Die Ellipse.

1. **Definition.** Die Ellipse ist der geometrische Ort eines Punktes, für den die Summe seiner Entfernungen von zwei festen Punkten einer gegebenen Strecke gleich ist.

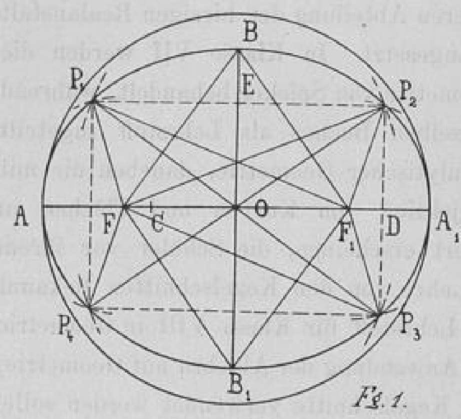


Fig. 1.

Konstruktion (Fadenkonstruktion). Gegeben seien die festen Punkte F und F_1, sowie eine Strecke $2a > FF_1$. Halbiere Strecke FF_1 in O und trage auf FF_1 von O nach beiden Seiten die Stücke $OA = OA_1 = a$ ab. Nehme auf Strecke FF_1 Punkt C beliebig an. Beschreibe um F einen Kreis mit Radius $= AC$, um F_1 einen Kreis mit Radius $= A_1C$, so sind die Schnittpunkte P_1 und P_4 beider Kreise Punkte des Ortes. ($FP_1 + F_1P_1 = AC + A_1C = 2a$.) Durch Vertauschung der Radien ergeben sich die weiteren Punkte P_2 und P_3. Andere Annahmen des Punktes C liefern beliebig viele Kurvenpunkte.

Lage des Punktes C. Punkt C darf nur zwischen F und F_1, mit den Grenzlagen F oder F_1 angenommen werden. Für irgend eine Lage des Punktes C auf Strecke AA_1 (eine Lage auf der Verlängerung dieser Strecke ist von vornherein ausgeschlossen) ist nämlich stets

$$\begin{aligned} AC + A_1C &= 2a \\ \text{und } A_1C - AC &= (A_1O + CO) - (AO - CO) \\ &= 2CO \end{aligned}$$

Liegt nun C zwischen F und F_1, so ist der Zentralabstand FF_1 der beiden Konstruktionskreise $> 2CO$, also grösser als die Differenz ihrer Radien, somit ergeben sich 2 Schnittpunkte (Spieker § 122). Fällt C nach F, bezw. F_1, so ist $FF_1 = 2CO$, die Kreise berühren also einander in A oder A_1, und zwar von innen. Liegt endlich C ausserhalb der Strecke FF_1, so ist $FF_1 < 2CO$, die Kreise liefern demnach keine Schnittpunkte. — Fällt C nach O, so ergiebt die Konstruktion statt 4 nur die 2 Punkte B und B_1.

Bezeichnungen. Die beiden festen Punkte heissen Brennpunkte, ihre Verbindungslinien mit Kurvenpunkten Brennstrahlen; zu jedem Kurvenpunkte gehören 2 Brennstrahlen (Brennstrahl und Ergänzungsstrahl). Die Punkte A und A_1, B und B_1 heissen Scheitel; AA_1 wird als Hauptachse, BB_1 als Nebenachse bezeichnet; der Abstand eines Brennpunkts von O heisst lineare Excentrizität. Dabei werden die Längen $BB_1 = 2b$, $FF_1 = 2e$ gesetzt.

2. **Folgerungen.** 1) Die Achsen AA_1 und BB_1 liegen senkrecht zu einander und sind Symmetrallinien der Ellipse. ($\triangle\, FBF_1$ und $\triangle\, FB_1F_1$ sind gleichschenklig, also $BB_1 \perp AA_1$. Aus $\triangle\, FP_2F_1 \cong FP_3F_1$ folgt $P_2P_3 \perp AA_1$ und $P_2D = P_3D$. Entsprechend ergiebt sich $P_1P_2 \perp BB_1$ und $P_1E = P_2E$.)

2) Die Ellipse wird durch die Achsen in 4 kongruente und paarweise gegen eine Achse symmetrisch liegende Stücke zerlegt.

3) Jede durch O gehende Sehne wird in O halbiert: Punkt O ist damit Mittelpunkt, jede solche Sehne ein Durchmesser der Ellipse. ($P_1P_2P_3P_4$ ist ein Rechteck, O als Schnittpunkt zweier Mittellinien sein Mittelpunkt. P_1P_3 und P_2P_4 schneiden einander in O und werden darin halbiert.)

4) Von sämtlichen Durchmessern hat die Hauptachse die grösste Länge.

$$(P_2P_4 < FP_2 + FP_4 < FP_2 + F_1P_2 < 2a.)$$

5) Ein um O mit Radius = a beschriebener Kreis (Scheitelkreis) schliesst die Ellipse vollständig ein. Die Ellipse hat nur im Endlichen gelegene Punkte und ist eine geschlossene Kurve.

6) Die Beziehung zwischen den Strecken a, b und e wird durch die Gleichung

$$a^2 = b^2 + e^2$$

bestimmt. (Im rechtwinkligen Dreieck FBO, dem Bestimmungsdreieck, ist FB = a, FO = e, BO = b.)

7) Wird e = o, d. h. fallen die Brennpunkte mit dem Mittelpunkt zusammen, so geht die Ellipse in einen Kreis über.

Die Hyperbel.

3. **Definition.** Die Hyperbel ist der geometrische Ort eines Punktes, für den die Differenz seiner Entfernungen von zwei festen Punkten einer gegebenen Strecke gleich ist.

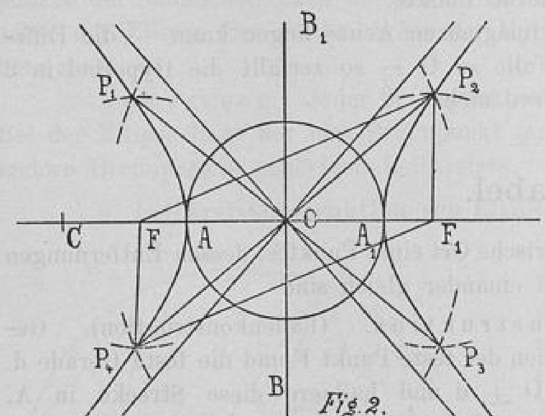


Fig. 2.

Konstruktion (Fadenkonstruktion). Gegeben seien die festen Punkte F und F_1, sowie eine Strecke $2a < FF_1$. Halbiere Strecke FF_1 in O und trage auf FF_1 von O nach beiden Seiten die Stücke $OA = OA_1 = a$ ab. Nehme auf der Verlängerung von FF_1 Punkt C beliebig an. Beschreibe um F einen Kreis mit Radius = AC, um F_1 einen Kreis mit Radius = A_1C, so sind die Schnittpunkte P_1 und P_4 beider Kreise Punkte des Ortes. ($F_1P_4 - FP_4 = A_1C. - AC = 2a$). Durch Vertauschung der Radien ergeben sich die weiteren Punkte P_2 und P_3. Andere Annahmen des Punktes C liefern beliebig viele Kurvenpunkte.

Lage des Punktes C. Punkt C darf nur auf der Verlängerung der Strecke FF_1, mit den Grenzlagen F oder F_1 angenommen werden. Für irgend eine Lage des Punktes C ausserhalb der Strecke AA_1 (eine Lage zwischen A und A_1 ist von vornherein ausgeschlossen) ist nämlich stets

$$A_1C - AC = 2a$$

$$\text{und } A_1C + AC = (A_1O + CO) + (CO - AO) = 2CO$$

Liegt nun C auf der Verlängerung von FF_1, so ist der Centralabstand FF_1 beider Konstruktionskreise $< 2CO$, also kleiner als die Summe der Radien, somit ergeben sich

2 Schnittpunkte (Spieker § 122). Fällt C nach F bezw. F_1, so ist $FF_1 = 2\,CO$, die Kreise berühren also einander in A oder A_1, und zwar von aussen. Liegt endlich C zwischen A und F, so ist $FF_1 > 2\,CO$, die Kreise liefern demnach keine Schnittpunkte.

Bezeichnungen. Die beiden festen Punkte heissen Brennpunkte, ihre Verbindungslinien mit Kurvenpunkten Brennstrahlen; zu jedem Kurvenpunkte gehören 2 Brennstrahlen (Brennstrahl und Ergänzungsstrahl). Die Punkte A und A_1 heissen Scheitel; AA_1 wird als reelle Achse, eine auf ihr in O errichtete Senkrechte BB_1 als imaginäre Achse bezeichnet; der Abstand eines Brennpunkts von O heisst lineare Excentricität. Dabei wird die Länge $FF_1 = 2e$ gesetzt.

4. **Folgerungen.** 1) Die Achsen AA_1 und BB_1 sind Symmetrallinien der Hyperbel.

2) Die Hyperbel wird durch die Achsen in 4 kongruente und paarweise gegen eine Achse symmetrisch liegende Stücke zerlegt.

3) Jede durch O gehende Sehne wird in O halbiert; Punkt O ist damit Mittelpunkt, jede solche Sehne ein Durchmesser der Hyperbel.

4) Von sämtlichen Durchmessern hat die reelle Achse die kleinste Länge.

$$(P_2P_4 > P_2F - P_4F > P_2F - P_2F_1 > 2a).$$

5) Ein um O mit Radius = a beschriebener Kreis, der Scheitelkreis, schliesst die Hyperbel vollständig aus.

6) Mit wachsendem Brennstrahl wächst auch der Ergänzungsstrahl und damit die Entfernung eines aus beiden konstruierten Kurvenpunktes vom Mittelpunkt. Wird ein Brennstrahl unendlich gross, so wird es auch sein Ergänzungsstrahl, sowie der Zentralabstand des Kurvenpunkts: die Hyperbel hat also unendlich ferne Punkte.

7) Da kein Punkt der Hyperbel auf der imaginären Achse liegen kann — die Differenz der Brennstrahlen wäre in einem solchen Falle = 0 — so zerfällt die Hyperbel in 2 getrennte Zweige, ist also keine geschlossene Kurve mehr.

Die Parabel.

5. **Definition.** Die Parabel ist der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von einem festen Punkt und einer festen Geraden einander gleich sind.

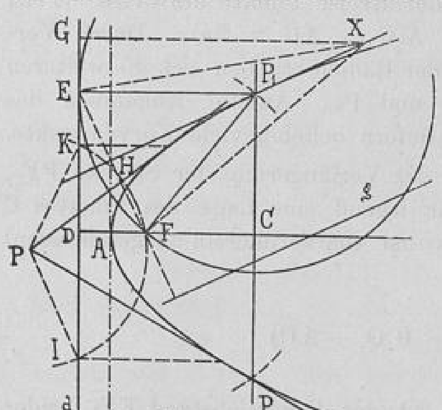


Fig. 3.

Konstruktion. (Fadenkonstruktion). Gegeben seien der feste Punkt F und die feste Gerade d. Fälle FD ⊥ d und halbiere diese Strecke in A. Errichte auf DF in irgend einem Punkte C ein Lot und beschreibe um F einen Kreis mit Radius = DC, so schneidet dieser das Lot in den Kurvenpunkten P_1 und P_2. Andere Annahmen des Punktes C liefern beliebig viele Kurvenpunkte.

Lage des Punktes C. Punkt C darf nur auf der Verlängerung der Strecke DA, mit der Grenzlage A, angenommen werden. Für irgend eine Lage von C ausserhalb Strecke DA ist stets $DC > FC$, der Konstruktionskreis schneidet also das in C errichtete Lot in 2 Kurvenpunkten. Fällt C nach A, so berühren einander Lot und Konstruktionskreis in A. Liegt C zwischen A und D, so ergeben sich keine Schnittpunkte.

Bezeichnungen. Der feste Punkt heisst Brennpunkt, die feste Gerade Leitlinie, jede Verbindungslinie des Brennpunkts mit einem Kurvenpunkte Brennstrahl. Punkt A heisst Scheitel, die Gerade AF Achse der Parabel. Die Strecke FD, der Abstand des Brennpunkts von der Leitlinie, wird $=$ p gesetzt.

6. **Folgerungen.** 1) Die Achse AF ist Symmetrallinie der Kurve, die Parabel wird durch sie in 2 kongruente Stücke zerlegt.

2) Die Konstruktion liefert Kurvenpunkte, wie weit auch C in der Richtung AF hinausrücken mag; die Kurve ist also nach dieser Richtung unbegrenzt (nicht geschlossen).

Anmerkung. Die Konstruktionen § 1, 3 und 5 sind als Fadenkonstruktionen bezeichnet, weil sie zu einer mechanischen Erzeugungsweise der 3 Kurven (mittelst Faden und Stift) führen.

Leitkreise bei Ellipse und Hyperbel.

7. **Definition.** Zieht man von einem Brennpunkt einer Ellipse (Hyperbel) aus beliebige Brennstrahlen und verlängert (verkürzt) sie um ihre Ergänzungsstrahlen, so liegen die Endpunkte der Summenstrecken auf einem Kreise, dessen Radius gleich der Länge 2a der Hauptachse der Ellipse (der reellen Achse der Hyperbel) ist. Ein solcher Kreis wird als Leitkreis bezeichnet.

Anmerkung. Jeder Brennpunkt ist Mittelpunkt eines ihm zugehörigen Leitkreises. — Bei der Ellipse liegt der eine Brennpunkt innerhalb, bei der Hyperbel ausserhalb des zu dem andern Brennpunkte gehörigen Leitkreises.

8. **Leitkreiskonstruktion von Ellipse und Hyperbel.** a) Ellipse. F und F_1 seien die beiden Brennpunkte, Kreis um F mit Radius $= 2a$ der Leitkreis. Ziehe einen beliebigen Radius FD und verbinde D mit F_1. Das Mittellot über F_1D schneidet dann FD in dem Kurvenpunkt P. $(FP + F_1P = FP + PD = FD = 2a)$. — A und A_1 ergeben sich durch die Mittellote über F_1E und F_1H, B_1 (entsprechend B) durch das Mittellot über der auf FF_1 in F_1 errichteten Senkrechten F_1G.

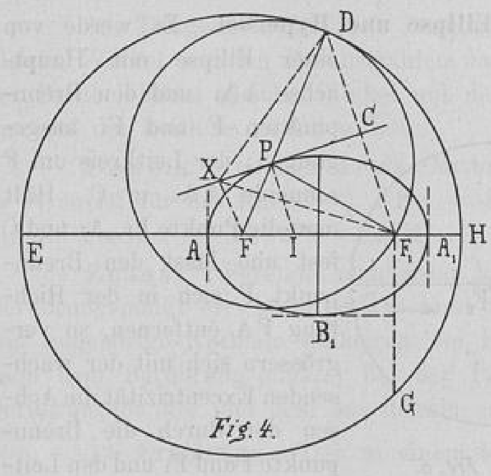


Fig. 4.

b) Hyperbel (Fig. 5). F und F_1 seien die beiden Brennpunkte, Kreis um F mit Radius $= 2a$ der Leitkreis. Ziehe einen beliebigen Radius FD und verbinde D mit F_1. Das Mittellot über F_1D schneidet dann FD in dem Kurvenpunkte P. $(FP - F_1P = FP - PD = FD = 2a)$. — Die Scheitel ergeben sich durch die Mittellote über F_1E und F_1H.

Unendlich ferne Punkte. Zieht man von F_1 die Tangenten F_1G und F_1K an den Leitkreis, so werden die Mittellote über F_1G und F_1K den Radien FG bezw. FK des Leitkreises parallel; die aus dem Schnitt der Mittellote und Radien sich ergebenden Kurvenpunkte fallen ins Unendliche. Die Hyperbel hat demnach 2 unendlich ferne, in den Richtungen FG und FK gelegene Punkte.

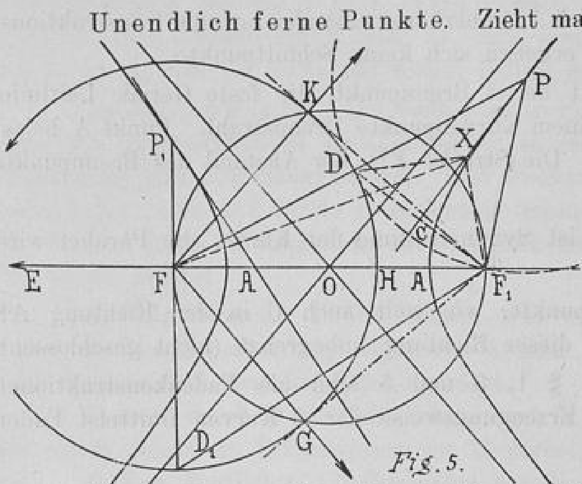


Fig. 5.

Zweige der Hyperbel. Die Radien nach Punkten des Bogens GHK des Leitkreises liefern den zu F_1 gehörigen Zweig der Hyperbel, diejenigen nach Punkten des Bogens KEG den zweiten, zu F gehörigen Zweig.

Anmerkung. Vorstehende Konstruktion kann auch auf die Parabel Anwendung finden. Da nämlich (Fig. 3) für jeden Parabelpunkt P_1 dessen Abstand P_1E von der Leitlinie $=$ dem Brennstrahl P_1F ist, so ist, wenn man FE zieht, $\triangle P_1EF$ gleichschenklig, P_1 liegt somit auf dem Mittellote über EF. Verbindet man also F mit einem Punkte E der Leitlinie und errichtet über FE das Mittellot bis zum Schnitt mit einer durch E parallel zur Achse gezogenen Geraden, so ist der Schnittpunkt P_1 ein Punkt der Kurve. (Leitlinienkonstruktion der Parabel).

9. **Uebereinstimmende Definition von Ellipse, Hyperbel und Parabel.** Der geometrische Ort des Mittelpunkts eines Kreises, der einen gegebenen Kreis berührt und durch einen gegebenen Punkt hindurchgeht, ist eine Ellipse, wenn der gegebene Punkt innerhalb des Kreises, eine Hyperbel, wenn er ausserhalb des Kreises liegt, und eine Parabel, wenn an Stelle des gegebenen Kreises eine Gerade tritt.

Beweis. Ein um Punkt P mit Radius $= PF_1$ (Fig. 4 und 5) bezw. P_1F (Fig. 3) beschriebener Kreis berührt den Leitkreis in D, bezw. die Leitlinie in E und geht durch F_1 bezw. F hindurch.

10. **Parabel als Uebergangsfall zwischen Ellipse und Hyperbel.** Es werde von einer Ellipse mit Hauptachse AA_1 und den Brennpunkten F und F_1 ausgegangen; der Leitkreis um F schneide AA_1 in C. Hält man die Punkte F_1, A_1 und C fest und lässt den Brennpunkt F sich in der Richtung FA entfernen, so vergrössern sich mit der wachsenden Excentrizität die Achsen der durch die Brennpunkte F und F_1 und den Leitkreis von Radius FC bestimm-

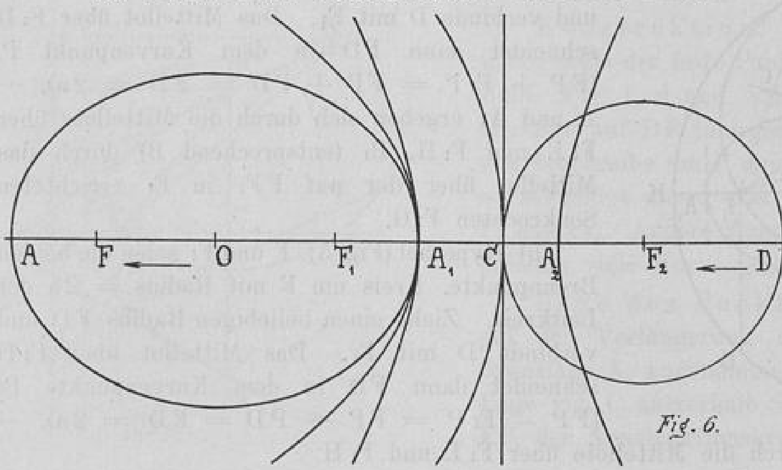


Fig. 6.

ten Ellipse mehr und mehr. Fällt F in unendliche Entfernung, so wird der Leitkreis (die Gerade als Grenzfall eines Kreises mit unendlich grossem Radius aufgefasst) zu dem in C auf F_1C errichteten Lote, die Ellipse aber zu einer Parabel mit diesem Lote als Leitlinie und dem Brennpunkte F_1. Lässt man Punkt F sich noch weiter bewegen, so nähert er sich wieder in der Richtung DC. Der Leitkreis, der stets durch C hindurch geht, wendet seine konkave Seite gegen D; F_1 kommt ausserhalb desselben zu liegen und die nach dem Orte § 9 konstruierte Kurve wird zur Hyperbel. Die Parabel kann somit unter Voraussetzung des bezeichneten Ortes als Uebergangsfall zwischen Ellipse und Hyperbel betrachtet werden.

Anmerkung. Aus der Auffassung der Parabel als Grenzfall der Ellipse ergiebt sich, dass der Mittelpunkt der Parabel — übereinstimmend mit der Lage des 2. Brennpunktes F — als auf der Achse in unendlicher Entfernung liegend angenommen werden muss. Die Verbindungslinien von Kurvenpunkten mit diesem Mittelpunkte, d. h. die Durchmesser der Parabel, werden damit sämtlich der Achse und unter sich parallel.

Tangentensätze und Tangentenkonstruktionen.

11. **Hilfssatz.** Die bei den Leitkreiskonstruktionen (8) benützten Mittellote über den Verbindungsstrecken eines Brennpunkts mit Punkten des Leitkreises (der Leitlinie) sind Tangenten an die betreffenden Kurven.

Beweis. Für irgend einen Punkt X des Mittellotes über F_1D ist für Ellipse und Hyperbel (Fig. 4 und 5)

$$FX \pm F_1X = FX \pm DX \gtrless FD \gtrless 2a$$

X kann somit nicht auf der Kurve liegen, ebensowenig irgend ein anderer Punkt des Mittellotes ausser P selbst. Das Mittellot ist demnach Tangente der Kurve, P der Berührungspunkt. Für die Parabel (Fig. 3) ergiebt sich dasselbe aus der Betrachtung, dass

$$FX = EX > GX.$$

12. **Tangentensatz.** Die Tangente in einem Punkte der Ellipse oder Hyperbel bildet gleiche Winkel mit den Brennstrahlen nach diesem Punkte. Die Tangente in einem Punkte der Parabel bildet gleiche Winkel mit dem Brennstrahle nach diesem Punkte und dem aus ihm auf die Leitlinie gefällten Lote.

Beweis. Da nach 11 das Mittellot CP über F_1D bzw. FE (Fig. 4, 5, 3) Tangente in P, so ist für die Ellipse $\sphericalangle FPX = DPC = F_1PC$, für die Hyperbel $\sphericalangle FPC = F_1PC$, für die Parabel $\sphericalangle EP_1H = FP_1H$.

Zusatz. Versteht man unter Normale einer Kurve das auf einer Tangente in deren Berührungspunkt errichtete Lot, so lässt sich der Tangentensatz wie folgt erweitern: Tangente und zugehörige Normale halbieren bei Ellipse und Hyperbel die Winkel der Brennstrahlen nach dem Berührungspunkte, bei der Parabel die Winkel zwischen Brennstrahl nach dem Berührungspunkte und dem aus diesem auf die Leitlinie gefällten Lote.

13. **Erklärung.** Der zu einem Punkte in Bezug auf eine Gerade rechtwinklig symmetrisch gelegene Punkt soll als sein Gegenpunkt bezeichnet werden.

Sätze vom Gegenpunkte 1) Der Gegenpunkt eines Brennpunkts in Bezug auf eine Tangente liegt bei Ellipse und Hyperbel auf dem zum zweiten Brennpunkt gehörigen Leitkreise, bei der Parabel auf der Leitlinie.

2) Die Verbindungslinie des Gegenpunkts eines Brennpunkts (in Bezug auf eine Tangente) mit dem zweiten Brennpunkte schneidet bei Ellipse und Hyperbel die Tangente in deren Berührungspunkt; die Verbindungsstrecke selbst ist $= 2a$. Bei der Parabel liegt der Berührungspunkt der Tangente auf der durch den Gegenpunkt des Brennpunkts zur Achse parallel gezogenen Geraden.

14. **Fundamentalaufgabe.** In einem Punkte einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel eine Tangente an diese zu legen.

Auflösung. Ziehe die Brennstrahlen nach dem Kurvenpunkte und halbiere den Winkel zwischen dem einen Brennstrahl und der Verlängerung des Ergänzungsstrahls (Ellipse) oder den Winkel zwischen den Brennstrahlen selbst (Hyperbel). Bei der Parabel ist der Brennstrahl nach dem Kurvenpunkte, sowie aus diesem ein Lot auf die Leitlinie zu ziehen und der Winkel zwischen diesen Geraden zu halbieren.

Zusätze. 1) Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers der Ellipse oder Hyperbel sind einander parallel.

2) Die Tangenten in den Scheiteln der 3 Kurven stehen auf den Achsen senkrecht.

3) Der Scheitelkreis berührt Ellipse und Hyperbel in den Endpunkten der Haupt- bezw. reellen Achse.

15. **Asymptoten der Hyperbel.** Die Hyperbel besitzt 2 unendlich ferne Punkte (8). Die in ihnen an die Kurve gelegten Tangenten tragen den Namen Asymptoten.

Asymptotenkonstruktion (Leitkreiskonstruktion). Ziehe (Fig. 5) aus F_1 die Tangenten F_1G und F_1K an den Leitkreis um F. Errichte die Mittellote über F_1G und F_1K, so sind dies die verlangten Asymptoten. (Die unendlich fernen Punkte liegen in den Richtungen FG und FK, die Mittellote über F_1G und F_1K sind diesen Richtungen parallel, gehen also durch die unendlich fernen Punkte und berühren in ihnen die Hyperbel (11).

Zusätze. 1) Die Asymptoten als Mittellote über den Katheten F_1G und F_1K der rechtwinkligen Dreiecke FGF_1 und FKF_1, schneiden einander im Mittelpunkt O der Hypotenuse FF_1, d. h. sie gehen durch den Mittelpunkt der Hyperbel.

2) Die Winkel, welche die Asymptoten gegen einander bilden, werden durch die Achsen halbiert.

3) Auch die Parabel hat einen unendlich fernen Punkt, ihren zweiten Scheitel (10). Die Tangente in diesem Punkte, nämlich das in ihm auf der Achse errichtete Lot (14. 2), fällt ganz ins Unendliche, die Parabel besitzt also keine Asymptote.

16. **Fundamentalaufgabe.** Von einem Punkte ausserhalb einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel Tangenten an diese zu legen.

Auflösung. (Leitkreiskonstruktion) a) Ellipse. Ist der zu F_1 gehörige Leitkreis gegeben, so beschreibe man um den gegebenen Punkt P einen Kreis mit Radius $=$ PF. Er schneide den Leitkreis in C und D. Ziehe PC und PD und halbiere die Winkel FPC und FPD, dann sind die Halbierungslinien die verlangten Tangenten. Die Brennstrahlen F_1C und F_1D geben die Berührungspunkte.

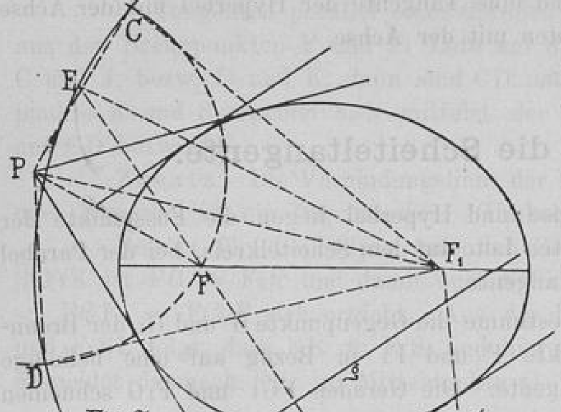


Fig. 7.

Anmerkung. Der Kreis um P und der Leitkreis schneiden oder berühren einander, bezw. kommen nicht zum Schnitt, je nachdem — es kommt Berührung von innen in Betracht — die Entfernung beider Mittelpunkte $\gtreqless$ als die Differenz der Radien ist. Es giebt demnach von P aus 2, 1 oder keine Tangente, je nachdem

$$PF_1 \gtreqless 2a - PF$$

$$\text{oder } PF_1 + PF \gtreqless 2a \text{ ist.}$$

Punkt P liegt dementsprechend entweder ausserhalb, auf oder innerhalb der Ellipse.

b) Hyperbel. Konstruktion wie unter a. Es ergeben sich 2, 1 oder keine Tangenten (es kommt Berührung der Konstruktionskreise von aussen in Betracht), je nachdem bei gegebenen Leitkreise um F_1

$$PF_1 \lesseqgtr 2a + PF$$

$$\text{oder } PF_1 - PF \gtreqless 2a$$

ist. Punkt P liegt dementsprechend entweder ausserhalb, auf oder innerhalb der Hyperbel. Die äusseren Punkte der Hyperbel liegen somit in dem von den 2 Zweigen begrenzten und von der imaginären Achse durchzogenen Flächenraum.

c) Parabel. Beschreibe (Fig. 3) um den gegebenen Punkt P einen Kreis mit Radius = PF. Er schneide die Leitlinie in J und K. Ziehe PJ und PK und halbiere die Winkel FPJ und FPK, dann sind die Halbierungslinien die gesuchten Tangenten. Die durch K und J parallel zur Achse gezogenen Geraden liefern die Berührungspunkte. Es ergeben sich 2, 1 oder keine Tangenten, je nachdem PF $\gtreqless$ als der Abstand des Punktes P von der Leitlinie ist. (Aeussere und innere Punkte der Parabel).

17. **Fundamentalaufgabe.** Parallel zu einer gegebenen Geraden Tangenten an Ellipse, Hyperbel oder Parabel zu legen.

Auflösung. a) Ellipse. (Fig. 7.) Ist der zu F_1 gehörige Leitkreis gegeben, so fälle man aus F ein Lot auf die gegebene Gerade g. Sie schneide den Leitkreis in E und G. Errichte auf FE und FG die Mittellote, so sind dies die verlangten Tangenten. Die Berührungspunkte liegen auf den Brennstrahlen F_1E und F_1G. (Es ergeben sich stets 2 Tangenten.)

b) Hyperbel. Konstruktion wie unter a). Bezeichnet α den Winkel der Asymptoten gegen die Achse, β den Winkel der gegebenen Geraden gegen letztere, so ergiebt sich, dass für $\beta \gtrless \alpha$ sich 2 bezw. keine Tangenten ergeben; $\beta = \alpha$ giebt als Lösung eine Asymptote.

c) Parabel. Das Lot aus F auf die gegebene Gerade g giebt den Schnittpunkt E mit der Leitlinie (Fig. 3). Das Mittellot über FE und die Parallele durch E zur Achse geben Tangente und Berührungspunkt. Es ergiebt sich nur 1 Lösung, die zweite Tangente fällt ins Unendliche.

Anmerkung. Der Winkel, den irgend eine Tangente der Hyperbel mit der Achse bildet, ist grösser als der Winkel der Asymptoten mit der Achse.

Der Scheitelkreis und die Scheiteltangente.

18. **Satz vom Scheitelkreis.** Bei Ellipse und Hyperbel liegen die Fusspunkte der von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Lote auf dem Scheitelkreis, bei der Parabel liegt der Fusspunkt des Lotes auf der Scheiteltangente.

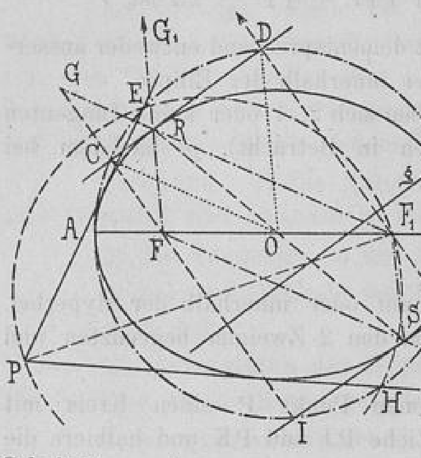


Fig. 8.

Beweis. a) Ellipse und Hyperbel. Bestimme die Gegenpunkte G und G_1 der Brennpunkte F und F_1 in Bezug auf eine beliebige Tangente. Die Geraden FG_1 und F_1G schneiden einander im Berührungspunkt R der Tangente, ferner ist $FG_1 = F_1G = 2a$. Verbindet man die Mitten C und D von FG und F_1G_1 mit O, so ist $CO \parallel F_1G$, $DO \parallel FG_1$ sowie $CO = \frac{F_1G}{2} = a$, $DO = \frac{FG_1}{2} = a$. C und D liegen also auf dem Scheitelkreise. b) Parabel. Das von F auf die Tangente in P_1 gefällte Lot (Fig. 3) schneide die Tangente in H, die Leitlinie in E. Da H Mitte von EF, A Mitte von FD, so ist $HA \parallel$ zur Leitlinie und damit $\perp FD$. H liegt also auf der Scheiteltangente.

Folgerung. Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einem Kreise, während der eine Schenkel beständig durch einen festen Punkt geht, so beschreibt der andere Schenkel die Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt; er beschreibt die Tangenten einer Parabel, wenn an die Stelle des Kreises eine Gerade tritt.

Umhüllungskonstruktion. Auf vorstehende Folgerung gründet sich die Konstruktion der Ellipse, Hyperbel oder Parabel als Umhüllungskurve einer bewegten Geraden. (Diese Gerade, der zweite Schenkel des rechten Winkels, wird von der betreffenden Kurve in allen ihren Lagen berührt.)

Asymptoten der Hyperbel. (Scheitelkreiskonstruktion). Die Radien nach den Berührungspunkten der aus den Brennpunkten der Hyperbel an den Scheitelkreis gezogenen Tangenten sind Asymptoten. (Die Berührungsradien (Fig. 9) sind Mittellote über den von F_1 an den Leitkreis um F gezogenen Tangenten F_1G und F_1K, also nach 15 Asymptoten.)

19. **Tangentenkonstruktionen mittelst des Scheitelkreises bezw. der Scheiteltangente.** a) Tangenten von einem Punkte P ausserhalb der Kurve. (Konstruktion für die Ellipse, Fig. 8.) Ziehe PF_1, und beschreibe über PF_1 als Durchmesser einen Kreis. Er schneide den Scheitelkreis in E und H, dann sind PE und PH die gesuchten Tangenten. Die Berührungspunkte finden sich nach 13. 2.

b) Tangenten parallel einer Geraden g. (Konstruktion für die Ellipse, Fig. 8.) Fälle aus den Brennpunkten F und F_1 Lote auf die Gerade g. Sie schneiden den Scheitelkreis in C und J, bezw. D und K, dann sind CD und JK die gesuchten Tangenten. Die Berührungspunkte K und S ergeben sich mittelst der Gegenpunkte G und L von F und F_1 in Bezug auf CD bezw. JK.

Zusatz. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte paralleler Tangenten an Ellipse oder Hyperbel ist ein Durchmesser. (Umkehrung zu 14. 1.)

Beweis für die Ellipse, mit den Benennungen von b. Wegen $OF = OF_1$ und $FC \parallel F_1K$ ist $FC = F_1K$ und damit auch $FG = F_1L$. $GFLF_1$ ist ein Parallelogramm, woraus $\sphericalangle FGF_1 = F_1LF$ sich ergiebt. Aus der Kongruenz der gleichschenkligen Dreiecke FGR und F_1SL folgt, dass $FR \# F_1S$, und hieraus, dass auch FRF_1S ein Parallelogramm. RS schneidet demnach FF_1 im Mittelpunkte O, ist also ein Durchmesser der Ellipse.

Besondere Konstruktionen und Sätze für Hyperbel und Parabel.

20. **Bestimmungsdreieck der Hyperbel.** Zieht man bei der Hyperbel die Scheiteltangente in A_1 bis zum Schnitt mit der, mittelst des Scheitelkreises konstruierten Asymptote OC in E, so ist $\triangle A_1OE \cong COF_1$. Es folgt hieraus $OE = OF_1 = e$. $\triangle A_1OE$ wird, entsprechend der Bezeichnung bei der Ellipse (2. 6), Bestimmungsdreieck genannt; seine Seiten A_1O und OE haben die Längen a und e, diejenige der Seite A_1E wird $= b$ gesetzt. Es ergiebt sich hieraus die Beziehung

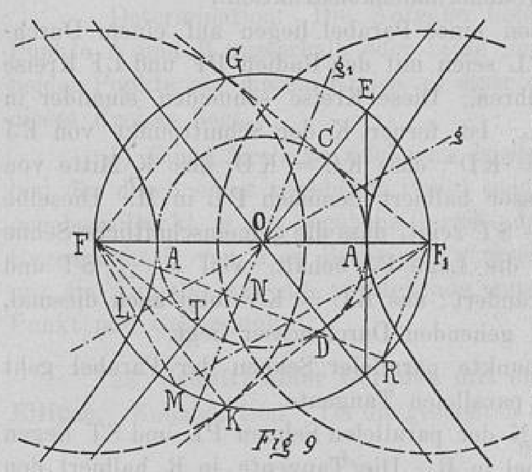


Fig 9

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Asymptotenkonstruktion. Wegen $OE = OF_1$ schneidet ein mit Radius $= OF_1$ um O beschriebener Kreis sowohl Scheiteltangente als Asymptote in E. Es ergiebt sich hieraus eine weitere, dritte Asymptotenkonstruktion mittelst des Bestimmungsdreiecks, wenn zwei der Bestimmungsgrössen a, b und e gegeben sind.

Anmerkuug. Für $a = b$ wird der Winkel der Asymptoten $= R$, diese stehen also senkrecht auf einander. Die Hyperbel wird in diesem Falle als gleichseitig bezeichnet.

21. **Sätze über Tangente und Normale der Parabel.** 1) Sind in einem Punkte der Parabel Tangente und Normale gezogen, so sind deren Schnittpunkte mit der Achse vom Brennpunkt um die Länge des Brennstrahls nach dem Parabelpunkte entfernt.

Beweis. In P seien Tangente PB und Normale PE gezogen. Der Fusspunkt des von F auf PB gefällten Lotes liegt auf der Scheiteltangente, der Gegenpunkt C von F in Bezug auf PB auf der Leitlinie. Aus $\sphericalangle FPB = CPB = PBF$ folgt $FB = FP$ und damit auch $= PC$. BCPF ist also ein Rhombus. Aus $CP \parallel FE$ und $CF \parallel PE$ (beide $\perp PB$) ergiebt sich, dass FEPC ein Parallelogramm, somit $CP = FE$ ist. Man hat demnach $FB = FP = PC = FE$.

Aufgabe. Tangente und Normale in einem Parabelpunkte ohne Benützung der Leitlinie zu zeichnen.

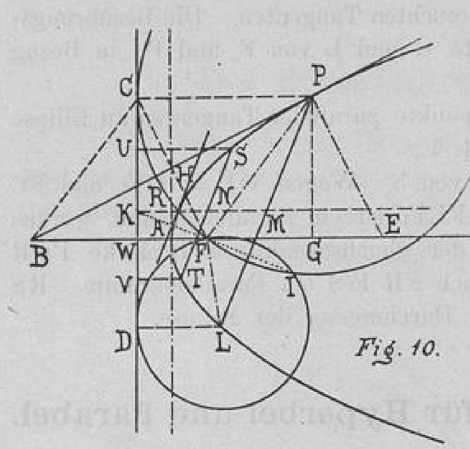


Fig. 10.

2) Die Projektion des Abschnitts einer Parabeltangente zwischen Berührungspunkt und Achse auf letztere (Subtangente) wird vom Scheitel halbiert. Beweis. Im Rhombus FBCP wird Diagonale BP in H halbiert. Aus HA || PG folgt BA = AG.

Aufgabe. Die Tangente in einem Parabelpunkte ohne Benützung des Brennpunkts zu zeichnen.

3) Die Projektion des Abschnitts einer Parabelnormale zwischen Punkt und Achse auf letztere (Subnormale) ist unveränderlich gleich dem Abstand p des Brennpunkts von der Leitlinie. (Folgt aus △ CWF ≅ PGE.) Aufgaben. a) Die Normale in einem Parabelpunkte ohne Benützung des Brennpunkts zu zeichnen. b) Eine auf die Sätze 1 und 3 sich gründende Konstruktion der Parabel anzugeben. (Subnormalenkonstruktion.)

4) Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen einer Parabel liegen auf einem Durchmesser. Beweis. Um die Endpunkte der Sehne PL seien mit den Radien PF und LF Kreise beschrieben, welche die Leitlinie in C und D berühren. Diese Kreise schneiden einander in F und J; ihre gemeinschaftliche Sehne ist ⊥ PL. Ist ferner K der Schnittpunkt von FJ mit der Leitlinie, so folgt aus $KC^2 = KF \cdot KJ = KD^2$, dass KC = KD, also K Mitte von CD ist. Ein durch K gezogener Parabeldurchmesser halbiert demnach PL in M. Dieselbe Betrachtung für eine zu PL parallele Parabelsehne ST zeigt, dass die gemeinschaftliche Sehne der wie zuvor um S und T beschriebenen Kreise die Lage FJ behält, weil sie ⊥ ST und damit ebenfalls ⊥ PL ist. Punkt K bleibt unverändert; aus KU = KV folgt auch diesmal, dass der Mittelpunkt N von ST auf dem durch K gehenden Durchmesser liegt.

5) Die Verbindungslinie der Halbierungspunkte paralleler Sehnen der Parabel geht durch den Berührungspunkt der zu diesen Sehnen parallelen Tangente.

Beweis. Die Halbierungspunkte M und N der parallelen Sehnen PL und ST liegen auf dem Durchmesser MN; er schneide die Parabel in R. Die Tangente in R halbiert den ∢ KRF und ist damit ⊥ KF, also auch parallel PL.

Umkehrung. Der durch den Berührungspunkt einer Tangente gezogene Durchmesser der Parabel halbiert die zu der Tangente parallelen Sehnen.

Schnitt einer Geraden mit Ellipse, Hyperbel oder Parabel.

22. **Hilfssatz.** Werden zwei einander berührende Kreise durch einen dritten geschnitten, so gehen die Berührungstangente und die beiden gemeinschaftlichen Sehnen durch einen Punkt.

Beweis. Die Kreise M und N berühren einander in F, Kreis O schneide sie in A und B, bezw. C (und D). Sehne AB und Berührungstangente in F geben den Schnittpunkt E. Zieht man nun EC, so schneide diese Gerade Kreis N in D, Kreis O in D_1. Es ist dann EA. EB

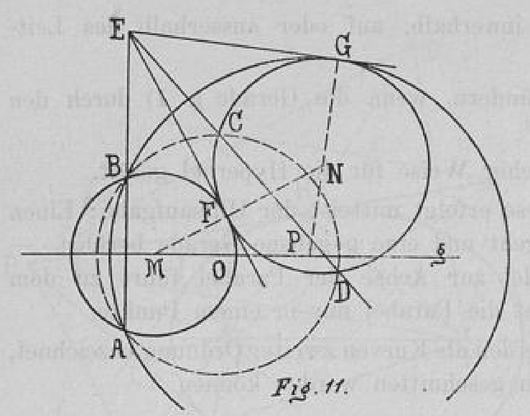


Fig. 11.

$= EF^2 = EC. ED$, andrerseits $EA. EB = EC. ED_1$, woraus sich $EC. ED = EC. ED_1$ und damit $ED = ED_1$ ergiebt. D_1 fällt also mit D zusammen, und D ist zweiter Schnittpunkt der Kreise N und O. Es geht somit auch die gemeinschaftliche Sehne CD durch E hindurch.

Hilfsaufgaben. a) Einen Kreis zu zeichnen, der durch 2 gegebene Punkte geht, und einen gegebenen Kreis berührt. Konstruktion (Fig. 11) A und B seien die gegebenen Punkte, N der gegebene Kreis. Beschreibe einen beliebigen Kreis, der durch A und B geht und Kreis N in 2 Punkten C und D schneidet. Ziehe AB und CD bis zum Schnitt in E und lege von E aus die Tangenten EF und EG an Kreis N. Die Radien GN und NF schneiden dann das Mittellot über AB in den Mittelpunkten M und P der gesuchten Kreise. Beweis. Da $EF^2 = EC. ED = EA. EB$, so berührt der durch die 3 Punkte A, B und F gelegte Kreis die Gerade EF in F und damit Kreis N in demselben Punkte.

Determination. Die Aufgabe liefert 2, 1 oder 0 Lösungen, je nachdem a) beide Punkte A und B ausserhalb oder beide innerhalb des gegebenen Kreises liegen, b) einer der beiden Punkte auf diesem Kreise, c) einer der beiden Punkte ausserhalb, der andere innerhalb dieses Kreises liegt.

b) Einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, und der durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt. — Ist A der gegebene Punkt, g die gegebene Gerade, dann ist g Durchmesser des gesuchten Kreises. Der Gegenpunkt B von A in Bezug auf g muss demnach ebenfalls auf diesem Kreise liegen, womit die Aufgabe auf die vorstehende zurückgeführt ist. (Determination für die Lage von Punkt und Gegenpunkt!)

23. **Schnitt einer Geraden mit einer durch Brennpunkte und Leitkreis gegebenen Ellipse.** Konstruktion. Da die gesuchten Schnittpunkte Mittelpunkte von Kreisen sein müssen, welche durch einen Brennpunkt gehen und den Leitkreis berühren, so ergiebt sich die Lösung durch Hilfsaufgabe 22b. — Der Leitkreis sei um F_1 beschrieben, die gegebene Gerade sei g. Suche den Gegenpunkt G von F in Bezug auf g. Beschreibe einen Kreis, der durch F und G geht und den Leitkreis in A und B schneidet. Bestimme den Schnittpunkt C von AB und FG. Ziehe von C die Tangenten CD und CE an den Leitkreis, dann schneiden die Radien F_1D und F_1E nach den Berührungspunkten die Gerade g in den gesuchten Punkten X u. Y. Determination. Die Aufgabe lässt 2, 1 oder 0 Lösungeu zu, d. h. die Gerade g schneidet oder berührt die Ellipse, bezw. schneidet sie nicht, je

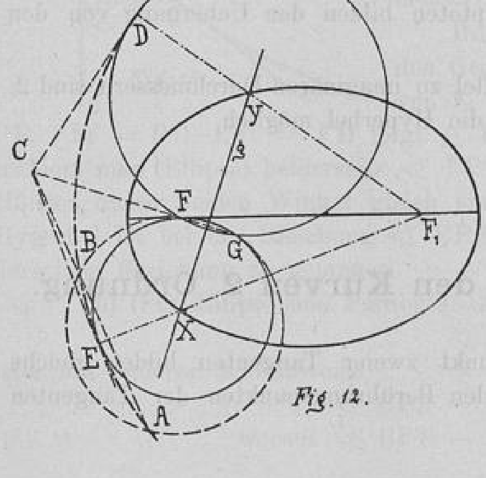


Fig. 12.

nachdem der Gegenpunkt G des Brennpunktes F innerhalb, auf oder ausserhalb des Leitkreises liegt.

Frage. Wie ist die Konstruktion abzuändern, wenn die Gerade g 1) durch den Brennpunkt F, 2) durch den Brennpunkt F_1 geht?

Anmerkung. Die Aufgabe wird in gleicher Weise für die Hyperbel gelöst.

Konstruktion für die Parabel. Diese erfolgt mittelst der Hilfsaufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der durch 2 gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt. — Die Lösung der Aufgabe für eine Gerade parallel zur Achse der Parabel führt zu dem Ergebnis: Eine Gerade parallel zur Achse schneidet die Parabel nur in einem Punkte.

Zusatz. Ellipse, Hyperbel und Parabel werden als Kurven zweiter Ordnung bezeichnet, weil sie von einer Geraden in höchstens 2 Punkten geschnitten werden können.

24. **Reelle und imaginäre Durchmesser der Hyperbel.** Wird die Aufgabe „Schnitt einer Hyperbel mit einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Geraden" nach Aufgabe 23 gelöst, so ergeben sich folgende Bemerkungen:

1) Hat die durch den Mittelpunkt gehende Gerade g die Lage einer Asymptote, so fällt der einzige sich ergebende Schnittpunkt ins Unendliche.

2) Der Neigungswinkel β der Geraden g gegen die Achse sei kleiner als derjenige α der Asymtoten. Das Lot (Fig. 9.) FL auf g giebt den Gegenpunkt M von F in Bezug auf g; FT sei Tangente an den Scheitelkreis, OT also Asymptote. Die Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke FLO und FTO (gleiche Hypotenuse, verschiedene spitze Winkel) zeigt, dass $OL > OT > a$, woraus $F_1M > 2a$ sich ergiebt. M liegt somit ausserhalb des Leitkreises, die Lösung giebt für g 2 Schnittpunkte.

3) Der Neigungswinkel β der Geraden g_1 sei $> \alpha$. Entsprechend wie eben zeigt sich, dass der Abstand F_1R des Gegenpunktes R von F in Bezug auf $g_1 < 2a$ ist; R liegt also innerhalb des Leitkreises. Die Lösung ergiebt keine Schnittpunkte, g_1 trifft also die Hyperbel nicht.

Folgerungen. 1) Die Durchmesser der Hyperbel schneiden diese, oder schneiden sie nicht, je nachdem ihre Neigungswinkel gegen die Achse kleiner oder grösser als der Neigungswinkel der Asymptoten sind. Durchmesser der ersten Art werden als reelle, solche der zweiten Art als imaginäre bezeichnet. Die Asymptoten bilden den Uebergang von den reellen zu den imaginären Durchmessern.

2) Mit Benützung von 17b ergiebt sich: Parallel zu imaginären Durchmessern sind 2, parallel zu reellen Durchmessern keine Tangenten an die Hyperbel möglich.

Sätze über Winkelbeziehungen bei den Kurven 2. Ordnung.

25. 1) Der Brennstrahl nach dem Schnittpunkt zweier Tangenten bildet gleiche Winkel mit den aus demselben Brennpunkte nach den Berührungspunkten der Tangenten gezogenen Brennstrahlen.

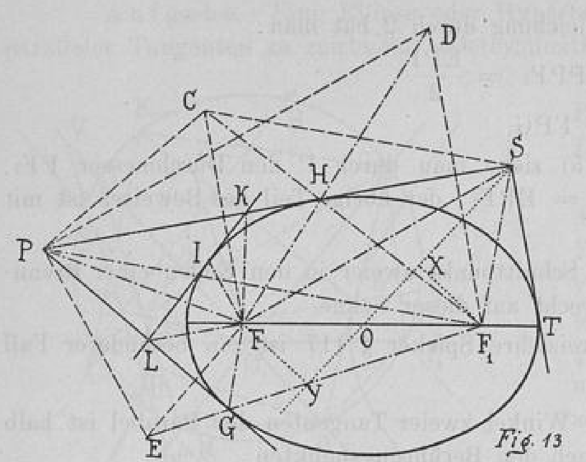


Fig. 13

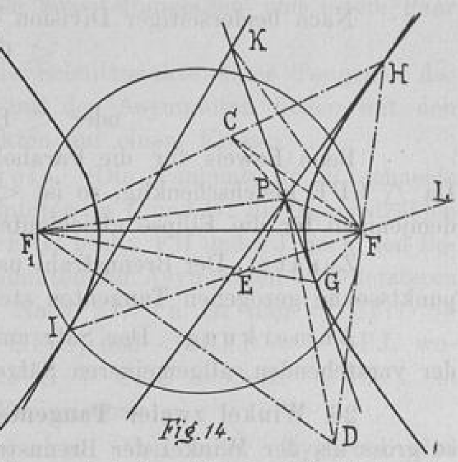


Fig. 14.

Beweis. a) (Für Ellipse und Hyperbel, bei dieser sind der Gleichartigkeit des Beweises wegen die Bezeichnungen der Brennpunkte vertauscht) Um den Beweis für die Brennstrahlen aus F_1 zu liefern, bestimme man die Gegenpunkte C und E von F in Bezug auf beide Tangenten PH und PG. Wegen PF_1 gemeinschaftlich, $F_1C = F_1E$ (13), $PC = PF = PE$ ist $\triangle PCF_1 \cong PEF_1$, also $\sphericalangle PF_1H = PF_1G$. (Der Beweis bleibt derselbe, wenn die Tangenten an verschiedene Hyperbelzweige gezogen sind.)

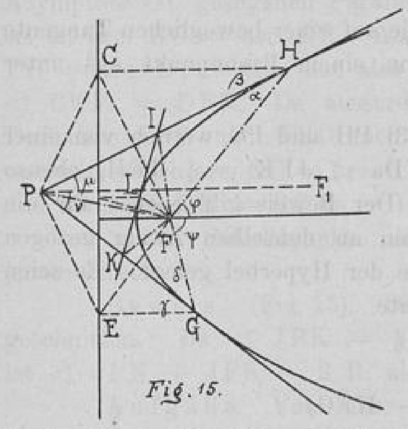


Fig. 15.

b) (Für die Parabel.) Die Gegenpunkte von F in Bezug auf die Tangenten PH und PG seien C und E. Da $PC = PF = PE$, so ist $\triangle PCE$ gleichschenklig, also $\sphericalangle PCE = PEC$ und damit auch $\sphericalangle PCH = PEG$. Da ferner $\triangle PCH \cong PFH$, $\triangle PFG \cong PEG$, so folgt $\sphericalangle PFH = PCH = PEG = PFG$. (Mit Benützung von $\triangle PCF_1 \cong PEF_1$, also $\sphericalangle PCH = PEG$, auch für Ellipse und Hyperbel verwendbar.)

2) Die Brennstrahlen nach dem Schnittpunkt zweier Tangenten bilden gleiche Winkel mit diesen Tangenten. (Bei der Parabel tritt an Stelle eines Brennstrahls ein Durchmesser).

Beweis. a) (Für Ellipse und Hyperbel.) Man bestimme den Gegenpunkt E von F in Bezug auf PG, denjenigen D von F_1 in Bezug auf die andere Tangente PH. Aus $PE = PF$, $PF_1 = PD$, $EF_1 = FD$ folgt $\triangle PEF_1 \cong PFD$. Damit ist $\sphericalangle EPF_1 = FPD$. Subtrahiert man (Ellipse) beiderseits $\sphericalangle FPF_1$, so ergiebt sich $\sphericalangle EPF = F_1PD$. Da auch die Hälften dieser beiden Winkel gleich sind, so ist $\sphericalangle FPG = F_1PH$. Beim Beweis für die Hyperbel ist bei der Gleichung $\sphericalangle EPF_1 = FPD$ beiderseits $\sphericalangle EPD$ zu addieren, um zu derselben Beziehung zu gelangen.

b) (Für Ellipse und Parabel.) Aus $\triangle PCF_1 \cong PEF_1$ ergiebt sich (Fig. 13)

$$\sphericalangle CPF_1 = EPF_1$$

oder mit anderer Schreibweise

$$\sphericalangle CPF - FPF_1 = EPF + FPF_1$$

woraus $\sphericalangle CPF - 2\,FPF_1 = EPF$ folgt.

Nach beiderseitiger Division dieser Gleichung durch 2 hat man

$$\sphericalangle \frac{CPF}{2} - FPF_1 = \frac{EPF}{2}$$

$$\text{oder } \sphericalangle F_1PH = FPG.$$

Beim Beweis für die Parabel (Fig. 15) ziehe man durch P den Durchmesser PF_1. Da $\triangle$ CPE gleichschenklig, so ist $\sphericalangle CPF_1 = EPF_1$; der übrige Teil des Beweises ist mit demjenigen für die Ellipse gleichlautend.

Zusatz. Der Brennstrahl nach dem Schnittpunkt zweier in den Enden einer Brennpunktssehne gezogenen Tangenten steht senkrecht auf dieser Sehne.

Anmerkung. Der Satz aus der Kreislehre Spieker § 117 ist ein besonderer Fall der vorstehenden, allgemeineren Sätze.

26. **Winkel zweier Tangenten.** Der Winkel zweier Tangenten der Parabel ist halb so gross als der Winkel der Brennstrahlen nach den Berührungspunkten.

Beweis. Mit den Bezeichnungen der Fig. 15 ist $\sphericalangle \mu = \beta = \alpha$, $\sphericalangle \nu = \gamma = \delta$, also $\sphericalangle HPG = \alpha + \delta$. Da andrerseits $\sphericalangle \varphi = 2\alpha$, $\sphericalangle \psi = 2\delta$, so ist $\sphericalangle HFG = 2(\alpha + \delta)$, woraus $\sphericalangle HPG = \frac{1}{2} HFG$ sich ergiebt.

Folgerung. Die Tangenten in den Endpunkten einer Brennpunktssehne der Parabel stehen senkrecht auf einander.

Umkehrung. Stehen zwei Tangenten der Parabel senkrecht auf einander, so geht die Verbindungssehne ihrer Berührungspunkte durch den Brennpunkt.

27. **Lage dreier Tangenten gegen einander.** 1) Die auf einer beweglichen Tangente von zwei festen Tangenten begrenzte Strecke erscheint von einem Brennpunkt aus unter gleichbleibendem Winkel.

Beweis. a) Ellipse. Die festen Tangenten (Fig. 13) PH und PG werden von einer dritten mit Berührungspunkt J in L und K geschnitten. Da $\sphericalangle JFK = \frac{1}{2} JFH$, ebenso $\sphericalangle JFL = \frac{1}{2} JFG$, so ergiebt sich $\sphericalangle KFL = \frac{1}{2} HFG$. (Der Beweis gilt ebenso für die Parabel und die Hyperbel, wenn bei letzterer die Tangenten an denselben Zweig gezogen sind.) b) Die festen Tangenten sind an verschiedene Zweige der Hyperbel gelegt. Es seien (Fig. 14) PH und JK die festen, PG die bewegliche Tangente.

$$\begin{aligned} \text{Da } \sphericalangle KFG &= \tfrac{1}{2}(2R + JFG) \\ \sphericalangle PFG &= \tfrac{1}{2} HFG \\ \hline \text{so folgt } \sphericalangle KFP &= R + \tfrac{1}{2}(JFG - HFG) \\ &= R - \tfrac{1}{2} HFJ. \end{aligned}$$

Je nach der Lage der beweglichen Tangente kann sich auch für $\sphericalangle KFP$ der Wert $R + \frac{1}{2} HFJ$ ergeben.

2) Die auf einer beliebigen Tangente von den Scheiteltangenten einer Ellipse oder Hyperbel begrenzte Strecke erscheint von einem Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel.

Beweis. In den Formeln des vorangehenden Beweises wird $\sphericalangle HFG = 2R$, $\sphericalangle HFJ = 0$, womit die Behauptung sich ergiebt.

Geometrischer Ort. Ein Ort für die Brennpunkte von Ellipse oder Hyperbel ist der Kreis über derjenigen Strecke einer Tangente, welche zwischen die beiden Scheiteltangenten fällt.

Aufgabe. Eine Ellipse oder Hyperbel aus den Scheiteltangenten und einem Paar paralleler Tangenten zu zeichnen. (Determination!)

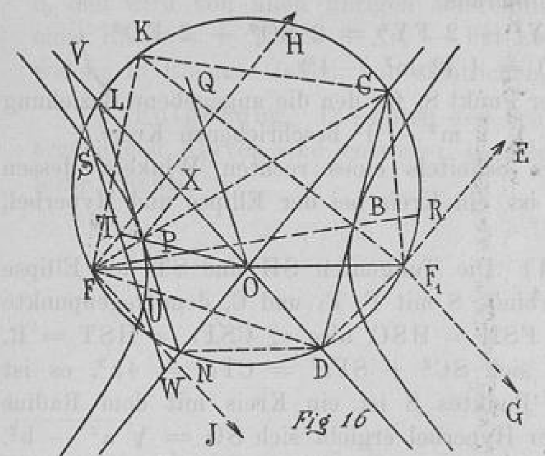


Fig 16

3) Die Schnittpunkte einer Tangente der Hyperbel mit den Asymptoten liegen mit den Brennpunkten auf einem Kreise.

Beweis. Die Tangente in B schneide die Asymptoten in C und D; die Brennstrahlen F_1E und F_1G, bezw. FH und FJ nach den Berührungspunkten der Asymptoten sind letzteren parallel. Nach 27, 1a ist nun $\sphericalangle\ CF_1D = \frac{1}{2}(4\ R - EF_1G)$ und $\sphericalangle\ CFD = \frac{1}{2}\ HFJ$, womit $\sphericalangle\ CF_1D + CFD = 2\ R$. CDF_1 ist also ein Kreisviereck.

Aufgabe. Von einer Hyperbel sind Asymptoten und Brennpunkte gegeben; eine beliebige Tangente zu konstruieren.

4) Die auf einer Tangente der Hyperbel von den Asymptoten begrenzte Strecke wird im Berührungspunkt halbiert.

Beweis. Um irgend einen Punkt der imaginären Achse sei ein Kreis beschrieben, der durch die Brennpunkte geht; es ergeben sich dadurch die Tangenten CD und LN. Ziehe F_1B bis zum Schnitt mit dem Kreise in K; dieser wird ausserdem von der durch F zu Asymptote OC gezogenen Parallelen in H, von FB in R getroffen. Da $\sphericalangle\ HFC = CFR$ (25), so ist arc. HC = arc. CR. Aus FH || CN und ND || FF_1 folgt weiter arc. HC = arc. FN = arc. DF_1. Man hat also arc. CR = arc. DF_1 und auch arc. CF_1 = arc. DR, oder $\sphericalangle\ CKF_1 = DFR$. Da ausserdem $\sphericalangle\ FBD = DBF_1 = KBC$, so ergiebt sich aus den Dreiecken FBD und KBC auch $\sphericalangle\ FDB = KCB$. Hieraus folgt arc. FKC = arc. KFD und schliesslich arc. KC = arc. FD, also KC = FD. Es zeigt sich nun, dass $\triangle\ FBD \cong KBC$, und demnach DB = BC ist.

5) Die Schnittpunkte dreier Parabeltangenten liegen mit dem Brennpunkte auf einem Kreise.

Beweis. (Fig. 15). Die Tangenten PH und PG werden von der dritten Tangente JK geschnitten. Da $\sphericalangle\ JPK = \frac{1}{2}\ HFG$ (26) und $\sphericalangle\ JFK = \frac{1}{2}(4\ R - HFG)$ (27) so ist $\sphericalangle\ JPK + JFK = 2\ R$, also PKFJ ein Kreisviereck.

Aufgabe. Von einer Parabel sind 2 Tangenten und der Brennpunkt gegeben; weitere Tangenten zu zeichnen.

Streckenbeziehungen bei den Kurven zweiter Ordnung.

28. **Hilfssatz.** Der Ort eines Punktes, für den die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von zwei festen Punkten einem gegebenen Quadrate gleich ist, ist ein Kreis.

Beweis. Es seien (Fig. 13) F und F_1 die festen Punkte mit einem Abstande = l; Punkt S liege so, dass für ihn die Beziehung $SF^2 + SF_1^2 = m^2$ stattfinde. Zieht man SO nach der Mitte O von FF_1 und fällt FY sowie $F_1X \perp SO$, so hat man

$$SF^2 = (SO + OY)^2 + FY^2$$
$$SF_1{}^2 = (SO - OX)^2 + F_1X^2$$

Da $OY = OX$ und $FY = F_1X$, so ergiebt sich hieraus

$$m^2 = SF^2 + SF_1{}^2 = 2\,SO^2 + 2\,OY^2 + 2\,FY^2 = 2\,SO^2 + 2\,FO^2$$

und damit $SO^2 = \frac{1}{2}(m^2 - 2\,FO^2) = \frac{1}{4}(2\,m^2 - l^2)$.

Der Wert für SO ist unveränderlich; jeder Punkt S, für den die angegebene Beziehung gilt, liegt also auf einem um O mit Radius $= \frac{1}{2}\sqrt{2\,m^2 - l^2}$ beschriebenen Kreis.

Geometrischer Ort. Der Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen Schenkel eine Kurve zweiter Ordnung berühren, ist ein Kreis bei der Ellipse und Hyperbel, sowie die Leitlinie bei der Parabel.

Beweis. a) (Für Ellipse und Hyperbel.) Die Tangenten SH und ST der Ellipse (Fig. 13) stehen senkrecht auf einander. Man verbinde S mit F. F_1 und C, dem Gegenpunkte von F in Bezug auf SH. Es ist nun $\sphericalangle F_1ST = FSH = HSC$, also $\sphericalangle CSF_1 = HST = R$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck CSF_1 ergiebt sich $SC^2 + SF_1{}^2 = CF_1{}^2 = 4a^2$, es ist somit auch $SF^2 + SF_1{}^2 = 4a^2$. Der Ort des Punktes S ist ein Kreis mit dem Radius $SO = \frac{1}{2}\sqrt{8a^2 - 4c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Bei der Hyperbel ergiebt sich $SO = \sqrt{a^2 - b^2}$.

b) (Für die Parabel.) Fig. 15 giebt $\sphericalangle CPF = 2\,HPF$, $\sphericalangle FPE = 2\,FPG$, also $\sphericalangle CPE = 2\,HPG$. Für $\sphericalangle HPG = R$ wird $\sphericalangle CPE = 2\,R$, d. h. P liegt auf der Leitlinie CE.

Folgerung. Die Tangenten der Parabel aus einem Punkte der Leitlinie stehen senkrecht auf einander.

29. **Mittlere Proportionalen.** Die halbe kleinere Achse der Ellipse (Strecke b der Hyperbel) ist mittlere Proportionale zu den Abständen der Brennpunkte von einer beliebigen Tangente.

Beweis. (Ellipse) Figur 8 liefert für die Tangente CD die Beziehungen

$$FC.\ F_1D = FC.\ FJ = FA.\ FA_1 = (a - c)\,(a + c) = b^2.$$

(Entsprechend für die Hyperbel.)

2) Der Brennstrahl nach dem Schnittpunkte zweier Tangenten der Parabel ist mittlere Proportionale zu den Brennstrahlen nach den Berührungspunkten.

Beweis. Fig. 15 giebt $\sphericalangle \alpha = \mu = FPG$, $\sphericalangle \delta = \nu = FPH$, woraus $\triangle\, HFP \sim PFG$ und damit die Behauptung folgt.

30. **Inhaltsgleiche Dreiecke.** Bei der Hyperbel haben alle Dreiecke, welche durch die Asymptoten und eine Tangente gebildet werden, gleichen Flächeninhalt.

Beweis. Aus Fig. 16 folgt für die Tangente CD CO. DO = CO. NO = $FO^2 = e^2$, das Produkt der auf die Asymptoten fallenden Seiten des $\triangle$ COD ist unveränderlich, also auch dessen Inhalt für jede Lage von CD.

Die Kurven zweiter Ordnung als Kegelschnitte.

31. **Schnittebenen einer Kegelfläche.** Eine durch die Spitze eines senkrechten Kreiskegels gelegte Ebene kann diesen a) nicht schneiden, b) nach einer Mantellinie berühren und c) nach zwei Mantellinien schneiden. Eine beliebige Ebene parallel zu einer der unter a angeführten Ebenen — Ebene 1. Art — wird von sämtlichen Mantellinien der Kegelfläche geschnitten. (Da sämtliche Mantellinien die Ebene a in der Spitze des Kegels schneiden, so

schneiden sie auch die zu a parallele Ebene.) Eine beliebige Ebene parallel zu einer Ebene b — Ebene 2. Art — hat eine ihr parallele Mantellinie, die Berührungsmantellinie der Ebene b, und wird von allen übrigen Mantellinien geschnitten. Eine beliebige Ebene parallel zu einer Ebene c — Ebene 3. Art — hat zwei zu ihr parallele Mantellinien, nämlich diejenigen, welche in Ebene c fallen, von sämtlichen übrigen Mantellinien wird sie geschnitten.

Folgerung. Die durch den Schnitt der Kegelfläche mit Ebenen der 3 Arten sich ergebenden Kurven sind entweder geschlossen, oder haben sie einen bezw. zwei unendlich ferne Punkte.

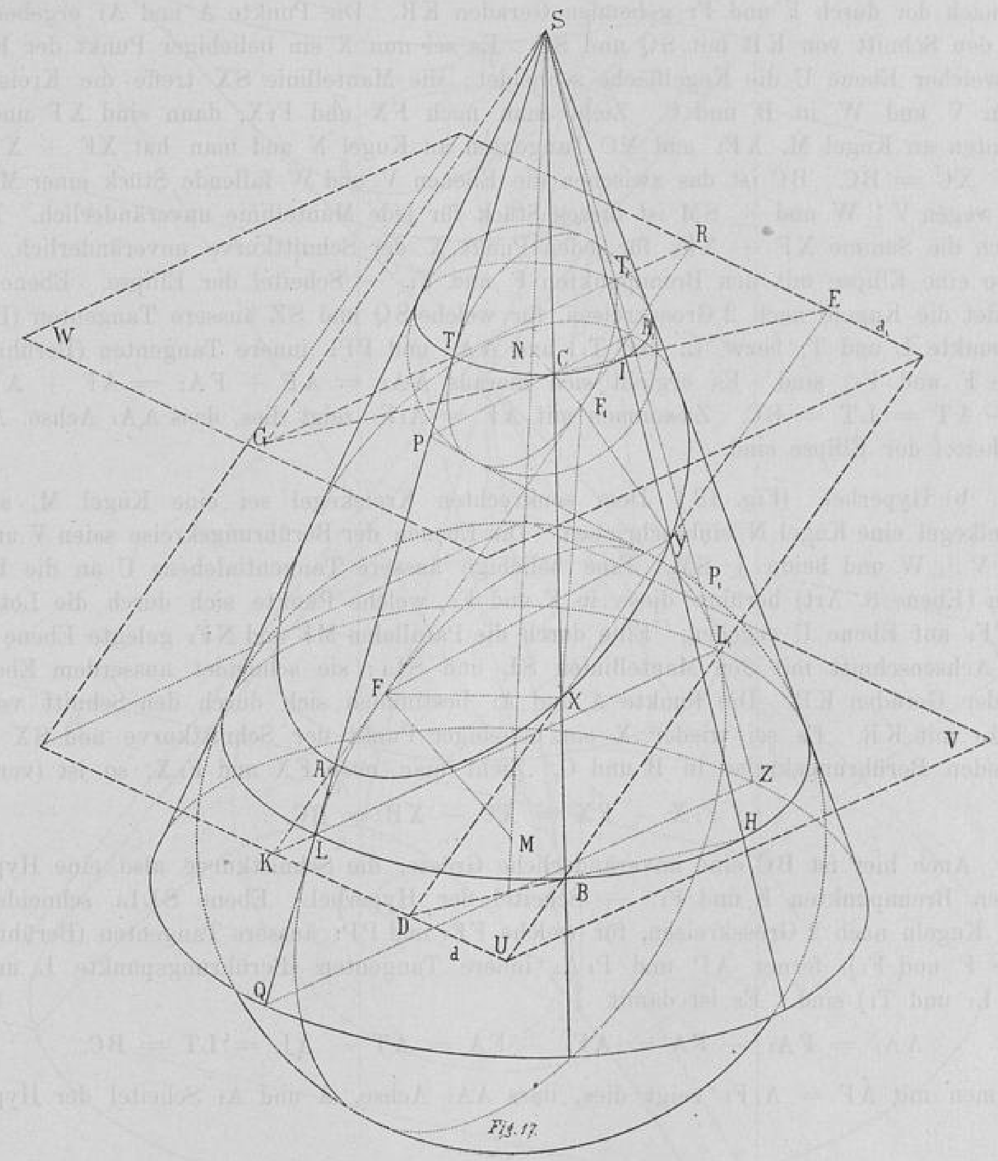


Fig. 17.

32. **Ellipse, Hyperbel und Parabel sind Kegelschnitte.** Eine Ebene 1., 3. oder 2. Art schneidet einen senkrechten Kreiskegel nach einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel.

Beweis. a) Ellipse. (Fig. 17.) Der Kegelfläche seien 2 Berührungskugeln M und N einbeschrieben, welche sie nach 2 Kreisen berühren, deren Ebenen V und W unter sich parallel und beide $\perp$ Achse SM sind. Eine innere Tangentialebene U an die beiden Kugeln (Ebene 1. Art) berühre diese in den Punkten F und F_1, die sich durch die Lote MF und NF_1 auf Ebene U ergeben. Eine durch die Parallelen MF und NF_1 gelegte Ebene bestimmt auf der Kegelfläche den Achsenschnitt SQZ; sie ist ausserdem $\perp$ Ebene U und schneidet diese nach der durch F und F_1 gehenden Geraden KR. Die Punkte A und A_1 ergeben sich durch den Schnitt von KR mit SQ und SZ. Es sei nun X ein beliebiger Punkt der Kurve, nach welcher Ebene U die Kegelfläche schneidet; die Mantellinie SX treffe die Kreise der Ebenen V und W in B und C. Zieht man noch FX und F_1X, dann sind XF und XB Tangenten an Kugel M, XF_1 und XC Tangenten an Kugel N und man hat $XF + XF_1 = XB + XC = BC$. BC ist das zwischen die Ebenen V und W fallende Stück einer Mantellinie; wegen $V \parallel W$ und $\perp$ SM ist dieses Stück für jede Mantellinie unveränderlich. Damit ist auch die Summe $XF + XF_1$ für jeden Punkt X der Schnittkurve unveränderlich, diese ist also eine Ellipse mit den Brennpunkten F und F_1. — Scheitel der Ellipse. Ebene SQZ schneidet die Kugeln nach 2 Grosskreisen, für welche SQ und SZ äussere Tangenten (Berührungspunkte L und T, bezw. L_1 und T_1) und AA_1 und PP_1 innere Tangenten (Berührungspunkte F und F_1) sind. Es ergiebt sich hieraus $AA_1 = AF + FA_1 = AF + AF_1 = AL + AT = LT = BC$. Zusammen mit $AF = A_1F_1$ zeigt dies, dass AA_1 Achse, A und A_1 Scheitel der Ellipse sind.

b) Hyperbel. (Fig. 18.) Dem senkrechten Kreiskegel sei eine Kugel M, seinem Scheitelkegel eine Kugel N einbeschrieben. Die Ebenen der Berührungskreise seien V und W, wobei $V \parallel W$ und beide $\perp$ SM. Eine beliebige äussere Tangentialebene U an die beiden Kugeln (Ebene 3. Art) berühre diese in F und F_1, welche Punkte sich durch die Lote MF und NF_1 auf Ebene U ergeben. Eine durch die Parallelen MF und NF_1 gelegte Ebene giebt einen Achsenschnitt mit den Mantellinien SL und SL_1; sie schneidet ausserdem Ebene U nach der Geraden KR. Die Punkte A und A_1 bestimmen sich durch den Schnitt von SL und SL_1 mit KR. Es sei wieder X ein beliebiger Punkt der Schnittkurve und SX treffe die beiden Berührungskreise in B und C. Zieht man noch FX und F_1X, so ist (vergl. a)

$$F_1X - FX = XC - XB = BC.$$

Auch hier ist BC eine unveränderliche Grösse, die Schnittkurve also eine Hyperbel mit den Brennpunkten F und F_1. — Scheitel der Hyperbel. Ebene SLL_1 schneidet die beiden Kugeln nach 2 Grosskreisen, für welche FF_1 und PP_1 äussere Tangenten (Berührungspunkte F und F_1), ferner AP und P_1A_1 innere Tangenten (Berührungspunkte L und T, bezw. L_1 und T_1) sind. Es ist damit

$$AA_1 = FA_1 - FA = AF_1 - FA = AT - AL = LT = BC.$$

Zusammen mit $AF = A_1F_1$ zeigt dies, dass AA_1 Achse, A und A_1 Scheitel der Hyperbel sind.

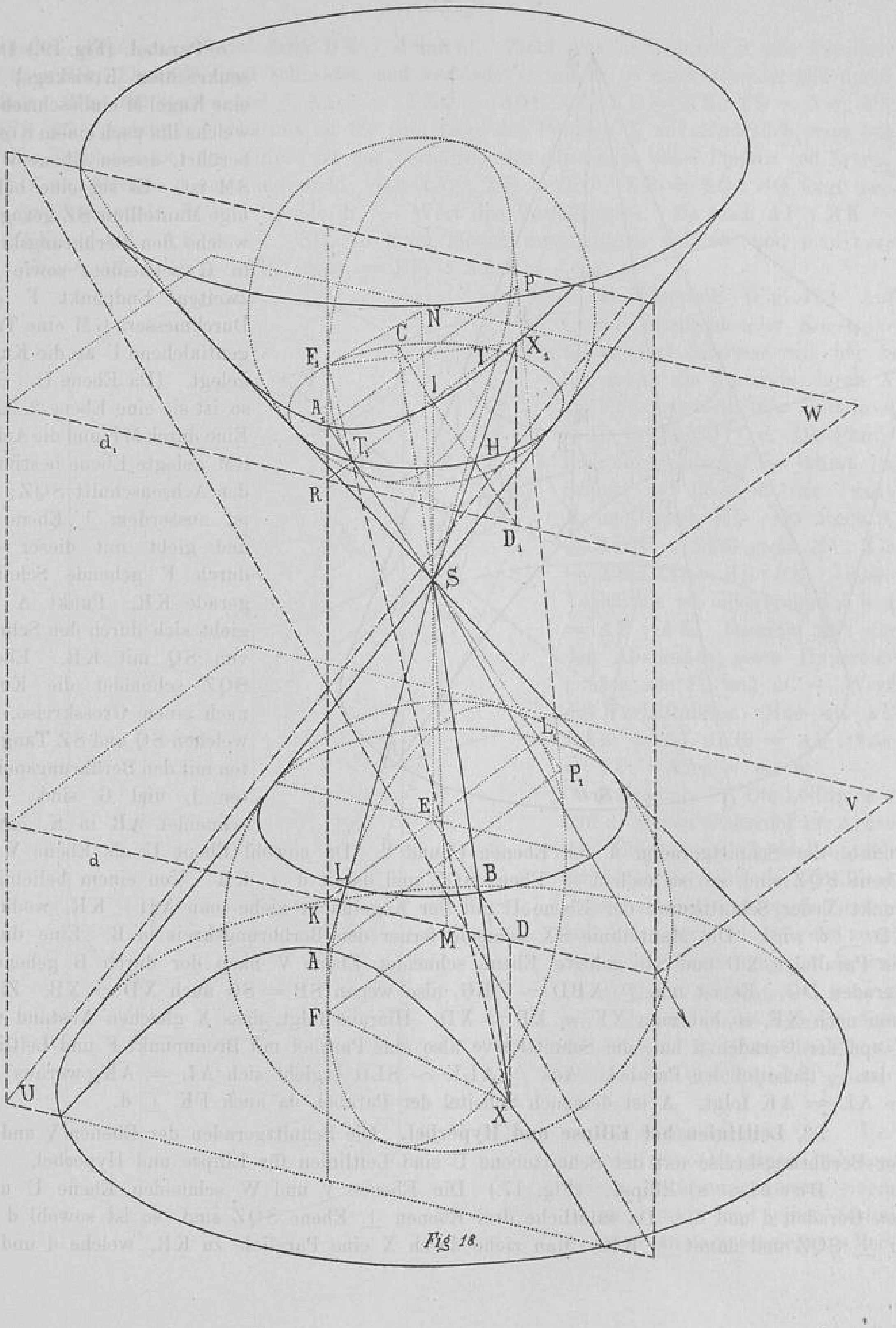


Fig. 18.

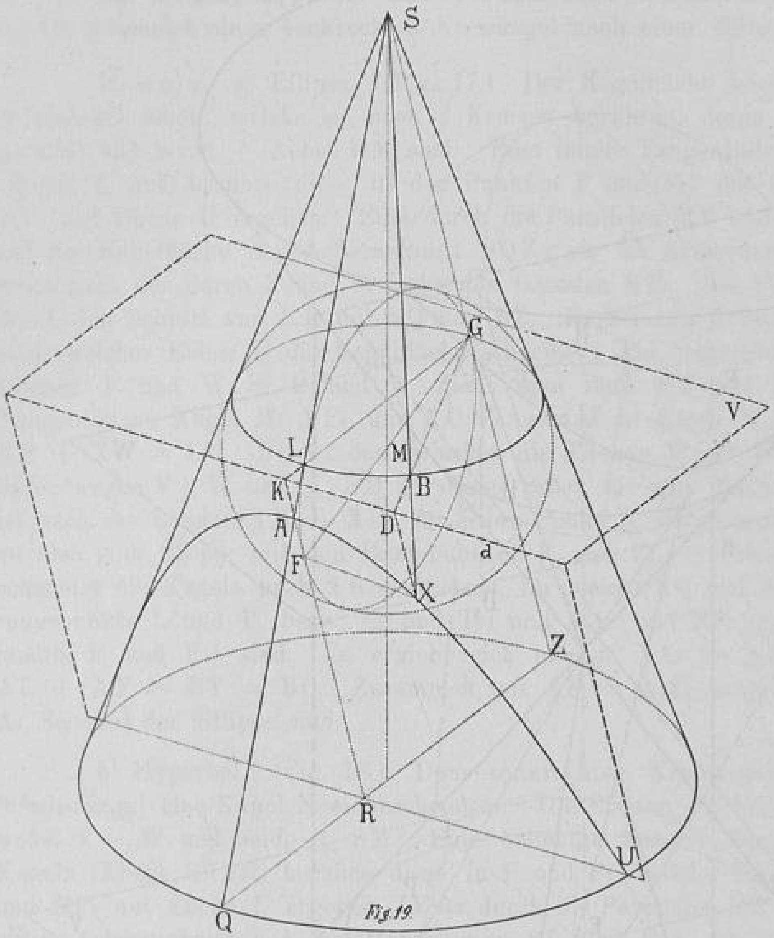


Fig. 19.

c) Parabel. (Fig. 19.) Dem senkrechten Kreiskegel sei eine Kugel M einbeschrieben, welche ihn nach einem Kreise berührt, dessen Ebene V $\perp$ SM ist. Es sei eine beliebige Mantellinie SZ gezogen, welche den Berührungskreis in G schneidet, sowie im zweiten Endpunkt F des Durchmessers GM eine Tangentialebene U an die Kugel gelegt. (Da Ebene U $\parallel$ GZ, so ist sie eine Ebene 2. Art.) Eine durch MF und die Achse SM gelegte Ebene bestimmt den Achsenschnitt SQZ; sie ist ausserdem $\perp$ Ebene U und giebt mit dieser die durch F gehende Schnittgerade KR. Punkt A ergiebt sich durch den Schnitt von SQ mit KR. Ebene SQZ schneidet die Kugel nach einem Grosskreise, für welchen SQ und SZ Tangenten mit den Berührungspunkten L und G sind. LG schneidet AR in K, einem Punkte der Schnittgeraden d der Ebenen U und V. Da sowohl Ebene U als Ebene V $\perp$ Ebene SQZ sind, so ist auch d $\perp$ Ebene SQZ und damit d $\perp$ KR. Von einem beliebigen Punkt X der Schnittkurve der Ebene U mit der Kegelfläche ziehe man XD $\parallel$ KR, wodurch XD $\perp$ d wird. Die Mantellinie SX schneide ferner den Berührungskreis in B. Eine durch die Parallelen XD und SG gelegte Ebene schneidet Ebene V nach der durch B gehenden Geraden DG. Es ist nun $\triangle$ XBD $\sim$ SBG, also wegen SB = SG auch XD = XB. Zieht man noch XF, so hat man XF = XB = XD. Hieraus folgt, dass X gleichen Abstand von F und der Geraden d hat, die Schnittkurve also eine Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie d ist. — Scheitel der Parabel. Aus $\triangle$ ALK $\sim$ SLG ergiebt sich AL = AK, woraus AF = AL = AK folgt. A ist demnach Scheitel der Parabel, da auch FK $\perp$ d.

33. **Leitlinien bei Ellipse und Hyperbel.** Die Schnittgeraden der Ebenen V und W der Berührungskreise mit der Schnittebene U sind Leitlinien für Ellipse und Hyperbel.

Beweis. a) Ellipse. (Fig. 17.) Die Ebenen V und W schneiden Ebene U nach den Geraden d und d_1. Da sämtliche drei Ebenen $\perp$ Ebene SQZ sind, so ist sowohl d als d_1 $\perp$ SQZ und damit $\perp$ KR. Man ziehe durch X eine Parallele zu KR, welche d und d_1

in D und E schneidet. Es ist dann $DE \perp d$ und d_1. Zieht man noch durch S eine Parallele zu KR, welche Ebene W in G schneidet, und verbindet G mit E, so muss diese Gerade durch C gehen. Man hat nun wegen $\triangle XDB \sim XEC \sim SGC$ $XF : XD = XB : XD = XC : XE = SC : SG$. Letzteres Verhältnis ist für jede Lage des Punktes X unveränderlich, man hat also das Ergebnis: Bei der Ellipse ist das Verhältnis des Abstandes eines Punkts von Brennpunkt F und Gerade d unveränderlich. Aus $XF_1 : XE = XC : XE = SC : SG$ folgt dasselbe für Brennpunkt F_1 und Gerade d_1. — Wert des Verhältnisses. Da auch $AF : AK = AL : AK = AT : AR = ST : SG$, so kann hievon ausgegangen werden, und man hat: $AF : AK = AL : AK = AP : AA_1 = FF_1 : AA_1 = e : a$.

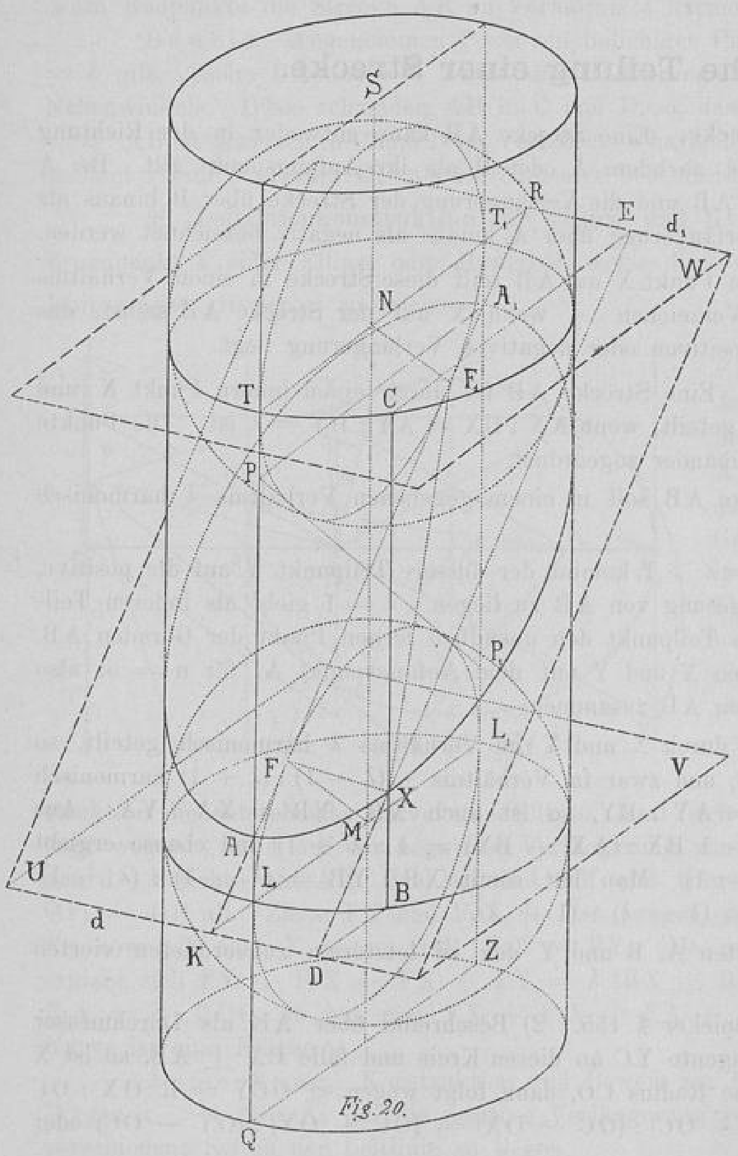


Fig. 20.

b) Hyperbel. (Fig. 18.) Auf Grund entsprechender Konstruktionen und Schlüsse wie bei a) hat man: die Parallele durch X zu FF_1 schneidet die Gerade d in D, wobei $XD \perp d$. Die Parallele durch S zu FF_1 liefert im Schnitt mit Ebene V den Punkt E, und Gerade ED geht durch B. $\triangle XDB \sim SEB$ giebt $XF : XD = XB : XD = SB : SE$. Dieses Verhältnis ist unveränderlich und $= AF : AK$. Dasselbe gilt von den Abständen eines Hyperbelpunkts von F_1 und d_1. — Wert des Verhältnisses. Man hat $AF : AK = AL : AK = AP : AA_1 = FF_1 : AA_1 = e : a$.

Zusätze. 1) Die Leitlinien d und d_1 stehen senkrecht zur Achse der Ellipse und Hyperbel. Sie schneiden die Achse bei der Ellipse ausserhalb, bei der Hyperbel innerhalb der beiden Scheitel, und zwar in gleicher Entfernung von diesen.

2) Das Verhältnis $e : a = \lambda$ wird als numerische Excentricität bezeichnet. Es ist bei der Ellipse kleiner, bei der Hyperbel grösser als 1.

34. Geometrischer Ort. Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von einem festen Punkte und einer festen Geraden ein vorgeschriebenes Ver-

hältnis λ haben, ist ein Kegelschnitt, und zwar Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $\lambda \lesseqgtr 1$.

35. **Schnitt eines senkrechten Kreiscylinders durch eine Ebene.** Eine Ebene kann einen Kreiscylinder entweder nach zwei Mantellinien oder einer geschlossenen Kurve schneiden. In diesem Falle ist die Schnittkurve eine Ellipse, wie sich aus Fig. 20 in wörtlicher Uebereinstimmung mit Beweis 32a ergiebt. (Das Vorhandensein der Leitlinien folgt ähnlich wie bei Beweis 33a; es ist nämlich $XF : XD = XB : XD = BC : DE$ und damit unveränderlich.)

Harmonische Teilung einer Strecke.

36. 1) **Richtung einer Strecke.** Eine Strecke AB kann entweder in der Richtung AB oder BA durchlaufen werden, je nachdem A oder B als ihr Anfangspunkt gilt. Bei A als Anfangspunkt soll die Richtung AB und die Verlängerung der Strecke über B hinaus als positiv, die Richtung BA und die Verlängerung über A hinaus als negativ bezeichnet werden.

2) **Teilungsverhältnis.** Ein Punkt X auf AB teilt diese Strecke in einem Verhältnis $AX : BX = \lambda$. λ hat dabei das Vorzeichen —, wenn X auf der Strecke AB selbst, das Vorzeichen +, wenn X auf ihrer positiven oder negativen Verlängerung liegt.

37. **Harmonische Teilung.** Eine Strecke AB ist durch einen innern Punkt X und einen äussern Punkt Y harmonisch geteilt, wenn $AX : BX = AY : BY = \lambda$ ist. Die Punkte A und B, sowie X und Y heissen einander zugeordnet.

1. Aufgabe. Eine Strecke AB soll in einem gegebenen Verhältnis λ harmonisch geteilt werden. (S. Spieker § 155.)

Folgerung. Für $m : n = \lambda > 1$ kommt der äussere Teilpunkt Y auf die positive, für $\lambda < 1$ auf die negative Verlängerung von AB zu liegen. $\lambda = 1$ giebt als inneren Teilpunkt den Mittelpunkt, als äusseren Teilpunkt den unendlich fernen Punkt der Geraden AB. Für $m = o$, also auch $\lambda = o$ fallen X und Y mit dem Anfangspunkt A, für $n = o$, also $\lambda = \infty$ mit dem Endpunkte B von AB zusammen.

Zusatz. Ist Strecke AB durch X und Y im Verhältnis λ harmonisch geteilt, so ist auch Strecke XY durch A und B, und zwar im Verhältnis $\pm (\lambda - 1) : (\lambda + 1)$ harmonisch geteilt. Beweis. Da $AX : BX = AY : BY$, so ist auch $XB : YB = XA : YA$. Aus $AX : BX = \lambda$ folgt weiter für $\lambda > 1$ $BX : (AX + BX) = 1 : (\lambda + 1)$ und ebenso ergiebt sich $BY : (AY - BY) = 1 : (\lambda - 1)$. Man hat somit $XB : YB = (\lambda - 1) : (\lambda + 1)$. Für $\lambda < 1$ findet sich $XB : YB = (1 - \lambda) : (1 + \lambda)$.

2. Aufgabe. Zu 3 Punkten A, B und Y den zu letzterem zugeordneten vierten harmonischen Punkt X zu finden.

Konstruktion. 1) S. Spieker § 155. 2) Beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis. Ziehe aus Y eine Tangente YC an diesen Kreis und fälle $CX \perp AB$, so ist X der gesuchte Punkt. Beweis. Ziehe Radius CO, dann folgt wegen $\sphericalangle\, OCY = R$ $OX : OC = OC : OY$ und damit auch $(OX + OC) : (OC - OX) = (OC + OY) : (OY - OC)$ oder $AX : BX = AY : BY$.

Zusatz. Ist Strecke AB durch X und Y harmonisch geteilt, so ist die Hälfte der Strecke mittlere Proportionale zu den Entfernungen ihres Mittelpunkts von den Punkten X und Y. Beweis. Aus der vorangehenden Konstruktion folgt $AO^2 = CO^2 = OX \cdot OY$.

Konstruktion der Ellipse und Hyperbel aus den Leitlinien.

38. **Geometrischer Ort.** Der Ort des Punktes, dessen Abstände von 2 festen Punkten A und B das gegebene Verhältnis λ haben, ist ein Kreis über derjenigen Strecke als Durchmesser, deren Endpunkte die Strecke AB im Verhältnis λ harmonisch teilen. (Kreis des Apollonius.)

Beweis. Angenommen P sei ein beliebiger Punkt, für den die Beziehung $PA : PB = \lambda$ gilt. Ziehe PA und PB, sowie die Halbierungslinien des Winkels APB und seines Nebenwinkels. Diese schneiden AB in C und D so, dass $AC : BC = AD : BD = AP : BP = \lambda$. AB ist demnach in C und D im Verhältnis λ harmonisch geteilt. Da ferner $\sphericalangle CPD = R$, so liegt P auf dem über CD als Durchmesser beschriebenen Kreis.

39. **Leitlinienkonstruktion für Ellipse und Hyperbel.** Gegeben ist Leitlinie d und Brennpunkt F einer Ellipse oder Hyperbel, sowie die numerische Excentrizität $\lambda \lessgtr 1$. Die Ellipse bezw. Hyperbel zu zeichnen.

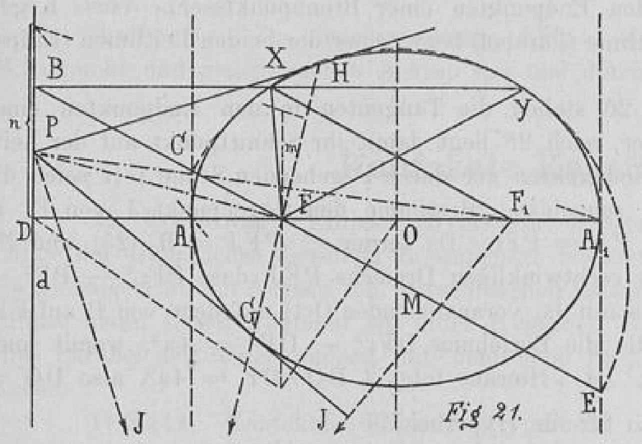


Fig. 21.

Konstruktion. (Ellipse.) Fälle $FD \perp d$ und teile FD (F Anfangspunkt der Strecke!) harmonisch im Verhältnis λ. Hiedurch ergeben sich die Scheitel A und A_1. Errichte in A und A_1 Lote auf FD. Ziehe durch F eine beliebige Gerade, welche d und die beiden Lote in B, C und E schneidet. Beschreibe über CE als Durchmesser einen Kreis und ziehe durch B eine Parallele zu FD. Sie schneidet den Kreis in den Ellipsenpunkten X und Y. $(FX : BX = FC : BC = FA : DA = \lambda.)$

Zusätze. 1) Dass bei obiger Konstruktion die entstehende Kurve eine Ellipse, lässt sich unmittelbar nachweisen. Punkt A_1 liegt wegen $\lambda < 1$ auf der negativen Verlängerung von FD, also mit A auf derselben Seite von d. Errichte auf AA_1 das Mittellot OM und trage von O aus auf OA_1 eine Strecke $OF_1 = OF$ ab. Ziehe FY und F_1X, so ist (wegen der symmetrischen Lage von F und F_1, sowie X und Y gegen OM) $F_1X = FY$. Da nun $FX : BX = FY : BY = \lambda$, so ergiebt sich $FX + F_1X = FX + FY = \lambda\,(BX + BY) = \lambda \cdot 2\,DO$. Da ebenso $FA + F_1A = \lambda \cdot 2\,DO$, so hat man $FX + F_1X = FA + F_1A = AA_1$, d. h. die konstruierte Kurve ist eine Ellipse.

Anmerkung. Konstruktion und Beweis ist für die Hyperbel ganz entsprechend. Wegen $\lambda > 1$ fällt A_1 auf die positive Verlängerung von FD, d. h. A und A_1 kommen auf verschiedene Seiten der Leitlinie zu liegen.

2) Dass, wie schon 33 gezeigt, λ den Wert $\frac{e}{a}$ besitzt, kann wie folgt nachgewiesen werden. Da die Strecke FD durch A und A_1 im Verhältnis λ geteilt ist, wobei für die Ellipse $\lambda < 1$, so ist (37. 1) das Teilungsverhältnis für die durch F und D geteilte Strecke AA_1 $FA : FA_1 = (1 - \lambda) : (1 + \lambda)$. Hieraus ergiebt sich $(FA + FA_1) : (FA_1 - FA) = 1 : \lambda$, oder $a : e = 1 : \lambda$, also $\lambda = e : a$. Für die Hyperbel, für welche $\lambda > 1$, ist entsprechend: $FA : FA_1 = (\lambda - 1) : (\lambda + 1)$, also $(FA + FA_1) : (FA_1 - FA) = \lambda : 1$, oder $e : a = \lambda : 1$, d. h. $\lambda = e : a$.

Sätze über die Leitlinien.

40. 1) **Abstand der Leitlinie vom Mittelpunkt.** Der Abstand der Leitlinie einer Ellipse oder Hyperbel vom Mittelpunkt ist $= a^2 : e$. Beweis. Nach 37. 2 ist $OA^2 = OF \cdot OD$, also $a^2 = e \cdot OD$, womit $OD = a^2 : e$.

Aufgabe. Bestimme die Leitlinie, wenn Scheitel und Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel gegeben sind! (In Figur 21 ausgeführt.)

2) Geometrischer Ort. Der Ort des Punktes, für den die Quadrate seiner Entfernungen von zwei festen Punkten eine vorgeschriebene Differenz haben, ist eine auf der Verbindungslinie der Punkte senkrechte Gerade. (Spieker § 255.)

3) Satz. Die Tangenten in den Endpunkten einer Brennpunktssehne eines Kegelschnitts schneiden einander auf der Leitlinie (Parabel) bezw. einer der beiden Leitlinien (Ellipse oder Hyperbel).

Beweis. a) Parabel. Nach 26 stehen die Tangenten in den Endpunkten einer Brennpunktssehne senkrecht auf einander, nach 28 liegt damit ihr Schnittpunkt auf der Leitlinie. b) Ellipse. (Fig. 21.) In den Endpunkten der durch F gehenden Sehne GH seien die Tangenten gezogen, die einander in P schneiden. Bestimme den Gegenpunkt J von F_1 in Bezug auf PG und ziehe PJ, dann ist $PJ = PF_1$. Da ferner $\sphericalangle PFJ = R$ (25) und $FJ = 2a$ (13) so ergiebt sich mittelst des rechtwinkligen Dreiecks PFJ dass $PF_1^2 - PF^2 = PJ^2 - PF^2 = FJ^2 = 4a^2$. P liegt somit (s. voranstehenden Ort) auf dem von P auf FF_1 gefällten Lote PD. Für D gilt ebenfalls die Beziehung $DF_1^2 - DF^2 = 4a^2$, womit auch $(DO + OF_1)^2 - (DO - OF)^2 = 4a^2$ ist. Hieraus folgt $4\, DO \cdot OF = 4a^2$, also $DO = \frac{a^2}{e}$. PD ist demnach Leitlinie. (Ebenso für die Hyperbel.)

Folgerung. Aus einem Brennpunkte eines Kegelschnitts erscheint das auf einer Tangente vom Berührungspunkt bis zur Leitlinie reichende Stück unter rechtem Winkel.

Aufgabe. Die Tangente in einem Punkte eines Kegelschnitts zu ziehen, dessen Brennpunkte und Leitlinien gegeben sind.

Aehnliche Kegelschnitte.

41. **Erklärung.** Ellipsen (oder Hyperbeln), welche das gleiche Achsenverhältnis haben, heissen ähnlich. Aus der sich ergebenden Aehnlichkeit der Bestimmungsdreiecke folgt weiter, dass überhaupt Aehnlichkeit vorhanden ist, wenn zwei der Bestimmungsstücke a, b und e des einen Kegelschnitts den entsprechenden des andern proportional sind.

Satz. In ähnlichen Kegelschnitten sind gleichliegende Durchmesser den Achsen proportional.

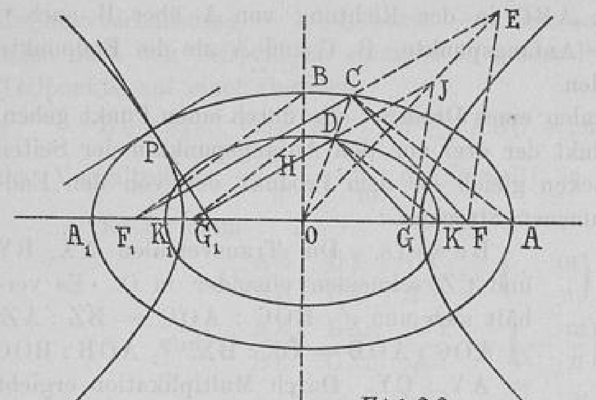


Fig. 22.

Beweis. (Ellipse.) Gegeben seien die Ellipsen mit den Scheiteln A und A_1, bezw. K und K_1 und den Brennpunkten F und F_1 bezw. G und G_1, und es verhalte sich $AA_1 : KK_1 = FF_1 : GG_1$. Ziehe durch F_1 und G_1 Parallelen, welche die zugehörigen Ellipsen in C und D schneiden. Verlängere F_1C und G_1D um ihre Ergänzungsstrahlen CF und DG bis E und J. Wegen $F_1E : G_1J = F_1O : G_1O$ geht EJ durch O. Weiter ist $EF \parallel JG$ und es ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der gleichschenkligen Dreiecke CEF und DJG, dass $CE : DJ = EF : JG = EO : JO$, d. h. CD geht ebenfalls durch O. Daraus folgt $OC : OD = F_1O : G_1O = AA_1 : KK_1$. (Ebenso für die Hyperbel.)

Folgerung. In ähnlichen und ähnlich gelegenen, koncentrischen Kegelschnitten sind die Verbindungslinien der Endpunkte gleichliegender Durchmesser einander parallel. ($CA \parallel DK$).

Aufgabe. Zu einer gegebenen Ellipse eine ähnliche zu zeichnen, die denselben Mittelpunkt und gleichliegende Achsen hat und durch einen gegebenen Punkt geht.

Konfokale Kegelschnitte.

42. **Erklärung.** Ellipsen (Hyperbeln) heissen konfokal, wenn sie bei verschiedener Länge der Hauptachse dieselben Brennpunkte besitzen; Parabeln heissen konfokal, wenn sie bei gleichgerichteten Achsen und verschiedenen Leitlinien denselben Brennpunkt haben. Eine Ellipse heisst ferner konfokal mit einer Hyperbel, welche dieselben Brennpunkte hat, ebenso eine Parabel mit einer andern mit demselben Brennpunkt und entgegengesetzt gerichteter Achse.

1) Satz. Konfokale Ellipsen (Hyperbeln, Parabeln mit gleichgerichteten Achsen) schneiden einander nicht. (Hätten z. B. zwei konfokale Ellipsen einen Punkt gemein, so müsste für diesen die Summe der Brennstrahlen = der Achse der einen und andern Ellipse sein, was unmöglich ist. Bei zwei Parabeln müsste der gemeinschaftliche Punkt vom Brennpunkt und zwei verschiedenen Leitlinien gleichen Abstand haben.)

2) Satz. Eine Ellipse wird von jeder konfokalen Hyperbel, eine Parabel von jeder konfokalen Parabel mit entgegengesetzter Achsenrichtung unter rechten Winkeln geschnitten. (Fig. 22. Die Tangente der Hyperbel für einen gemeinschaftlichen Punkt P halbiert den Winkel der Brennstrahlen PF und PF_1, diejenige der Ellipse seinen Nebenwinkel. Entsprechend für 2 Parabeln.)

Aufgabe. Gegeben 3 Punkte. Die durch einen der Punkte gehende Ellipse und konfokale Hyperbel zu zeichnen, für welche die beiden andern gegebenen Punkte Brennpunkte sind.

Sätze über Transversalen eines Dreiecks.

43. **Erklärung.** Wird ein Dreieck ABC in der Richtung von A über B nach C durchlaufen, so können A, B und C als die Anfangspunkte, B, C und A als die Endpunkte der Seiten AB, BC und CA aufgefasst werden.

Satz des Ceva. Die Ecktransversalen eines Dreiecks, die durch einen Punkt gehen, schneiden die Gegenseiten so, dass das Produkt der drei von den Anfangspunkten der Seiten bis zu den Schnittpunkten genommenen Strecken gleich ist dem Produkt der von den Endpunkten bis zu diesen Schnittpunkten genommenen Strecken.

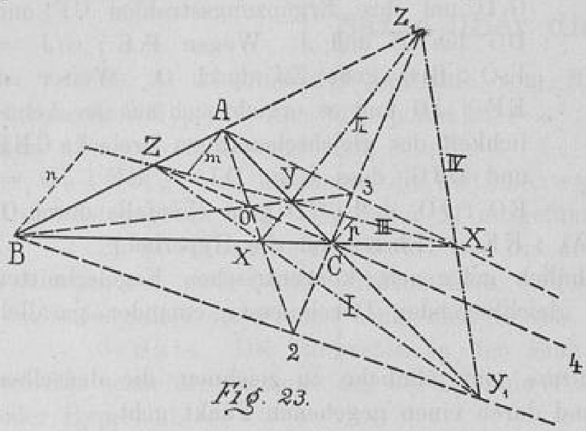


Fig. 23.

Beweis. Die Transversalen AX, BY und CZ schneiden einander in O. Es verhält sich nun $\triangle$ BOC : AOC = BZ : AZ, $\triangle$ AOC : AOB = CX : BX, $\triangle$ AOB : BOC = AY : CY. Durch Multiplikation ergiebt sich AZ · BX · CY = BZ · CX · AY.

Anmerkung. Der Satz verliert seine Richtigkeit, wenn O auf eine der Seiten fällt.

Zusatz. Die Beziehung $\frac{AZ \cdot BX \cdot CY}{BZ \cdot CX \cdot AY} = 1$ enthält 3 Teilungsverhältnisse der Dreiecksseiten. Da die Punkte X, Y, Z entweder alle 3 auf die Seiten des Dreiecks selbst, oder 2 von ihnen auf die Verlängerung von solchen fallen, so sind die Teilungsverhältnisse entweder sämtlich, oder nur eines negativ. Das Produkt erhält somit den Wert

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = -1.$$

Obiger Satz lautet damit in kürzerer Form: Die Ecktransversalen eines Dreiecks, welche durch einen Punkt gehen, schneiden die Gegenseiten so, dass das Produkt der Teilungsverhältnisse dieser Seiten = — 1 ist.

Satz des Menelaos. Eine Gerade schneidet die Seiten eines Dreiecks bezw. ihre Verlängerungen so, dass das Produkt der drei von den Anfangspunkten bis zu den Schnittpunkten jeder Seite genommenen Strecken gleich ist dem Produkt der drei von den Endpunkten bis zu diesen Schnittpunkten genommenen Strecken.

Beweis. Die Schnittgerade treffe die Seiten des Dreiecks ABC in X_1, Y und Z. Man ziehe durch die Ecken drei unter sich parallele Gerade bis zum Schnitt mit der Transversale, dann ist mit den Bezeichnungen der Figur 23: AZ : BZ = m : n, $BX_1 : CX_1$ = n : p, CY : AY = p : m, woraus AZ · BX_1 · CY = BZ · CX_1 · AY sich ergiebt.

Anmerkung. Die Transversale darf durch keine Ecke gehen.

Zusatz. Da die Transversale entweder zwei oder keine Seite des Dreiecks schneidet, so sind 2 Teilungsverhältnisse oder keines von ihnen negativ. Für ihr Produkt gilt somit:

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX_1}{CX_1} \cdot \frac{CY}{AY} = +1.$$

Der Satz kann demnach auch ausgesprochen werden: Eine Gerade schneidet die Seiten eines Dreiecks so, dass das Produkt der Teilungsverhältnisse = + 1 ist.

Umkehrung der Sätze des Ceva und Menelaos. Werden auf den Seiten eines Dreiecks, bezw. ihren Verlängerungen 3 Punkte so angenommen, dass das Produkt der Teilungsverhältnisse $= -1$, bezw. $+1$ ist, so schneiden im ersten Falle die Ecktransversalen nach den Teilpunkten einander in einem Punkte, und es liegen im zweiten Fall die 3 Teilpunkte auf einer Geraden.

Beweis. (Fig. 23.) Im $\triangle$ ABC seien die Seiten AB und CA in Z und Y nach den Verhältnissen $-\frac{m}{n}$, $-\frac{p}{m}$, die Seite BC in X und X_1 harmonisch im Verhältnis $\frac{n}{p}$ geteilt.

Es ist dann

$$1)\quad \frac{AZ}{BZ}\cdot\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY} = \left(-\frac{m}{n}\right)\left(-\frac{n}{p}\right)\left(-\frac{p}{m}\right) = -1$$

$$\text{und } 2)\quad \frac{AZ}{BZ}\cdot\frac{BX_1}{CX_1}\cdot\frac{CY}{AY} = \left(-\frac{m}{n}\right)\left(+\frac{n}{p}\right)\left(-\frac{p}{m}\right) = +1$$

Angenommen nun, es gehe im ersten Fall AX nicht durch den Schnittpunkt O von BY und CZ, so müsste AO die Seite BC in einem Punkte U schneiden. Es wäre dann

$$\frac{AZ}{BZ}\cdot\frac{BU}{CU}\cdot\frac{CY}{AY} = \left(-\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{BU}{CU}\cdot\left(-\frac{p}{m}\right) = -1,$$

woraus mit Hilfe von Gleichung 1 $\frac{BU}{CU} = -\frac{n}{p}$ sich ergiebt. Damit muss aber U mit X zusammenfallen, d. h. AX muss durch O gehen. — Der Beweis für den zweiten Fall wird entsprechend geführt.

Aufgabe. Die Seiten des Dreiecks ABC sind der Reihe nach in den Verhältnissen m : n, n : p und p : m harmonisch geteilt. Welche Ecktransversalen nach den Teilpunkten schneiden einander in einem Punkte und welche Teilpunkte liegen auf einer Geraden? (8 Fälle, s. Fig. 23.)

Harmonische Strahlen.

44. **Erklärung.** Vier Strahlen aus einem Punkte heissen harmonisch, wenn sie durch 4 harmonische Punkte gehen. Strahlen nach einander zugeordneten Punkten heissen ebenfalls zugeordnet.

1) Aufgabe. Ein harmonisches Strahlenbüschel zu zeichnen. Auflösung. 1) Mittelst der Erklärung. 2) Trage auf einer Geraden von einem Punkte X aus zwei Stücke XA = XB ab. Verbinde einen beliebigen Punkt S mit A, B und X und ziehe durch S eine Parallele zu AB. (A, B, X und der unendlich ferne Punkt von AB bilden eine harmonische Punktreihe.) 3) Halbiere den Winkel zweier einander schneidender Geraden und dessen Nebenwinkel. (Spieker § 159.)

2) Aufgabe. Zu drei Strahlen, von denen zwei einander zugeordnet sind, den 4. harmonischen Strahl zu zeichnen.

3) Satz. Zieht man zu einem Strahl eines harmonischen Büschels eine Parallele, so werden auf dieser durch die 3 andern Strahlen (bezw. ihre Verlängerungen) zwei unter sich gleiche Stücke abgeschnitten.

Beweis. Das harmonische Büschel sei durch die Verbindung von S mit den harmonischen Punkten ABXY entstanden. Man ziehe durch B eine Parallele zu SA, welche SX und SY in C und D schneidet. Es verhält sich nun SA : DB = AY : BY = AX : BX = SA : BC, also ist DB = BC. Dieselbe Beziehung gilt damit auch für jede zu SA parallele Gerade.

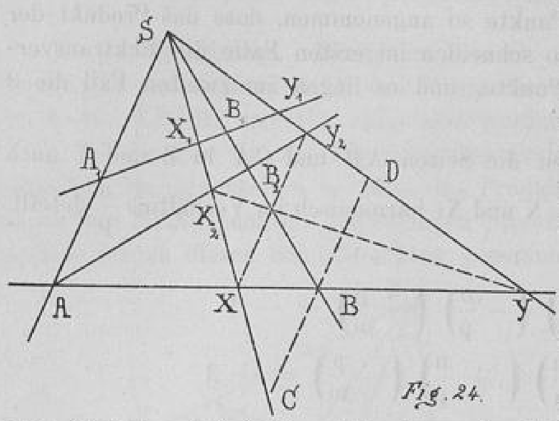


Fig. 24.

4. Satz. Ein harmonisches Büschel wird von jeder Geraden in 4 harmonischen Punkten geschnitten.

Beweis. Das harmonische Büschel sei durch die Verbindung von S mit den harmonischen Punkten $A_1B_1X_1Y_1$ entstanden, eine beliebige Gerade schneide die Strahlen in A, B, X, Y. Ziehe durch B zu SA_1 eine Parallele, welche SX_1 in C, SY_1 in D trifft. Es ist dann DB = BC, also nach $37,_1$ ABXY eine harmonische Reihe.

4) Satz. Sind zwei harmonische Punktreihen ABXY und $A_1B_1X_1Y_1$ gegeben und schneiden einander die Verbindungslinien AA_1, BB_1 und CC_1 in einem Punkte, so geht auch die vierte Verbindungslinie YY_1 durch diesen Punkt.

Beweis. Angenommen, YY_1 gehe nicht durch den Schnittpunkt S, dann müsste SY_1 die Gerade AB in einem Punkte U schneiden, und es wäre AX : BX = AU : BU. Da aber AX : BX = AY : BY, so ergäbe sich AU : BU = AY : BY. Da Y und U beide auf der positiven Verlängerung von AB liegen, so ist dies nur möglich, wenn U mit Y zusammenfällt, d. h. YY_1 durch S geht.

Folgerung. Liegen auf zwei einander in Punkt A schneidenden Geraden die harmonischen Reihen ABXY und $AB_2X_2Y_2$, so schneiden einander die 3 Verbindungslinien BB_2, XX_2 und YY_2 in einem Punkt. Dasselbe gilt von den Geraden BB_2, XY_2 und YX_2.

Vollständiges Viereck und Vierseit.

45. **Erklärung.** Ein vollständiges Viereck (ABCD) ist bestimmt durch 4 Punkte, welche Ecken genannt werden. Die 6 Verbindungslinien der Ecken bilden die Seiten des Vierecks; zwei Seiten, die nicht durch dieselbe Ecke gehen, werden als Gegenseiten bezeichnet. Die Schnittpunkte zweier Gegenseiten heissen Diagonalpunkte, deren drei Verbindungslinien Diagonalen des Vierecks. (Diagonaldreieck.) Zu den Seiten AB, AC und AD gehören die Gegenseiten CD, BD und BC. Die entstehenden Diagonalpunkte sind E, F und G; die Diagonalen EF, FG und GE bilden das Diagonaldreieck.

Satz vom Viereck. Die durch einen Diagonalpunkt gehenden Seiten und Diagonalen eines vollständigen Vierecks bilden ein harmonisches Strahlenbüschel, wobei die Seiten, bezw. Diagonalen einander zugeordnet sind.

Beweis. Im $\triangle$ EBC gehen die Transversalen EK, BD und CA durch einen Punkt F, es ist somit (Satz des Ceva) EA · BK · CD = BA · CK · ED. Betrachtet man AG als

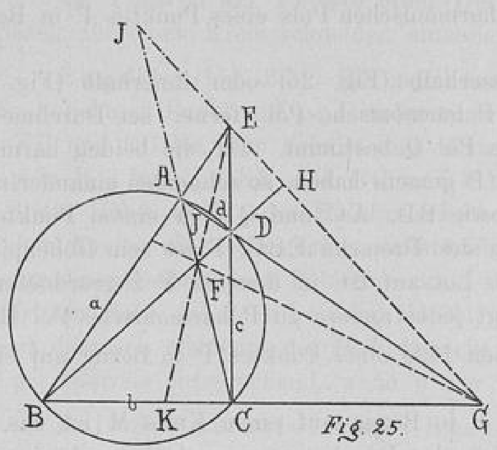


Fig. 25.

Schnittgerade desselben Dreiecks, so ist andrerseits EA · BG · CD = BA · CG · ED. Durch Division beider Gleichungen ergiebt sich BK : BG = CK : CG oder BK : CK = BG : CG. BCKG ist demnach eine harmonische Reihe, also E, BCKG ein harmonisches Büschel.

Erklärung. Ein vollständiges Vierseit (abcd) ist bestimmt durch 4 Gerade, welche Seiten genannt werden. Die 6 Schnittpunkte der Seiten bilden die Ecken des Vierseits; zwei Ecken, die nicht auf derselben Seite liegen, werden als Gegenecken bezeichnet. Die Verbindungslinien zweier Gegenecken heissen Diagonalen, deren 3 Schnittpunkte Diagonalpunkte des Vierseits. (Diagonaldreiseit.) Zu den Ecken A, B und E gehören die Gegenecken C, D und G. Die entstehenden Diagonalen sind AC, BD und EG; die Diagonalpunkte F, H und J bilden das Diagonaldreiseit FHJ.

Satz vom Vierseit. Die auf einer Diagonale liegenden Ecken und Diagonalpunkte eines vollständigen Vierseits bilden eine harmonische Punktreihe, wobei die Ecken, bezw. Diagonalpunkte einander zugeordnet sind.

Beweis. Zieht man FE, so ist, wenn ABCD als vollständiges Viereck betrachtet wird, F, GEHJ ein harmonisches Büschel, GEHJ also eine harmonische Reihe.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Punkten den 4. harmonischen Punkt nur mit Benützung des Lineals zu zeichnen.

Pol und Polare beim Kreise.

46. **Erklärung.** Zwei Punkte P und Q, die auf der Sekante BC eines Kreises so liegen, dass BCPQ eine harmonische Punktreihe ist, heissen harmonische Pole des Kreises.

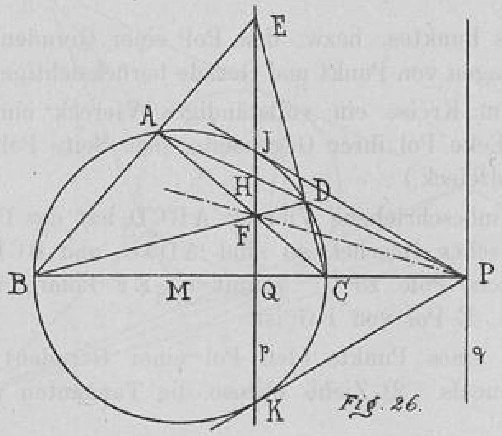


Fig. 26.

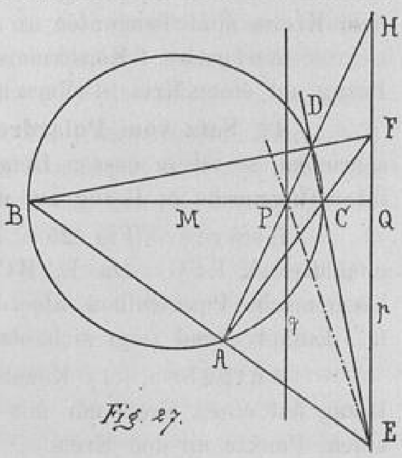


Fig. 27.

Polare eines Punkts. Der Ort des harmonischen Pols eines Punktes P in Bezug auf einen Kreis ist eine Gerade p.

Beweis. Punkt P liege entweder ausserhalb (Fig. 26) oder innerhalb (Fig. 27) des Kreises M. Auf Sekante PA sei H der zu P harmonische Pol, ferner sei Durchmesser PM gezogen, und auf ihm der zu P harmonische Pol Q bestimmt. Da die beiden harmonischen Punktreihen ADHP und BCQP den Punkt P gemein haben, so schneiden einander nach 44,4 BA, CD und QH in einem Punkte E, sowie BD, AC und QH in einem Punkte F. Da BC Durchmesser, so sind BD und CA Höhen des Dreiecks EBC; F ist sein Höhenpunkt und EF dritte Höhe. EF bezw. HQ ist also ein Lot auf BC in dem zu P zugeordneten 4. harmonischen Punkt Q. Auf demselben Lote liegt jeder andere zu P harmonische Pol H.

Anmerkung. Der Ort der harmonischen Pole eines Punktes P in Bezug auf einen Kreis heisst die Polare p dieses Punktes.

Folgerung. Die Polare eines Punktes P in Bezug auf einen Kreis M ist das auf dem Durchmesser PM in dem zu den Endpunkten des Durchmessers und P zugehörigen 4. harmonischen Punkt Q errichtete Lot p; die Polare zu Q ist das in P errichtete Lot q.

Lage von Pol und Polare. Mit Benützung von 37,1 und obigen Ergebnisses zeigt sich: 1) Die Polare eines ausserhalb des Kreises gelegenen Punkts schneidet den Kreis. 2) Die Polare eines auf dem Kreise liegenden Punktes ist die in ihm an den Kreis gezogene Tangente. 3) Die Polare eines innerhalb des Kreises gelegenen Punkts fällt ganz ausserhalb des Kreises. 4) Die Polare des Mittelpunkts ist die unendlich ferne Gerade.

47. **Polare und Tangenten.** Die Verbindungssehne der Berührungspunkte der von einem Punkte P an den Kreis gezogenen Tangenten ist Polare des Punktes P.

Beweis. (Fig. 26.) Nach 37,2 schneidet die Verbindungssehne JK den Durchmesser PM in dem zu B, C und P gehörigen 4. harmonischen Punkt Q. Da JK auch $\perp$ BC, so ist sie Polare des Punktes P.

Folgerungen. 1) Die Tangenten in den Endpunkten der Sehne eines Kreises schneiden einander im Pol dieser Sehne. 2) Der Pol eines Durchmessers liegt im Unendlichen. — Die Polare eines (durch eine Richtungslinie gegebenen) unendlich fernen Punkts ist ein zu der Richtungslinie senkrechter Durchmesser.

3) Die Verbindungslinien eines Punktes mit den Schnittpunkten seiner Polare mit dem Kreise sind Tangenten an letzteren.

Aufgabe. Konstruiere die Polare eines Punktes, bezw. den Pol einer Geraden in Bezug auf einen Kreis. (Verschiedene mögliche Lagen von Punkt und Gerade berücksichtigen!)

48. **Satz vom Polardreieck.** Wird einem Kreise ein vollständiges Viereck einbeschrieben, so ist in dessen Diagonaldreieck jede Ecke Pol ihrer Gegenseite, jede Seite Polare ihrer Gegenecke in Bezug auf den Kreis. (Polardreieck.)

Beweis. (Fig. 25.) Das dem Kreise einbeschriebene Viereck ABCD hat das Diagonaldreieck EFG. Da E, BCKG ein harmonisches Büschel, so sind ADJG und BCKG harmonische Punktreihen, also J und K harmonische Pole zu G. Damit ist EF Polare von G. Entsprechend zeigt sich, dass F Pol von EG, E Pol von FG ist.

Aufgaben. 1) Konstruiere die Polare eines Punkts (den Pol einer Geraden) in Bezug auf einen Kreis nur mit Benützung des Lineals. 2) Ziehe ebenso die Tangenten von einem Punkte an den Kreis.

49. **Polaren der Punkte einer Geraden.** Die Polaren aller Punkte einer Geraden in Bezug auf einen Kreis schneiden einander in einem Punkte, dem Pol dieser Geraden.

Beweis. (Fig. 27.) Die gegebene Gerade sei p, P ihr Pol in Bezug auf Kreis M, F ein beliebiger Punkt auf p; Durchmesser MP schneide den Kreis in B und C. Man ziehe nun FB und FC bis zum Schnitt mit dem Kreis in D und A, ferner BA bis zum Schnitt mit p in E. Im △ BFE sind BQ und FA Höhen; ihr Schnittpunkt C ist Höhenpunkt, also EC dritte Höhe, welche des Halbkreises über BC wegen, durch D gehen muss. ACDB, als ein dem Kreise einbeschriebenes vollständiges Viereck betrachtet, hat F und E zu Ecken, FE zur einen Seite seines Polardreiecks. Die Gegenseiten AD und BC müssen einander in der dritten Ecke des Polardreiecks, im Pol von FE schneiden, d. h. AD muss durch P gehen. EP ist demnach als Seite des Polardreiecks PEF Polare von F und geht durch P, den Pol von p. (Beweis entsprechend, wenn p den Kreis schneidet.)

Pole der Strahlen eines Büschels. Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Geraden in Bezug auf einen Kreis liegen auf einer Geraden, der Polaren dieses Punkts.

Beweis. (Fig. 26.) Der gegebene Punkt sei P, p seine Polare in Bezug auf Kreis M; eine beliebige, durch P gehende Gerade schneide p in F, Durchmesser PM treffe den Kreis in B und C. Man ziehe nun BF bis zum Schnitt mit dem Kreis in D, ferner CD bis zum Schnitt mit p in E; die Verbindungslinie von B mit E schneide den Kreis in A. Im △ BFE sind BQ und ED Höhen; ihr Schnittpunkt C ist Höhenpunkt, also CF dritte Höhe, welche, des Halbkreises über BC wegen, durch A gehen muss. Das dem Kreise einbeschriebene vollständige Viereck ABCD hat E und F zu Ecken, EF zur einen Seite seines Polardreiecks. Die Gegenseiten BC und AD müssen einander in der dritten Ecke des Polardreiecks, im Pol von EF schneiden, d. h. AD muss durch P gehen. E ist demnach als Ecke des Polardreiecks EFP Pol von FP; er liegt auf p, der Polaren von P.

Anmerkung. Vorstehende Sätze können auch so ausgesprochen werden: Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare in Bezug auf einen Kreis um einen Punkt, den Pol dieser Geraden; dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so durchläuft ihr Pol eine Gerade, die Polare dieses Punkts.

50. **Tangentenvierseit eines Kreises.** Wird einem Kreise ein vollständiges Vierseit umschrieben, so fällt dessen Diagonaldreiseit mit dem Diagonaldreieck des Sehnenvierecks der Berührungspunkte zusammen.

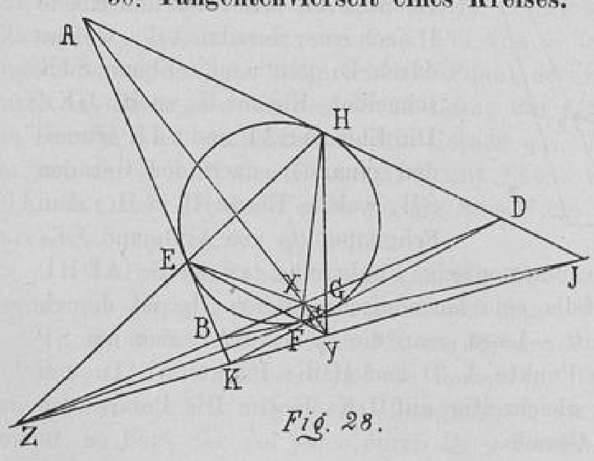


Fig. 28.

Beweis. Die Diagonalen des Tangentenvierseits ABCD sind AC, BD und JK. Das Diagonaldreieck des Sehnenvierecks der Berührungspunkte ist XYZ; es ist nach 48 Polardreieck des Kreises. Die durch Y gehenden Seiten FE und GH des Sehnenvierecks haben die Punkte B und D zu Polen (47); diese müssen daher (49) auf der Polaren XZ von Y liegen, d. h. die Diagonale BD des Tangentenvierseits muss mit der Seite XZ des Polardreiecks XYZ zusammenfallen. In gleicher Weise zeigt sich, dass AC mit XY und JK mit YZ zusammenfällt.

Folgerung. Das Diagonaldreiseit eines einem Kreise umschriebenen Vierseits ist ein Polardreieck des Kreises.

Frage. Wie gestaltet sich das Polardreieck, wenn das dem Kreise ein = bezw. umschriebene Viereck ein Parallelogramm ist?

Pol und Polare bei den Kegelschnitten.

51. **Polare eines Punkts.** Der Ort des harmonischen Pols eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt ist eine Gerade, die Polare dieses Punktes.

Beweis. Gegeben sei ein beliebiger senkrechter Kreiskegel (mit Grundkreisebene I). Er werde durch eine beliebige Ebene II nach einer Ellipse (Parabel, Hyperbel) geschnitten. In Ebene I sei zu einem Punkte P in Bezug auf den Grundkreis die Polare p gezeichnet, und eine beliebige Sekante PA gezogen, welche mit dem Kreise und p die Schnittpunkte D und H giebt. Die Polare p schneide ausserdem den Kreis in J und K. Die Mantellinien SA, SD, SJ und SK der Kegelfläche bestimmen in Ebene II die Ellipsenpunkte A_1, D_1, J_1 und K_1; SP gebe im Schnitt mit Ebene II den Punkt P_1. Eine Ebene SAP schneidet nun Ebene II nach einer Geraden A_1P_1, welche durch D_1 geht; eine Ebene SJK schneidet Ebene II nach J_1K_1. Die Ebenen SAP und SJK schneiden einander nach der Geraden SH, welche Ebene II in H_1, dem Schnittpunkte von A_1D_1 und J_1K_1 trifft. Da nun nach Voraussetzung ADHP eine harmonische Punktreihe, so ist S, ADHP ein harmonisches Büschel, also $A_1D_1H_1P_1$ ebenfalls eine harmonische Reihe; H_1 ist der zu P_1 konjugierte Pol in Bezug auf den Kegelschnitt. Lässt man die Ebene SAP sich um SP drehen, so ergeben sich für jede neue Lage der Punkte A, D und H die Punkte A_1, D_1 und H_1 so, dass H_1 konjugierter Pol zu P_1 ist und gleichzeitig auf J_1K_1 liegt. Die Polare von P_1 in Bezug auf den Kegelschnitt ist also eine Gerade.

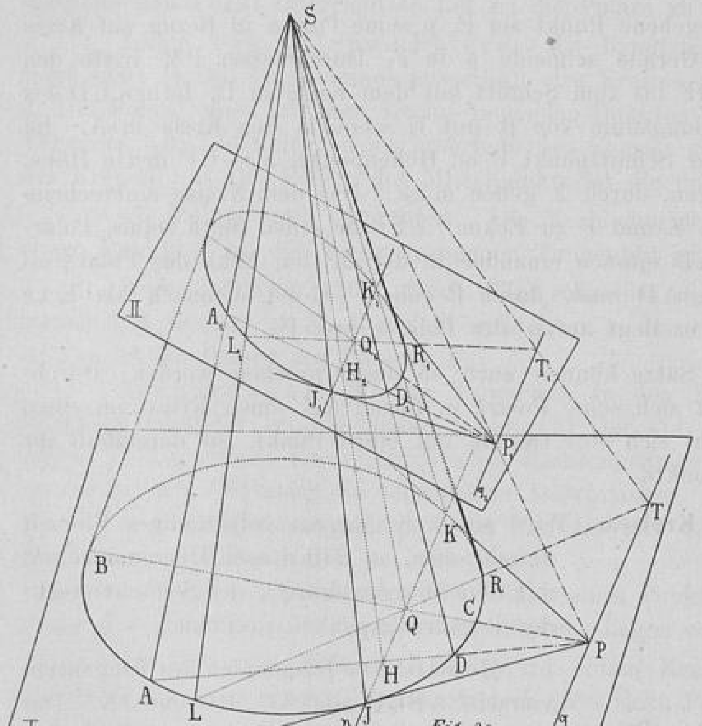


Fig. 29.

Anmerkung. Für einen Punkt Q innerhalb des Grundkreises und seine Polare q ergiebt sich die Uebertragung des Polarensatzes auf die Kegelschnitte durch Einführung einer durch SQ gelegten Ebene SLT und Drehung dieser Ebene um SQ.

Lage von Pol und Polare. 1) Die Polare eines ausserhalb des Kegelschnitts gelegenen Punkts schneidet den Kegelschnitt. 2) Die Polare eines auf dem Kegelschnitt liegenden Punkts ist die in ihm an den Kegelschnitt gelegte Tangente. 3) Die Polare eines innerhalb des Kegelschnitts gelegenen Punktes fällt ganz ausserhalb des Kegelschnitts. 4) Die Polare des Mittelpunkts ist die unendlich ferne Gerade.

52. **Polare und Tangenten.** Die Verbindungssehne der Berührungspunkte der von einem Punkte P an einen Kegelschnitt gezogenen Tangenten ist Polare des Punktes P.

Beweis. (Fig. 29.) PJ und PK sind nach 47 Tangenten von P an den Grundkreis des Kegels. Die Ebenen SJP und SKP sind demnach Tangentialebenen der Kegelfläche; sie schneiden Ebene II nach den Geraden J_1P_1 und K_1P_1, welche Tangenten an den Kegelschnitt in J_1 und K_1 sind. J_1K_1 ist aber nach 50 Polare von P_1.

Folgerungen. 1) Die Tangenten in den Endpunkten der Sehne eines Kegelschnitts schneiden einander im Pol dieser Sehne. 2) Die Schnittpunkte der Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt sind die Berührungspunkte der aus dem Punkte an den Kegelschnitt gelegten Tangenten. 3) Der Pol eines Durchmessers liegt in der Richtung der in dessen Endpunkten an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten im Unendlichen. (14. 1.) — Die Polare eines durch eine Richtung gegebenen unendlich fernen Punkts ist ein Durchmesser. (19 b.)

53. **Satz vom Polardreieck.** Wird einem Kegelschnitt ein vollständiges Viereck einbeschrieben, so ist in dessen Diagonaldreieck jede Ecke Pol ihrer Gegenseite, jede Seite Polare ihrer Gegenecke in Bezug auf den Kegelschnitt. (Beweis wie bei 48.)

Aufgaben. 1) Konstruiere die Polare eines Punktes (den Pol einer Geraden) in Bezug auf einen Kegelschnitt. 2) Ziehe von einem Punkte die Tangenten an den Kegelschnitt nur mit Benützung des Lineals.

54. **Polaren der Punkte einer Geraden.** Die Polaren aller Punkte einer Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt schneiden einander in einem Punkte, dem Pol dieser Geraden.

Beweis. (Fig. 29, Annahme wie bei 51.) Angenommen Q sei Pol von q in Bezug auf den Grundkreis, und es werde Ebene II von SQ in Q_1, von einer durch q und S gelegten Ebene in q_1 geschnitten, wobei Q_1 Pol von q_1 ist (51). Auf q sei ein beliebiger Punkt P angenommen, der ihm entsprechende Punkt der Ebene II sei P_1. Die Polare JK von P geht durch Q, diejenige J_1K_1 von P_1 in Bezug auf den Kegelschnitt durch Q_1. Durchläuft nun P die Gerade q, so durchläuft P_1 die Gerade q_1. Die Polare JK von P dreht sich dabei um Q. Da nun der Schnitt der Ebene SJK mit Ebene II stets die Polare von P_1 giebt, die Ebene SJK aber sich bei der Fortbewegung von P um SQ dreht, so muss die Polare von P_1 stets durch Q_1, den Pol von q_1 gehen.

Pole der Strahlen eines Büschels. Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen auf einer Geraden, der Polaren dieses Punkts.

Beweis. Dreht sich JK um Q, den Pol von q, so dreht sich J_1K_1 um Q_1. Der Pol P von JK durchläuft dabei die Gerade q. Da sich nun der Pol von J_1K_1 stets durch den Schnitt von SP mit Ebene II ergiebt, dieser Schnittpunkt aber immer auf q_1 zu liegen kommt, so liegt der Pol jeder durch Q_1 gehenden Geraden auf q_1, der Polaren von Q_1.

Polaren zu Punkten der Durchmesser. 1) Die Polaren sämtlicher Punkte eines Durchmessers eines Kegelschnitts sind unter sich und den Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers parallel. (Die betreffenden Polaren müssen durch den im Unendlichen liegenden Pol des Durchmessers gehen. Dieser Pol ergiebt sich durch die in den Endpunkten des Durchmessers gezogenen Tangenten.)

2) Die Polaren sämtlicher Punkte einer Achse eines Kegelschnitts stehen senkrecht auf dieser Achse.

3) Die Polare eines Brennpunkts eines Kegelschnitts ist die zu dem Brennpunkt gehörige Leitlinie.

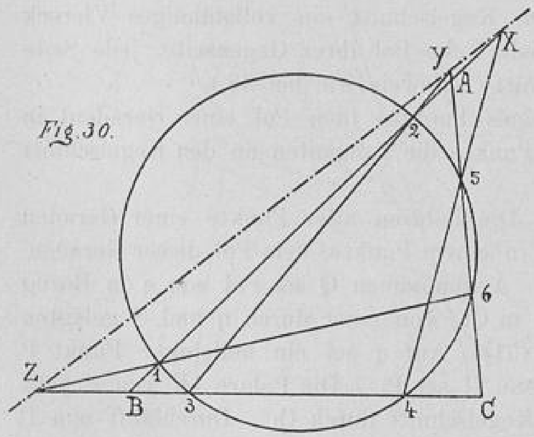
Aufgabe. Konstruiere mit Hilfe von Satz 1 die Polare eines Punktes (den Pol einer Geraden) in Bezug auf einen Kegelschnitt.

55. **Tangentenvierseit eines Kegelschnitts.** Die in 50 aufgestellten beiden Sätze bleiben bestehen, wenn an Stelle des Kreises ein Kegelschnitt tritt.

Sätze von Pascal und Brianchon.

56. **Satz von Pascal.** Die Schnittpunkte der Gegenseiten eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks liegen auf einer Geraden.

Fig. 30.



Beweis. a) Der Kegelschnitt sei ein Kreis. Werden auf dem Umfange des Kreises 6 Punkte beliebig angenommen, so schneiden einander die Gegenseiten des durch sie bestimmten Sechsecks wie folgt:

12 und 45 geben X
23 und 56 geben Y
34 und 61 geben Z.

Drei nicht auf einander folgende Seiten 12, 34 und 56 des Sechsecks bilden ein Dreieck ABC. Betrachtet man die übrigen 3 Seiten 23, 45 und 61 als Transversalen, welche die Seiten dieses Dreiecks schneiden, so ist nach dem Satze des Menelaos:

$$
\begin{aligned}
23)\quad & A2 \cdot B3 \cdot CY = B2 \cdot C3 \cdot AY \\
45)\quad & AX \cdot B4 \cdot C5 = BX \cdot C4 \cdot A5 \\
61)\quad & A1 \cdot BZ \cdot C6 = B1 \cdot CZ \cdot A6.
\end{aligned}
$$

Nach Multiplikation dieser Gleichungen und Berücksichtigung, dass

$$
\begin{aligned}
A2 \cdot A1 &= A5 \cdot A6 \\
B3 \cdot B4 &= B1 \cdot B2 \\
C6 \cdot C5 &= C4 \cdot C3
\end{aligned}
$$

ergiebt sich

$$AX \cdot BZ \cdot CY = BX \cdot CZ \cdot AY.$$

Das Produkt der Teilungsverhältnisse der Seiten des $\triangle$ ABC wird nun

$$\frac{AX}{BX} \cdot \frac{BZ}{CZ} \cdot \frac{CY}{AY} = +1,$$

also liegen die Punkte X, Y und Z auf einer Geraden.

b) Uebertragung auf einen beliebigen Kegelschnitt. Ein senkrechter Kreiskegel mit Spitze S werde von einer Ebene (II) nach einer Ellipse (Parabel, Hyperbel) geschnitten. Der Ellipse sei ein beliebiges Sehnensechseck 1 .... 6 einbeschrieben, dessen Gegenseiten einander in den Punkten X, Y und Z schneiden. Durch die nach den Ecken des Sechsecks gezogenen Mantellinien werden auf dem Grundkreise des Kegels die Punkte I .... VI bestimmt; das durch sie festgelegte Sehnensechseck giebt die Pascal'sche Gerade $X_1 Y_1 Z_1$. Die Punkte X und X_1 liegen nun, ersterer als Schnittpunkt von 12 und 45, letzterer als Schnittpunkt von I II und IV V, in den beiden Ebenen S 12 und S 45, somit auf deren durch S gehenden Schnittgeraden, d. h. SX geht durch X_1. Ebenso zeigt sich, dass SY durch Y_1 und SZ durch Z_1 gehen muss. Da nun X_1, Y_1 und Z_1 auf einer Geraden liegen, so liegen SX, SY und SZ in der durch S und Gerade $X_1 Y_1$ bestimmten Ebene. Die Punkte X, Y und Z liegen damit in Ebene $SX_1 Y_1$ und in Ebene II, also auf der Schnittgeraden beider Ebenen; d. h. X, Y und Z liegen auf einer Geraden.

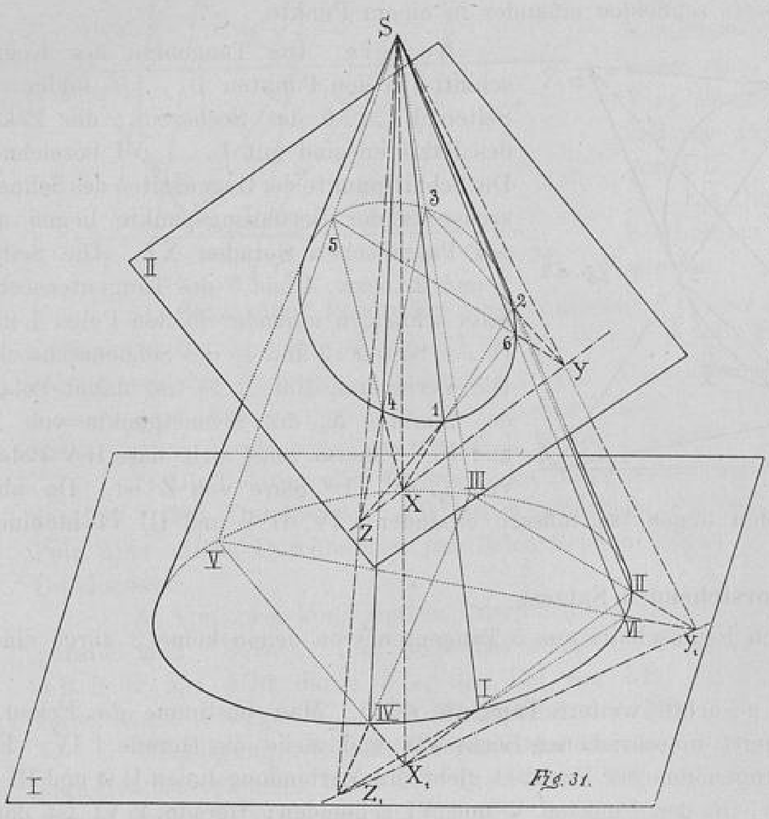


Fig. 31.

57. **Anwendungen des Satzes von Pascal.**

1. Aufgabe. Einen Kegelschnitt aus 5 Punkten, von denen keine 3 in einer Geraden liegen, zu zeichnen.

Auflösung. (Fig. 30.) Ein gesuchter weiterer Punkt sei 6. Die Verbindungslinien 12 und 45 geben X. Eine durch X beliebig gelegte Gerade wird von 23 in Y, von 34 in Z geschnitten. Die Geraden 5 Y und 1 Z treffen einander in 6.

Bemerkung. Wenn in einem Sehnensechseck, das einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, zwei auf einander folgende Ecken, z. B. 1 und 2 zusammenfallen, so wird die sie verbindende Seite 12 zu einer Tangente des Kegelschnitts.

2. Aufgabe. Von einem Kegelschnitt sind 5 Punkte gegeben. In einem derselben die Tangente an den Kegelschnitt zu legen. (Letzteren Punkt doppelt, z. B. 12 bezeichnen!)

Frage. Welche Formen nimmt der Satz von Pascal an, wenn a) die Punkte 1 und 2, b) die Punkte 1 und 2 sowie 3 und 4, c) die Punkte 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 zusammenfallen? Welche Aufgaben lassen sich mit Hilfe der sich ergebenden Sätze lösen?

58. **Satz von Brianchon.** Die Verbindungslinien der Gegenecken eines einem Kegelschnitt umschriebenen Sechsseits schneiden einander in einem Punkte.

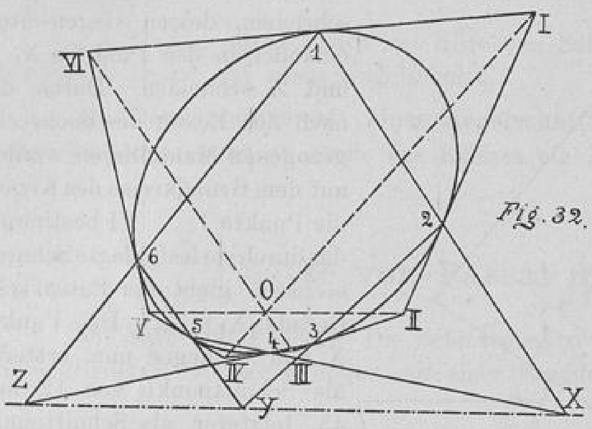


Fig. 32.

Beweis. Die Tangenten des Kegelschnitts in den Punkten 1 . . . . 6 bilden die Seiten 1 . . . . 6 des Sechsseits; die Ecken des letzteren sind mit I . . . . VI bezeichnet. Die Schnittpunkte der Gegenseiten des Sehnensechsecks der Berührungspunkte liegen auf der Pascal'schen Geraden XZ. Die Seiten 1 und 2, bezw. 4 und 5 des Tangentensechsseits schneiden einander in den Polen I und IV der Seiten 12 und 45 des Sehnensechsecks. Die Verbindungslinie I IV ist damit Polare des Punktes X, des Schnittpunkts von 12 und 45. Ebenso zeigt sich, dass II V Polare von Y, III VI Polare von Z ist. Da aber X, Y und Z auf einer Geraden liegen, so müssen einander I IV, II V und III VI in einem Punkte O schneiden.

59. **Anwendungen vorstehenden Satzes.**

1. Aufgabe. Einen Kegelschnitt aus 5 Tangenten, von denen keine 3 durch einen Punkt gehen, zu zeichnen.

Auflösung. Eine gesuchte weitere Tangente sei 6. Man bestimme die Ecken I, II, III, IV des dem Kegelschnitt umschriebenen Sechsseits und ziehe die Gerade I IV. Ein auf dieser Geraden beliebig angenommener Punkt O giebt die Verbindungslinien II O und III O, welche die Tangenten 1 und 5 in den Punkten V und VI schneiden; Gerade V VI ist dann die gesuchte 6. Tangente.

Bemerkung. Wenn in einem Tangentensechsseit, das einem Kegelschnitt umschrieben ist, zwei auf einander folgende Seiten zusammenfallen, so wird ihr Schnittpunkt zum Berührungspunkt dieser Seite.

2. Aufgabe. Von einem Kegelschnitt sind 5 Tangenten gegeben; den Berührungspunkt einer derselben zu bestimmen. (Letztere doppelt, z. B. 12 bezeichnen!)

Frage. Welche Formen nimmt der Satz von Brianchon an, wenn a) die Seiten 1 und 2, b) die Seiten 1 und 2, sowie 3 und 4, c) die Seiten 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 zusammenfallen? Welche Aufgaben lassen sich mit Hilfe der sich ergebenden Sätze lösen?

Konjugierte Durchmesser.

60. **Erklärung.** Zwei Durchmesser eines Kegelschnitts heissen konjugiert, wenn jeder durch den Pol des andern geht. — Ist z. B. AB ein beliebiger Durchmesser, so liegt sein Pol Y_∞ in der Richtung der Tangenten in A und B im Unendlichen (52). Ein zu diesen Tangenten paralleler Durchmesser CD geht durch Y_∞, somit muss sein Pol auf AB, der Polaren von Y_∞, liegen. Wie CD durch den Pol von AB, so geht also auch AB durch den Pol von CD.

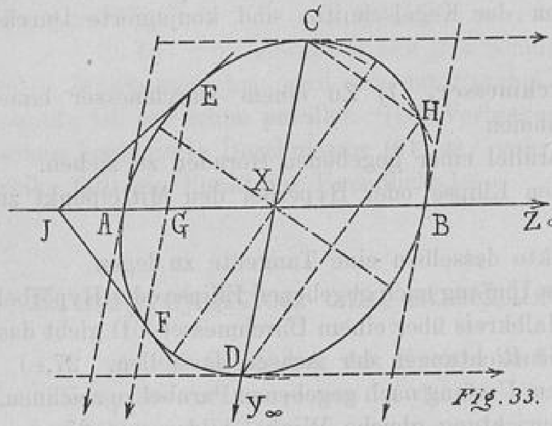


Fig. 33.

Ein Durchmesser kann auch als zu einer bestimmten Richtung konjugiert bezeichnet werden.

61. **Sätze über konjugierte Durchmesser.** 1) Der zu einem bestimmten Durchmesser konjugierte Durchmesser ist parallel zu den in den Endpunkten des ersteren an den Kegelschnitt gelegten Tangenten. Umgekehrt: Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser parallel. (Tangenten und konjugierter Durchmesser gehen durch denselben unendlich fernen Punkt.)

2) Die Polaren aller Punkte eines Durchmessers sind dessen konjugiertem Durchmesser parallel. (Für Durchmesser AB gehen sämtliche Polaren durch Y_∞.) Umkehrung. Die Pole aller einem Durchmesser parallelen Sehnen liegen auf dem zu ersterem konjugierten Durchmesser.

3) Von zwei konjugierten Durchmessern halbiert jeder alle Sehnen, die dem andern parallel sind. Beweis. (Fig. 33.) Die Sehne EF || Durchmesser CD schneidet Durchmesser AB in G und geht durch Y_∞, den Pol von AB. $EFGY_\infty$ ist eine harmonische Punktreihe, somit G wegen Y_∞ (37) Mittelpunkt von EF.

Umkehrung. Die Mitten paralleler Sehnen liegen auf dem zu ihrer Richtung konjugierten Durchmesser. Beweis. Die Sehnen EF und CD gehen durch denselben unendlich fernen Punkt Y_∞; dieser ist für jede Sehne, etwa EF, der zu ihrem Mittelpunkte G zugeordnete 4. harmonische Punkt. G muss damit auf der Polaren AB von Y_∞ liegen. (Direkter Beweis für die Parabel siehe 21. 4.)

4) Die Verbindungslinie des Schnittpunkts zweier Tangenten mit der Mitte der Berührungssehne giebt den zu der Richtung dieser Sehne konjugierten Durchmesser. (Folgt aus 2 und 3.)

Anmerkungen. 1) Konjugierte Durchmesser des Kreises stehen senkrecht auf einander. 2) Die (unter sich parallelen) Durchmesser der Parabel haben als konjugierten Durchmesser die unendlich ferne Gerade. (Die Durchmesser sind als parallele Sehnen aufzufassen, deren Mittelpunkte im Unendlichen liegen. 3) Bei der Hyperbel ist zu jedem imaginären Durchmesser ein reeller konjugiert, und umgekehrt. (Zu jedem imaginären Durchmesser der Hyperbel giebt es zwei ihm parallele Tangenten (24); die Verbindungslinie der Berührungspunkte derselben ist der konjugierte, reelle Durchmesser. — Umgekehrt: Die Tangenten in den Endpunkten eines bestimmten reellen Durchmessers bilden mit der Achse Winkel, die grösser sind als der Winkel der Asymptoten gegen die Achse (17. Anm.). Dies gilt auch für den zum angenommenen konjugierten, den Tangenten parallelen Durchmesser, der damit (24) ein imaginärer Durchmesser ist.) 4) Die Achsen der Kegelschnitte sind konjugierte Durchmesser, welche auf einander senkrecht stehen.

62. **Aufgaben über konjugierte Durchmesser.** 1) Zu einem Durchmesser eines Kegelschnitts den zu ihm konjugierten zu bestimmen.

2) An einen Kegelschnitt Tangenten parallel einer gegebenen Geraden zu ziehen.

3) Zu einer dem Umfang nach gegebenen Ellipse oder Hyperbel den Mittelpunkt zu finden.

4) An einen Kegelschnitt in einem Punkte desselben eine Tangente zu legen.

5) Die Achsen und Brennpunkte einer dem Umfang nach gegebenen Ellipse oder Hyperbel zu zeichnen. (Gang der Lösung s. Fig. 33: Der Halbkreis über einem Durchmesser CD giebt das rechtwinklige Dreieck DHC, dessen Katheten die Richtungen der Achsen darstellen. $27,_2$.)

6) Die Achse und den Brennpunkt einer dem Umfang nach gegebenen Parabel zu zeichnen. (Mit Hilfe zweier Tangenten, die mit der Achsenrichtung gleiche Winkel bilden und $27,_5$.)

63. **Ein- und umbeschriebene Parallelogramme.** 1) Die Diagonalen eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Parallelogramms sind Durchmesser und die Seiten mit konjugierten Durchmessern parallel. Beweis. Das Parallelogramm hat ein Polardreieck, dessen eine Seite die unendlich ferne Gerade ist, während die beiden andern Seiten denjenigen des Parallelogramms parallel laufen. Zugleich sind sie konjugierte Durchmesser, die Seiten des Parallelogramms also solchen parallel. Der Schnittpunkt der beiden Durchmesser ist gleichzeitig Mittelpunkt des Kegelschnitts und des Parallelogramms, weshalb auch die Diagonalen des letzteren durch ihn gehen.

2) Die Diagonalen eines dem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser. Beweis. Das Parallelogramm, als Tangentenvierseit aufgefasst, hat ein Polardreiseit, dessen eine Seite die unendlich ferne Gerade ist, während die beiden andern Seiten von den Diagonalen des Parallelogramms gebildet werden. Diese sind demnach konjugierte Durchmesser.

Anmerkung. Beide Sätze können zur Konstruktion konjugierter Durchmesser verwendet werden.

64. **Besondere Sätze für Hyperbel und Parabel.** 1) Zwei konjugierte Durchmesser der Hyperbel bilden mit den Asymptoten ein harmonisches Büschel. Beweis. (Fig. 16.) Die in einem Punkte P der Hyperbel an diese gezogene Tangente schneide die Asymptoten in L und N. Nach 27. 4 ist P Mitte von LN. Der zu LN parallele Durchmesser OQ ist dem Durchmesser OP konjugiert (61. 1) und bildet nach 44. 1 mit OP, ON und OL ein harmonisches Büschel.

2) Die auf einer Sekante der Hyperbel zwischen Umfang und Asymptoten liegenden Stücke sind einander gleich. Beweis. (Fig. 16.) Sekante SU schneide die Asymptoten in V und W; die zu ihr parallele Tangente sei LN mit Berührungspunkt P. Man ziehe OP bis zum Schnitt mit VW in T, sowie den zu OP konjugierten Durchmesser OQ. Da O, NLPQ ein harmonisches Büschel, so ist wegen $VW \parallel OQ$ (44. 3) $TV = TW$. Da auch $TS = TU$, so folgt $SV = UW$.

Aufgabe. Gegeben die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel; es soll a) ein weiterer Punkt, b) die Tangente in diesem, c) eine Scheiteltangente gezeichnet werden.

(Auflösung zu b mittelst der Bemerkung aus Fig. 16, dass eine zu ON durch P gezogene Parallele OL in X halbiert; zu c mittelst 30.)

3) Die Verbindungsstrecke des Schnittpunkts zweier Parabeltangenten mit der Mitte ihrer Berührungssehne wird von der Parabel halbiert; die Tangente in diesem Halbierungspunkte ist der Sehne parallel. (Die Verbindungsstrecke ist der zur Richtung der Berührungssehne konjugierte Durchmesser (61. 4); von der auf diesem liegenden harmonischen Punktreihe fällt ein Punkt ins Unendliche.)

Kreisprojektion und anschliessende Ellipsenkonstruktionen.

65. 1) **Gleichung des Kreises und der Ellipse.** Unter Zugrundlegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist die Gleichung eines um den Ursprung beschriebenen Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Gleichung einer Ellipse mit den Achsenlängen 2a und 2b, die Achsen zugleich als solche des Koordinatensystems genommen, ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2) **Projektion paralleler Strecken.** Werden zwei parallele Strecken auf eine Ebene parallel (orthogonal oder schief) projiciert, so ist das Verhältnis der Projektionen demjenigen der Strecken gleich.

66. **Orthogonale Projektion eines Kreises.** Die orthogonale Projektion eines Kreises auf eine Ebene ist eine Ellipse. Beweis. Gegeben seien die beiden Ebenen E und E_1, welche einander nach RS schneiden. In Ebene E sei um Punkt M ein Kreis mit Radius = a beschrieben und in dem Kreise zwei auf einander senkrechte Durchmesser AB und CD so gezogen, dass AB $\perp$ RS, also CD $\parallel$ RS ist. Projiciert man nun Kreis M orthogonal auf Ebene E_1, so entspricht dem Durchmesser CD die ihm parallele und gleiche Strecke C_1D_1, dem Durchmesser AB eine Strecke $A_1B_1 \perp$ RS, welche = 2b sein soll. A_1B_1 und C_1D_1 halbieren einander in M_1, der Projektion von M. Auf Kreis M werde nun P beliebig angenommen, PF $\perp$ CD gefällt, und MF = x, PF = y gesetzt. P projiciere sich nach P_1, PF nach $P_1F_1 \perp C_1D_1$ und MF nach der ihr gleichen Strecke M_1F_1. Wird noch $M_1F_1 = x_1$,

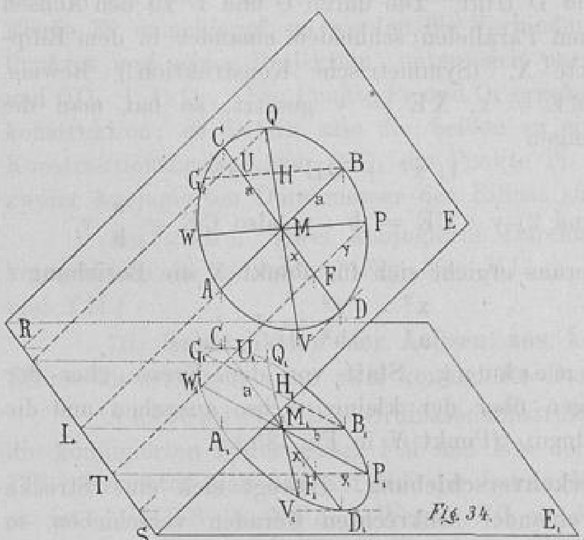


Fig. 34.

$P_1F_1 = y_1$ gesetzt, so ergeben sich die Beziehungen

$$1)\ x^2 + y^2 = a^2$$
$$2)\ x = x_1$$
$$3)\ y : a = PF : BM = P_1F_1 : B_1M_1 = y_1 : b.$$

Die Koordinaten des Punktes P_1 in Bezug auf ein rechtwinkliges System mit den Achsen C_1D_1 und A_1B_1 sind demnach $x_1 = x$ und $y_1 = \frac{b}{a}\, y$.

Eine Beziehung zwischen ihnen ergiebt sich, wenn die Werte für x und y in Gleichung 1 eingesetzt werden; man hat dann

$$x_1{}^2 + \frac{a^2}{b^2}\, y_1{}^2 = a^2$$

$$\text{oder}\ \frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} = 1.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ellipse mit den Achsen C_1D_1 und A_1B_1.

Folgerung. Aus $y_1 = \frac{b}{a}\, y$, wo $\frac{b}{a}$ eine durch die Lage der Ebenen E und E_1 bestimmte gleichbleibende Grösse (cos. des Neigungswinkels) ist, zeigt sich, dass die Ordinaten y_1 der Ellipse gegenüber den entsprechenden (zu demselben Werte von x gehörigen) Ordinaten y des Kreises in einem bestimmten Verhältnis verkürzt erscheinen, dessen numerischer Wert gleich dem Quotienten aus den Achsenlängen der Ellipse ist.

Anmerkung. Die Fläche der Ellipse ist die Orthogonalprojektion der Kreisfläche. Hieraus folgt: Der Flächeninhalt einer Ellipse mit den Achsen 2 a und 2 b ist $= a\, b\, \pi$.

67. **Ordinatenkonstruktion der Ellipse.** Eine Ellipse aus den Achsen $AA_1 = 2\,a$ und $BB_1 = 2\,b$ zu zeichnen. Konstruktion. Beschreibe über AA_1 als Durchmesser einen Kreis, sowie einen koncentrischen Kreis mit Radius = b. Ziehe einen beliebigen Radius, welcher die Kreise in C und D trifft. Die durch C und D zu den Achsen gezogenen Parallelen schneiden einander in dem Ellipsenpunkte X. (Symmetrische Konstruktion!) Beweis. Wird ME = x, XE = y gesetzt, so hat man die Beziehungen

$$1)\ x^2 + CE^2 = a^2$$

$$\text{und } 2)\ y : CE = b : a, \text{ also } CE = \frac{a}{b}\, y.$$

Hieraus ergiebt sich für Punkt X die Beziehung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

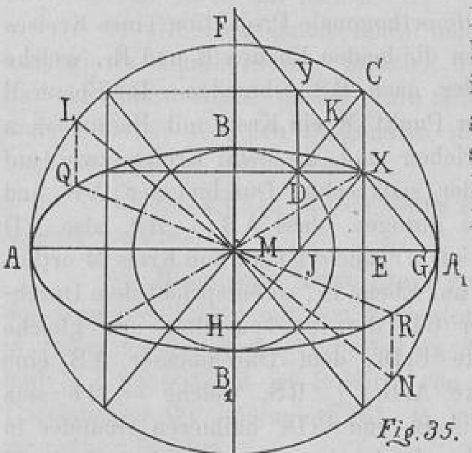


Fig. 35.

Anmerkung. Statt von dem Kreise über der grossen Achse hätte man auch von demjenigen über der kleinen Achse ausgehen und die Ordinaten im Verhältnis a : b verlängern können. (Punkt Y in Fig. 35.)

68. **Ellipsenkonstruktion durch Streckenverschiebung.** Bewegt sich eine Strecke so, dass ihre Endpunkte sich auf zwei zu einander senkrechten Geraden verschieben, so beschreibt jeder Punkt der Strecke, bezw. ihrer Verlängerung, eine Ellipse. Die Strecke selbst ist dabei gleich der Summe, bezw. der Differenz der Halbachsen der Ellipse.

Beweis. (Fig. 35.) 1. Fall: Punkt auf der Strecke. AA_1 und BB_1 seien zwei auf einander senkrechte Gerade, FG die bewegte Strecke, X ein Punkt auf ihr, und zwar so, dass $XF = a$, $XG = b$ ist. Fälle $XE \perp AA_1$ und beschreibe um M (Schnitt von AA_1 und BB_1) einen Kreis mit Radius $= a$, welcher EX in C trifft. Gerade MC und XF schneiden einander in K. Aus $CX \parallel MF$ und $XF = a = MC$ folgt $\sphericalangle KFM = KMF$ und hieraus weiter $\sphericalangle KMG = KGM$. Es ist somit $\triangle KMG$ gleichschenklig. Zieht man noch durch X eine Parallele zu AA_1 bis zum Schnitt mit MK in D, so ist $MD = GX = b$. Die Punkte C und D liegen auf Kreisen, die um M mit den Radien a und b beschrieben sind, CX und DX sind den Geraden BB_1 und AA_1 parallel, somit ist X nach 67 ein Punkt der Ellipse mit den Achsen 2a und 2b. 2. Fall: Punkt auf der Verlängerung der Strecke. Die bewegte Strecke sei HJ, X ein Punkt auf ihrer Verlängerung, und zwar so, dass $HX = a$, $JX = b$, HJ also $= a - b$ ist. Kreis um M mit a giebt wieder Punkt C. Es ist nun $MC \parallel HX$; die durch X zu AA_1 gezogene Parallele schneidet MC in D so, dass $MD = JX = b$. Es ergiebt sich hieraus wie oben, dass X ein Punkt der Ellipse mit den Achsen 2a und 2b ist.

Anmerkung. Auf vorstehendem Satze beruht die Konstruktion des Ellipsenzirkels. Der Satz wird weiter benützt, um mit Hilfe eines Papierstreifens die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse zu finden, deren Achsen nach Lage und Grösse gegeben sind.

69. **Projektion senkrechter Kreisdurchmesser.** Die Projektionen zweier auf einander senkrechten Kreisdurchmesser sind konjugierte Durchmesser der Ellipse.

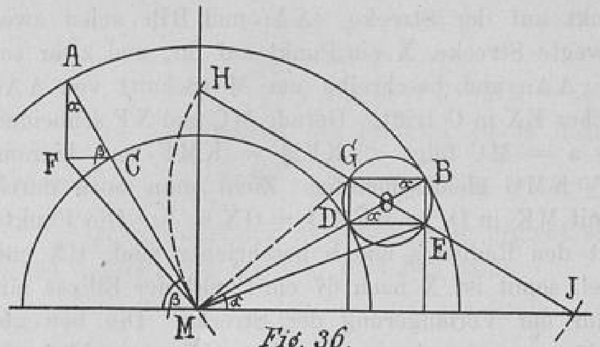
Beweis. (Fig. 34.) Die beiden senkrechten Durchmesser PW und QV des Kreises projizieren sich als die Durchmesser P_1W_1 und Q_1V_1 der Ellipse. Die zu PW parallele Sehne BG des Kreises wird von QV in H halbiert, ihre Projektion B_1G_1, welche $\parallel P_1W_1$ ist, ebenso von Q_1V_1 in H_1. Durchmesser Q_1V_1 halbiert demnach die zu P_1W_1 parallelen Sehnen der Ellipse, ist also (61. 3) der zu P_1W_1 konjugierte Durchmesser.

Zusatz. Wird die Kreisfläche parallel mit sich selbst so verschoben, dass CD mit der ihr gleichen Strecke C_1D_1 zusammenfällt, und darauf noch der Kreis um C_1D_1 in die Ebene E_1 umgeklappt, so werden die Verbindungslinien entsprechender Punkte, d. h. je eines Punktes und seiner Projektion, unter sich parallel und $\perp$ zu C_1D_1. Es werden also PP_1 und $QQ_1 \perp C_1D_1$. Die Punkte P_1 und Q_1 ergeben sich aus P und Q vermittelst der Ordinatenkonstruktion; es liefern also die beiden zu einander senkrechten Radien M_1P und M_1Q des Konstruktionskreises über C_1D_1 die Punkte P_1 und Q_1 so, dass M_1P_1 und M_1Q_1 die Hälften zweier konjugierten Durchmesser der Ellipse sind.

Aufgabe. Zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse mit Hilfe der Ordinatenkonstruktion zu zeichnen. (Fig. 35. $ML \perp MC$ giebt die konjugierten Durchmesser QM und XM.)

70. **Konstruktion der Achsen aus konjugierten Durchmessern.** Die Achsen der Ellipse zu zeichnen, wenn zwei konjugierte Durchmesser gegeben sind.

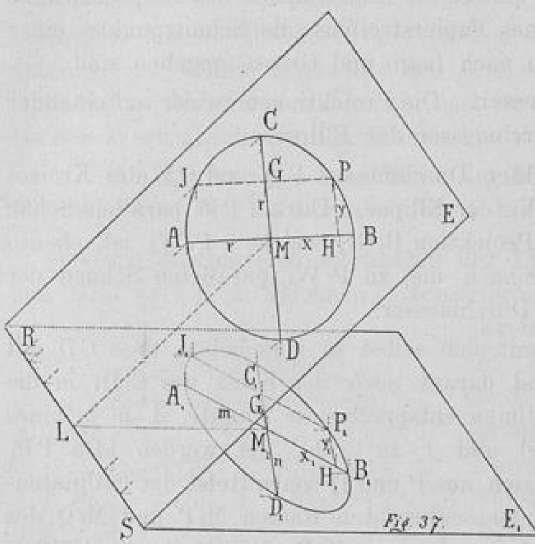
Auflösung. Die Ordinatenkonstruktion liefert mittelst der Radien $MA \perp MB$ die konjugierten Durchmesser FM und EM der Ellipse. Aus $\triangle ACF \cong DBE$ folgt $AF = DE$. Errichtet man nun auf MF ein Lot in M, trägt darauf $MG = MF$ ab und zieht BG, so ist $\triangle MGB \cong MFA$. Wegen $BG = AF = DE$, $\sphericalangle GBM = FAM = BDE$ und $\sphericalangle BED = R$ ist GDEB ein Rechteck. Diagonale GE schneide die Achsen der Ellipse in in H und J, sowie MB in O. Da $EH = BM = GJ = a$ und $GH = DM = EJ = b$,



so ist auch $OH = OM = OJ = \frac{a+b}{2}$.

Es ergiebt sich demnach, wenn die (halben) konjugierten Durchmesser MF und ME gegeben sind, folgende Achsenkonstruktion: Errichte auf MF ein Lot $MG = MF$. Ziehe GE und beschreibe um die Mitte O dieser Strecke mit Radius $= OM$ einen Kreis, welcher die Verlängerungen von GE in H und J schneidet, dann sind MH und MJ die Richtungen, HE und EJ die Längen der Achsen der Ellipse. (Statt des Kreises um O mit Radius OM könnte auch der Kreis über GE als Durchmesser Verwendung finden.)

71. **Gleichung der Ellipse bezogen auf konjugierte Durchmesser.** Kreis M in Ebene E sei auf Ebene E_1 orthogonal projiciert. Die auf einander senkrechten Durchmesser AB und CD des Kreises geben die konjugierten Durchmesser A_1B_1 und C_1D_1 der Ellipse. Zu einem beliebigen Punkt P des Kreises, der in Bezug auf die Achsen AB und CD die Koordinaten x und y hat, ergiebt sich als Projektion P_1 mit den auf die zu einander schief liegenden Achsen A_1B_1 und C_1D_1 bezogenen Koordinaten x_1 und y_1. Bezeichnet man noch A_1M_1 und C_1M_1 mit m und n, so zeigt sich, dass



$x : r = MH : MB = M_1H_1 : M_1B_1 = x_1 : m$

und $y : r = PH : CM = P_1H_1 : C_1M_1 = y_1 : n$

sich verhalten. Durch Einsetzung der Werte

$$x = \frac{r}{m} x_1 \text{ und } y = \frac{r}{n} y_1$$

in die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ergiebt sich

$$\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{y_1^2}{n^2} = 1$$

als die auf die konjugierten Durchmesser A_1B_1 und C_1D_1 als Koordinatenachsen bezogene Gleichung der Ellipse.

72. **Schiefe Parallelprojektion eines Kreises.** Die schiefe Parallelprojektion eines Kreises auf eine Ebene ist eine Ellipse.

Beweis. Kreis M in Ebene E sei durch schiefe Parallelprojektion auf Ebene E_1 projiciert. Die auf einander senkrechten Durchmesser AB und CD des Kreises projicieren sich nach A_1B_1 und C_1D_1, welche Strecken einander in M_1, der Projektion von M, halbieren. Ein beliebiger Punkt P des Kreises habe in Bezug auf die Achsen AB und CD die Koordinaten x und y, sein entsprechender Punkt in Bezug auf die schiefen Achsen A_1B_1 und C_1D_1 die Koordinaten x_1 und y_1. Bezeichnet man noch A_1M_1 und C_1M_1 mit m und n, so ergiebt

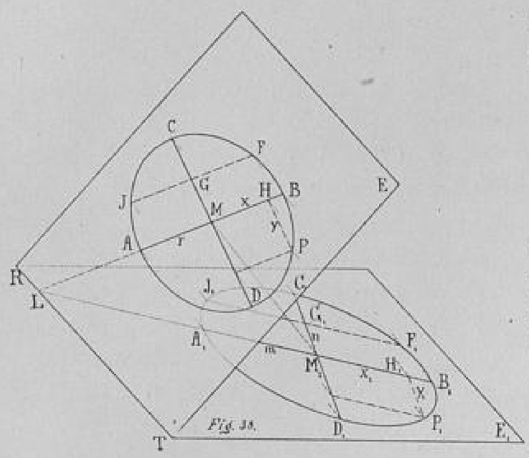


Fig. 38.

sich $x : r = x_1 : m$ und $y : r = y_1 : n$, somit als Gleichung der Projektion

$$\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{y_1^2}{n^2} = 1.$$

Die Kurve ist also eine Ellipse.

Anmerkung. Wird in Fig. 37 Durchmesser CD parallel zu RT angenommen, so projiziert er sich in einem ihm gleichen und parallelen Durchmesser C_1D_1. Die Parallelverschiebung des Kreises bis Durchmesser CD mit C_1D_1 zusammenfällt und die darauf folgende Umklappung des Kreises um C_1D_1 in Ebene E_1 führt auf Grund der Bemerkung, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte einander parallel werden, zur folgenden Konstruktion.

73. **Konstruktion der Ellipse aus konjugierten Durchmessern.** Eine Ellipse aus den konjugierten Durchmessern AB und CD zu zeichnen. Konstruktion. Beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis. Errichte auf AB ein Lot in M, welches den Kreis in E trifft und ziehe EC. Fälle nun von einem beliebigen Punkt P des Kreises ein Lot PQ auf AB, und ziehe durch Q und P die Parallelen zu CD und EC, so schneiden sich diese im Punkte X der Ellipse.

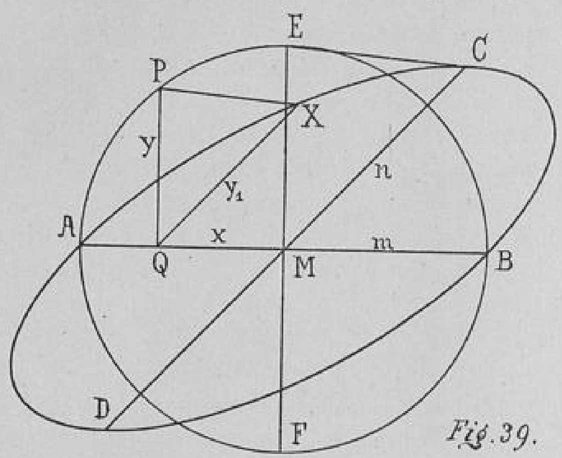
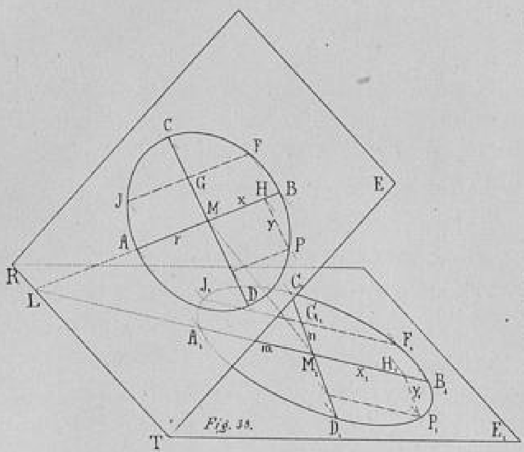


Fig. 39.

Beweis. Setzt man $QM = x$, $PQ = y$, $XQ = y_1$, sowie $AM = m$, $CM = n$, so ergiebt sich aus $\triangle PXQ \sim ECM$ $y : y_1 = m : n$. Dies giebt mit $x^2 + y^2 = m^2$ als Gleichung der Kurve

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y_1^2}{n^2} = 1.$$

Diese ist somit eine Ellipse.



sich x : r =
als Gleichun

Die Ku

Anmer
CD parallel
sich in einer
messer C_1D_1,
bis Durchmes
die darauf f
C_1D_1 in Eber
dass die Ver
einander parallel werden, zur folgenden Konstruktion.

73. **Konstruktion der Ellipse aus konjugierte**

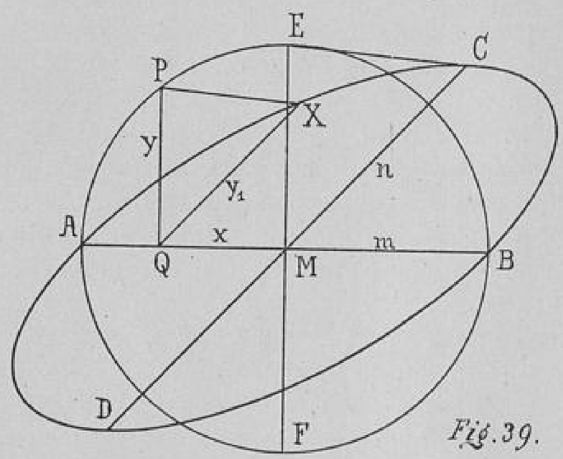


Fig. 39.

den ko
zu zeich
AB als
auf AB
in E t
einem
Lot PQ
P die
den sich
Be
y, XQ
so ergie
= m :
als Glei

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y_1^2}{n^2} = 1.$$

Diese ist somit eine Ellipse.