$

$$(4\,x + rx - 2\,r^2)^2 + y^2\,(16\,x^2 + 8\,rx - 3\,r^2) = 0$$

Gleichung der Kreistangente im Punkt $x = -\frac{r}{2},\ y = \frac{r}{2}\sqrt{3}$

$$x\left(-\frac{r}{2}\right) + y\,\frac{r}{2}\sqrt{3} = r^2 \quad \text{oder} \quad y = \frac{x + 2\,r}{\sqrt{3}}, \text{ daher}$$

die Gleichung zur Bestimmung der Schnittpunkte dieser Tangente in G mit der Kurve

$$3\,(4\,x^2 + rx - 2\,r^2)^2 + (x^2 + 4\,rx + 4\,r^2)\,(16\,x^2 + 8\,rx - 3\,r^2) = 0 \text{ ausgerechnet}$$

$$64\,x^4 + 96\,rx^3 + 48\,r^2\,x^2 + 8\,r^3\,x = 0 \text{ d. h.}$$

$$8\,x\,(2\,x + r)^3 = 0$$

Die Kreistangente in G ist also ebenfalls Wendetangente von IV und schneidet sie ausserdem noch im Punkt $x = 0$ oder H auf der y Axe. Auch für die Kurven II und III lassen sich entsprechende Betrachtungen anstellen, hierauf soll nicht weiter eingegangen werden, dagegen möge noch eine merkwürdige Eigenschaft der obigen Kurven Erwähnung finden.

Bestimmung des Flächeninhalts zwischen der Kurve und ihren Asymptoten.

Der Flächeninhalt $F = \int\limits_{x=\frac{a+r}{2}}^{x=\frac{a-r}{2}} y\,dx = \pm \int\limits_{x=\frac{a+r}{2}}^{x=\frac{a-r}{2}} \frac{2\,x^2 - ax - r^2}{\sqrt{r^2 - a^2 + 4\,ax - 4\,x^2}}\,dx$

Da nun aber $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 + a}{2} \\ y = \dfrac{y_1^2 + r^2 - ax_1}{2\,y_1} = \dfrac{2\,r^2 - ax_1 - x_1^2}{2\sqrt{r^2 - x_1^2}} \end{array}\right\}$ so folgt auch $dx = \frac{1}{2}\,dx_1$ und

das Integral wird $F = \int y\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_{x_1=+r}^{x_1=-r} \frac{2\,r^2 - ax_1 - x_1^2}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}\,dx_1$

$$= \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x_1}{r} + \frac{a}{4}\sqrt{r^2 - x_1^2} - \frac{1}{8}\left\{r^2 \arcsin\frac{x_1}{r} - x_1\sqrt{r^2 - x_1^2}\right\}\Bigg|_{x_1=+r}^{x_1=-r}$$

$$= \frac{3}{8}\arcsin\frac{x_1}{r} + \frac{1}{8}\sqrt{r^2 - x_1^2}\,(2\,a + x_1)\Bigg|_{x_1=+r}^{x_1=-r}$$

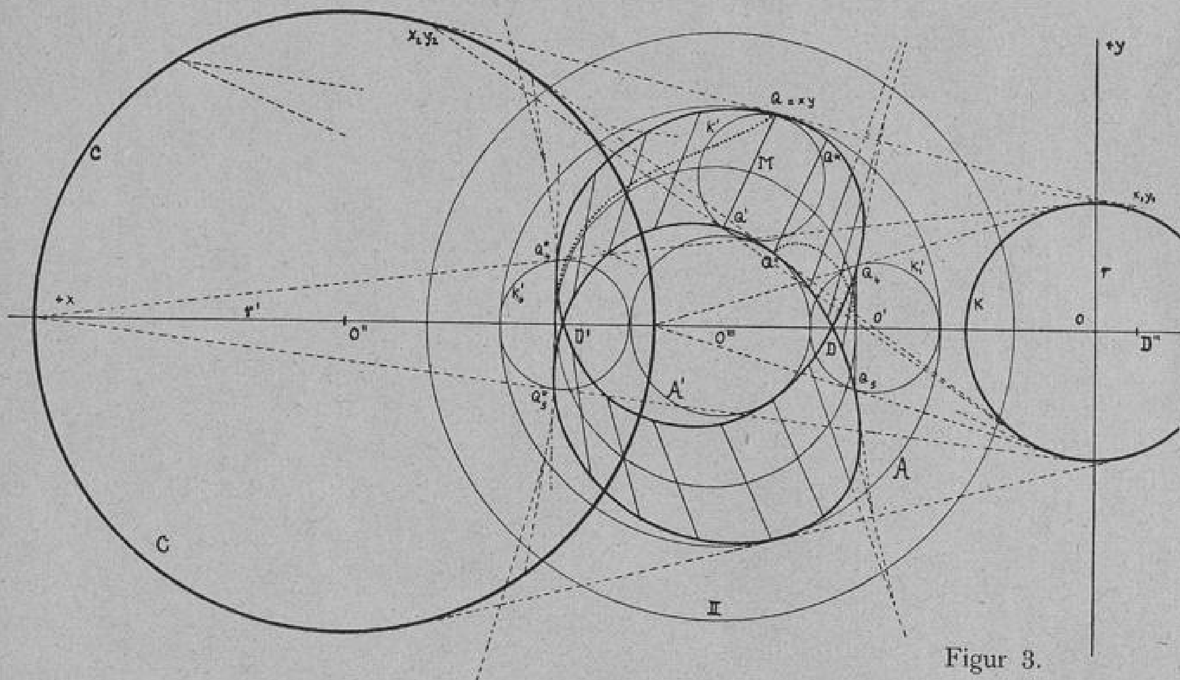
$$= \frac{3}{8}\,r^2\left\{\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\right\} = \frac{3}{8}\,\pi\,r^2,$$

also unabhängig von der Entfernung a der Graden C. Da obiges Resultat nur die Hälfte des Flächenraums giebt, so ist dieser Raum zwischen den Asymptoten und der Kurve stets konstant und zwar $= \frac{3}{4}\,\pi\,r^2$, wie auch die Asymptoten zu dem Grundkreis liegen. Aus Figur 2 sind die entsprechenden Flächen sofort zu entnehmen, bei Kurve II beträgt das von dem Kreise, der Kurve und der y Axe eingeschlossene Flächenstück

$$\frac{3}{4}\,\pi\,r^2 - \frac{1}{2}\,\pi = \frac{1}{4}\,\pi\,r^2.$$

2. C ein Kreis.

Geometrisch ist sofort ersichtlich (Figur 3), dass die Kreise K^1 mit Halbmesser $\frac{r}{2}$ einen Kreisring einhüllen, der also hier die Asymptotenfläche darstellt; dieser Ring wird in Q und Q″ von der Ortskurve berührt, nämlich in denjenigen Punkten, wo die gemeinschaftliche äussere, beziehungsweise innere Tangente von C und K den Ring berührt. Aus Gründen der Symmetrie werden 2 Doppelpunkte D und D^1 auf der Verbindungslinie O O^1 vorhanden sein und da Kreis $K_1{}^1$ (beziehungsweise $K_1{}^1$) die Grenzlage der Kreise K^1 vertritt, so sind auch die Punkte Q_4 und Q_5 auf demselben symmetrische Punkte der Kurve in Beziehung auf den zu oy senkrechten Durchmesser von K, parallel zu $Q^0{}_4$ $Q^0{}_5$ hat man eine Doppeltangente der Ortskurve, welche damit ihrem Verlauf nach vollständig bestimmt ist, da dasselbe von Q_4 und Q_5 gilt.



Figur 3.

Analytische Behandlung.

$$\left\{\begin{array}{ll} 1.\ \text{Gleichung des Kreises } K: x_1{}^2 + y_1{}^2 = r^2 & \\ 2.\ \text{Gleichung des Kreises } C: (x_2 - a)^2 + y_2{}^2 = r_1{}^2 & \\ 3.\ \text{Tangente in } (x_1\ y_1) \text{ an } K: xx_1 + yy_1 = r^2 & \\ 4.\ 2\,x = x_1 + x_2 & 5.\ 2\,y = y_1 + y_2 \end{array}\right\}$$

Die Elimination von $x_1\ y_1\ x_2\ y_2$ aus diesen 5 Gleichungen liefert die Gleichung der Ortskurve. Nun folgt aus (3) und (1) zunächst $xx_1 + y\sqrt{r^2 - x_1{}^2} = r^2$

$$\begin{aligned} (xx_1 - r^2)^2 &= y^2\,(r^2 - x_1{}^2) \\ x_1{}^2\,(x^2 + y^2) - 2\,r^2\,xx_1 &= r^2\,y^2 - r^4 \\ x_1{}^2 - 2\,x_1\,\frac{r^2\,x}{x^2 + y^2} &= \frac{r^2\,y^2 - r^4}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

daher ausgerechnet $\quad x_1 = \frac{r}{x^2+y^2}\left\{ rx \pm y\sqrt{x^2+y^2-r^2} \right\}$ und

$$y_1 = \frac{r^2 - xx_1}{y} = \frac{r}{x^2+y^2}\left\{ ry \mp x\sqrt{x^2+y^2-r^2} \right\}$$ also mittelst (4) und (5):

$$x_2 = 2x - x_1 = \frac{1}{x^2+y^2}\left\{ 2x(x^2+y^2) - r^2x \mp ry\sqrt{x^2+y^2-r^2} \right\}$$

$$y_2 = 2y - y_1 = \frac{1}{x^2+y^2}\left\{ 2y(x^2+y^2) - r^2y \pm rx\sqrt{x^2+y^2-r^2} \right\}$$

Diese Werte für x_2 und y_2 sind in die Gleichung (2) einzusetzen. Da aber

$$x_2^2 + y_2^2 = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[4(x^2+y^2)^3 + r^4(x^2+y^2) + r^2(x^2+y^2-r^2)(x^2+y^2) - 4r^2(x^2+y^2)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[4(x^2+y^2)^3 + r^2(x^2+y^2)^2 - 4r^2(x^1+y^2)^2 \right] = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left\{ 4(x^2+y^2)^3 - 3r^2(x^2+y^2)^2 \right\}$$

$$= 4(x^2+y^2) - 3r^2$$

so wird die Gleichung (2) : $x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 = r_1^2 - a^2$ zu

$$4(x^2+y^2) - 3r^2 - r_1^2 + a^2 - 2a\left(2x - \frac{r^2x \pm ry\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{x^2+y^2}\right) = o \text{ oder}$$

$4(x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2)(a^2 - 3r^2 - r_1 - 4ax) + 2ar^2x = \mp 2ary\sqrt{x^2+y^2-r^2}$ ausquadriert

$$\left[(x^2+y^2)\left\{4(x^2+y^2) + a^2 - 3r^2 - r_1^2 - 4ax\right\} + 2ar^2x\right]^2 = 4a^2r^2y^2(x^2+y^2) - 4a^2r^4y^2$$

$$(x^2+y^2)^2\left\{\right\}^2 + 4ar^2x(x^2+y^2)\left\{\right\} + 4a^2r^4(x^2+y^2) = 4a^2r^2y^2(x^2+y^2)$$

mit $x^2 + y^2$ durchdividiert:

6a). $(x^4+y^2)\left\{\right\}^2 + 4ar^2x\left\{\right\} + 4a^2r^2(r^2-y^2) = o$ d. h. auch

$$\left[x\left\{\right\} + 2ar^2\right]^2 + y^2\left[\left\{\right\}^2 - 4a^2r^2\right] = o \text{ mithin endlich}$$

6.) $\left[x\left\{(2x-a)^2 + 4y^2 - 3r^2 - r_1^2\right\} + 2ar^2\right]^2 + y^2\left\{(2x-a)^2 + 4y^2 - 3r^2 - r_1^2 + 2ar\right\}.$

$$\left\{(2x-a)^2 + 4y^2 - 3r^2 - r_1^2 - 2ar\right\} = o.$$

Diese Form der Kurvengleichung zeigt, dass die beiden Kreise

$$\mathrm{I} = (2x-a)^2 + 4y^2 - 3r^2 + 2ar - r_1^2 = o \text{ und}$$

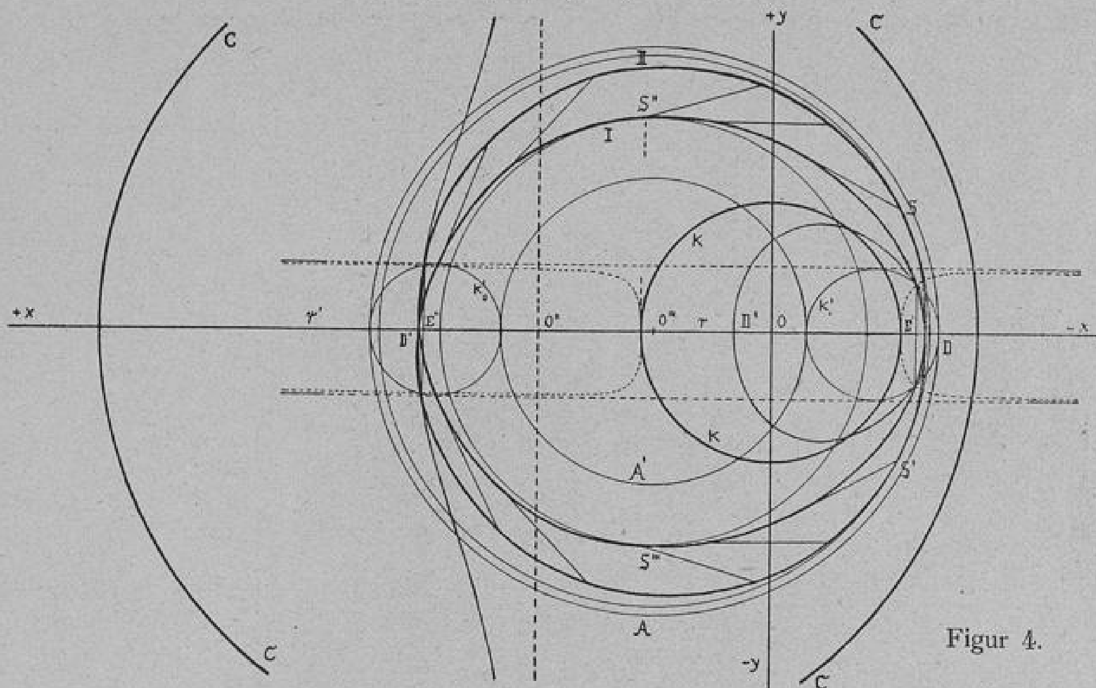
$$\mathrm{II} = (2x-a)^2 + 4y^2 - 3r^2 - 2ar - r_1^2 = o,$$

welche konzentrisch sind, die Ortskurve berühren, und zwar I im Punkt $x = r$, II im Punkt $x = -r$. Da die beiden Kreise von der Kurve in keinen weiteren reellen Punkten geschnitten werden können, so verläuft also letztere innerhalb des von den Kreisen I und II eingeschlossenen Ringes (isolierte Punkte ausgenommen), wie dies Figur 4 erweist, wo K ganz innerhalb C zu liegen kommt; durch Kreis I und II wird folglich die geometrisch nachgewiesene Asymptotenfläche zwischen den Kreisen A und A¹ mit den Halbmessern $\varrho = \frac{r_1 + r}{2}$ und $\varrho_1 = \frac{r_1 - r}{2}$ wesentlich eingeschränkt und verengert. Aus Figur 4 geht weiter hervor, dass die Kreise A und A¹ von der Ortskurve nicht mehr berührt werden; zur Aufklärung hierüber sind die Berührungspunkte Q und Q″ zu berechnen. Man erhält:

Gleichung von A: $(2x-a)^2 + 4y^2 = (r + r_1)^2$

Die linke Seite in (6) eingesetzt, liefert nach einigen Umformungen

$$4\left\{x(r_1-r)+ar\right\}^2+4y^2\left\{(r_1-r)^2-a^2\right\}=o \text{ und mit}$$
$$4y^2=(r+r_1)^2-(2x-a)^2$$



Figur 4.

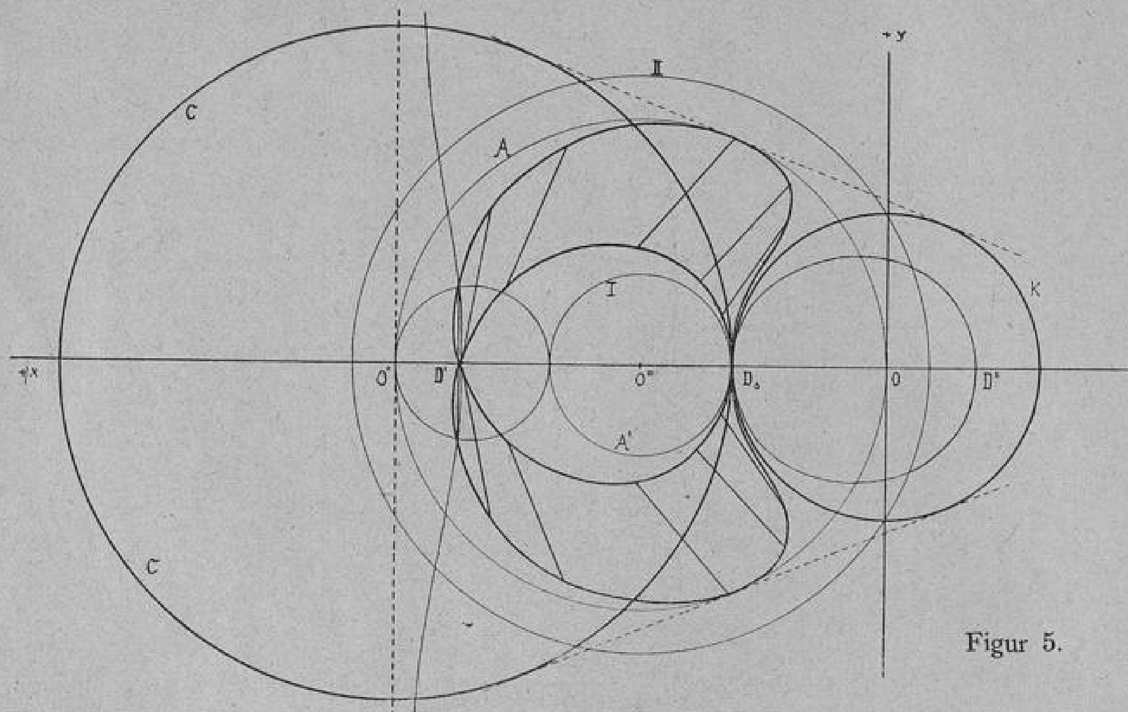
$(2ax-a^2-r^2+r_1^2)^2=o$, also $x=\frac{a^2+r^2-r_1^2}{2a}$, was auch durch geometrische Betrachtungen gefunden werden kann: $4y^2=(r+r_1)^2-(2x-a)^2$ ist demnach

$$=(r+r_1)^2-\frac{(r_1^2-r^2)^2}{a^2}$$
$$=\frac{(r+r_1)^2}{a^2}\left\{a^2-(r_1-r)^2\right\},$$ also unter der Voraussetzung $r_1>r$ reell oder imaginär, je nachdem $a>$ oder $<r_1-r$, d. h. je nachdem der Kreis K ganz oder teilweise ausserhalb oder aber ganz innerhalb des Kreises C liegt, im ersten Fall ist eine gemeinsame äussere Tangente ja möglich, im zweiten nicht. Dasselbe gilt natürlich für A^1 und die gemeinschaftlichen inneren Tangenten unter der Voraussetzung $a \gtrless r+r_1$.

Betrachtet man nun die beiden Kreise
$I=(2x-a)^2+4y^2-3r^2+2ar-r_1^2=o$ und $II=(2x-a)^2+4y^2-3r^2-2ar-r_1^2=o$; deren Berührungspunkte mit der Ortskurve durch $x=r$ beziehungsweise $x=-r$ gegeben sind, so findet man für das zugehörige y_I:
$4y_I^2=3r^2-2ar+r_1^2-(2r-a)^2=r_1^2-r^2+2ar-a^2=r_1^2-(a-r)^2$ und ebenso für y_{II}
$4y_{II}^2=3r^2+2ar+r_1^2-(2r-a)^2=r_1^2-r^2-2ar-a^2=r_1^2-(a+r)^2$

Der Berührungspunkt y_I^2 ist daher reell oder imaginär, je nachdem $r_1 \gtrless a-r$ oder $a \lessgtr r_1+r$ und der Berührungspunkt y_{II} ist reell oder imaginär, je nachdem

$r_1 \gtrless a + r$ oder $a \lessgtr r_1 - r$. Der Kreis II berührt die Ortskurve in reellen Punkten immer dann, wenn von den beiden Kreisen A und A' der erstere nicht mehr berührt, d. h. wenn K ganz innerhalb C zu liegen kommt (Figur 4), während I stets dann einen reellen Berüh-



Figur 5.

rungspunkt abgiebt, wenn K C schneidet oder sich ganz innerhalb desselben befindet, wenn folglich A^1 keinen derartigen Punkt mehr liefert (Figur 4 und 5).

Für $a = r + r_1$ oder Berührung von aussen fällt A^1 mit Kreis I zusammen, Figur 6; für $a = r_1 - r$ oder Berührung von innen decken sich dagegen A und Kreis II, Figur 7; in beiden letzteren Fällen zeigt die Ortskurve im betreffenden Berührungspunkt mit A^1 (I) und A (II) einen Selbstberührungspunkt D_s.

Nach (6_a) geht die Kurve auch noch durch die Schnittpunkte von Kreis $(2x - a)^2 + 4y^2 = 3r^2 + r_1^2$ und $r^2 - y^2 = o$; diese Punkte sind für $r_1 > r$ stets reeller Art; vergleiche etwa Figur 6.

Doppelpunkte der Ortskurve.

Sie ergeben sich aus $\left\{ \begin{array}{l} y = o \\ x\left\{(2x-a)^2 - 3r^2 - r_1^2\right\} + 2ar^2 = o \end{array} \right\}$ oder aus der Gleichung dritten Grades

$$4x^3 - 4ax^2 - (3r^2 + r_1^2 - a^2)x + 2ar^2 = o.$$

Mit $y = x + \frac{a}{3}$ entsteht die reduzierte Gleichung

$$y^3 - y\,\frac{a^2 + 3(3r^2 + r_1^2)}{12} + \frac{a\left\{a^2 + 9(3r^2 - r_1^2)\right\}}{108} = o.$$

Durch Vergleich mit $y^3 + a_1 y + b_1 = o$ folgt

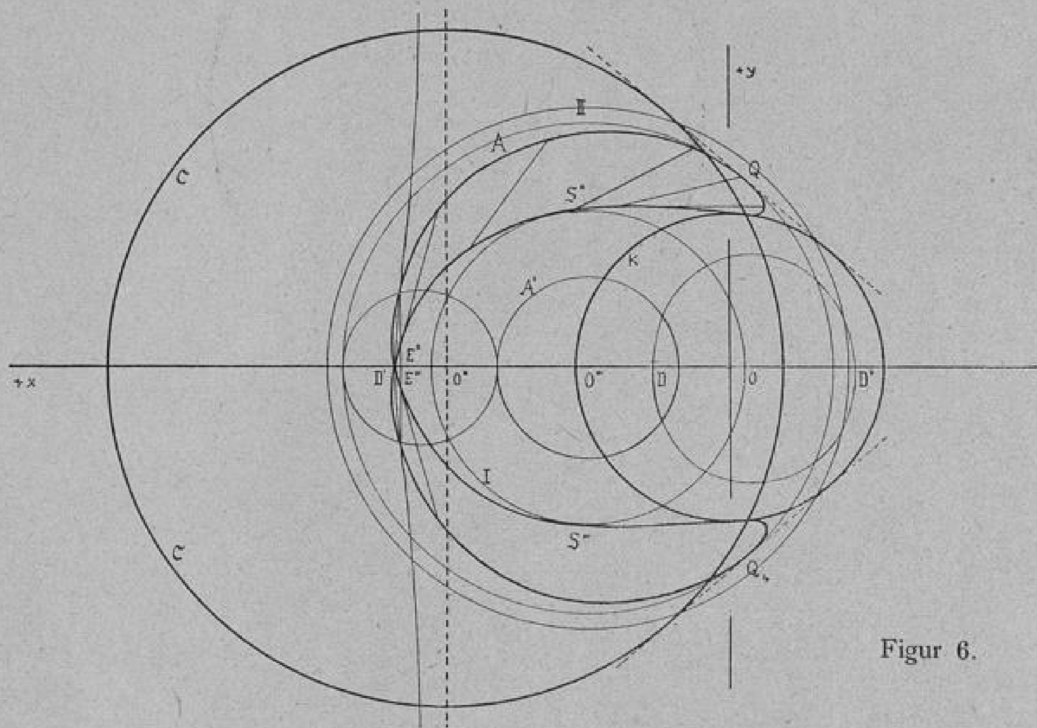
$$\frac{b_1}{2} = \frac{a^2 + 9(3r^2 - r_1^2)}{216} a \qquad \frac{a_1}{3} = -\frac{a^2 + 3(3r^2 + r_1^2)}{36}.$$

$$\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{216^2}\left\{ a^2 + 9(3r^2 - r_1^2) \right\}^2 a^2 \qquad \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{216^2}\left\{ a^2 + 3(3r^2 + r_1^2) \right\}^3;$$

man bekommt also drei reelle Wurzeln, falls

$$7.)\ \left\{ a^2 + 3\left(3r^2 + r_1^2\right) \right\}^3 > a^2 \left\{ a^2 + 9\left(3r^2 - r_1^2\right) \right\}^2 \text{ ist,}$$

im umgekehrten Fall nur eine; sind beide Seiten obiger Ungleichheit gleich, so tritt eine Doppelwurzel auf. Wird nun, wie bisher geschehen,



Figur 6.

a. $\mathbf{r_1 > r}$ vorausgesetzt, während a, r, r_1 sonst keinerlei Beschränkungen unterworfen sind, so ist unter der weiteren Voraussetzung, dass $a^2 + 27r^2 > 9r_1^2$ die Summe $3r^2 + r_1^2$ jedenfalls mindestens $= 4r^2$, $3r^2 - r_1^2$ aber höchstens $= 2r^2$, also die linke Seite von (7) mindestens $= \left\{ a^2 + 12r^2 \right\}^3$, die rechte Seite höchstens $= a^2 \left\{ a^2 + 18r^2 \right\}^2$, 3 reelle Wurzeln zeigen sich also immer, wenn

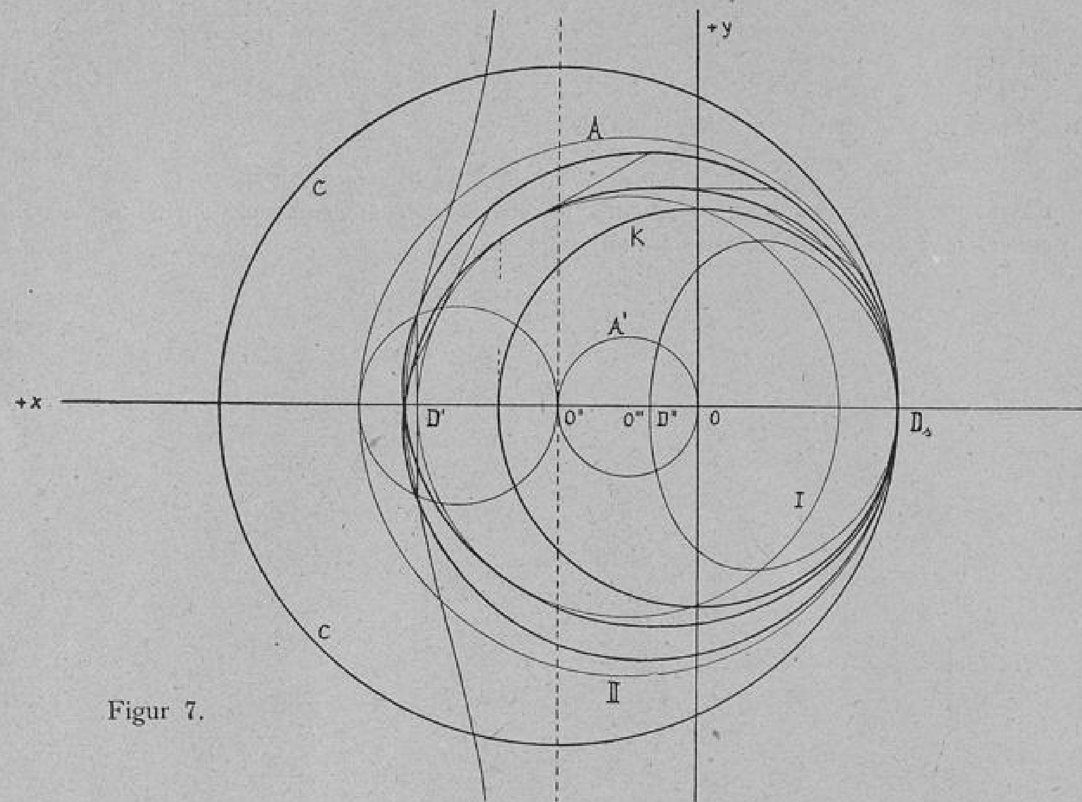
$$\left\{ a^2 + 12r^2 \right\}^3 > a^2 \left\{ a^2 + 18r^2 \right\}^2 \text{ oder}$$

$$a^6 + 36a^4r^2 + 432a^2r^4 + 1728r^6 > a^6 + 36a^4r^2 + 324a^2r^4 \quad \text{d. h.}$$

$$108a^2r^4 + 1728r^6 > o \quad \text{was stets zutrifft.}$$

Für $a^2 + 27r^2 = 9r_1^2$ ist die Bedingung (7) natürlich ebenfalls erfüllt, da die rechte Seite sich auf Null reduziert.

Für $a^2 + 27\,r^2 < 9\,r_1^2$ oder $9\,r_1^2 > a^2 + 27\,r^2$ dagegen folgt aus (7):



Figur 7.

$$a^6 + 9\,a^4\,(3\,r^2 + r_1^2) + 27\,a^2\,(3\,r^2 + r_1^2)^2 + 27\,(3\,r^2 + r_1^2)^3 > a^6 + 18\,a^4\,(3\,r^2 - r_1^2) + 81\,a^2 (3\,r^2 - r_1^2)^2$$
$$a^4\,(3\,r^2 + r_1^2) + 3\,a^2\,(3\,r^2 + r_1^2)^2 + 3\,(3\,r^2 + r_1^2)^3 > 2\,a^4\,(3\,r^2 - r_1^2) + 9\,a^2\,(3r^2 - r_1^2)^2 \text{ oder}$$
$$a^4\,(3\,r^2 + r_1^2 - 6\,r^2 + 2\,r_1^2) + 3\,a^2\,(9\,r^4 + 6\,r^2\,r_1^2 + r_1^4 - 27\,r^4 + 18\,r^2\,r_1^2 - 3\,r_1^4) + 3\,(3\,r^2 + r_1^2)^2 > o, \text{ d. h.}$$
$$a^4\,(r_1^2 - r^2) + 2\,a^2\,(-9\,r^4 - r_1^4 + 12\,r^2\,r_1^2) + (3\,r^2 + r_1^2)^3 > o.$$

Nach einigen Umrechnungen:

$$(8.)\quad r_1^2\,(a^2 - r_1^2)^2 - a^2\,r^2\,(a^2 + 18\,r^2) + 24\,a^2\,r^2\,r_1^2) + (27\,r^6 + 27\,r^4\,r_1^2 + 9\,r^2\,r_1^4) > o.$$

Nun ist $(a^2 - r_1^2)^2$ als Quadrat stets positiv, $a^2 + 18\,r^2$ aber jedenfalls kleiner als $a^2 + 27\,r^2$, letzteres in unserem Fall kleiner als $9\,r_1^2$, demnach darf $a^2 + 18\,r^2$ als Subtraktionsglied gleich $9\,r_1^2$ gesetzt werden, die beiden Glieder $-\,a^2\,r^2\,(a^2 + 18\,r^2) + 24\,a^2\,r^2\,r_1^2$ lassen sich dann zusammenziehen in $-\,9\,a^2\,r^2\,r_1^2 + 24\,a^2\,r^2\,r_1^2 = +\,15\,a^2\,r^2\,r_1^2$,
damit stellt die linke Seite von (8) eine Summe von lauter positiven Gliedern dar, welche zusammen grösser als Null sind. Die Bedingung (7) ist mithin für $r_1 > r$ erfüllt, ob nun $a^2 + 27\,r^2 \lesseqgtr 9\,r_1^2$ sein mag, daher sind hier stets 3 reelle Doppelpunkte vorhanden, von denen einer beziehungsweise zwei isoliert liegen (Figur 5); dasselbe gilt auch für $r_1 = r$. In dem besonderen Fall $a = r + r^1$ finden sich die Doppelpunkte sehr leicht.

Die Doppelpunktsgleichung ist nämlich

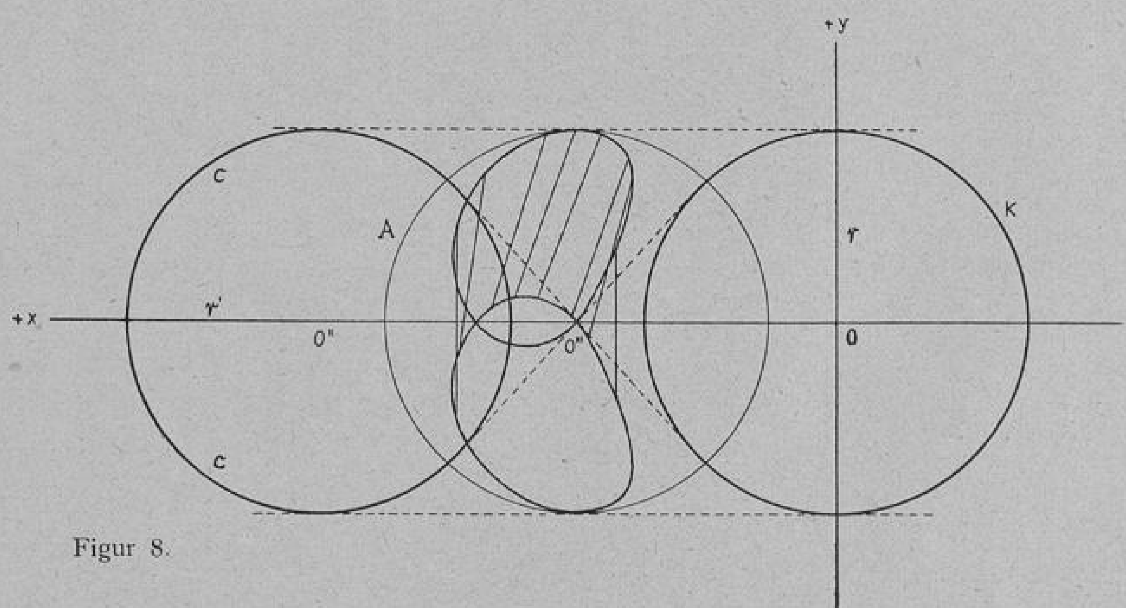
$$x^3 - x^2\,(r + r_1) - \frac{1}{4}\,(2\,r^2 - 2\,r\,r_1)\,x + \frac{r^2}{2}\,(r + r_1) = o \quad \text{oder}$$

$$2x^3 - 2x^2(r+r_1) + rx(r_1 - r) + r^2(r+r_1) = 0$$ und kann zerlegt werden in
$$(x - r)(2x^2 - 2r_1 x - r^2 - r r_1) = 0$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x = \frac{r_1 \pm \sqrt{(r+r_1)^2 + r^2}}{2}$ sind einfach zu konstruieren, D_1 und D_2 in Figur 6 entsprechen diesen Werten, $x = r$ ist der Selbstberührungspunkt Ds. Für $r = r_1$ reduziert sich die Doppelpunktsgleichung ebenfalls auf das Produkt eines quadratischen Faktors und $x - \frac{a}{2}$, denn in letzterem Punkt, vergleiche Figur 8, schneiden sich die gemeinschaftlichen inneren Tangenten und sind zugleich Tangenten an die beiden Kurvenzweige, auch der Kreis A^1 fällt mit diesem Punkt zusammen. Geht man

b. zu Fall $\mathbf{r > r_1}$ über, so gelten die bisher entwickelten Sätze nicht mehr oder nur in wesentlich beschränkter Weise.

Zunächst kann eine eigentliche Ortskurve nur entstehen, wenn $a \leqq r - r_1$, denn wenn Kreis C ganz innerhalb K zu liegen kommt, so ist jeder Tangentenschnittpunkt auf C imaginär, also auch jeder Kurvenpunkt, der Kreis
$$II = (2x - a)^2 + 4y^2 - 3r^2 - 2ar - r_1^2 = 0,$$
welchen die Kurve im Punkt $x = -r$ berühren muss, wird also hier an der Umgrenzung des Asymptotenraumes nie teilnehmen. Anders verhält es sich mit Kreis
$$I = (2x - a)^2 + 4y^2 - 3r^2 + 2ar - r_1^2 = 0,$$
welcher die Ortskurve in $x = r$ berühren soll. Hier war die Bedingung für einen reellen Berührungspunkt $a \leqq r + r_1$, d. h. so lange Kreis C den Grundkreis K schneidet oder noch berührt oder K ganz innerhalb C liegt. Letzteres ist von vornherein ausgeschlossen, es bleiben also noch die Fälle des Schneidens von C und K, sowie der Berührung übrig, siehe hiezu Figur 9, wo thatsächlich ein reeller Punkt auf I vorhanden ist. Aehnlich lassen sich A und A^1 wieder untersuchen, Figur 9 und 10 mögen dies erläutern.

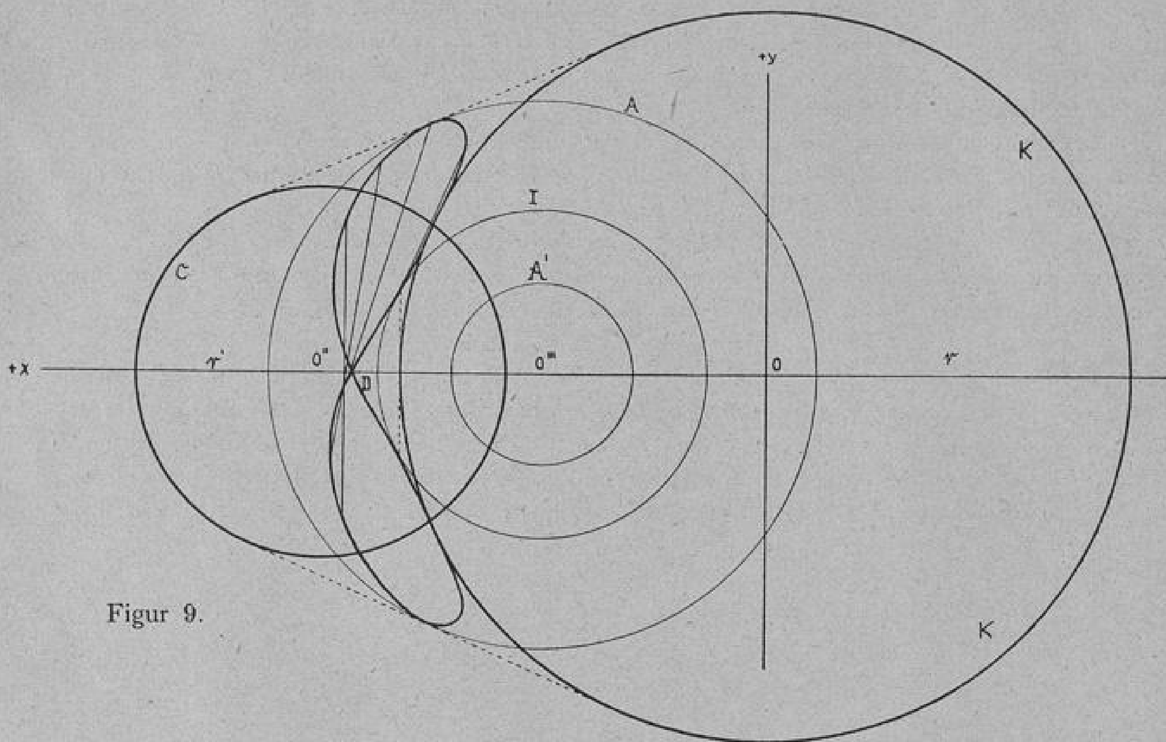


Figur 8.

Die Punkte $\left\{\begin{matrix}(2\,x - a)^2 + 4\,y^2 = 3\,r^2 + r_1^{\,2} = 4\,\varrho^2 \text{ oder } \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \varrho^2 \\ \text{und } r^2 - y^2 = o\end{matrix}\right\}$

sind jetzt ebenfalls imaginär geworden, da $\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{3\,r^2 + r_1^{\,2}}$ für $r > r_1$ jedenfalls kleiner als r wird, $r + y = o$ und $r - y = o$ demnach keine reellen Schnittpunkte mit dem Kreis abgeben; für $r = r_1$ fällt dieser Kreis mit A zusammen.
Drei reelle Doppelpunkte oder nur einen einzigen solchen Punkt erhielt man, je nachdem

$$\left\{ a^2 + 3\,(3\,r^2 + r_1^{\,2}) \right\}^3 \gtrless a^2 \left\{ a^2 + 9\,(3\,r^2 - r_1^{\,2}) \right\}^2$$



Figur 9.

Ist nun $r > r_1$, so ist zwar die Klammer links grösser als $a + 9\,r^2$, die rechte Seite dagegen grösser als $a^2\,(a^2 + 18\,r^2)$, es sind also nicht immer 3 reelle Doppelpunkte vorhanden, doch lassen sich noch Grenzen angeben, innerhalb welcher solche vorkommen müssen.

Zu diesem Zwecke hat man wieder auszugehen von der Bedingung

$$a^4\,(r_1^{\,2} - r^2) + 2\,a^2\,(-\,9\,r^4 - r_1^{\,4} + 12\,r^2\,r_1^{\,2}) + (3\,r^2 + r_1^{\,2})^3 > o \text{ oder}$$
$$a^4\,(r^2 - r_1^{\,2}) + 2\,a^2\,(9\,r^4 + r_1^{\,4} - 12\,r^2\,r_1^{\,2}) < (3\,r^2 + r_1^{\,2})^3,$$

wo $r^2 - r_1^{\,2}$ jedenfalls grösser als Null. Durch Division mit dem positiven Faktor $r^2 - r_1^{\,2}$ zeigt sich, dass

$$a^4 + 2\,a^2 \frac{3\,r^4 + r_1^{\,4} - 12\,r^2\,r_1^{\,2}}{r^2 - r_1^{\,2}} < \frac{(3\,r^2 + r_1^{\,2})^3}{r^2 - r_1^{\,2}} \text{ und auch}$$

$$\left\{ a^2 + \frac{9\,r^4 + r_1^{\,4} - 12\,r^2\,r_1^{\,2}}{r^2 - r_1^{\,2}} \right\}^2 < \frac{(3\,r^2 + r_1^{\,2})^3}{r^2 - r_1^{\,2}} + \frac{(9\,r^4 + r_1^{\,4} - 12\,r^2\,r_1^{\,2})^2}{(r^2 - r_1^{\,2})^2}$$

nach einigen Umrechnungen: $\left\{ \quad \right\}^2 < \frac{4\,r^2\,(3\,r^2 - 2\,r_1^{\,2})^3}{(r^2 - r_1^{\,2})^2}$ mithin

$$a^2 + \frac{9\,r^4 + r_1^4 - 12\,r^2\,r_1^2}{r^2 - r_1^2} \qquad < \frac{2\,r\,(3\,r^2 - 2\,r_1^2)}{r^2 - r_1^2} \sqrt{3\,r^2 - 2\,r_1^2}\ (\sqrt{\ }\ \text{stets}\ +)$$

oder endlich $a^2 \leqq \dfrac{2\,r\,(3\,r^2 - 2\,r_1^2)\sqrt{3\,r^2 - 2\,r_1^2} - (3\,r^4 + r_1^4 - 12\,r^2\,r_1^2)}{r^2 - r_1^2}$

Ist also diese Bedingung für a erfüllt, so treten auch für $r > r_1$ drei reelle Doppelpunkte auf, andernfalls jedoch nur ein einziger, wie z. B. in Figur 10.

Um für a einen brauchbaren Näherungswert zu finden, kann man schreiben:

$$a^2 \leqq \frac{1}{r^2 - r_1^2} \left\{ 2\,r\,(3\,r^2 - r_1^2)^{\frac{3}{2}} - (9\,r^4 + r_1^4 - 12\,r^2\,r_1^2) \right\}$$

$$\leqq \frac{1}{r^2 - r_1^2} \left\{ 6\sqrt{3}\,.\,r^4 \left(1 + \left(- \frac{2\,r_1^2}{3\,r^2} \right) \right)^{\frac{3}{2}} - (9\,r^4 + r_1^4 - 12\,r^2\,r_1^2) \right\}$$

wo $\dfrac{2\,r_1^2}{3\,r^2}$ kleiner als 1 für $r > r_1$. Setzt man daher $\dfrac{r_1}{r} = m$ oder $r_1 = mr$, dann entsteht die Bedingung $a^2 \leqq r^2 \dfrac{1}{1 - m^2} \left\{ 6\sqrt{3} \left[1 + \left(- \dfrac{2}{3} m^2 \right) \right]^{\frac{3}{2}} - (9 + m^4 - 12\,m^2) \right\}$

und da nach dem binomischen Lehrsatz

$$\left[1 + \left(- \frac{2}{3}\,m^2 \right) \right]^{\frac{3}{2}} = 1 - m^2 + \frac{1}{3}\,m^4 + \frac{1}{9}\,m^6 + \frac{1}{9}\,m^8 + \ldots \quad \text{endlich}$$

$$a^2 \leqq \frac{r^2}{1 - m^2} \left\{ 6\sqrt{3} \left[1 - m^2 + \frac{1}{3}\,m^4 + \frac{1}{9}\,m^6 + \frac{1}{9}\,m^8 + \ldots \right] - (9 - 12\,m^2 + m^4) \right\} \text{oder}$$

$$\frac{a^2}{r} \leqq \frac{1}{1 - m^2} \left\{ (6\sqrt{3} - 9) + (12 - 6\sqrt{3})\,m^2 + (2\sqrt{3} - 1)\,m^4 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,m^6 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,m^8 + \ldots \right\}$$

Durch algebraische Division folgt:

$$\frac{a^2}{r} \leqq (6\sqrt{3} - 9) + 3\,m^2 + (2\sqrt{3} + 2)\,m^4 + (2\tfrac{2}{3}\sqrt{3} + 2)\,m^6 + (3\tfrac{1}{3}\sqrt{3} + 2)\,m^8 + \ldots$$

und wenn die Quadratwurzel gezogen wird:

$$\frac{a}{r} \leqq \sqrt{(6\sqrt{3} - 9) + 3\,m^2 + (2\sqrt{3} + 2)\,m^4 + (2\tfrac{2}{3}\sqrt{3} + 2)\,m^6 + (3\tfrac{1}{3}\sqrt{3} + 2)\,m^8 + \ldots}$$

$$\frac{a}{r} \leqq \sqrt{6\sqrt{3} - 9} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3} + 3}\,.\,m^2 + \frac{6\sqrt{3} + 5}{24}\sqrt{2\sqrt{3} + 3}\,.\,m^4 + \frac{12\sqrt{3} - 1}{48}\sqrt{2\sqrt{3} + 3}\,.\,m^6 + \ldots$$

unter Berücksichtigung von $m = \dfrac{r_1}{r}$

$$a \leqq r\sqrt{6\sqrt{3} - 9} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3} + 3}\left(\frac{r_1}{r}\right) r_1 + \frac{6\sqrt{3} + 5}{24}\sqrt{2\sqrt{3} + 3}\left(\frac{r_1}{r}\right)^3 r + \ldots$$

in Zahlen, wenn beim dritten Glied abgebrochen wird:

$$a \leqq r\ .\ 1{,}1798 + 1{,}27\ r_1 \left(\frac{r_1}{r}\right) + 1{,}6277\,r_1 \left(\frac{r_1}{r}\right)^3 + \ldots$$

$$\leqq r + \left(0{,}1798\ r + 1{,}27\ r_1 \left(\frac{r_1}{r}\right) + \ldots \right)$$

$$\leqq r + r_1 \left(0{,}1798 \left(\frac{r}{r_1}\right) + 1{,}27 \left(\frac{r_1}{r}\right) + 1{,}6277 \left(\frac{r_1}{r}\right)^3 + \ldots \right)$$

Mittelst $y = 0{,}1798\,\dfrac{1}{m} + 1{,}27\ m + 1{,}6277\ m^3$ und

$\dfrac{dy}{dm} = -\,0{,}1798\ \dfrac{1}{m^2} + 1{,}27 + 4{,}8831\ m^2 = o$ ergiebt sich für den kleinsten Wert von y

$$4{,}8831\ m^4 + 1{,}27\ m^2 - 0{,}1798 = o \text{ ausgerechnet:}$$

$$m^2 = \frac{-6350 \pm \sqrt{6350^2 + 1798 \cdot 48831}}{48831} = \frac{-6350 + 11319}{48831} = + \frac{4969}{48831} = + 0{,}1017$$

Daher nimmt $y = 0{,}1798 \left(\frac{r}{r_1}\right) + 1{,}27 \left(\frac{r_1}{r}\right) + 1{,}6277 \left(\frac{r_1}{r}\right)^3$ seinen kleinsten Wert an für

$$m = \frac{r_1}{r} = \pm \sqrt{0{,}1017} = 0{,}318.$$

Für diesen Betrag von $\frac{r_1}{r}$ ist aber

$$\begin{aligned} y &= 0{,}1798\ \frac{1}{0{,}318} + 1{,}27\ .\ 0{,}318 + 1{,}6277\ .\ 0{,}318^2 \\ &= 0{,}5654 \qquad + 0{,}4038 \qquad + 0{,}0522 \\ &= 1{,}0214, \end{aligned}$$

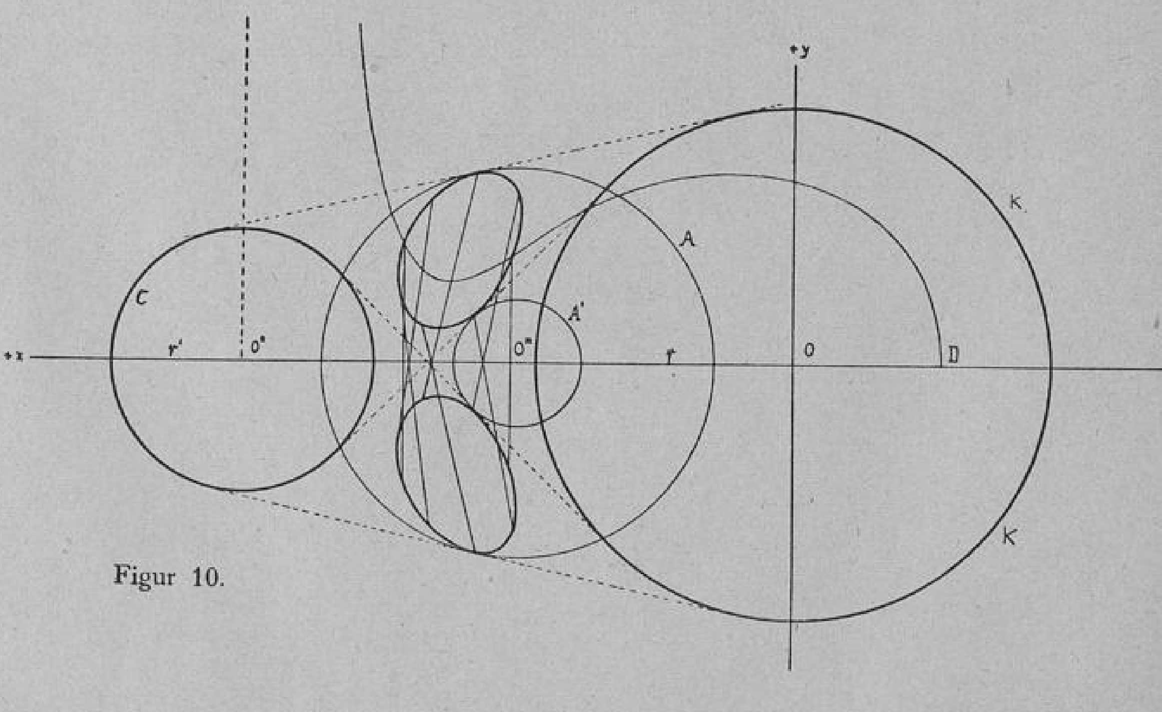
man erhält also drei reelle Doppelpunkte unter allen Umständen, wenn für $r > r_1$

$$a \leqq r + 1{,}0214\ r_1,$$

d. h. wenn C und K sich schneiden, berühren, oder C noch etwas ausserhalb des Kreises K liegt; von da ab erscheint jedoch nur noch ein einziger und zwar isolierter reeller Doppelpunkt; Figur 10. Wird die linke Seite von (7) der rechten gleich, so entsteht eine Doppelwurzel, was nur für $r > r_1$ stattfinden kann, da für $r \gtreqless r_1$ die linke Seite stets grösser als die rechte gefunden wurde. Zu $r_1 = o$ liefert $a \leqq r \sqrt{6\sqrt{3}-9} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}+3}\left(\frac{r_1}{r}\right) r_1 + \ldots$

$$a \leqq r \sqrt{6\sqrt{3}-9} \leqq r\ .\ 1{,}1798.$$

Da aber für $r_1 = o$ die Ovale in Figur 10 auf die Mittelpunkte der Tangenten von O'' an den



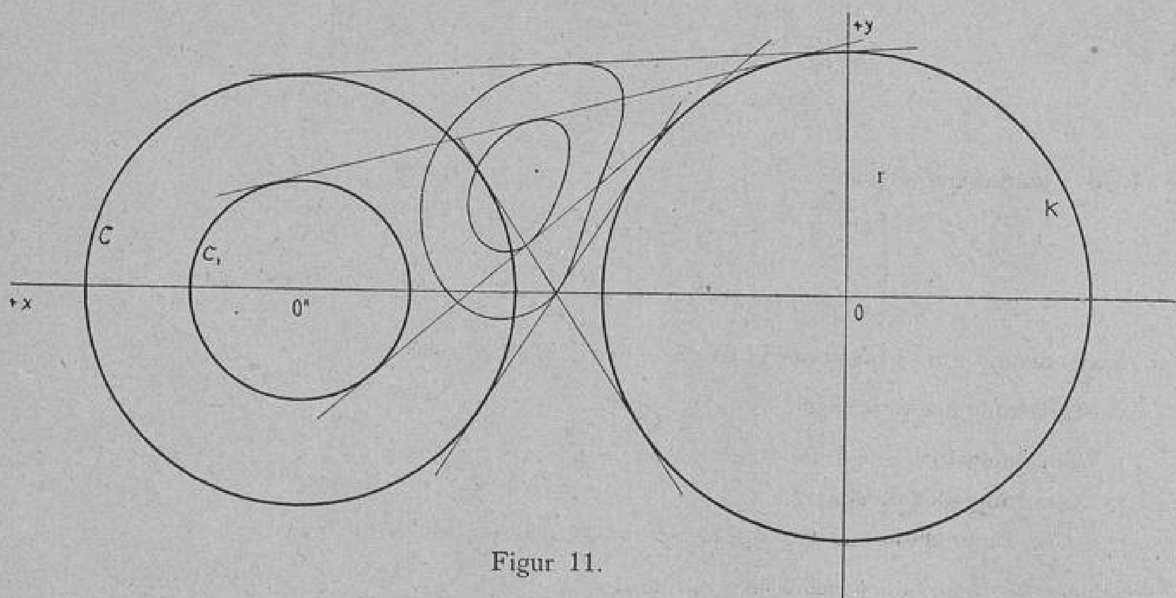
Figur 10.

Kreis K zusammenschrumpfen, so stellt unter der Bedingung $a \leqq r \sqrt{6\sqrt{3}-9}$ und mit $r_1 = o$ die Kurvengleichung nur isolierte Punkte dar, von denen drei auf der x Axe liegen. Wenn C und K sich schneiden oder berühren, so tritt jedenfalls ein eigentlicher Doppelpunkt neben zwei isolierten Punkten auf, liegt aber C ausserhalb K, so sind die beiden Fälle zu unterscheiden: 1. $a \leqq r \sqrt{6\sqrt{3}-9}$.

Unter dieser Voraussetzung ist die Bedingung (7) für jedes beliebige r_1 erfüllt, C und K treffen sich nicht, so lange $r_1 < 0{,}1798\, r$, man hat aber dann zwei sich nicht schneidende Ovale als Ortskurve, es giebt demnach drei isolierte Punkte, bis C den Kreis K berührt oder schneidet.

2. $a \leqq r + 1{,}0214\, r$, $r_1 < r$, sonst aber beliebig.

Hier folgen zunächst zwei eigentliche Doppelpunkte und ein isolierter Punkt, dann nähern sich die Ovale zur Doppelwurzel; bei wachsendem a werden zwei singuläre Punkte imaginär, die Kurvenzweige rücken auseinander und begegnen sich nicht mehr, der einzige Doppelpunkt zeigt sich also ebenfalls als isolierter Punkt; so sind in Figur 11 für C drei



Figur 11.

reelle Doppelpunkte vorhanden, während für C_1 nur noch ein Doppelpunkt möglich ist, der isoliert liegen muss, auch für $r_1 = 0$ gilt dies und so fort.

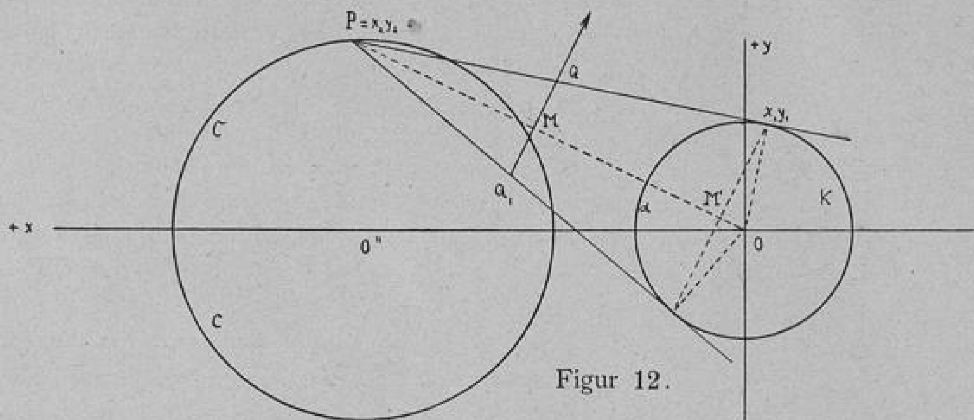
Umhüllungskurve der Kreissehnen.

Nach Figur 12 ist $O\,P = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$$O\,M^1 = \frac{r^2}{O\,P} = \frac{r^2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Sind $\xi^1\ \eta^1$ die Coordinaten von M^1, $\xi\ \eta$ diejenigen des Punktes M, so folgt weiter

$$\left\{\begin{array}{l} \xi^1 = O\,M^1 \cos\alpha = \dfrac{r^2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\ \dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \dfrac{r^2\,x_2}{x_2^2+y_2^2} \\ \eta^1 = O\,M^1 \sin\alpha = \dfrac{r^2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\ \dfrac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \dfrac{r^2\,y_2}{x_2^2+y_2^2} \end{array}\right\}$$



Figur 12.

und die Coordinaten von M

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,\xi = x_2 + \xi_1 = \dfrac{x_2^2+y_2^2+r^2}{x_2^2+y_2^2}\ x_2 \\ 2\,\eta = y_2 + \eta_1 = \dfrac{x_2^2+y_2^2+r^2}{x_2^2+y_2^2}\ y_2 \end{array}\right\}$$

unter Benutzung von Linienkoordinaten ergiebt sich demnach:

1. Gleichung des Punktes M $\quad u x_2 \dfrac{x_2^2+y_2^2+r^2}{x_2^2+y_2^2} + v y_2 \dfrac{x_2^2+y_2^2+r^2}{x_2^2+y_2^2} + 2 = o$
2. Gleichung des ∞ fernen Punktes der Richtung $Q\,Q_1 \perp O\,P$: $\quad u y_2 - v x_2 = o$
3. Gleichung des Kreises C $\quad (x_2 - a)^2 + y_2^2 = r_1^2$.

Die Elimination von $(x_2\ y_2)$ liefert die Umhüllungskurve der Sehne $Q\,Q_1$.

Gleichung (1) kann nun geschrieben werden $(u x_2 + v y_2)\dfrac{x_2^2+y_2^2+r^2}{x_2^2+y_2^2} + 2 = o$, mit

$$y_2 = \frac{v}{u}\,x_2 \text{ also } \left(u x_2 + \frac{v^2}{u}\,x_2\right)\frac{x_2^2 + \frac{v^2}{u^2}\,x_2^2 + r^2}{x_2^2 + \frac{v_2}{u^2}\,x_2^2} + 2 = o \text{ oder}$$

$$(u^2+v^2)\,\frac{x_2^2\,(u^2+v^2) + u^2\,r^2}{x_2\,(u^2+v^2)} + 2\,u = o, \text{ d. h.}$$

$$4. \qquad x_2^2\,(u^2+v^2) + u^2\,r^2 + 2\,u x_2 = o.$$

Aus (2) und (3) erhält man aber $\quad x_2^2 + y_2^2 - 2\,a x_2 = r_1^2 - a^2$ mithin auch

$$x_2^2 + \frac{v^2}{u^2}\,x_2^2 - 2\,a x_2 = r_1^2 - a^2 \text{ und}$$

$$x_2^2\,(u^2+v^2) - 2\,ax_2\,.\,u^2 = (r_1^2 - a^2)\,u^2$$

nach x_2 aufgelöst: $x_2 = \frac{u}{u^2+v^2}\left\{ au \pm \sqrt{r_1^2\,(u^2+v^2) - a^2\,v^2} \right\}$

Wird nun $x_2^2\,(u^2+v^2) = (r_1^2 - a^2)\,u^2 + 2\,ax_2\,u^2 = u^2\,(r_1^2 - a^2 + 2\,ax_2)$
in Gleichung (4) eingesetzt, so ist das Resultat $u^2\,(r_1^2 - a^2 + 2\,ax_2) + u^2\,r^2 + 2\,ux_2 = 0$
mit u vereinfacht: $u\,(r_1^2 - a^2 + r^2) + 2\,x_2\,(au+1) = 0$
letztere Gleichung und der obige Wert von x_2 geben nach wiederholter Vereinfachung mit u

$$(r_1^2 - a^2 + r^2)\,(u^2+v^2) + 2\,(au+1)\,(au \pm \sqrt{r_1^2\,(u^2+v^2) - a^2\,v^2} = 0 \text{ oder}$$

$$r_1^2 - a^2 + r^2)\,(u^2+v^2) + 2\,au\,(au+1) = \mp 2(au+1)\sqrt{r_1^2\,(u^2+v^2) - a^2\,v^2} \text{ ausquadriert:}$$

$$(u+v^2)^2(r_1^2 - a^2 + r^2)^2 + 2\,au\,(au+1)\,(u^2+v^2)\,(r_1^2 - a^2 + r^2) + 4a^2(au+1)^2(u^2+v^2) - 4\,r_1^2\,(au+1)^2$$

$(u^2+v^2) = 0$ mit $u^2 + v^2$ gehoben:

$$(u^2+v^2)\,(r_1^2 - a^2 + r^2)^2 + 4\,au\,(au+1)\,(r_1^2 - a^2 + r^2) + 4\,a^2(au+1)^2 - 4\,r_1^2(au+1)^2 = 0,$$

welche Gleichung sich noch umformen lässt in

$$(u^2+v^2)\,(r^2 + r_1^2 - a^2)^2 + 4\,(au+1)\,(aur^2 + a^2 - r_1^2) = o \text{ ausmultipliziert)}$$

$$u^2\left\{(r^2 + r_1^2 - a^2)) + 4\,a^2\,r^2\right\} + 4\,au\left\{a^2 + r^2 - r_1^2\right\} + v^2\left\{r^2 + r_1^2 - a^2\right\}^2 + 4\,(a^2 - r_1^2) = 0,$$

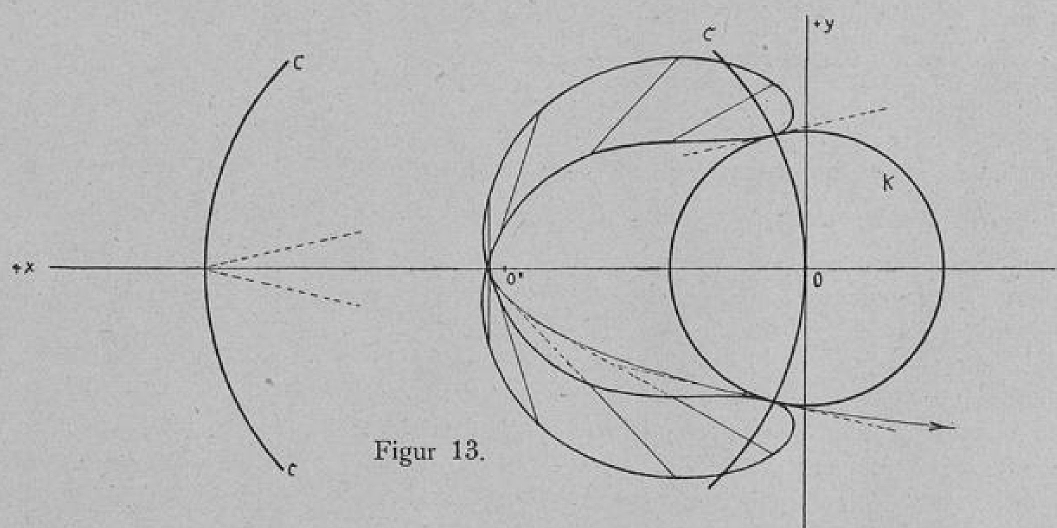
als endgiltige Gleichung der Umhüllungskurve in Linienkoordinaten.

Diese Kurve ist von der zweiten Klasse, also auch von der zweiten Ordnung, und da das absolute Glied im allgemeinen nicht gleich Null wird, so muss sie entweder eine Hyperbel oder eine Ellipse darstellen, welche symmetrisch zur x Axe sowie zu einer der y Axe parallelen Geraden liegt, ihren Mittelpunkt auf der x Axe hat und längs der letzteren verschoben ist. Näheres über die Art der Kurve würde die allgemeine Untersuchung in Punkt- oder Linienkoordinaten lehren, einfacher gestalten sich jedoch folgende Betrachtungen:

$u = o$ liefert als Tangenten parallel zur x Axe

$$v^2\,(r^2 + r_1^2 - a^2)^2 + 4\,(a^2 - r_1^2) = 0 \text{ oder}$$

$$\pm 2\,\frac{v\,(r^2 + r_1^2 - a^2)}{\sqrt{r_1^2 - a^2}} + 1 = 0,$$



Figur 13.

solche Tangenten sind vorhanden, wenn $r_1^2 - a^2 > 0$ d. h. $a < r_1$; in diesem Fall allein tritt eine Ellipse mit der Halbaxe $b = \frac{r^2 + r_1^2 - a^2}{2\sqrt{r_1^2 - a^2}}$ auf; für $a > r_1$ muss also eine Hyperbel erscheinen, vergleiche hierzu die Figuren 3—11; die andere Halbaxe ist aus $v = 0$ zu ersehen. Wird $a = r_1$, so entsteht die Parabel

$$u^2 (r^2 + 4 r_1^2) + 4 r_1 u + v^2 r^2 = 0,$$

welche die Kurve nach Figur 13 im Schnittpunkt von C und K berührt.

Die Ortskurve der Mittelpunkte M aller Kreissehnen ist nach dem bisher entwickelten wieder die Fusspunktskurve der Ellipse, Parabel oder Hyperbel mit dem Ursprung O als Pol.

3. C eine allgemeine Kurve zweiter Ordnung

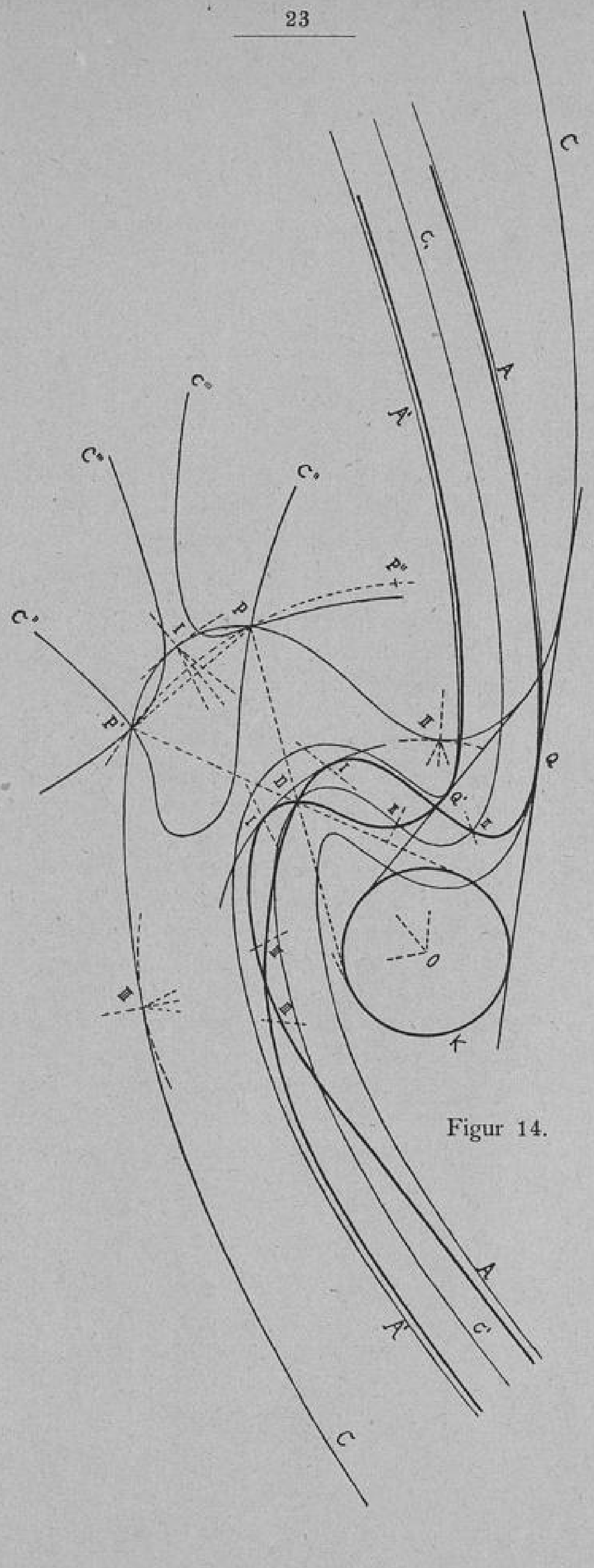
etwa $f_2 (x_2 y_2) = o$. Hier bestimmt sich die Gleichung der transformierten Kurve aus dem System

$$\left\{\begin{array}{l} f_2 (x_2 y_2) = 0 \\ x_2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \left\{ 2 x (x^2 + y^2) - r^2 x \mp ry \sqrt{x^2 + y^2 - r^2} \right\} \\ y_2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \left\{ 2 y (x^2 + y^2) - r^2 y \pm rx \sqrt{x^2 + y^2 - r^2} \right\} \end{array}\right.$$

durch Elimination von x_2 y_2. Die Ausführung der Rechnung liefert nun allerdings keine so einfachen Resultate mehr, wie beim Kreise, sondern Kurven von der zwölften Ordnung; es kann dies nicht überraschen, wenn man bedenkt, dass bei $C = K^1$ der Faktor $(x^2 + y^2)^2$ sich gehoben hat. So interessant nun auch die Kurven sind, welche aus einer beliebigen f_2 abgeleitet werden können, so soll doch mit Rücksicht auf den Umfang dieser Arbeit von ihnen abgesehen werden, um für allgemeine Untersuchungen Platz zu gewinnen.

4. C eine Kurve n ter Ordnung.

Liegt eine solche Kurve vor, so wird es genügen, im obigen System $f_2 (x_2 y_2) = o$ durch $f^n (x_2 y_2) = o$ zu ersetzen; auch in diesem Falle liefert die geometrische Behandlung eine Reihe von Resultaten und Sätzen. Zunächst dürfte nachgewiesen sein, dass bei jeder f_n eine sogenannte Asymptotenfläche A A^1 entsteht, welche durch die mit Halbmesser $\frac{r}{2}$ beschriebenen Kreise erzeugt wird, deren Mittelpunkte sich auf einer zu C ähnlichen Kurve C^1 bewegen. C^1 stellt den Ort der Mittelpunkte aller Strahlen von O nach C dar. Die Asymptotenfläche ist also begrenzt durch die Parallelkurven A A^1 zur Mittelkurve C^1 im Abstand $\frac{r}{2}$, innerhalb dieser Fläche muss die Ortskurve notwendig sich erstrecken, etwaige isolierte Punkte ausgenommen. Die Transformation ist eine zweideutige, die ursprüngliche Kurve C ergiebt für jeden ihrer Zweige oder Teile zwei neue Zweige, welche zwischen den Asymptotenkurven irgendwie verlaufen und letztere berühren, falls nicht wie bei Figur 4 noch engere Umgrenzungen ähnlicher Art auftreten. Besitzen C und K eine gemeinsame Tangente, welche natürlich die Asymptotenkurve berührt, so muss auch die Ortskurve die A A^1 im Berührungspunkt Q der Tangente berühren. Figur 14 giebt darüber weitere Aufschlüsse, sie zeigt ferner, dass jedem Punkt I, II, III von C, in welchem letztere Kurve von einem zu 0 konzentrischen Kreise berührt wird, oder mit anderen Worten jedem Punkt, der von 0 eine Maximal- oder Minimalentfernung hat, wieder zwei derartige Maximal- beziehungsweise



Figur 14.

Minimalpunkte der transformierten Kurve entsprechen. Der Beweis lässt sich entweder durch Betrachtung der Bewegung des Punktes $P = x_2\ y_2$ auf C oder analytisch führen. Nach früherem ist nämlich

$$x_2^2 + y_2^2 = \varrho_2^{\ 2} = 4\,(x^2 + y^2) - 3\,r^2 \text{ oder}$$

$$\varrho_2^{\ 2} = 4\,\varrho^2 - 3\,r^2.$$

Soll P in der angegebenen Weise Maximal- oder Minimalpunkt sein, so wird

$$d\varrho_2 = 0.$$

Da aber
$$2\,\varrho_2\,d\varrho_2 = 8\varrho\,d\varrho \qquad \text{d. h.}$$

$$d\varrho_2 = \frac{4\,\varrho\,d\varrho}{\varrho_2} = \frac{4\,\varrho\,d\varrho}{\sqrt{4\,\varrho^2 - 3\,r^2}}, \text{ so ist dann auch}$$

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2\,\varrho}\right)^2}} = 0 \text{ und } d\varrho = 0,$$

demnach der transformierte Punkt Q ebenfalls ein solcher Punkt. Dieser Satz ist namentlich wertvoll zur weiteren Bestimmung des Verlaufs der Kurve innerhalb der Asymptotenkurven. Der kleinste reelle Wert, den $\varrho_2^{\ 2}$ überhaupt annehmen kann, ist Null; dann folgt aus $\varrho_2^{\ 2} = 4\,\varrho^2 - 3\,r^2$ für ϱ der Wert $\frac{r}{2}\sqrt{3}$, man hat einen Punkt innerhalb des Kreises K, der also für die Kurve Q nicht von Wichtigkeit ist. Ist $\varrho_2 = r$, so wird auch $\varrho = r$, die Ortskurve Q berührt den Kreis K im Schnittpunkt des letzteren mit C in Uebereinstimmung mit den früher behandelten besonderen Fällen.

Doppelpunkte der Ortskurve.

Schon eine Kurve zweiter Ordnung als Leitkurve des Punktes $P = x_2\ y_2$ ergab eine Reihe von Doppelpunkten der transformierten Kurve, noch mehr gilt dies für eine allgemeine Kurve C; vergleiche hiezu wieder Figur 14.

Sind $P = x_2\ y_2$ und $P = x_3\ y_3$ zwei Punkte auf C, welche zusammenfallende Halbierungspunkte der Tangenten an K liefern und damit den Doppelpunkt D erzeugen, so ist ohne weiteres klar, dass jede Kurve C, C'', C''' usw., welche durch P und P^1 geht, auf den nämlichen Doppelpunkt D führt, ferner ist aus der Figur 14 zu ersehen, dass für einen zwischen P und P^1 im endlichen geschlossenen Kurvenzweig von C mit dem Doppelpunkt zugleich ein Maximal- beziehungsweise Minimalpunkt auftritt, der also bei dieser Gestaltung der C auf einen Doppelpunkt hinweist; doch braucht keineswegs jedem Maximal- oder Minimalpunkt ein Doppelpunkt zu entsprechen. Dies geht daraus hervor, dass die Sehne $P\,P^1$ in durchaus bestimmter Weise von der Entfernung $O\,P = O\,P^1 = \varrho_2 = \varrho_3$ abhängt. Nach den Transformationsformeln sind für irgend einen Doppelpunkt $D = (xy)$ die Coordinaten von P:

$$\left\{\begin{aligned} x_2 &= \frac{x\left\{2\,(x^2+y^2) - r^2\right\} - ry\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{x^2+y^2} \\ y_2 &= \frac{y\left\{2\,(x^2+y^2) - r^2\right\} + rx\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \text{ und diejenigen von } P^1\text{:}$$

$$\left\{\begin{aligned} x_3 &= \frac{x\left\{2\,(x^2+y^2) - r^2\right\} + ry\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{x^2+y^2} \\ y_3 &= \frac{y\left\{2\,(x^2+y^2) - r^2\right\} - rx\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\}$$

also $x_2 - x_3 = \dfrac{-2\,ry\,\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{x^2+y^2}$ $\quad y_2 - y_3 = \dfrac{2\,rx\,\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{x^2+y^2}$ folglich

$$P\,P_1^{\,2} = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = \frac{4\,(x^2+y^2-r^2)\,r^2\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4\,r^2\,(x^2+y^2-r^2)}{x^2+y^2} = \frac{4\,r^2\,(\varrho^2-r^2)}{\varrho^2}$$

$$= \frac{4\,r^2\,(\varrho^2 - 4\,r^2)}{4\,\varrho^2} = \frac{4\,r^2\,(\varrho_2^{\,2} - r^2)}{\varrho_2^{\,2} + 3\,r^2} \text{ mithin}$$

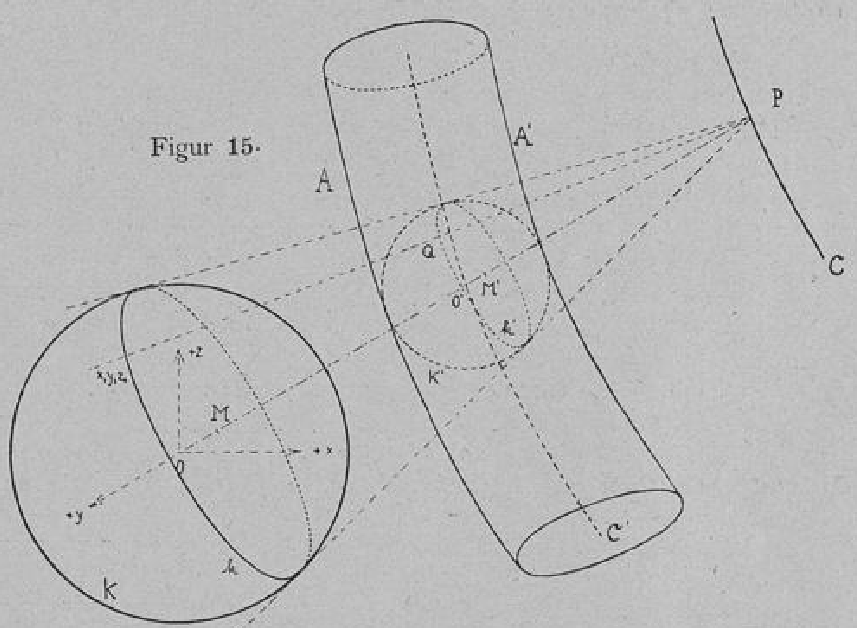
die Sehne $P\,P^1 = 2\,r\,\sqrt{\dfrac{\varrho_2^{\,2} - r^2}{\varrho_2^{\,2} + 3r^2}}$

Haben demnach die Kurve C und ein zu K konzentrischer Kreis mit Halbmesser $O\,P = O\,P^1 = \varrho_2 = \varrho_3$ eine Sehne $P\,P^1 = 2\,r\,\sqrt{\dfrac{\varrho_2^{\,2} - r^2}{\varrho_2^{\,2} + 3\,r^2}}$ gemeinschaftlich, so ergeben die beiden Punkte P und P^1 einen Doppelpunkt D der Ortskurve Q, welcher auf dem Mittellot von $P\,P^1$ in der Entfernung $O\,D = \varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\varrho_2^{\,2} + 3\,r^2}$ vom Ursprung liegt. Konstruiert man zu jedem Punkt P von C auf dem jeweiligen Kreis ϱ_2 um O die beiden Punkte P' und P'', deren Entfernung von P $2\,r\,\sqrt{\dfrac{\varrho_2^{\,2} - r^2}{\varrho_2^{\,2} + 3r^2}}$ ist, so entsteht beim Fortrücken des Punktes P eine Art Parallelkurve zu C, welche die Kurve C in denjenigen Punkten P und P^1 schneidet, die Doppelpunkte von Q liefern und so fort.

B. Untersuchungen im Raum.

Wird von irgend einem Punkt P der Kurve C im Raum der Berührungskegel an die Kugel K mit Mittelpunkt im Coordinatenursprung 0 und Halbmesser r gelegt, so berührt der Kegel die Kugel nach dem Kleinkreis k. Halbiert man sämtliche Mantellinien, so bestimmen

Figur 15.



die Mittelpunkte Q ebenfalls einen Kreis k^1, dessen Halbmesser halb so gross ist wie der von k. Kreis k^1 liegt auf einer Kugel K^1 mit Halbmesser $\frac{r}{2}$, welche den obengenannten Tangentialkegel nach k^1 berührt und ihren Mittelpunkt O^1 auf O P in deren Mittelpunkt hat: ebenso befinden sich die Mittelpunkte M und M^1 der Kreise k und k^1 auf O P. Rückt der Punkt P auf der Kurve C fort, so bestimmt O^1 eine zu C ähnliche Kurve C^1, die unsere Mittelkurve darstellt, die Kugel K^1 hüllt eine Röhrenfläche A A^1 ein und der Kreis k^1 beschreibt eine Fläche, für welche die Röhrenfläche wieder die Asymptotenfläche genannt werden soll; innerhalb dieser muss die Ortsfläche liegen, von isolierten Punkten oder Kurven abgesehen. Die Kreisebenen k^1 werden eine abwickelbare Fläche erzeugen, und die Punkte M^1 stellen in ihrer Aufeinanderfolge die Fusspunktskurve der abwickelbaren Fläche in Beziehung auf den Pol O dar; die Axen sämtlicher Kreisebenen bilden den Ursprungskegel der Leitkurve C und so fort.

Geht man zur

allgemeinen analytischen Behandlung

über, so ergiebt sich die Gleichung der von den Kreisen k^1 erzeugten Fläche aus dem System

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{1. Gleichung von } K: \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 = 0 \\
\text{2. Tangentialebene in } x_1\, y_1\, z_1: \quad x x_1 + y y_1 + z z_1 - r^2 = 0 \\
\text{3. } 2\,x = x_1 + x_2 \quad 2\,y = y_1 + y_2 \quad 2\,z = z_1 + z_2 \text{ und} \\
\text{4. } \left\{\begin{array}{l} f_m\;(x_2\, y_2\, z_2) = 0 \\ g_n\;(x_2\, y_2\, z_2) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad \text{4a. } \left\{\begin{array}{l} x_2 = f\,(\lambda) \\ y_2 = g\,(\lambda) \\ z_2 = h\,(\lambda) \end{array}\right\}
\end{array}\right\}$$

durch Elimination von $x_2\, y_2\, z_2\, x_1\, y_1\, z_1$ aus 1—4 beziehungsweise noch von λ unter Benutzung von 4a. Sobald C eine ebene Kurve wird, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit etwa die x z Ebene parallel zur Kurvenebene, die y Axe $\perp$ zu derselben wählen, dann reduziert sich das obige System zu dem neuen

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{1. } x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 = 0 \\
\text{2. } x x_1 + y y_1 + z z_1 - r^2 = 0 \\
\text{3. } 2\,x = x_1 + x_2 \quad 2\,y = y_1 + a \quad 2\,z = z_1 + z_2 \\
\text{4. } f_m\;(x_2\, z_2) = 0 \quad \text{oder} \quad \text{4a. } \left\{\begin{array}{l} x_2 = f\,(\lambda) \\ z_2 = h\,(\lambda) \end{array}\right\}
\end{array}\right\}$$

in welchem sich aus 1—3 sofort x_2 und z_2 in Funktion von x y z a darstellen lassen und damit folgt

$$\left\{\begin{array}{l}
x_2 = 2\,x - \frac{1}{x^2 + z^2}\left[- x\,y\,(2\,y - a) + r^2 x \pm z \sqrt{(x^2 + z^2)\left\{r^2 - 2(y-a)^2\right\} - \left\{r^2 - y(2y-a)\right\}^2}\right] \\
z_2 = 2\,z - \frac{1}{x^2 + z^2}\left[- y\,z\,(2\,y - a) + r^2 z \mp x \sqrt{(x^2 + z^2)\left\{r^2 - 2(y-a)^2\right\} - \left\{r^2 - y(2y-a)\right\}^2}\right] \\
f\,m\;(x_2\, z_2) = o
\end{array}\right\}$$

als einfachstes System, um die Gleichung der erzeugten Fläche zu finden.

1. C eine Gerade.

Man kann unbeschadet der Allgemeinheit die Gerade in die x z Ebene parallel zur z Axe im Abstand a legen. Dann wird

$$\left\{\begin{array}{l}
x_2 = \frac{1}{x^2 + z^2}\left[2\,x\,(x^2 + z^2) - x\,(r^2 - 2\,y^2) \mp z \sqrt{(x^2+z^2)\,(r^2-4\,y^2) - (r^2-2\,y^2)^2}\right] \\
z^2 = \frac{1}{x^2 + z^2}\left[2\,z\,(x^2 + z^2) - z\,(r^2 - 2\,y^2) \pm x \sqrt{(x^2+z^2)\,(r^2-4\,y^2) - (r^2-2\,y^2)^2}\right] \\
\qquad f\,(x_2\, z_2) = x_2 - a = 0.
\end{array}\right\}$$

Nach einigen Umrechnungen und nach Vereinfachung mit $x^2 + z^2$ liefert dies

$$5.\quad \left\{ 2x^2 - ax + 2y^2 - r^2 \right\}^2 + z^2 \left\{ (2x - a)^2 + 4y^2 - r^2 \right\} = 0 \text{ oder}$$

$$5a.\quad \left\{ 2x^2 + 2y^2 + z^2 - ax - r^2 \right\}^2 - z^2 \left\{ z^2 + 2ax - a^2 - r^2 \right\} = 0$$

als Gleichung der von den Kreisen k^1 gebildeten Fläche.

Setzt man $y = 0$, so erhält man $(2x^2 + z^2 - ax - r^2)^2 - z^2 (z^2 + 2ax - a^2 - r^2) = 0$, d. h. die Kurve unter A, 1 wie nicht anders zu erwarten war, als Vertikalspur der Fläche, weiter zeigt die 5a, dass die Fläche den parabolischen Cylinder $z^2 + 2ax - a^2 - r^2 = 0$ berührt und zwar längs der Kurve

$$6.\ \left\{ \begin{array}{l} z^2 + 2ax - a^2 - r^2 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 - ax - r^2 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{oder längs} \quad 6a.\ \left\{ \begin{array}{l} z^2 + 2ax - a^2 - r^2 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3ax + a^2 = 0 \end{array} \right\}$$

welche für $y = 0$ natürlich den Punkt Q'' der Figur 17 abgiebt, der zugleich den höchsten beziehungsweise tiefsten Punkt von (6) darstellt. No. 5 lässt erkennen, dass der vertikale Kreiscylinder $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{r^2}{4} = 0$ von der Fläche berührt werden muss im Schnitt mit dem ebenfalls vertikalen, jedoch nicht dazu konzentrischen Kreiscylinder $2x^2 - ax + 2y^2 - r^2 = 0$ oder $\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + y^2 - \frac{a^2 + 8r^2}{16} = 0$, d. h. längs den beiden zur z Axe parallelen Geraden GG^1:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a^2 + r^2}{2a} \\ y = \pm \dfrac{r}{2a} \sqrt{a^2 - r^2} \end{array} \right\}$$

Der Wert $x = \frac{a^2 + r^2}{2a}$ giebt mit (5) als Gleichung der Schnittkurve einer zur yz Ebene parallelen Ebene durch die beiden parallelen Graden G und G^1

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\{ 2x^2 - ax + 2y^2 - r^2 \right\}^2 + z^2 \left\{ (2x - a)^2 + 4y^2 - r^2 \right\} = 0 \\ r = \dfrac{a^2 + r^2}{2a} \end{array} \right\}$$

oder nach einigen Umrechnungen

$$\left(4y^2 - \frac{r^2 (a^2 - r^2)}{a^2}\right) \left(y^2 + z^2 - \frac{r^2 (a^2 - r^2)}{4a^2}\right) = 0,$$

d. h. die Schnittkurve zerfällt in die beiden parallelen Graden GG^1 auf der Fläche und den sie im Schnitt mit der x y Ebene berührenden Kreis k^1_0: $y^2 + z^2 = \frac{r^2 (a^2 - r^2)}{4a^2}$, der also in diesen beiden Punkten den Cylinder $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{r^2}{4} = 0$ ebenfalls berührt. Der Kreiscylinder AA^1 oder $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{r^2}{4} = 0$ ist nichts anderes als der Asymptotencylinder, in welchen die asymptotische Röhrenfläche für den Fall einer Geraden ausarten muss, was auch geometrisch ersichtlich ist. Die beiden Mantellinien $y^2 + \frac{r^2 (r^2 - a^2)}{a^2} = 0$ desselben sind die Berührungsmantellinien der beiden durch C an die Kugel K gelegten Tangentialebenen in Uebereinstimmung mit dem schon in der Ebene ausgesprochenen Satze, dass, wenn K und C eine gemeinschaftliche Berührungsebene haben, dieselbe auch die asymptotische Röhrenfläche und die Ortsfläche in ihrem gemeinsamen Berührungspunkt berührt.

Doppelkurve der Fläche.

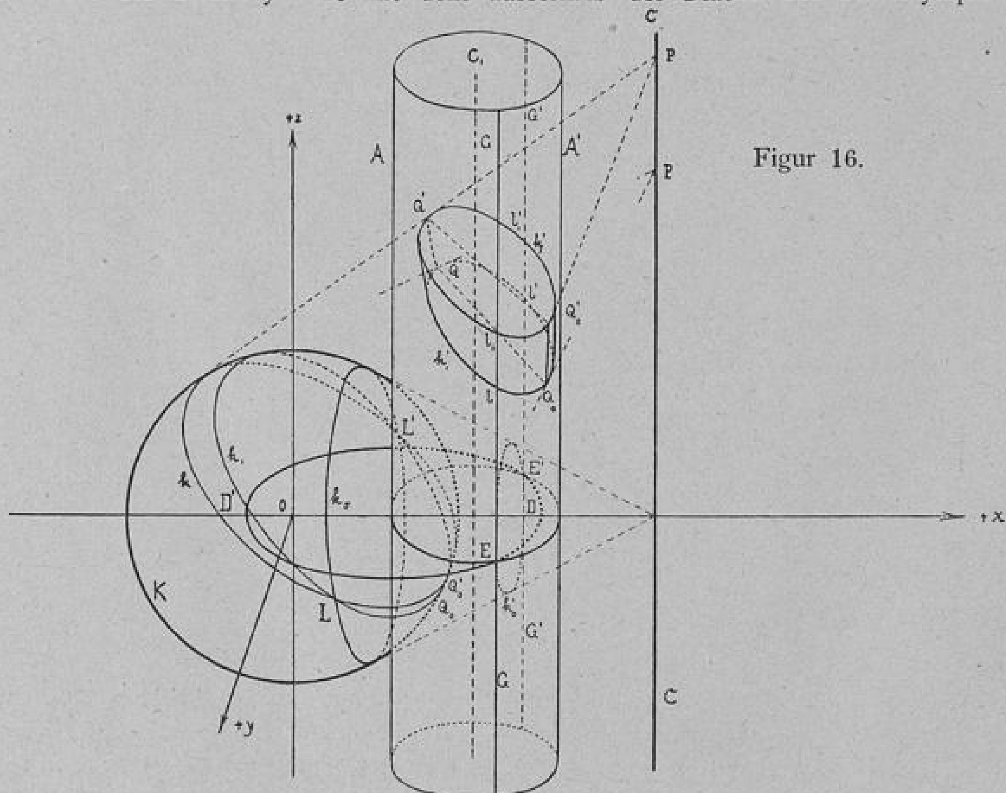
Sowohl aus (5) als auch aus (5a) geht hervor, dass der Kreis mit Mittelpunkt $\left(\frac{a}{4},\ 0,\ 0\right)$

$$\left\{\begin{matrix} z = 0 \\ 2\,x^2 + 2\,y^2 - ax - r = 0 \end{matrix}\right\} \text{ beziehungsweise } \left\{\begin{matrix} z = 0 \\ \left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + y^2 - \frac{a^2 + 8\,r^2}{16} = 0 \end{matrix}\right\}.$$

die Doppelkurve der Fläche ist. Dieselbe liegt in der x y Ebene und schneidet den Asymptotencylinder in eben den Punkten, wo die parallelen Mantellinien $y^2 + \frac{r^2\,(r^2 - a^2)}{4\,a^2} = 0$ den Kreis $y^2 + z^2 - \frac{r^2\,(a^2 - r^2)}{4\,a^2} = 0$ berühren; d. h. in den Punkten E und E^1 der Figur 16. Die von den Kreisen k^1 erzeugte Fläche muss unter den früheren Einschränkungen innerhalb des Asymptotencylinders A A^1 sich erstrecken, der Teil E D^1 E^1 der Doppelkurve ausserhalb des obigen Cylinders stellt also den isolierten Teil dieser Kurve dar. Dass derselbe trotzdem ein Bestandteil der Fläche, beweist die Schnittfigur der letzteren mit $y = 0$, man hat hiefür nämlich

$$\left\{\begin{matrix} \{2\,x^2 - ax + 2\,y^2 - r^2\}^2 + z^2\,\{(2\,x - a)^2 + 4\,y^2 - r^2\} = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$

oder die schon behandelte Ortskurve A, 1 mit den Doppelpunkten D und $D_1 \left(x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8\,r^2}}{4}\right)$ auf der x Axe, von denen D^1 isoliert lag. Dieser isolierte Punkt ist der Schnittpunkt der x z Ebene oder der Ebene $y = 0$ mit dem ausserhalb der Fläche und des Asymptoten-



Figur 16.

cylinders isoliert verlaufenden Zweige der Doppelkurve, während der andere Schnittpunkt D als auf der Fläche selbst befindlich einen wirklichen Doppelpunkt giebt. In ähnlicher Weise liefert jede Schnittebene der Fläche eine Kurve, und je nachdem sie dem Teil DEE^1 oder D^1EE^1 der Doppelkurve begegnet, zeigt die Schnittkurve entweder zwei eigentliche Doppelpunkte oder zwei isolierte Punkte, trifft sie dagegen EE^1D und zugleich EE^1D^1, so werden ein Doppelpunkt und ein isolierter Punkt auftreten. Die vorausgegangenen Betrachtungen können dazu verwendet werden, die Gestalt der Vertikal- und Seitenschnitte der Fläche zu bestimmen ohne weitläufige analytische Untersuchungen und mit Hilfe dieser Schnitte ist es nicht schwer, sich ein Bild von der Fläche zu machen, was durch die erzeugenden Kreise k^1 allein nur bis zu einem gewissen Grade gelingt. Bei den letzteren lässt die Erzeugung sofort ersehen, dass ihre Ebenen alle senkrecht zur x z Ebene stehen, wie die Kugeln mit Halbmesser $\frac{r}{2}$, auf denen sie sich ja befinden, und dass ihre Mittelpunkte in der Vertikalebene auf der Fusspunktskurve des parabolischen Cylinders $z^2 + 2\,ax - a^2 - r^2 = 0$ in Beziehung auf den Pol 0 liegen. Dieser parabolische Cylinder ist also hier die entwickelbare Fläche, welche von den Kreisebenen umhüllt wird. Die Kreise haben verschiedene Radien, welche sich zwischen den Werten des Halbmessers $\frac{r}{a}\sqrt{a^2 - r^2}$ von $k_0{}^1$ und $\frac{r}{2}$ bewegen. Die Ebene $k_0{}^1$ steht vertikal, von da an neigen sich die Kreisebenen immer mehr zur x y Ebene hin, um im Unendlichen parallel zu derselben zu werden. Die Durchmesser in der x z Ebene erzeugen mit ihren Endpunkten die schon im ersten Teil behandelte Ortskurve Q. Da die Kreise symmetrisch zur x y Ebene sind, so werden sie sich anfangs in reellen Punkten schneiden, und bilden so den auf der Fläche liegenden Teil DEE^1 der kreisförmigen Doppelkurve, später rücken sie auseinander, immer jedoch berühren sie hiebei den Cylinder $A\,A^1$ in den Schnittpunkten mit den Mantellinien G und G^1. Dass die Kreise damit von der Lage an, in welcher sie sich nicht mehr treffen, eine nach unten und oben hin immer mehr dem Asymptotencylinder zustrebende röhrenartige Fläche bilden, darf nun wohl angenommen werden; zur Beschreibung der andern Flächenpartien muss man aber noch untersuchen.

Die Schnittkurve der Fläche mit einer beliebigen Ebene.

Lege durch die Gerade G oder im Abstand $y = \frac{r}{2\,a}\sqrt{a^2 - r^2}$ eine Ebene parallel zur x und z Axe, so ist die Schnittkurve

$$\left[\left(2\,x - \frac{a^2 + r^2}{a}\right)\left(2\,x + \frac{r^2}{a}\right)\right]^2 + 4\,z^2\left(2\,x - \frac{a^2 - r^2}{a}\right)\left(2\,x - \frac{a^2 + r^2}{a}\right) = 0,$$

d. h. sie zerfällt in die Grade G und die Kurve dritter Ordnung

$$\left(2\,x - \frac{a^2 + r^2}{a}\right)\left(2\,x + \frac{r^2}{a}\right)^2 + 4\,z^2\left(2\,x - \frac{a^2 - r^2}{a}\right) = 0,$$

welche im Schnittpunkt $z = 0$ $2\,x + \frac{r^2}{a} = 0$ mit dem isolierten Teil unserer Doppelkurve ebenfalls einen isolierten Punkt aufweist und deren Asymptote $2\,x - \frac{a^2 - r^2}{a} = 0$ die zweite Schnittmantellinie ihrer Ebene mit dem Asymptotencylinder darstellt, wie dies natürlich bei jeder zur Axe des Cylinders parallelen Schnittebene zutrifft; während eine schief zu dieser Axe stehende Ebene eine Kurve liefert, die in dem Kegelschnitt liegt, nach welchem der Cylinder geschnitten wird und letzteren im Schnitt mit G und G^1 berührt. Die Kurve hat eine mit Figur 2 Nro. II oder C_3 in Figur 17 übereinstimmende Gestalt und Lage. Nun können die Vertikalschnitte der Fläche sofort angegeben werden, denn für $y = 0$ hat man die Ortskurve Q und dann ähnliche Kurven bis zu $y = \frac{r}{2a}\sqrt{a^2 - r^2}$, wo die Kurve in G in die C_3 zerfällt. Wird y noch grösser bis zu $\frac{r}{2}$, so nehmen die Schnitte die in Figur 17 mit v bezeichnete Form an, die sich für $y > \frac{r}{2}$ aber $< \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + 8r^2}$ auf zwei isolierte Punkte reduziert. Für die Seitenschnitte erhält man auch wieder zuerst die beiden Geraden G und G^1 nebst dem sie in E und E^1 berührenden Kreis $k_0{}^1$. Rückt die Ebene in der Richtung $+ x$ weiter, so wird die Doppelkurve $D E E^1$ in zwei Punkten geschnitten, etwa in d und d^1, welche eigentliche Doppelpunkte der Schnittkurve sein müssen, weiter trifft die Ebene die Ortskurve Q in q und q^1 (Figur 17), welche jedenfalls Scheitelpunkte des Schnitts sind, und da letzterer die in seine Ebene fallenden Mantelinine des Asymptotencylinders auch als Asymptoten hat, so nimmt er die in Figur 17 unter s (gegen 0 hin) gezeichnete Gestalt an. Dass die Kurvenzweige sich für eine Ebene durch D berühren wie in s^1 und dann auseinandergehen nach s'', braucht nicht ausgeführt zu werden. Ganz in derselben Weise finden sich die Horizontalschnitte $h\, h'\, h''$ der Horizontalprojektion, die alle in E und E^1 den Kreis $A A^1$ des Asymptotencylinders berühren. Würde man aus $f = 0$ und $\frac{df}{dz} = 0$ den Horizontalumriss der Fläche bestimmen, so kämen die Doppelkurve und der Grundkreis des Asymptotencylinders in der x y Ebene zum Vorschein, der Vertikalumriss besteht aus der Ortskurve Q und dem Vertikalschnitt des parabolischen Cylinders; der Seitenumriss wird weniger einfach, ergiebt sich aber geometrisch aus der Seitenprojektion in Figur 17 als Umhüllung der verschiedenen Kurven s. Von besonderen Kurven abgesehen, ist man nach dem bisherigen nun in den Stand gesetzt, sich eine Skizze von der Fläche herzustellen, was auch in Figur 17 für die Vertikalansicht, die Horizontalprojektion und namentlich auch für die Seitenansicht vom Ursprung 0 aus betrachtet versucht wurde.

Die Fläche ist eine schlauchartige Fläche, welche in den Asymptotencylinder einbeschrieben erscheint und längs der Doppelkurve $D E E^1$ zusammengedrückt gedacht werden kann; doch ist die Länge der Doppelkurve nicht gleich dem halben Umfang des Asymptotencylinders, so dass die Fläche also nicht etwa durch einfache Deformation des letzteren herzustellen ist, wie sie ja auch erst im Unendlichen sich an denselben anschmiegt.

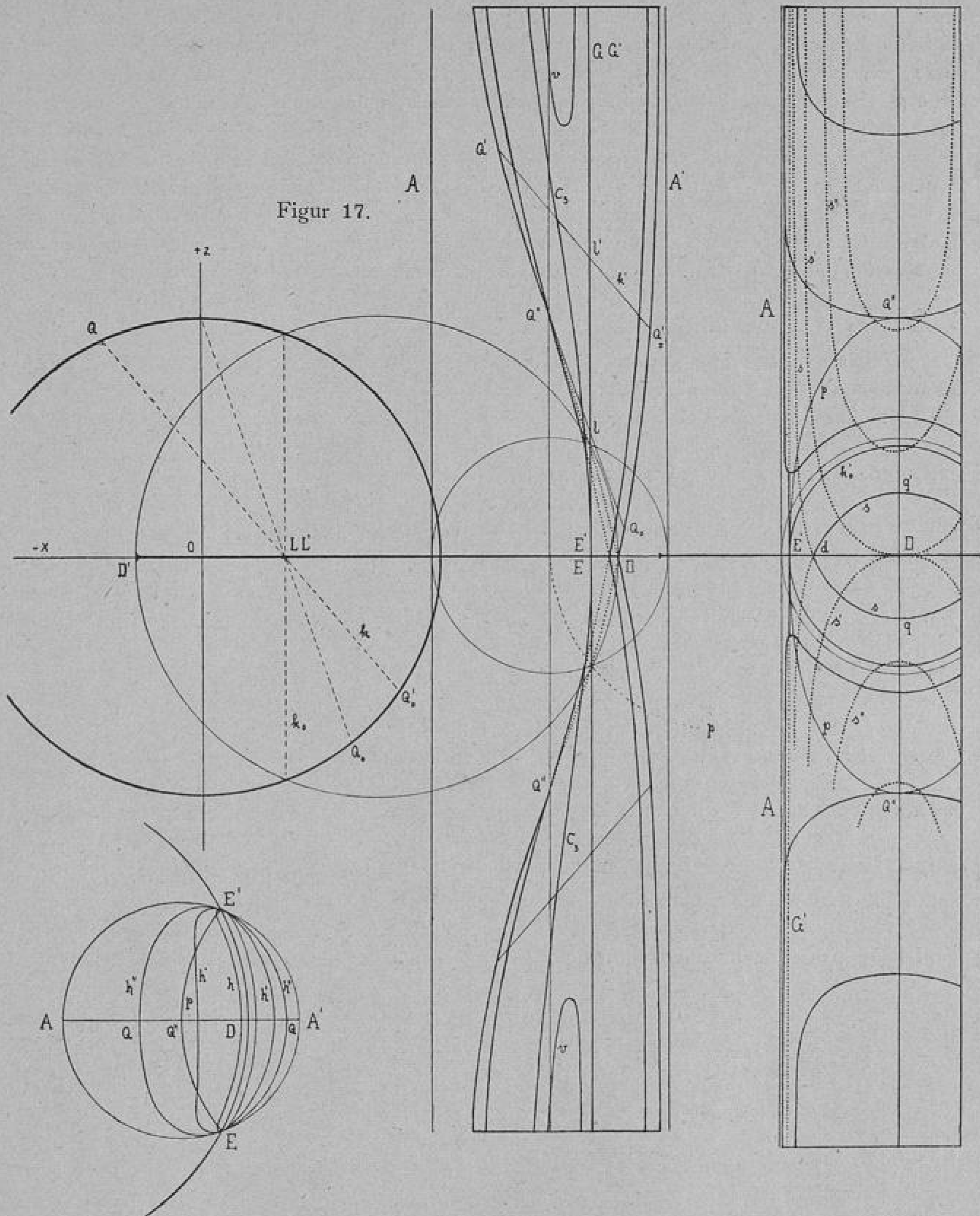
Doppeltangentialebenen.

Die Kurve $\begin{cases} z^2 + 2ax - a^2 - r^2 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3ax + a^2 = 0 \end{cases}$ oder (Figur 17)

$$P = \begin{cases} (x - \frac{3}{4}a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{16} = 0 \\ z^2 + 2a\left(x - \frac{a^2 + r^2}{2a}\right) = 0 \end{cases}$$

gewinnt nun erst ihre eigentliche Bedeutung, sie ist der Ort der Berührungspunkte aller Doppeltangentialebenen der Fläche, welche parallel zur y Axe biegen und in ihrer Gesamtheit den parabolischen Cylinder geben. Jenseits dieser Berührungskurve P liegen sich die beiden dem Ursprung O zugekehrten Flächenmäntel nach der Doppelkurve hin und treten dann auf die hintere Seite, immer vom Ursprung aus gesehen. Die erzeugenden Kreise der

Figur 17.



Fläche sind zum Unterschied von den Cykliden und Röhrenflächen keine Krümmungslinien, denn sonst müssten nach dem Satz von Joachimsthal für ebene Krümmungslinien die Tangentialebenen an die Fläche längs dieser Kreise gegen die Kreisebene gleiche Neigung besitzen, was schon geometrisch unmöglich erscheint, indem z. B. in Q'' die Tangentialebene mit der Kreisebene zusammenfällt, in dem andern Endpunkt des in der Vertikalebene liegenden Kreisdurchmessers durch Q'' aber jedenfalls einen von Null verschiedenen Winkel mit der Kreisebene bildet. Da die erzeugenden Kreise zur Vertikalebene senkrecht stehen, so ist die Ortskurve Q oder der Vertikalschnitt der Fläche eine Orthogonaltrajektorie des Kreissystems, und es liesse sich damit nach Demartres oder Darboux IV, pag. 494 das zu den Kreisen gehörige Orthogonalsystem mittelst der Riccati'schen Gleichung finden; doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden, so wenig wie auf die durch die Kegel bewirkte

Abbildung der Fläche auf die Grundkugel K.

Es darf nach Figur 16 oder 17 unmittelbar vorausgesetzt werden, dass die beiden Geraden G und G^1 den beiden Punkten L und L^1 der Kugel entsprechen, jeder erzeugende Kreis k^1, k^1_1 besitzt einen dazu parallelen Kreis $k\,k_1$ als Bild auf der Kugel; der Teil $L\,Q_0\,Q_0{}^1$ des Kugelzweiecks $LL^1\,Q_0\,Q^1{}_0$, welches von Kleinkreisen gebildet wird, die durch L und L^1 gehen, entspricht dem auf der Fläche gelegenen viereckigen Stück $1\,1_1\,Q_0\,Q_{0_1}$ u. s. w.

Besondere Fälle der erzeugten Fläche

sind jetzt mit Hilfe der Spezialfälle der Ortskurve Q, wie sie in Figur 2 behandelt wurden, unschwer abzuleiten. Bei Nr. III muss die Rotationsfläche der Kurve um die y Axe als Drehaxe auftreten, da alle erzeugenden Kreise parallele Ebenen haben und die Doppelkurve ist ganz isoliert; nämlich

$$\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{r^2}{2} &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Für Nr. II ist dieselbe

$$\left\{\begin{aligned} \left(x - \frac{r}{4}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{16} r^2 &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und hat mit der Fläche nur noch den Punkt gemeinsam, in welchem letztere die Grundkugel berührt.

Inhalt des vom Asymptotencylinder und der Fläche begrenzten Raumes.

Zur Bestimmung desselben muss zunächst die Schnittfläche im Abstand $y = p$ von der x z Ebene berechnet werden. Diese Schnittfigur hat jedenfalls als Asymptoten die Mantellinien des Asymptotencylinders für $y = p$, also, da die Gleichung des Cylinders

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{r^2}{4} = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - p^2} \text{ oder } x = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{r^2 - 4p^2}\right)$$ mithin ist das Integral dieser Fläche

$$\int z\,dx = \pm \int\limits_{x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4p^2}.}^{x = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4p^2}} \frac{2x^2 - ax + 2p^2 - r^2}{\sqrt{r^2 - 4p^2 - (2x - a)^2}}\,dx$$

Setzt man $x_1 = \frac{2x-a}{\sqrt{r^2-4p^2}}$ demnach

$2x = a + x_1\sqrt{r^2-4p^2}$ und $2\,dx = dx_1\sqrt{r^2-4p^2}$ so wird

$$\int z\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\left(a+x_1\sqrt{r^2-4p^2}\right)x_1\sqrt{r^2-4p^2}+(2p^2-r^2)}{\sqrt{1-x_1^2}}\,dx_1$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{ax_1\sqrt{r^2-4p^2}+x_1^2(r^2-4p^2)+2(2p^2-r^2)}{\sqrt{1-x_1^2}}\,dx_1$$

$$=\frac{a}{4}\sqrt{r^2-4p^2}\int\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}}+\frac{2p^2-r^2}{2}\int\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}}+\frac{r^2-4p^2}{4}\int\frac{x_1^2\,dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}}$$

$$=-\frac{a}{4}\sqrt{r^2-4p^2}\cdot\sqrt{1-x_1^2}+\frac{2p^2-r^2}{2}\arcsin x_1+\frac{r^2-4p^2}{8}\left\{\arcsin x_1-x_1\sqrt{1-x_1^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\sqrt{1-x_1^2}\left\{(-r^2+4p^2)x_1-2a\sqrt{r^2-4p^2}\right\}+\frac{1}{8}\arcsin x_1\left\{r^2-4p^2+8p^2-4r^2\right\}$$

oder mit den früheren Werten

$$\int z\,dx = -\frac{1}{8}\sqrt{1-\left(\frac{2x-a}{\sqrt{r^2-4p^2}}\right)^2}\left\{(-4p^2+r^2)\frac{2x-a}{\sqrt{r^2-4p^2}}+2a\sqrt{r^2-4p^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{8}\arcsin\frac{2x-a}{\sqrt{r^2-4p^2}}\left\{4p^2-3r^2\right\}\Bigg|^{\frac{a-\sqrt{r^2-4p^2}}{2}}_{\frac{a+\sqrt{r^2-4p^2}}{2}}$$

$=0+\frac{1}{8}(4p-3r^2)\left\{\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right\}=\frac{\pi}{8}(4p^2-3r^2)$ d. h. für $p=0$ in Uebereinstimmung mit A, 1.

Um nun den obigen Raum selbst zu finden, ist noch anzugeben

$$\int_{y=\frac{r}{2}}^{y=0}\frac{\pi}{8}(4y^2-3r^2)\,dy=\frac{\pi}{8}\left\{\frac{4}{3}y^3-3r^2y\right\}_{\frac{r}{2}}^{0}=\frac{1}{6}\pi r^3$$

und daher der ganze Raum zwischen der Fläche und ihrem Asymptotencylinder $=\frac{4}{6}\cdot\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3$, folglich halb so gross als die Grundkugel, unabhängig von der Entfernung a der Transformationsgeraden.

2. Die Leitkurve C ist ein Kreis, dessen Ebene durch den Mittelpunkt O der Kugel geht.

Unter dieser Voraussetzung darf der Kreismittelpunkt auf der x Axe angenommen werden, und die Gleichung der erzeugten Fläche bestimmt sich aus dem System

$$x_2=\frac{1}{x^2+z^2}\left[2x(x^2+z^2)-x(r^2-2y^2)\mp z\sqrt{(x^2+z^2)(r^2-4y^2)-(r^2-2y^2)^2}\right]$$

$$z_2=\frac{1}{x^2+z^2}\left[2z(x^2+z^2)-z(r^2-2y^2)\pm x\sqrt{(x^2+z^2)(r^2-4y^2)-(r^2-2y^2)^2}\right]$$

$$f(x_2\,z_2)=(x_2-a)^2+z_2^2-r_1^2=0,$$

durch Elimination von x_2 und z_2.

Da $f(x_2\, z_2) = x_2^2 - 2\,ax_2 + a^2 + z_2^2 - r_1^2 = 0$, so bilde man zuerst $x_2^2 + z_2^2$. Also folgt:

$$(x_2^2 + z_2^2)(x^2+z^2)^2 = 4\,(x^2+z^2)^3 + (r^2 - 2\,y^2)^2\,(x^2+z^2) + (r^2 - 4\,y^2)\,(x^2+z^2)^2 - (r^2 - 2\,y^2)^2\,(x^2+z^2)$$
$$-4\,(r^2 - 2y^2)\,(x^2+z^2)^2$$
$$= (x^2+z^2)^2 \left\{ 4\,(x^2+z^2) + r^2 - 4\,y^2 - 4(r^2 - 2\,y^2) \right\}$$
$$= (x^2+z^2)^2 \left\{ 4\,x^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 3\,r^2 \right\} \text{ d. h.}$$
$$x_2^2 + z_2^2 = 4\,(x^2+y^2+z^2) - 3\,r^2,$$

damit ergiebt sich aus $f(x_2\, z_2) = 0$ weiter $4\,(x^2+y^2+z^2) - 3\,r^2 + a^2 - r_1^2 =$

$$\frac{2\,a}{x^2+z^2}\left[2\,x\,(x^2+z^2) - x\,(r^2 - 2\,y^2) \mp z\,\sqrt{(x^2+z^2)\,(r^2 - 4\,y^2) - (r^2 - 2\,y^2)^2}\,\right] \text{ oder}$$
$$4\,(x^2+z^2)(x^2+y^2+z^2) - 4\,ax\,(x^2+z^2) + 2\,ax\,(r^2 - 2\,y^2) - (3\,r^2 + r_1^2)\,(x^2+z^2) + a^2\,(x^2+z^2)$$
$$= \mp\, 2\,az\,\sqrt{(x^2+z^2)\,(r^2 - 4\,y^2) - (r^2 - 2\,y^2)^2}$$
$$\left[\,(x^2+z^2)\left\{ 4\,x^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 4\,ax + a^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\} + 2\,ax\,(r^2 - 2\,y^2)\,\right]^2$$
$$= 4\,a^2 z^2\,(x^2+z^2)\,(r^2 - 4\,y^2) - 4\,a^2 z^2\,(r^2 - 2\,y^2)^2 \text{ ausquadriert:}$$
$$(x^2+z^2)^2\left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\}^2 + 4\,ax\,(r^2 - 2\,y^2)\,(x^2+z^2)\left\{\;\right\}$$
$$+ 4\,a^2 x^2\,(r^2 - 2\,y^2)^2 + 4\,a^2 z^2\,(r^2 - 2\,y^2)^2 - 4\,a^2 z^2\,(x^2+z^2)\,(r^2 - 4\,y^2) = 0.$$

Nach Hebung mit dem Faktor $x^2 + z^2$ demnach die Gleichung der Fläche

$$(x^2+z^2)\left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\}^2 + 4\,ax\,(r^2 - 2\,y^2$$
$$\left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 + 4z^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\} + 4\,a^2\,(r^2 - 2\,y^2)^2 - 4\,a^2 z^2\,(r^2 - 4\,y^2) = 0,$$

welche auf die Form gebracht werden kann:

$$\left[\,x\left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\} + 2\,a\,(r^2 - 2\,y^2)\,\right]^2 + z^2$$
$$\left[\left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 2\,r^2 - r_1^2 \right\}^2 - 4\,a^2\,(r^2 - 4\,y^2)\,\right] = 0,$$

hieraus für $y = 0$ und statt z wieder gesetzt:

$$\left[\,x\left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\} + 2\,ar^2\,\right]^2 + y^2\left[\left\{\;\right\}^2 - 4\,a^2\,r^2\,\right] = 0,$$

vergleiche A, 2, Formel (6). Der Vertikalschnitt der erhaltenen Fläche stimmt mit der Ortskurve in den Figuren 3—13 überein.

Die Doppelkurve der Fläche

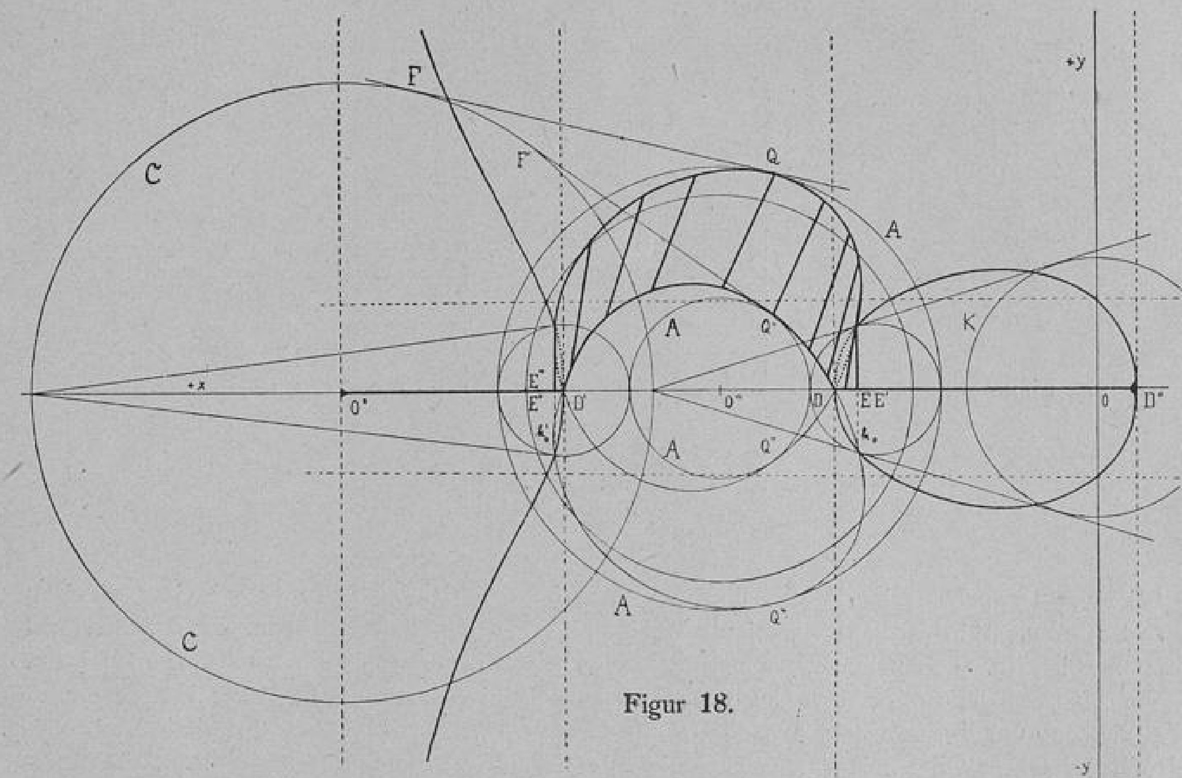
$$\text{ist:}\ \left\{ \begin{array}{c} x\left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\} + 2\,a\,(r^2 - 2\,y^2)^2 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

mithin die Kurve dritter Ordnung $x\,(2\,x - a)^2 + 4\,x\,y^2 - 4\,ay^2 - x\,(3\,r^2 + r_1^2) + 2\,ar^2 = 0$ in der Horizontalebene, welche für $y = 0$ die Gleichung $x\,(2\,x - a)^2 - x\,(3\,r^2 + r_1^2) + 2\,ar^2 = 0$ der Doppelpunkte in Uebereinstimmung mit A, 2 liefert und die Existenz etwaiger isolierter Punkte der Orskurve erklärt. Die Kurve dritter Ordnung lässt sich auch ausdrücken durch $4\,y^2\,(x - a) + \left\{ 4\,x^3 - 4\,ax^2 - (3\,r^2 + r_1^2 - a^2)\,x + 2\,ar^2 \right\} = 0$, welche Form zeigt, dass $x - a = 0$ Wendetangente, ferner dass die Wurzeln der Klammer Punkte auf der x Axe sind, in welchen die Kurve letztere Gerade schneidet und hiebei Tangenten parallel zur y Axe hat; sie kann also in drei Punkten oder aber nur in einem einzigen schneiden. Benutzt man z. B. die Doppelkurve, welche zur Figur 3 gehört, bei welcher $a = 29$, $r = 5$,

$r_1 = 12$ und 3 reelle Schnittpunkte mit der x Axe vorhanden sind, so wird die Gleichung dieser Doppelkurve $y^2 (x - 29) + \{x^3 - 29 x^2 + 155{,}5 x + 362{,}5\} = 0$ oder ungefähr

$$y^2 (x - 29) + (x - 10{,}13)\,(x - 20{,}6)\,(x + 1{,}77) = 0$$

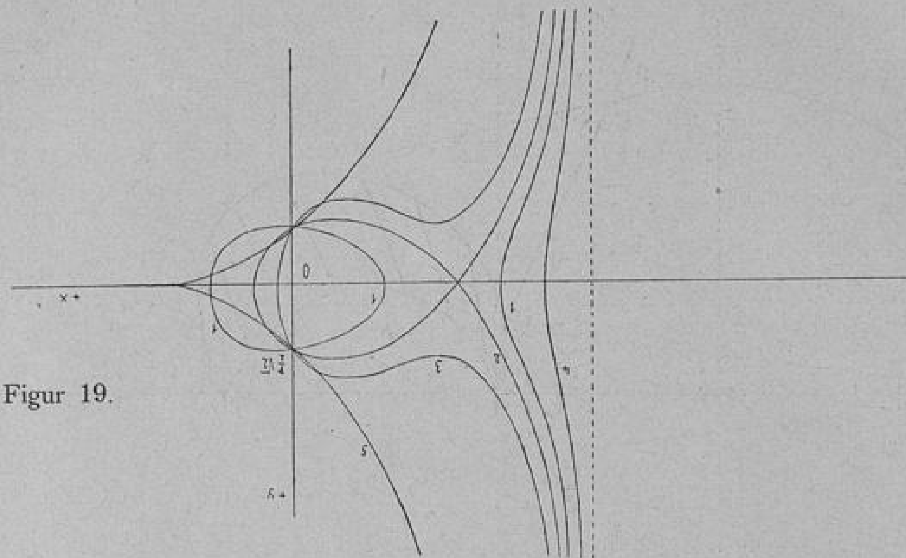
wo $\quad x - 10{,}13 = 0$ D, $\; x - 20{,}6 = 0$ D^1 und $x + 1{,}77 = 0$ D″ entspricht.



Figur 18.

Die Signierung lehrt sofort, dass nur in den Räumen zwischen $x - a = 0$ und $x - 20{,}6 = 0$ einerseits, sowie zwischen $x - 10{,}13 = 0$ und $x + 1{,}77 = 0$ andererseits Kurvenpunkte überhaupt liegen können, und da die Kurve zur x Axe symmetrisch ist, ferner die y Axe stets in den beiden reellen Punkten $y = \pm \frac{r}{2}\sqrt{2}$ treffen muss, so besteht sie aus einem Oval zwischen D und D″, für welches die letzteren Scheitelpunkte sind, und einem zweiten Zweig mit $x - a = 0$ als Wendeasymptote und Scheitel D′, wie in Figur 18; dies wird bestätigt durch $x \left\{ (2x - a)^2 + 4y^2 - (3r^2 + r_1^2) \right\} - 4a \left\{ y + \frac{r}{2}\sqrt{2} \right\} \left\{ y - \frac{r}{2}\sqrt{2} \right\} = 0$, welche mit ihrer Signierung die Kurve durchaus bestimmt.

Als Doppelkurven treten demnach je nach der Anzahl der Schnittpunkte mit der x Axe die unter Figur 19 schematisch gezeichneten bekannten Typen der oben analytisch behandelten Kurven dritter Ordnung auf, welche alle die Wendeasymptote $x - a = 0$ und die Punkte $y \pm \frac{r}{2}\sqrt{2} = 0$ auf der y Axe gemeinsam haben und wenn wieder auf Abschnitt A zurückgegriffen wird, so lässt sich jetzt bei den Figuren 3—13 sofort angeben, welcher Art die zugehörige Doppelkurve ist. Sobald die Ortskurve Q oder also der Vertikalschnitt der erzeugten Fläche sechster Ordnung zwei eigentliche Doppelpunkte aufweist, muss auch ein dritter isolierter Punkt vorhanden sein und die Doppelkurve gehört dem Typus 1 in Figur 19 an.



Figur 19.

Bei einer Doppelwurzel geht dieselbe über in Nro. 2 beziehungsweise 4, bei einer einzigen reellen Wurzel in Nro. 3; dies ist z. B. in Figur 10 der Fall; für eine dreifache Wurzel endlich ist No. 5 zu nehmen, wo natürlich auch r gewisse besondere Werte annehmen kann.

Dass die Doppelkurve auch hier stellenweise isoliert verläuft, ist nach früherem zu schliessen; um ihren Austritt aus der Fläche festzulegen, kann man den geometrisch abgeleiteten Wulst zu Hilfe nehmen, welcher hier die Asymptotenfläche $A\,A^1$ darstellt. Sein Mittelpunkt ist $2x - a = 0$, der erzeugende Meridiankreis hat den Halbmesser $\frac{r}{2}$, daher seine Gleichung

$$A\,A^1\colon \left\{ \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2} - \frac{r_1}{2} \right\}^2 + y^2 - \frac{r^2}{4} = 0 \text{ oder}$$

$$\left[(2x - a)^2 + 4y^2 + 4z^2 + r_1^2 - r^2) \right]^2 - 4r_1^2 \left[(2x - a)^2 + 4z^2 \right] = 0,$$

Für $z = 0$ ergeben sich die beiden Schnittkreise in der Horizontalebene

$$k = (2x - a + r_1)^2 + 4y^2 - r^2 = 0 \text{ und } k^1 = (2x - a - r_1)^2 + 4y^2 - r^2 = 0.$$

Berechnet man auf einfache Weise nach Figur 18 den Radius ϱ des Kreises k_0, welcher senkrecht zur x Axe steht, und auf letzterer seinen Mittelpunkt hat, so folgt

$$\varrho = \frac{r}{2(a - r_1)} \sqrt{(a - r_1)^2 - r^2} \text{ und der Ursprungsabstand}$$

$$x = \frac{(a - r_1)^2 + r^2}{2(a - r_1)} \text{ desgleichen für den Kreis } k_0{}^1$$

$$\varrho_1 = \frac{r}{2(a + r_1)} \sqrt{(a + r_1)^2 - r^2} \text{ und } x_1 = \frac{(a + r_1)^2 + r^2}{2(a + r_1)}.$$

Diese Werte für ϱ und x genügen der Gleichung des Kreises k, wenn hier für ϱ y gesetzt wird, sie befriedigen unter derselben Voraussetzung aber auch die Doppelkurve

$x\left\{(2x-a)^2+4y^2-3r^2-r_1^2\right\}+2a(r^2-2y^2)=0$ und ebenso gilt dies für ϱ_1 und x_1 bezüglich des Kreises k^1, die Doppelkurve liegt also mit ihrem ovalen Zweig auf der Fläche selbst von dem Punkte E bis E', d. h. bis zu den Punkten, in welchen sie den asymptotischen Wulst im Schnitt mit dem Kreise k_0 durchdringt, mit dem zweiten Zweig befindet sie sich auf der Fläche von E'' bis E''', also zwischen den Punkten, wo sie wieder den Wulst im Schnitt mit $k_0{}'$ zugleich durchdringt; ihre übrigen Teile dagegen verlaufen isoliert.

Die Fläche verhält sich demnach sowohl in D wie in D' analog der Ortsfläche, welche für den Fall einer Leitgeraden erhalten würde, nur ist sie in D so eingebogen, dass sie gegen den Ursprung 0 konkav erscheint, während sie in D' gegen 0 hin konvex ist, bei Figur 4 wären aber beide Einbuchtungen nach 0 zu konkav. Die Fläche muss den Asymptotenwulst wieder in den Punkten berühren, wo gemeinschaftliche Tangentialebenen von C und K AA' berühren; solche Punkte sind jedenfalls Q—Q'''', in welchen die gemeinsamen Berührungsebenen parallel zur y Axe, ferner die Punkte E—E''', in welchen die Ebenen parallel zur z Axe liegen. Dass noch weitere Berührungspunkte vorhanden sind, geht daraus hervor, dass C und K eine gemeinsame Developpable haben. Geometrisch ist nun aus Figur 18 ersichtlich, dass von F bis F' die Tangenten des Kreises C die Kugel K schneiden, folglich keine gemeinschaftlichen Ebenen möglich sind, die Punkte Q—Q'''' stellen also äussserste Punkte der Berührungskurve der Fläche mit dem Asymptotenwulst in Beziehung auf die yz Ebene dar. Von F ab treffen die Kreistangenten die Kugel K nicht mehr, hier treten gemeinschaftliche Berührungsebenen auf, so dass eine Berührungskurve der Fläche und des Wulstes von Q'' über E und E' nach Q''' und natürlich auch von Q über E'' und E''' nach Q'''' entsteht, deren analytische Behandlung keine Schwierigkeiten bietet und füglich wegbleiben kann; die Konstruktion in Figur 3 ist ohne weiteres auszuführen. Wie bei der Geraden als Leitkurve existieren auch hier unendlich viele

Doppeltangentialebenen

parallell der y Axe, welche in ihrer Gesamtheit einen Teil des hyperbolischen Berührungscylinders parallel zur y Axe bilden, den die Ebenen der erzeugenden Kreise umhüllen, es wurde dies ja schon bei der Ortskurve in Abschnitt A entwickelt. Innerhalb der Berührungskurve der Fläche mit diesem hyperbolischen Cylinder biegt sich die Fläche sowohl in D sal auch in D' der Doppelkurve zu, ähnlich wie bei der Geraden als Leitkurve.

Noch nicht untersucht wurde die Fläche vierter Ordnung

$$\left\{(2x-a)^2+4y^2+4z^2-3r^2-r_1^2\right\}^2-4a^2(r^2-4y^2)=0,$$

welche die Ortsfläche berührt laut der ursprünglichen Gleichung. Für $y=0$ giebt dieselbe

$$\left\{(2x-a)^2+4z^2-3r^2-r_1^2+2ar\right\}\left\{(2x-a)^2+4z^2-3r^2-r_1^2-2ar\right\}=0,$$

d. h. die beiden Kreise I und II in Abschnitt A, 2. Der Vertikalschnitt dieser Fläche ist also ein zu A A' konzentrischer Ring, so dass sie die Asymptotenfläche nach Umständen noch verengert, hiezu liefert Figur 4 ein Beispiel; eine einfache Rechnung zeigt, dass die Werte

$$x=\frac{(a\pm r_1)^2+r^2}{2(a\pm r_1)} \qquad y=\frac{r}{2(a\pm r_1)}\sqrt{(a\pm r_1)^2-r^2} \qquad z=0,$$

die Fläche ebenfalls befriedigen, dieselbe demnach auch durch die Punkte E, E', E'', E''' geht, in welchen die Doppelkurve den Asymptotenwulst A A' verlässt.

Die Ortsfläche sechster Ordnung berührt nun die obige Fläche vierter Ordnung längs

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\}^2 - 4\,a^2\,(r^2 - 4\,y^2) = 0 \\ x \left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\} + 2\,a\,(r^2 - 2\,y^2) = 0 \end{array}\right\}$$

Ist y beliebig, etwa = k, so folgt aus der Gleichung der Fläche

$$\left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,z^2 - (3\,r^2 + r_1^2 - 4\,k^2) \right\}^2 - 4\,a^2\,(r^2 - 4\,k^2) = 0 \text{ oder}$$

$$\left\{(2x - a)^2 + 4\,z^2 - (3\,r^2 + r_1^2 - 4\,k^2 - 2a\sqrt{r^2 - 4\,k^2})\right\}\left\{(2\,x - a)^2 + 4\,z^2 - (3\,r^2 + r_1^2 - 4\,k^2 + 2a\sqrt{r^2 - 4\,k^2}\right\}$$

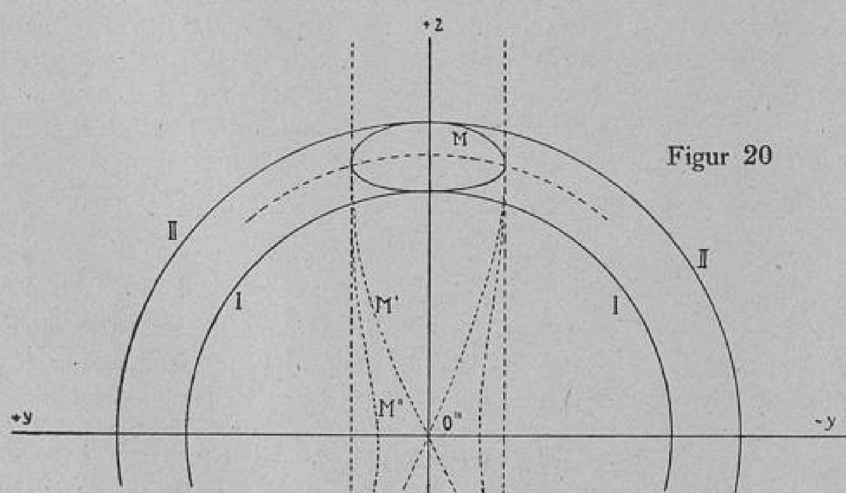
$= 0$; auch die Schnittkurven parallel zur xz Ebene sind ja zwei konzentrische Kreise mit Mittelpunkt auf der Geraden $O''' : z = 0, \quad 2\,x - a = 0$, welche für $r^2 - 4\,k^2 = 0$ oder $k = \pm \frac{r}{2} = y$ sich auf den Kreis $(2\,x - a)^2 + 4\,z^2 - (2\,r^2 + r_1^2) = 0$ zusammenziehen, der seinen Mittelpunkt in der nämlichen Geraden hat. (Figur 4.)

Da auch für $z = 0$ und ebenso für $2\,x - a = 0$ dieselben Figuren entstehen, so ist die Fläche vierter Ordnung eine Rotationsfläche um die Axe $z = 0 \quad 2\,x - a = 0$ mit dem Meridian

$$M = \left\{\begin{array}{c} \left\{ y^2 + z^2 - \frac{3\,r^2 + r_1^2}{4} \right\}^2 - a^2 \left(\frac{r^2}{4} - y^2 \right) = 0 \\ 2\,x - a = 0 \end{array}\right\} \quad \text{oder auch}$$

$$M = \left\{ y^2 + z^2 - \frac{3\,r^2 + r_1^2}{4} \right\}^2 - a^2 \left(y + \frac{r}{2} \right) \left(\frac{r}{2} - y \right) = 0.$$

Aus der letzteren Form ist die Gestalt von M sofort zu ersehen, die Kurve muss zwischen den Parallelen $y = \pm \frac{r}{2}$ liegen und dieselben im Schnitt mit $y^2 + z^2 - \frac{3\,r^2 + r_1^2}{4} = 0$ oder in $z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\,r^2 + r_1^2}$ berühren; vergleiche Figur 20. Die z Axe trifft der Meridian in den Schnittpunkten mit den Kreisen I und II, also hier in 4 Punkten, von diesen können



Figur 20

die zwei Punkte auf I schliesslich nach 0''' rücken oder imaginär werden, falls $3\,r^2 + r_1^2 < 2\,$ar.

Sucht man die Schnittpunkte der Kurve mit der y Axe, so ist

$$y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - \left\{ a \mp \sqrt{a^2 - (2\,r^2 + r_1^2)} \right\}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3\,r^2 + r_1^2 - 2\,a^2 \pm 2\,a \sqrt{a^2 - (2\,r^2 + r_1^2)}}$$

Dieser Ausdruck ergiebt reelle Werte überhaupt nur für $a^2 \geqq 2r^2 + r_1^2$, demnach nur für

$$y = + \frac{1}{2} \sqrt{3\,r^2 + r_1^2 - 2\,a^2 + 2\,a \sqrt{a^2 - (2^2\,r^2 + r_1^2}}$$

weil mit $2a^2 \geqq 4r^2 + 2r_1^2$ der Ausdruck $3r^2 + r_1^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - (2\,r^2 + r_1^2)}$ jedenfalls negativ wäre.

Die Kurve kann die y Axe also nur in zwei Punkten schneiden und hat daher die in Figur 20 aufgeführten Formen M, M′ oder M″.

Die Rotationsfläche von M berührt unter Umständen die Ortsfläche sechster Ordnung, und zwar geschieht dies längs der schon angegebenen Kurve

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\}^2 - 4\,a^2 (r^2 - 4\,y^2) = 0 \\ x \left\{ (2\,x - a)^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 - 3\,r^2 - r_1^2 \right\} + 2\,a\,(r^2 - 2\,y^2) = 0 \end{array} \right\}$$

deren Horizontalprojektion $x^2\,(r^2 - 4\,y^2) - (r^2 - 2\,y^2)^2 = 0$ oder

$$x^2\,(r + 2\,y)\,(r - 2\,y) - (r + y\sqrt{2})\,(r - y\sqrt{2}) = 0 \text{ ist;}$$

$r \pm 2y =$ sind Asymptoten, $r \pm y\sqrt{2} = 0$ isolierte Punkte auf der y Axe, durch welche die Doppelkurve der Ortsfläche bekanntlich auch geht u. s. w.; siehe Figur 4.

Nimmt also die Rotationsfläche an der Einschliessung der Ortsfläche teil, was ja nach früherem stattfindet, wenn K ganz innerhalb C oder C noch schneidet, beziehungsweise berührt, so tritt an Stelle des nun entweder ganz oder wenigstens teilweise ausserhalb der Ortsfläche liegenden Kurve der Berührungspunkte des Asymptotenwulstes mit den gemeinschaftlichen Tangentialebenen von C und K ganz oder teilweise die eben besprochene Berührungskurve mit der Fläche vierter Ordnung, welche natürlich auch die Punkte E E′ E″ E‴ enthält und in S S′ S″ S‴ ihre Scheitel hat für $x = \pm r$ (Figur 4); die einzelnen Fälle sind den Skizzen 4—11 zu entnehmen; besonders interessant ist Nr. 5, bei welcher sowohl der Asymptotenwulst eine Berührungskurve von Q über E″ und E‴ nach Q⁴ als auch die Drehfläche eine solche von S″ über die nämlichen Punkte E″ und E‴ nach S‴ aufweist.

Aus all diesem geht nun jedenfalls unter Zuhilfenahme der Fläche 1, wo C eine Gerade, die Gestalt der Fläche sechster Ordnung bis in die Einzelheiten hervor; für die Vorstellung ist es am einfachsten, sie aus der Asymptotenfläche, also hier aus dem Wulst A A′ abzuleiten, und zwar dadurch, dass letzterer an den Endpunkten eines Durchmessers je zu einem Zweig der Doppelkurve zusammmengedrückt wird, welche von ihrem Austritt aus dem Wulst an isoliert verläuft; Figur 18 mag dies veranschaulichen, in welcher der halbe Vertikalumriss der Fläche mit den erzeugenden Kreisen gezeichnet wurde.

Wenngleich von einer Behandlung der verschiedenen Fälle für einen Kreis oder allgemeinen Kegelschnitt als Leitkurve Abstand genommen werden muss, so lässt sich nun doch nach dem bisher Entwickelten auf das Verhalten der Flächen schliessen, die entstehen, wenn

3. C eine allgemeine ebene Kurve,

welche in ihrer Ebene auch den Mittelpunkt 0 der Grundkugel enthält. Die Doppelkurve der hier auftretenden Ortsfläche geht durch jeden Doppelpunkt der im Abschnitt A behandelten Kurve Q, als Kurve höherer Ordnung kann sie möglicherweise auch in mehrere einzelne

Zweige zerfallen. Weiter ist diese Doppelkurve entweder mit einzelnen Teilen oder auch ihrem ganzen Verlauf nach isoliert, was z. B. für eine gerade Leitlinie C eintrat mit $a = 0$. Die Fläche selbst samt den jeweilig auf ihr liegenden Teilen der Doppelkurve kann durch Zusammendrücken der asymptotischen Röhrenfläche in der Nähe des betreffenden Doppelpunkts erzeugt gedacht werden; sie berührt die Asymptotenfläche stets in dem Austrittspunkt E der Doppelkurve aus der Röhrenfläche. Letztere wird auch noch in allen denjenigen Punkten oder Kurven berührt, in welchen gemeinschaftliche Tangentialebenen von C und K oder die beiden umschriebene gemeinsame Developpable die asymptotische Röhrenfläche berühren, wenn nicht wie bei 4 noch engere Umgrenzungen Platz greifen. Alsdann wird nämlich die Röhrenfläche noch weiter eingeengt durch eine, soweit sie an der Einschliessung der Fläche Q beteiligt ist, innerhalb der Röhrenfläche liegende Fläche, welche mit ihr und der Ortsfläche Q die Durchdringungspunkte E der Doppelkurve gemeinsam hat, mit den Q nicht umgrenzenden Partien aber auch ausserhalb der Röhrenfläche sich erstrecken kann. Die Entscheidung darüber, ob die Röhrenfläche oder eine dieselbe noch verengernde Fläche als hauptsächlichste Begrenzung für irgend einen Punkt E erscheint, wurde für eine kreisförmige Leitlinie unter Benützung von A, 2 getroffen; im allgemeinen Fall muss der Verlauf der Kurve C sowie ihre Lage zur Kugel K in der Umgebung derjenigen Punkte betrachtet werden, durch welche Doppelpunkte der Ortskurve entstehen.

Die Doppeltangentialebenen bilden einen Teil des Cylinders, welcher von der Ebene der erzeugenden Kreise umhüllt wird. Er berührt die Fläche im Austrittspunkt der Doppelkurve aus der asymptotischen Röhrenfläche, weiterhin längs einer durch diese Punkte gehenden Kurve, innerhalb welcher die Fläche sich zu der Doppelkurve hinbiegt, wie bei Fläche 1.

In ähnlicher Weise liessen sich die allgemeinen Untersuchungen auf besondere Punkte von C ausdehnen, dann auf beliebige Lagen der Ebenen von C und endlich auch auf doppelt gekrümmte C, stets wird durch die erzeugenden Kreise und ihren Bildkreis auf der Grundkugel zwischen dieser und der Ortsfläche eine Korrespondenz hergestellt, welche bei Fläche 1 wenigstens kurze Erwähnung fand.

Beziehungen der Ortsfläche zu den anallagmatischen Flächen und den surfaces moulures von Monge.

Moutard und Laguerre nennen die Enveloppe aller Kugeln, welche eine feste Kugel orthogonal schneiden, während die Mittelpunkte eine Kurve oder Fläche erfüllen, die annallagmatische Fläche der betreffenden Kurve oder Fläche. So ist z. B. die anallagmatische Fläche einer Geraden ein zur festen Kugel senkrechter Kreis, auf dessen Ebene die Gerade im Mittelpunkt senkrecht steht; die Kreisebene geht überdies durch den Mittelpunkt der festen Kugel. Die anallagmatische Fläche einer Ebene zerfällt in zwei Punkte; diejenige irgend einer Kurve C ist der Ort der anallagmatischen Kreise K der Kurventangenten t. Aus diesen Erklärungen geht hervor, dass die Ebenen sämtlicher erzeugender Kreise der anallagmatischen Fläche irgend einer ebenen oder räumlichen Kurve C den Mittelpunkt 0 der gegebenen Kugel umhüllen, welche immer orthogonal geschnitten werden soll; unsere Flächen sind demnach keine annallagmatischen Flächen (mit Ausnahme derjenigen, bei welchen die Kreisebenen parallel sind, so z. B. die Rotationsfläche bei einer geraden Leitlinie, welche durch 0 selbst geht); sie reduzieren sich jedoch auf solche Flächen, wenn die von den Kreisebenen umhüllte Entwickelbare auf einen Punkt beziehungsweise eine Gerade zusammenschrumpft.

Entsteht durch die verschiedenen Lagen der Ebene einer unveränderlichen Kurve C eine abwickelbare Fläche, so erzeugt C nach Monge eine surface moulure. (cf. Monge, application de l'analyse à la géom, und zwar de la surface, dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque.) Unsere Flächen kann man nun als erweiterte Windmühlenflächen betrachten, indem sowohl C als auch die Lage derselben in der beweglichen Ebene veränderlich. Die Trajektorie eines Punktes der Kurve C steht hier nicht mehr senkrecht zu der Kurvenebene und die Normalen der Fläche hüllen im allgemeinen keine entwickelbare Fläche mehr ein.

II. Ueber Flächen, welche durch allgemeine Kegelschnitte erzeugt werden.

A. Vorbetrachtungen in der Ebene.

Wie mit K in Abschnitt I, A geschehen, lassen sich jetzt auch statt des Kreises beliebige Kegelschnitte behandeln, und man wird wieder eine Ortskurve Q erhalten, die für eine Ellipse als Grundfigur nicht allzusehr von derjenigen abweicht, welche aus dem Kreise hervorging und die deshalb nicht weiter besprochen werden soll. Ganz anders verhält es sich jedoch mit der Parabel und insbesondere mit der Hyperbel; letztere möge daher für II herausgegriffen werden. Ist beispielsweise

C eine Gerade parallel zu einem imaginären Durchmesser der Hyperbel,

so zeigt Figur 21 sofort, dass die zur Grundkurve H ähnliche Hyperbel H' mit den halben Dimensionen der vorigen wieder eine Asymptotenfläche A A' einhüllt, innerhalb welcher keine Kurvenpunkte liegen, von etwaigen isolierten Punkten abgesehen. Die Mittelpunkte der Hyperbeln H' bewegen sich auf der Geraden C', welche den Abstand von A A' halbiert und zu diesen Geraden parallel ist. A und A' entsprechen den zu C parallelen Tangenten t und t von H. Sämtliche Hyperpeln H' haben Asymptoten parallel zu denen von H, die Ortskurve Q wird also die von H ebenfalls besitzen, und aus der Art und Weise, wie sie von einer ihrer vier Asymptoten sich der andern nähern muss, kann gefolgert werden, dass zwei Doppelpunkte D und D' auftreten, wenn C die Grundhyperbel nicht schneidet, während beim Schnitt mit einem Zweig von H der dem getroffenen Zweig zukommende Doppelpunkt wegfällt oder in einen isolierten Punkt ausartet.

Die Doppelpunkte sind natürlich bezüglich einer beliebigen Geraden C nicht auf den Axen zu suchen, doch hängen sie jedenfalls in ganz bestimmter Weise von der Lage der C ab; dasselbe gilt von der Umhüllung sämtlicher Sehnen Q Q'.

Für die allgemeine **analytische Behandlung**

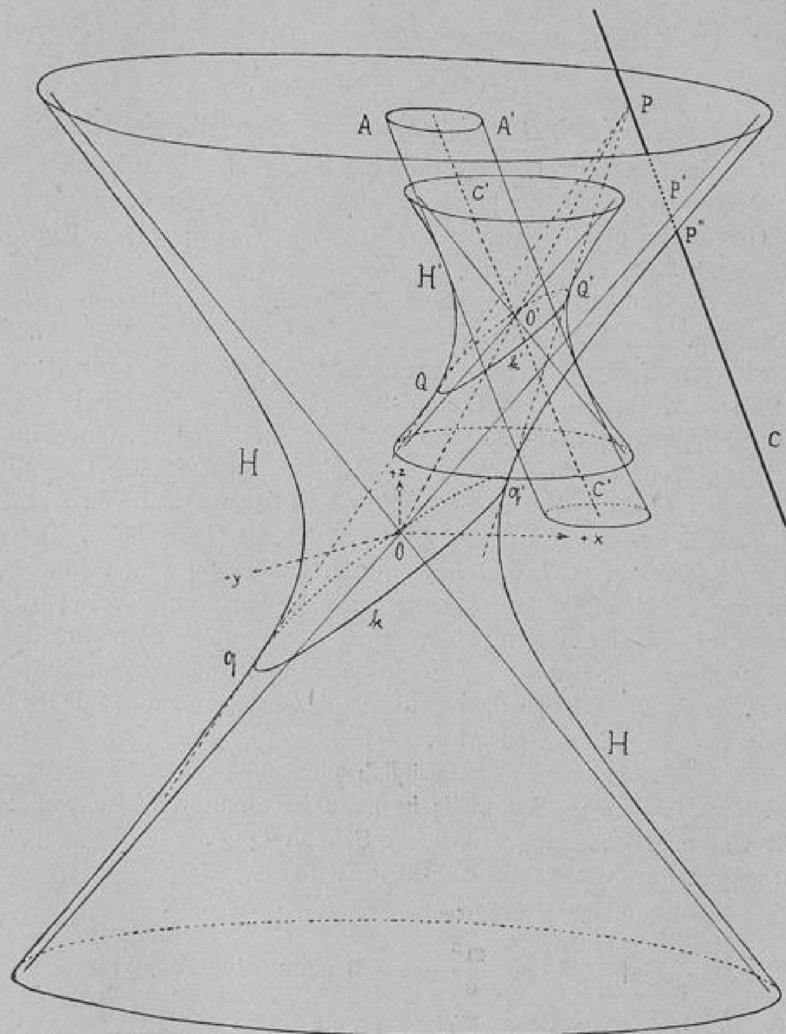
ergiebt sich sofort das räumliche System:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ einm. Hyperboloid} \\ \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} - \frac{z z_1}{c^2} - 1 = 0 \\ 2\,x = x_1 + x_2 \quad 2\,y = y_1 + y_2 \quad 2\,z = z_1 + z_2 \\ f_m\,(x_2\,y_2\,z_2) = 0 \qquad G_n\,(x_2\,y_2\,z_2) = 0 \end{array}\right\}$$

und wenn C eine ebene Kurve in der x z Ebene:

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0 \\
\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} - 1 = 0 \\
2\,x = x_1 + x_2 \quad 2\,y = y_1 + y_2 \quad 2\,z = z_1 + z_2 \\
f_m\ (x_2\, z_2) = 0
\end{array}\right\}$$

woraus nach einigen Umformungen:



Figur 21.

$$x_1 = \frac{-(b^2-2y^2)\,a^2c^2x^2 \pm a^2z\sqrt{b^2(b^2-4y^2)\,(a^2z^2-c^2x^2)+a^2c^2(b^2-2y^2)^2}}{b^2(a^2z^2-c^2x^2)} \quad \text{oder}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a^2}{b^2}\,\dfrac{-(b^2-2y^2)\,c^2x \pm z\sqrt{b^2(b^2-4y^2)\,(a^2z^2-c^2x^2)+a^2c^2(b^2-2y^2)^2}}{a^2z^2-c^2x^2} \quad \text{und ebenso} \\ z_1 = \dfrac{c^2}{b^2}\,\dfrac{-(b^2-2y^2)\,a^2z \pm x\sqrt{b^2(b^2-4y^2)\,(a^2z^2-c^2x^2)+a^2c^2(b^2-2y^2)^2}}{a^2z^2-c^2x^2} \\ \text{unter Zuhilfenahme von} \\ \qquad fm\,(x_2\,z_2) = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 2x - x_1 \quad z_2 = 2z - z_1 \end{array}\right\}$$

ist also damit im einfachsten Fall die Gleichung der später zu besprechenden Fläche bestimmt. Geht man wieder in die Ebene zurück, so folgt mit $y = 0$ und y statt z

$$x_1 = \frac{a^2}{a^2y^2-c^2x^2}\left\{-c^2x \pm y\sqrt{a^2y^2-c^2x^2+a^2c^2}\right\}$$

$$y_1 = \frac{c^2}{a^2y^2-c^2x^2}\left\{-a^2y \pm x\sqrt{a^2y^2-c^2x^2+a^2c^2}\right\} \quad \text{und demnach}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = 2x - x_1 = \dfrac{1}{a^2y^2-c^2x^2}\left\{2x(a^2y^2-c^2x^2)+a^2c^2x \mp c^2y\sqrt{a^2y^2-c^2x^2+a^2c^2}\right\} \\ y_2 = 2y - y_1 = \dfrac{1}{a^2y^2-c^2x^2}\left\{2y(a^2y^2-c^2x^2)+a^2c^2y \mp c^2x\sqrt{a^2y^2-c^2x^2+a^2c^2}\right\} \\ \qquad\qquad f\,(x_2\,y_2) = 0 \end{array}\right\}$$

zur Aufstellung der Ortskurve Q; für $a^2 = -c^2 = r^2$ vergleiche Abschnitt A, 2. Falls nun

C eine beliebige Gerade

$$f\,(x_2\,y_2) = \frac{x_2}{p} + \frac{y_2}{q} - 1 = 0,$$

dann hat man:

$$\left[(a^2y^2-c^2x^2)\,(2qx+2py-pq)+a^2c^2(qx+py)\right]^2 - (a^2qy+c^2px)^2\,(a^2y^2-c^2x^2+a^2c^2)$$

$= 0$ ausquadriert:

$$(a^2y^2-c^2x^2)^2(2qx+2py-pq)^2 + 2a^2c^2(qx+py)\,(a^2y^2-c^2x^2)\,(2qx+2py-pq)$$
$$+a^4c^4(qx+py)^2-(a^2qy+c^2px)^2(a^2y^2-c^2x^2)-a^2c^2(a^2qy+c^2px)^2 = 0$$

und da $a^4c^4(qx+py)^2 - a^2c^2(a^2qy+c^2px)^2 = a^2c^2(c^2p^2-a^2q^2)\,(a^2y^2-c^2x^2)$ so kann mit dem Faktor $a^2y^2-c^2x^2$ gehoben werden, daher bleibt als Gleichung der Ortskurve $(a^2y^2-c^2x^2)\,(2qx+2py-pq)^2+2a^2c^2(qx+py)\,(2qx+2py-pq)-(a^2qy+c^2px)^2$ $+a^2c^2(c^2p^2-a^2q^2) = 0$, welche sich noch auf die Form bringen lässt.

$$a^2\left\{y(2qx+2py-pq)+c^2p\right\}^2 - c^2\left\{x(2qx+2py-pq)-a^2q\right\}^2 - \left\{a^2qy+c^2px\right\}^2 = 0,$$

oder auch auf

$$\left[(2qx+2py-pq)\,(ay+cx)+ac(pc-aq)\right]\cdot\left[(2qx+2py-pq)\,(ay-cx)+ac\,(pc+aq)\right] -$$
$$-\left\{a^2qy+c^2px\right\}^2 = 0.$$

Setze $\qquad a\,qy + c\,px = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\dfrac{c^2\,p}{a^2\,q}\,x$

so wird nach geeigneten Umrechnungen

$$\left[\;\right]\cdot\left[\;\right] = -\frac{c^2(a^2q^2-c^2p^2)}{a^6\,q^4}\left[(2\,a^2\,q^2x-2\,c^2p^2x-a^2\,p\,q^2)\,x-a^4\,q^2\right]^2 = 0,$$

d. h. die Schnittpunkte von $a^2\,qy + c^2\,px = 0$ mit der Kurve sind

Doppelpunkte

der letzteren. Weil nun die Grundhyperbel die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ besitzt, so geht hieraus hervor, dass $a^2\,qy + c^2\,py = 0$ den zu der Richtung $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 0$ unserer Leitgeraden C zugeordneten Durchmesser darstellt, wie dies geometrisch nach Analogie mit dem Kreis als Grundkurve zu vermuten war, desgleichen sind aus den Gleichungen der Kurve die Asymptotenrichtungen $(a^2\,y^2 - c^2\,x^2)\,(qx + py)$ zu erkennen usw. (Figur 22). Eine eingehendere Diskussion der allgemeinen Kurve ist jedoch nicht nötig, da bekanntlich die Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf konjugierte Durchmesser X und Y als Axen

$$\frac{X^2}{\dfrac{1}{\dfrac{\cos^2\delta}{a^2} - \dfrac{\sin^2\delta}{c^2}}} - \frac{Y^2}{\dfrac{1}{\dfrac{\cos^2\delta_1}{c^2} - \dfrac{\sin^2 d_1}{a^2}}} - 1 = 0$$

wenn δ der Winkel der neuen x Axe mit der alten und δ_1 derjenige der neuen y Axe mit der ursprünglichen, im nämlichen Drehsinn gezählt, wozu allerdings noch die Bedingung kommt:

$$\frac{\cos\,\delta\quad\sin\,\delta_1}{a_2} + \frac{\sin\,\delta\,\cos\,\delta_1}{c_2} = 0.$$

Führt man ein solches konjugiertes Axensystem X Y ein, so wird die Gleichung der Leitgeraden $\quad X = \text{Const}\quad$ oder auch $\quad Y = \text{Const}$
je nachdem C parallel zu einem imaginären oder reellen Durchmesser der Grundhyperbel und alle Eigenschaften der Kurve, welche hier von Interesse sind, können aus $x_2\,(y_2) = p$ für rechtwinklige Axen leicht übertragen werden.

Um aus

$$a^2\,[y(2\,qx+2\,py-pq)+pc^2]^2 - c^2[x(2\,qx+2\,py-pq)-a^2\,q]^2 - \{a^2qy+c^2px\}^2 = 0$$

den obigen einfachen Fall abzuleiten, nehme $q = \infty$, also ist damit zu dividieren, dann erhält man nach einigen Umformungen für eine Gerade C parallel der x Axe im rechtwinkligen System die Gleichung der Ortskurve

$$c^2\left[\left(x-\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{p^2+8\,a^2}{16}\right]^2 - a^2\,y^2\left[\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right] = 0,$$

welche auch geschrieben werden kann.

$$c^2\left[(x-\frac{p}{4})^2 - \frac{a^2}{2\,c^2}\,y^2 - \frac{p^2+8\,a^2}{16}\right]^2 - \frac{a^2\,y^2}{4}\left[\frac{a^2\,y^2}{c^2} - 2\,px + a^2 + p^2\right] = 0.$$

Diese Gleichungen liefern die Doppelpunkte D und D′ auf der x Axe, nämlich

$$\left\{\begin{array}{r}(x-\frac{p}{4})^2 - \dfrac{p^2+8\,a^2}{16} = 0\\ y = 0\end{array}\right\}\;\text{oder}\;\left\{\begin{array}{c}x = \dfrac{p^2 \pm \sqrt{p^2+8\,a^2}}{4}\\ y = 0\end{array}\right\}$$

welche stets reellen Punkten der x Axe entsprechen; wenn also nur ein eigentlicher Doppelpunkt D der Ortskurve entsteht, so wird D′ zu einem isolierten Punkt.

$$c^2\left[\left(x-\frac{p}{4}\right)^2-\frac{p^2+8a^2}{16}\right]^2-a^2y^2\left(x-\frac{a+p}{2}\right)\left(x+\frac{a-p}{2}\right)=0$$

zeigt die beiden schon geometrisch nachgewiesenen Asymptoten

$$x-\frac{a+p}{2}=0 \text{ und } x+\frac{a-p}{2}=0$$

parallel der y Axe, während die der Hyperbel gemeinsamen ja genügend bekannt sind. Die zweite Form der Q erlaubt weiter den Schluss, dass die Ortskurve die zur x Axe symmetrische Parabel

$$p_0=\frac{a^2\,y^2}{c^2}-2\,px+a^2+p^2=0$$

berührt und zwar im Schnitt mit der Hyperbel $\left(x-\frac{p}{4}\right)^2-\frac{a^2}{2\,c^2}y^2-\frac{p^2+8\,a^2}{16}=0$

oder in den Punkten $x=\frac{3}{4}p\pm\frac{1}{4}\;p=\begin{cases}p\\ \frac{p}{2}\end{cases}$

d. h. jedenfalls in denjenigen Punkten, in welchen die Gerade C nach Umständen die Grundhyperbel schneidet; bei Figur 22 sind diese Berührungspunkte imaginär. Die Parabel ist wiederum die Umhüllung aller Sehnen Q Q' der Hyperbeln H', was schon geometrisch zu folgern. Liegt die Gerade C schief zu den Axen der Grundhyperbel, so ist man jetzt auch in den Stand gesetzt, näheres über die Umhüllungsparabel anzugeben, denn nach Analogie muss im konjugierten System D D' ein Durchmesser derselben sein und die Tangente im Schnitt der Parabel mit D D' oder kurz in ihrem Scheitel ist parallel der Geraden C oder der neuen y Axe. Damit erledigt sich für die allgemeine Kurve Q alles hier zu Entwickelnde, doch sollen noch einige

besondere Fälle der Ortskurve

erwähnt werden.

Wird $p=0$, d. h. die Gerade C die y Axe, so reduziert sich die Kurve auf die neue

$$c^2\left[x^2-\frac{a^2}{2}\right]^2-a^2y^2\left[x^2-\frac{a^2}{4}\right]=0$$

symmetrisch zur x und y Axe, die Parabel auf $y^2+a^2=0$, denn die Sehnen Q Q' laufen alle der x Axe parallel.

Für $p>a$ schneidet die Gerade C die Grundhyperbel, und es erscheint nur ein eigentlicher Doppelpunkt. Ist $p=a$, so fällt eine Asymptote in die y Axe, die andere in die Gerade C, und da letztere auch Bestandteil der Kurve selbst, so artet Q aus in C und eine Kurve dritter Ordnung, im Punkt D' berührt die Gerade C die C_3 und bildet auf diese Weise den zweiten Doppelpunkt. Aus der allgemeinen Kurvengleichung folgt noch mit $p=a$

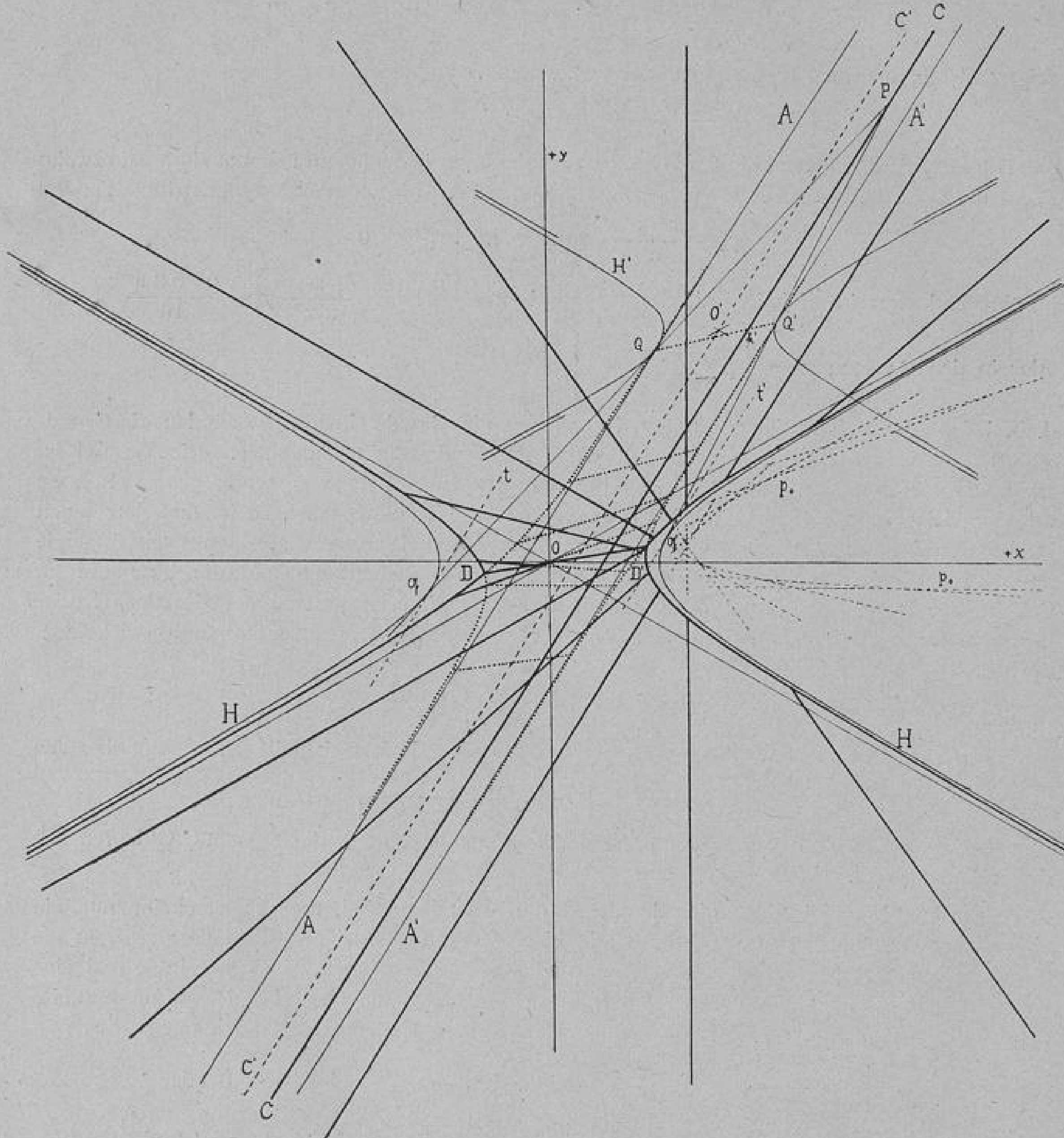
$$c^2\left[\left(x-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{9\,a^2}{16}\right]^2-a^2y^2\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\right]=0 \text{ oder}$$

$$c^2\left[\left(x+\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{2\,c^2}y^2-\frac{9}{16}a^2\right]^2-\frac{a^2\,y^2}{4}\left[\frac{a^2}{c^2}y^2-2\,ax+2\,a^2\right]=0$$

d. h. der Doppelpunkt $x=a$ und ebenso $x=-\frac{a}{2}$; ferner aus der ersten Gleichung

$$c^2\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x-a\right)\right]^2-a^2\,x\,y^2\,(x-a)=0,$$

demnach $x-a=0$ Bestandteil der Kurve, wie schon gesagt. Bezüglich des Berührungspunktes



Figur 22.

der Parabel p_0 oder $\frac{a^2}{c^2}\,y^2-2a(x-a)=0$ entnimmt man aus der zweiten Kurvengleichung

$$\left(x-\frac{a}{4}\right)^2-a\,(x-a)-\frac{9}{16}\,a^2=x^2-\frac{3}{2}\,ax+\frac{a^2}{2}=0,$$

mithin $$x=\begin{cases} a \\ \frac{a}{2} \end{cases}$$ von welchen Punkten

$x=\frac{a}{2}$ imaginärer Art, der erste aber der Berührungspunkt im Punkt D' usw.

B. Untersuchungen im Raum.

Legt man (Figur 21) von irgend einem Punkt P einer Kurve C im Raum den Berührungskegel an das Hyperboloid und zwar zunächst an das einmantelige, dessen Mittelpunkt wieder im Ursprung und dessen Axen die Coordinatenaxen sein mögen, so berührt der Kegel das Hyperboloid H jedenfalls nach einem Kegelschnitt und zwar nach einer Ellipse, wenn P innerhalb des Asymptotenkegels liegt. Rückt P' auf letzteren, so ist die Berührungslinie eine Parabel, ausserhalb des Asymptotenkegels entsteht eine Hyperbel, und auf der Fläche selbst zerfällt diese in die beiden Geraden, nach welchen die Berührungsebene das Hyperboloid schneidet. Halbiert man alle Mantellinien des Kegels, so bestimmen die Mittelpunkte einen zu dem erstgenannten ähnlichen Kegelschnitt mit den halben Axen, etwa k' in Figur 21. Dieser Kegelschnitt k' befindet sich auf einem zu H ähnlichen Hyperboloid H' mit den halben Axen von H, und zwar stellt k' die Berührungskurve von H' mit dem Kegel P dar. Bewegt sich der Punkt P auf der Kurve C, so beschreibt 0' wieder die zu C ähnliche Mittelkurve C', die Hyperboloide H' hüllen eine mehr oder weniger komplizierte Fläche A A' ein und der Kegelschnitt k' auf denselben liefert eine Fläche, welche die Umhüllungsfläche A A' zur Asymptotenfläche hat; ist z. B. C eine beliebige Gerade, so muss sich als Asymptotenfläche ein Cylinder parallel zu C ergeben, Figur 21. Die Ebenen der verschiedenen Kegelschnitte gehören wiederum einer abwickelbaren Fläche an, welche unter Umständen die Fläche der k' berührt. Figur 22 stellt die so entstandene Ortsfläche mittelst der erzeugenden Kegelschnitte dar, wenn die Gerade

C in der vertikalen Hauptebene des Grundhyperboloids

parallel zu einem imaginären Durchmesser desselben angenommen wird und dürfte nach dem Vorausgegangenen wohl verständlich sein. Die Ebenen der k' hüllen den parabolischen Cylinder p_0 ein, der ganz ausserhalb der Fläche gelegen ist, die Doppelkurve DD^1 verläuft auf der Fläche selbst und die Durchdringspunkte E und E' werden imaginär. Von der Doppelkurve aus schmiegt sich der innere Flächenmantel sehr bald an den Asymptotencylinder an, dieser Teil der Ortsfläche wird von lauter Ellipsen gebildet. Jenseits der Doppelkurve dehnt sich die Fläche aus, wird zuerst noch von den über die Doppelkurve hinausreichenden Ellipsen begrenzt, dann von der Parabel, deren Ebene der Asymptote parallel ist und hierauf von Hyperbeln. Mit letzteren strebt sie so ins Unendliche, dass sie den unendlich fernen Kegelschnitt des Hyperboloids oder seines Asymptotenkegels enthält u. s. w.

Auch hier können nun für andere Leitlinien als eine Gerade allgemeine Sätze und Eigenschaften der entstandenen Flächen entwickelt werden, wie in Abschnitt I, B bezüglich der Flächen mit kreisförmigen Erzeugenden, ebenso lässt sich dann das zweimantelige Hyperboloid untersuchen, doch würde all dieses über den Rahmen vorliegender Abhandlung hinausgehen und wird aber an anderen Orten noch weitere Bearbeitung finden.

der Parabel p_0 oder $\frac{a^2}{c^2}\, y^2 - 2a(x-a) = ($ … vengleichung

$$\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 - a\,(x - a)$$

mithin $x' = \begin{cases} a \\ a \\ \frac{a}{2} \end{cases}$

$x = \frac{a}{2}$ imaginärer Art, der erste aber der

B. Untersuch

Legt man (Figur 21) von irgend … Raum den
Berührungskegel an das Hyperboloid und z… essen Mittel-
punkt wieder im Ursprung und dessen Axe… so berührt
der Kegel das Hyperboloid H jedenfalls … nach einer
Ellipse, wenn P innerhalb des Asymptoter… n, so ist die
Berührungslinie eine Parabel, ausserhalb d… Hyperbel, und
auf der Fläche selbst zerfällt diese in die … ührungsebene
das Hyperboloid schneidet. Halbiert man … estimmen die
Mittelpunkte einen zu dem erstgenannten … n Axen, etwa
k' in Figur 21. Dieser Kegelschnitt k' be… Hyperboloid
H' mit den halben Axen von H, und zwa… H' mit dem
Kegel P dar. Bewegt sich der Punkt P a… eder die zu C
ähnliche Mittelkurve C', die Hyperboloide… r komplizierte
Fläche A A' ein und der Kegelschnitt k' … lche die Um-
hüllungsfläche A A' zur Asymptotenfläche … rade, so muss
sich als Asymptotenfläche ein Cylinder p… e Ebenen der
verschiedenen Kegelschnitte gehören wiede… , welche unter
Umständen die Fläche der k' berührt. Fi… sfläche mittelst
der erzeugenden Kegelschnitte dar, wenn …

C in der vertikalen Hau… s

parallel zu einem imaginären Durchmesser … irfte nach dem
Vorausgegangenen wohl verständlich sein … parabolischen
Cylinder p_0 ein, der ganz ausserhalb der F… D¹ verläuft auf
der Fläche selbst und die Durchdringspun… on der Doppel-
kurve aus schmiegt sich der innere Fl… nptotencylinder
an, dieser Teil der Ortsfläche wird von l… r Doppelkurve
dehnt sich die Fläche aus, wird zuerst n… inausreichenden
Ellipsen begrenzt, dann von der Parabel, … ist und hierauf
von Hyperbeln. Mit letzteren strebt sie … nendlich fernen
Kegelschnitt des Hyperboloids oder seine…

Auch hier können nun für ande… eine Sätze und
Eigenschaften der entstandenen Flächen … t I, B bezüglich
der Flächen mit kreisförmigen Erzeuge… s zweimantelige
Hyperboloid untersuchen, doch würde al… der Abhandlung
hinausgehen und wird aher an anderen Orten noch weitere Bearbeitung finden.