Ueber die einfachen, homoedrischen Formen des regulären Krystallsystems.

Die regelmäßigen Körper, welche in der elementaren Geometrie betrachtet werden, sind durch regelmäßige, congruente Begrenzungsflächen und durch congruente Ecken ausgezeichnet. In gleicher Art haben die einfachen Formen des regelmäßigen Krystallsystems zwar congruente Figuren zur Begrenzung, jedoch ist die Regelmäßigkeit der Begrenzungsflächen und die Congruenz der Ecken kein wesentliches Merkmal der hierhingehörigen Polyeder. Den generellen Charakter dieser Körper bildet die Congruenz der Begrenzungsflächen verbunden mit der Gleichartigkeit ihrer Lage in Beziehung auf drei rechtwinklige Axen, welche man durch den Mittelpunkt der Form gelegt denkt.

Nun ist aber die Lage einer Ebene vollständig bestimmt durch die Längen, welche sie von drei rechtwinkligen Coordinatenaxen abschneidet; daher kann man von den Begrenzungsflächen einer einfachen Form des regulären Krystallsystems behaupten, daß sie sämmtlich dieselben drei Stücke von drei rechtwinkligen Axen abtrennen, deren Schneidungspunkt mit dem Mittelpunkte der Form zusammenfällt. Es darf hierbei wohl kaum erwähnt werden, daß ebensowohl nur von den numerischen Werthen der abgeschnittenen drei Stücke die Rede ist, als daß auch jederzeit nur ihr Complexus betrachtet werden muß; denn unter dieser Voraussetzung allein wird man zugeben können, daß Ebenen, welche von der x, y, z Axe respective a, b, c oder a, $-b$, $-c$ oder b, $-a$, c ꝛc. abschneiden, von gleicher Lage gegen den Mittelpunkt der Form seien.

Wenn es hiernach also feststeht, daß in Bezug auf drei rechtwinklige Axen die Lage aller Begrenzungsflächen bei einer einfachen Krystallform des regelmäßigen Systems ein und dieselbe ist, so wird das reguläre Krystallsystem auch nur soviel verschiedene einfache Formen enthalten können, als Abänderungen in der Lage einer Ebene gegen drei rechtwinklige Axen denkbar sind. Eine nähere Untersuchung lehrt indessen, daß diese Folgerung unrichtig sei; denn man ist in der That genöthigt, gewisse Formen als verschiedene zu trennen, wiewohl die Lage der Begrenzungsflächen bei ihnen vollkommen übereinstimmt. Nachdem nämlich die Lage der begrenzenden Ebenen für eine einfache Form bestimmt ist, kommt es bei der Construction dieser Form wesentlich darauf an, ob alle möglichen Ebenen von derselben Lage an der Begrenzung Theil nehmen sollen, oder nicht. In gewissen Fällen erkennt man, daß die Hälfte aller möglichen Ebenen, ja bisweilen sogar der vierte Theil derselben schon zur Begrenzung einer einfachen Form hinreicht, und auf diese Weise erhält man für dasselbe Symmetriegesetz der Begrenzungsflächen verschiedene einfache Formen, auf welche sich die Benennungen homoedrische, hemiedrische, tetartoedrische Form beziehen.

Die einfachen, homoedrischen Formen des regulären Krystallsystems sind es nun, welche den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden; und zwar sollen die verschiedenen Formen der Reihe nach untersucht werden, nachdem die Anzahl derselben zuvor festgestellt worden ist. — Zuerst muß also bestimmt werden, wie oft die Lage einer Ebene gegen drei rechtwinklige Axen abgeändert werden kann. Offenbar lassen sich aber in Bezug auf die drei Stücke, welche eine Ebene von den drei Axen abschneidet, im Allgemeinen nur folgende sieben Fälle unterscheiden: 1) alle drei Stücke sind gleich; 2) zwei Stücke sind gleich und unendlich; 3) zwei Stücke sind gleich und endlich und das dritte ist unendlich; 4) zwei Stücke sind gleich und endlich und das dritte ist endlich und größer; 5) zwei Stücke sind gleich und endlich und das dritte ist endlich und kleiner; 6) alle drei Stücke sind ungleich und eins davon ist unendlich; 7) alle drei Stücke sind ungleich und endlich. Es geht also aus dieser Uebersicht hervor, daß in dem regulären Krystallsystem nur 7 verschiedene, homoedrische, einfache Formen enthalten sind.

I. Das Oktaeder.

Bei der ersten homoedrischen Form soll jede Ebene der Begrenzungsfiguren von der x, y, z Axe dieselben drei untersich gleichen Längen a abschneiden. Trägt man daher auf jede der drei Coordinatenaxen + a und — a auf und legt durch je drei der sechs Endpunkte, welche auf drei verschiedenen Axen liegen, eine

Ebene, so erhalten die sechs möglichen Begrenzungsflächen die vorgeschriebene Lage. Man erkennt leicht, daß diese erste homoedrische Form das Oktaeder sei, bei welchem 8 regelmäßige, congruente Dreiecke, 6 gleiche, reguläre Ecken und 12 gleiche Kanten vorkommen. Jede Ecke enthält 4 Kanten, wovon die gegenüberliegenden den Winkel 90^0 bilden, da sie die Seiten eines regelmäßigen Vierecks sind. — Im Allgemeinen wird die Neigung zweier Ebenen, wenn dazu die Gleichungen $mx + ny + pz = q$ und $m_, x + n_, y + p_, z = q_,$ gehören, durch die Formel

$$\cos. \psi = \frac{mm_, + nn_, + pp_,}{\sqrt{(m^2 + n^2 + p^2)(m_,^2 + n_,^2 + p_,^2)}}$$

bestimmt, daher beträgt der Neigungswinkel an jeder Kante des Oktaeders $109^0\ 28'\ 16'',3$; denn die Gleichungen für die zur Kante gehörigen Ebenen nehmen eine solche Form an, daß bei gleichen numerischen Werthen die Coefficienten nur bei einer Veränderlichen verschiedene Zeichen erhalten, ($-x + y - z = a$; $-x - y - z = a$) woraus sich der Cosinus der Neigung an jeder Kante $\cos. \psi = -\frac{1}{3}$ ergiebt.

Aus der Construction folgt ferner, daß diese Form drei gleiche, senkrechte Axen (Oktaederaxen) hat und daß die Flächen paarweise parallel sind, weshalb je zwei derselben, welche an einer Ecke gegenüberliegen, den Neigungswinkel $70^0\ 31'\ 43'',7$ bilden. Es verdient hier bemerkt zu werden, daß die Benennungen Oktaederecken und Oktaederaxen nicht bloß bei dieser Form ihre Anwendung finden, sondern bei allen Krystallformen, auf deren Begrenzung 6 Punkte angetroffen werden, welche mit den 6 Ecken des Oktaeders gleiche Lage haben. — Als Beispiele von Mineralien, welche diese Form haben, mögen Spinell und Magneteisenstein erwähnt werden.

II. Das Hexaeder.

Von den Längen, welche die Begrenzungsflächen der zweiten Form auf den drei Axen abschneiden, sollen zwei gleich und zwar unendlich sein. Man trägt also wieder auf jede Axe die Stücke $+a$ und $-a$ auf und legt durch jeden der 6 Endpunkte eine Ebene parallel zur Ebene der beiden Axen, anf welchen dieser Endpunkt nicht liegt. Jede dieser Ebenen schneidet dann zwei Axen garnicht, oder die abgeschnittenen Längen sind beide unendlich groß. Die daraus hervorgehende Krystallform aber kann keine andere als der Würfel oder das Hexaeder sein, dessen Begrenzung 6 congruente Quadrate bilden. Diese Form hat 8 gleiche, reguläre Ecken und 12 gleiche Kanten, von denen 3 zu jeder Ecke gehören, und die Neigung an jeder Kante beträgt 90^0.

Merkwürdig sind bei dieser Form 4 gleiche Axen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden und Hexaederaxen genannt werden. Von ihnen schließen je zwei aufeinander folgende den Winkel $70^0\ 31'\ 43'',7$ ein, und da die Oktaederaxen bei dieser Form die Mittelpunkte paralleler Flächen verbinden, so schneidet jede Hexaederaxe die drei benachbarten Oktaederaxen unter demselben Winkel von $54^0\ 44'\ 8'',2$. — Auch hier muß wieder bemerkt werden, daß an andern Krystallformen 8 Punkte vorkommen können, deren gegenseitige Lage mit derjenigen der Hexaederecken übereinstimmt. So erkennt man sie bei dem Oktaeder als die Mittelpunkte der 8 regelmäßigen Begrenzungsflächen. Aus der Vergleichung der Oktaederfläche mit der Hexaederfläche ergiebt sich ganz einfach, daß man am Oktaeder die Würfelfläche als gerade Abstumpfung der Ecke construiren kann, und ebenso führt eine gerade Abstumpfung der Hexaederecke auf die Oktaederfläche.

Beispiele für das Hexaeder sind Schwefelkies und Flußspath.

III. Das Rhombendodekaeder (Granatoeder).

Von den drei Stücken, welche eine Fläche der dritten Krystallform auf den drei Axen abschneidet, sind zwei gleich und endlich, das dritte ist unendlich. Man erhält also die Begrenzungsflächen dieses Körpers, wenn man auf die drei Axen die Länge $+ a$ und $- a$ aufträgt und durch je zwei der 6 Endpunkte, die nicht auf derselben Axe liegen, Ebenen parallel zur dritten Axe construirt. Auf diese Art entstehen nothwendig 12 Flächen, von denen offenbar 4 durch jede Oktaederecke gehen. Betrachtet man aber die Gleichungen von drei in Bezug auf einen einzelnen körperlichen Octanten benachbarten Ebenen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1; \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{a} = 1; \quad \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1,$$

welchen die Werthe $x = y = z = \frac{1}{2} a$ genügen, so erkennt man, daß ihr Schneidungspunkt eine mit der Hexaederecke übereinstimmende Lage hat. Es befinden sich also an dieser Form 14 Ecken und zwar 6 vierflächige, reguläre Oktaederecken und 8 dreiflächige, reguläre Hexaederecken und daraus folgt die Zahl der Kanten gleich 24. Um die Neigung an den Kanten zu berechnen, braucht man die Gleichungen für zwei benachbarte Ebenen. Da aber solche zwei Gleichungen immer nur zwei Veränderliche enthalten können, nämlich x, y und x, z; oder y, z und y, x; oder z, x und z, y, deren Coefficienten den Werth $\pm \frac{1}{a}$ haben müssen, so reducirt sich der Zähler des $\cos. \psi$ auf das Glied

$\frac{1}{a^2}$ und jeder Factor unter dem Wurzelzeichen des Nenners muß $\frac{2}{a^2}$ werden, oder man erhält die Gleichung $\cos. \psi = -\frac{1}{2}$ und als Neigungswinkel an allen Kanten 120°.

Die dritte Form des regulären Krystallsystems hat also bei gleichen Kanten verschiedene Ecken. Vier dieser Ecken liegen in einer Begrenzungsfläche, und zwar immer zwei Oktaederecken mit zwei Hexaederecken, woraus sich als Begrenzungsfigur der Rhombus ergiebt, zu dessen Construction die beiden Diagonalen hinreichen. Man findet für die kürzere Diagonale aus den Coordinaten von zwei benachbarten Hexaederecken ($x = y = z = \frac{1}{2}a$; $x = y = -z = \frac{1}{2}a$) den Werth a und für die längere Diagonale, welche zwei Oktaederecken verbindet, $a\sqrt{2}$; also verhalten sich die Diagonalen der 12 begrenzenden, congruenten Rhomben wie $1 : \sqrt{2}$, oder der Winkel eines Rhombus beträgt 70° 31′ 43″,7. —

Die Flächen der früheren beiden Formen erhält man am Rhombendodekaeder durch gerade Abstumpfungen der Ecken, und an den vorhergehenden beiden Formen erscheinen die Rhombendodekaederflächen als gerade Abstumpfungen der Kanten. — Ein Beispiel zu dieser Krystallform liefert der Granat, von welchem sie den Namen Granatoeder erhalten hat.

IV. Die Triakisoktaeder (Dreimalachtflächner, Pyramidenoktaeder).

Bei dieser Form schneidet jede Begrenzungsfläche drei endliche Stücke von den Axen ab, und zwar sind zwei davon gleich und das dritte ist größer. Nimmt man also als abgeschnittene Stücke auf den Axen $\pm a$ und $\pm b$ an, wobei $b > a$ sein soll, so wird man in Bezug auf die positive x, y, z Axe oder in Bezug auf den ersten körperlichen Octanten nur diejenigen drei Ebenen zu unterscheiden haben, welche von den genannten Axen respective a, a, b; a, b, a; b, a, a abtrennen, wozu die Gleichungen gehören:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1; \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1; \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1,$$

deren gemeinschaftlicher Punkt die Coordinaten $x = y = z = \frac{ab}{2b + a}$ hat. Da nun auf ähnliche Art jedem andern Octanten drei Flächen zugehören, so muß die vollständige Begrenzung bei dieser Form 24 Flächen enthalten. Auch ist von selbst klar, daß die 24 Begrenzungsfiguren congruente, gleichschenklige Dreiecke sein werden, von denen je drei zu einer Pyramide über jeder Oktaederfläche gehören. Die Pyramidenoktaeder haben also zweierlei Ecken: 6 Oktaederecken und 8 Hexaederecken; die ersteren sind 8flächig und symmetrisch, die letzteren sind dreiflächig und regulär. Von den 36 Kanten bilden 8.3 unter sich gleiche die gleichen Seiten der gleichschenkligen Dreiecke und 12 andere wieder unter sich gleiche, welche mit den Oktaederkanten zusammenfallen, die Grundlinien jener Dreiecke. Aus den Coordinaten für die Ecken des Körpers ergiebt sich das Verhältniß zwischen der Grundlinie und Seite des gleichschenkligen Dreiecks $(2b + a)\sqrt{2} : \sqrt{(2b^2 + (b+a)^2)}$. Für den Neigungswinkel an einer der gleichen Seiten eines Dreiecks findet man aus den Gleichungen $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1$ uud $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1$ den $\cos.\ \psi_1 = -\frac{(b^2 + 2ab)}{2b^2 + a^2}$ und aus den Gleichungen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1$ und $\frac{x}{a} + \frac{y}{-b} + \frac{z}{a} = 1$ erhält man für die Neigung an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks $\cos.\ \psi_2 = -\frac{(2b^2 - a^2)}{2b^2 + a^2}$.

Sollen bei dem Pyramidenoktaeder alle Kanten gleich oder die Oktaederecken regulär sein, so muß $b^2 + 2ab = 2b^2 - a^2$ werden oder $\frac{b}{a} = 1 + \sqrt{2}$; d. h. die Flächen der Krystallform schneiden von den Axen drei Stücke ab, welche sich verhalten wie $1 : 1 : (1 + \sqrt{2})$. Für diesen Fall ist der Neigungswinkel aller Kanten aus der Formel $\cos.\ \psi = -\frac{(3 + 8\sqrt{2})}{17}$ zu berechnen und man findet $\psi = 147^\circ\, 21'\, 0'',3$ und für die Seiten des gleichschenkligen Dreiecks ergiebt sich das Verhältniß $1 : (2 - \sqrt{2})$. Diese Species der Pyramidenoktaeder ist bis jetzt in der Natur nicht angetroffen worden; dagegen kennt man 6 andere Arten dieser Krystallform, und zwar sind bei 4 derselben die kürzeren Kanten stumpfer bei 2 Arten weniger stumpf als die längeren. Bei den drei bekanntesten Species haben die auf den Axen abgeschnittenen Stücke respective das Verhältniß $1 : 1 : 3/2$; $1 : 1 : 2$; $1 : 1 : 3$; woraus sich nach den aufgestellten Formeln für die Neigungswinkel an der kürzeren und längeren Kante folgende Werthe ergeben.

a : a : b	Kürzere Kante.	Längere Kante.
1) $1:1:\frac{3}{2}$.	$\cos.\ \psi_1 = -\frac{21}{22}$	$\cos.\ \psi_2 = -\frac{7}{11}$
	$\psi_1 = 162^\circ 39' 30'',7$	$\psi_2 = 129^\circ 31' 16'',4$
2) $1:1:2$.	$\cos.\ \psi_1 = -\frac{8}{9}$	$\cos.\ \psi_2 = -\frac{7}{9}$
	$\psi_1 = 152^\circ 44' 2'',3$	$\psi_2 = 141^\circ 3' 27'',2$
3) $1:1:3$.	$\cos.\ \psi_1 = -\frac{15}{19}$	$\cos.\ \psi_2 = -\frac{17}{19}$
	$\psi_1 = 142^\circ 8' 10'',8$	$\psi_2 = 153^\circ 28' 28'',7$

Die Pyramidenoktaeder kommen fast nur in Combination mit andern Formen vor, z. B. beim Granat, Flußspath und Bleiglanz; zwar trifft man sie auch allein an beim Diamant, jedoch läßt die Beschaffenheit der Flächen hier eine Messung der Winkel nicht zu.

V. Die Ikositetraeder (Leucitoide).

Jede Fläche dieser Form schneidet auf zwei Axen endliche, gleiche Längen und auf der dritten Axe ein kleineres Stück ab. Um sämmtliche Begrenzungsflächen zu erhalten, trägt man daher auf jede der drei Axen sowohl $\pm$ a als $\pm$ b auf, wobei wieder $b > a$ ist, und construirt nun Ebenen, von welchen jede durch den Endpunkt einer Länge a und durch die Endpunkte zweier Längen b auf den beiden andern Axen geht. Auf diese Weise wird man für alle 8 Octanten 8 . 3 Ebenen erhalten, da sich in dem einzelnen, der z. B. zur positiven x, y, z Axe gehört, nur drei Ebenen unterscheiden lassen, welche respective a, b, b; b, a, b; b, b, a von diesen Axen abtrennen. Die Gleichungen solcher drei Ebenen sind nun:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{b} = 1;\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1;\ \frac{x}{b} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1$$

und als Coordinaten des Durchschnittspunktes ergeben sich die Werthe: $x = y = z = \frac{ab}{b + 2a}$. Hiernach kommen an dem Ikositetraeder erstens die 8 Hexaederecken vor, in welchen immer drei Begrenzungsflächen zusammentreffen. Die Neigung an den drei Kanten einer solchen Ecke ist gleich und kann nach der Formel $\cos.\ \psi_1 = -\frac{(2ab + a^2)}{b^2 + 2a^2}$ bestimmt werden. Da ferner 4 Ebenen um die x Axe liegen, welche von derselben + a abschneiden, so findet man an dieser Körperform zweitens vierflächige Oktaederecken. Eine dieser Ecken wird z. B. von den 4 Ebenen gebildet, deren Gleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{b} = 1;\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{-b} = 1;\ \frac{x}{a} + \frac{y}{-b} + \frac{z}{-b}$$

$= 1$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{-b} + \frac{z}{b} = 1$ sind; man sieht also, daß sich zur Berechnung der Neigung an allen 4 Kanten dieselbe Formel ergiebt $\cos. \psi_2 = -\frac{b^2}{b^2 + 2a^2}$, oder daß die Oktaederecken an dieser Krystallform ebenfalls regulär sein müssen.

Nun giebt es zwar noch eine dritte Art von Ecken, denn es schneiden sich immer 4 Flächen in einem Punkte, welche paarweise zu zwei Oktaederecken oder auch paarweise zu zwei Hexaederecken gehören, wodurch diese neuen Ecken symmetrisch werden; aber eine dritte Art von Kanten kann dabei nicht vorkommen, weil nur Flächenpaare aus beiden Systemen zur Bildung dieser Ecke verwendet werden. — Das Ikositetraeder hat demnach dreierlei Ecken: 8 reguläre, dreikantige Hexaederecken, 6 reguläre, vierkantige Oktaederecken und 12 symmetrische, vierkantige Ecken, welche zwischen je zwei benachbarten Hexaderecken oder Oktaederecken liegen, und nur zweierlei Kanten: 8.3 der ersten Art, welche bei den Hexaederecken vorkommen und 6.4 der zweiten Art, welche zu den Oktaederecken gehören.

Die Ecken der dritten Art liegen auf den Linien, welche die 12 rechten Winkel der Oktaederaxen halbiren; denn betrachtet man die Gleichungen der 4 Ebenen, welche zu einer solchen Ecke gehören, z. B.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{b} = 1; \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1; \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{-b} + \frac{z}{a} = 1;$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{-b} + \frac{z}{b} = 1$, so erhält man für die Coordinaten der Ecke $y = 0$; $x = z = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$. Um nun die Begrenzungsfigur zu bestimmen, hat man nur zu untersuchen, wieviel Ecken des Körpers in einer Begrenzungsebene liegen. Geht man dabei von der Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{b} = 1$ aus, so genügen dieser Gleichung erstens die Coordinaten einer Oktaederecke $x = a$, $y = z = 0$, zweitens die Coordinaten einer Hexaederecke $x = y = z = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{2}{b}}$, drittens und viertens die Coordinaten von zwei Ecken der dritten Art, nämlich $y = 0$, $x = z = \dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a}}$ und $z = 0$,

$x = y = \dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$; also haben die Ikositetraeder Vierecke zu Begrenzungsfiguren. Aus der gegenseitigen Lage solcher 4 zusammengehörigen Ecken, ergiebt sich sogleich, daß die Seiten dieser Vierecke paarweise gleich sein müssen. Daß die Begrenzungsfiguren bei den Ikositetraedern niemals Rhomben sein können, wird aus der Vergleichung der allgemeinen Seitenlängen erkannt. Diejenigen beiden gleichen Seiten, welche die Oktaederecke enthalten, sind die größeren; ihr Werth ist $\dfrac{a\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a + b}$ und die andern beiden gleichen Seiten, welche die Hexaederecke enthalten, sind immer die kleineren, weil sie den Werth $\dfrac{ab\sqrt{(2a^2 + (a + b)^2)}}{(a + b)(b + 2a)}$ haben. Für die beiden Diagonalen des Trapezoides erhält man die Werthe: $\dfrac{a\sqrt{(2b^2 + 4a^2)}}{b + 2a}$ und $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a + b}$, welche nur dann gleich werden können, wenn sich die auf den Axen abgeschnittenen Stücke a und b wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten, oder wenn die Begrenzungsebene des Ikositetraeders mit der Oktaederaxe den Winkel 45° bildet. Es haben nämlich an jeder Oktaederecke die gegenüberliegenden Flächen einen Neigungswinkel, dessen Cosinus durch die Gleichung $\cos.\,\psi = -\dfrac{(b^2 - 2a^2)}{b^2 + 2a^2}$ bestimmt wird, und die Hälfte dieses Winkels ψ giebt die Neigung der Begrenzungsfläche zur Oktaederaxe an. Je kleiner dieser Neigungswinkel wird, desto ähnlicher ist die Gestalt des Ikositetraeders derjenigen des Oktaeders und je größer der Winkel ψ ist, desto mehr tritt bei der Krystallform die Aehnlichkeit mit dem Hexaeder hervor.

Wenn die Kanten des Ikositetraeders gleich sein sollen, so muß $2ab + a^2 = b^2$ sein, oder die auf den Axen abgeschnittenen Längen müssen sich verhalten wie $1 : (1 + \sqrt{2})$. Ebenso merkwürdig ist diejenige Species, bei welcher die Diagonalen der Trapezoide dieselbe Lage haben, wie die Kanten des Granatoeders. Die Bedingungsgleichung dafür ist $\dfrac{2b}{b + 2a} = 1$; es müssen

also die auf den Axen abgeschnittenen Stücke a und b das Verhältniß 1 : 2 haben. Diese Art der Ikositetraeder kommt bei dem Mineral Leucit vor und hat davon den Namen Leucitoeder erhalten. Die Seiten des Trapezoides sind hier $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{6}\sqrt{11}$ und die Diagonalen $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ und zwar ist die Granatoederkante die kleinere Diagonale, welche von der andern nach dem Verhältnisse 1 : 2 getheilt wird. Für die drei verschiedenen Winkel dieses Trapezoides erhält man folgende Werthe: an den Endpunkten der Granatoederkante 117° 2′ 8″,4 und 78° 27′ 46″,8, an den Endpunkten der andern Diagonale 82° 15′ 2″,4. Die Neigung an den Kanten des Leucitoeders beträgt
1) an den kürzeren Kanten ($\cos. \psi_1 = -\frac{5}{6}$) $\psi_1 = 146° 26′ 33″,6$
2) an den längeren Kanten ($\cos. \psi_2 = -\frac{2}{3}$) $\psi_2 = 131° 48′ 37″,1$
und zwei an der Oktaederecke gegenüberstehende Flächen bilden den Neigungswinkel ($\cos. \psi = -\frac{1}{3}$) $\psi = 109° 28′ 16″,3$, woraus die Neigung der Leucitoederfläche zur Oktaederaxe 54° 44′ 8″,1 folgt.

Außer dem Leucitoeder kennt man bis jetzt noch 9 Arten von Ikositetraedern, welche man Leucitoide nennt. Die gewöhnlichsten sind diejenigen beiden Species, bei welchen die von den Axen abgeschnittenen Stücke a und b die Verhältnisse 1 ; 3 und 3 : 4 haben. Das erste Leucitoid, zu welchem das Verhältniß 1 : 3 gehört, ist dadurch ausgezeichnet, daß der Neigungswinkel an der kürzeren Kante mit dem Neigungswinkel für zwei an der Oktaederecke gegenüberliegende Flächen übereinstimmt, wofür die Bedingung gilt $2ab + a^2 = b^2 - 2a^2$ oder $\frac{b}{a} = 3$. Die Formeln führen auf folgende Neigungswinkel:

a : b : b.	Kürzere Kante.	Längere Kante.
1) 1:3:3	$\cos. \psi_1 = -\frac{7}{11}$	$\cos. \psi_2 = -\frac{9}{11}$
	$\psi_1 = 129° 31′ 16″,3$	$\psi_2 = 144° 54′ 11″,5$

Neigung zwisch. der Leucitoidfläche u. Oktaederaxe.
($\cos. \psi = -\frac{7}{11}$)

$$\frac{\psi}{2} = 64° 45′ 38″,1$$

2) 3:4:4	$\cos. \psi_1 = -\frac{33}{34}$	($\cos. \psi_2 = -\frac{8}{17}$
	$\psi_1 = 166° 4′ 9″,9$	$\psi_2 = 118° 4′ 20″,9$

Neig. zwisch. d. Leucitoidfläche u. Oktaederaxe.
($\cos. \psi = \frac{1}{17}$)

$$\frac{\psi}{2} = 43° 18′ 49″,9.$$

VI. Die Tetrakishexaeder (Pyramidenwürfel).

Bei der sechsten Krystallform des regulären Systems schneidet jede Begrenzungsebene von den drei Axen drei verschiedene Längen ab, von welchen eine unendlich ist. Trägt man also auf jede Axe die Stücke $\pm a$ und $\pm b$ auf, wobei $b > a$ vorausgesetzt wird, und legt so oft als möglich durch die Endpunkte zweier verschiedener Längen auf zwei verschiedenen Axen eine Ebene, welche zur dritten Axe parallel läuft, so muß eine Form entstehen, deren Begrenzungsebenen der aufgestellten Bedingung genügen. Hier lassen sich, wenn man den einzelnen körperlichen Oktanten betrachtet, welcher z. B. zur positiven x, y, z Axe gehört, 6 Ebenen unterscheiden, deren Gleichungen folgende sind:

$$1)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1;\quad 2)\ \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1;\quad 3)\ \frac{x}{b}+\frac{z}{a}=1;$$

$$4)\ \frac{y}{b}+\frac{z}{a}=1;\quad 5)\ \frac{y}{a}+\frac{z}{b}=1;\quad 6)\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1.$$

Da diesen Gleichungen die Werthe $x=y=z=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ genügen, so muß diese Krystallform 6flächige Hexaederecken haben. Aber die Zahl der Begrenzungsflächen kann nicht 8 . 6 sein; sie reducirt sich vielmehr auf die Hälfte, wenn man erwägt, daß jede Fläche zu einer Axe parallel läuft und deshalb immer zu zwei Octanten oder zu zwei Hexaederecken gehört. Man kann sich leicht ein deutliches Bild von der Gestalt dieser Krystallform verschaffen, wenn man untersucht, wie ihre 24 Begrenzungsflächen um die Oktaederecken gruppirt sind. An der Oktaederecke $x=a$, $y=z=0$ treten folgende 4 Flächen zusammen:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1;\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1;\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{-b}=1;\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{-b}=1,$$

denn nur diesen 4 Gleichungen genügen die Werthe $x=a$, $y=z=0$, und da jede dieser Flächen gleichzeitig durch zwei benachbarte Hexaederecken geht und sich dasselbe in Bezug auf die 5 andern Oktaederecken wiederholt, so besteht die ganze Begrenzung des Körpers aus 24 congruenten, gleichschenkligen Dreiecken, von welchen je vier eine Pyramide über jeder Hexaederfläche bilden. Hiervon hat diese Form die Namen Tetrakishexaeder und Pyramidenwürfel erhalten. Man erkennt nun ohne Mühe, daß an derselben 6 reguläre 4flächige Oktaederecken, und 8 symmetrische 6flächige Hexaederecken vorkommen, und daß nur zweierlei Kanten vorhanden sind: 1) 6.4 unter sich gleiche, die gleichen

Seiten der gleichschenkligen Dreiecke und 2) 12 unter sich gleiche Kanten, die Grundlinien jener Dreiecke. Da die Grenzen dieser Form das Granatoeder und der Würfel sind, so müssen bei allen Tetrakishexaedern die gleichen Seiten der gleichschenkligen Dreiecke kürzer als die Grundlinien sein.

Die Neigung an der kürzeren und längeren Kante ist bei den Pyramidenwürfeln im Allgemeinen verschieden. Für die längere Kante erhält man den Neigungswinkel ψ_1 durch die Gleichungen:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1,$$

wonach $\cos. \psi_1 = -\frac{2ab}{a^2 + b^2}$ wird. Der Neigungswinkel an der kürzeren Kante ψ_2 ergiebt sich aus den Gleichungen: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \ \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ und zwar ist $\cos. \psi_2 = -\frac{b^2}{a^2 + b^2}$ und die Neigung ψ für zwei gegenüberstehende Flächen an der Oktaederecke kann mit Hilfe der Gleichungen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und $\frac{x}{a} + \frac{y}{-b} = 1$ berechnet werden; man findet $\cos. \psi = -\frac{(b^2 - a^2)}{b^2 + a^2}$. Nimmt man $2ab = b^2$ an, oder verhält sich $a : b = 1 : 2$, so hat diese Species der Tetrakishexaeder gleiche Kanten, also auch reguläre Hexaederecken; und setzt man $2ab = b^2 - a^2$, woraus $a : b = 1 : (1 + \sqrt{2})$ folgt, so stimmt die Neigung an der längeren Kante mit derjenigen für zwei gegenüberliegende Flächen an der Oktaederecke überein. Bei den gleichschenkligen Dreiecken ist das Verhältniß der Seiten im Allgemeinen $2b : \sqrt{(a^2 + 2b^2)}$, welches für den Fall gleicher Kanten in $4 : 3$ übergeht.

Man kennt überhaupt bis jetzt 7 Arten von Pyramidenwürfeln, welche in ihrer Gestalt theils dem Würfel, theils dem Granatoeder sehr nahe verwandt sind. Bei den bekanntesten 4 Arten haben die Neigungswinkel folgende Werthe:

$a : b ; \infty$	Längere Kante.	Kürzere Kante.	Neig. einer Fläche gegen die Oktaederaxe.
1) $1 : {}^3/_2 : \infty$	$\cos.\ \psi_1 = -{}^{12}/_{13}$	$\cos.\ \psi_2 = -{}^{9}/_{13}$	$\cos.\ \psi = -{}^{5}/_{13}$
	$\psi_1 = 157^0 22' 48'',4$	$\psi_2 = 133^0 48' 47''$	$\frac{\psi}{2} = 56^0 18' 35'',7$
2) $1 : 2 : \infty$	$\cos.\ \psi_1 = -{}^{4}/_{5}$	$\cos.\ \psi_2 = -{}^{4}/_{5}$	$\cos.\ \psi = -{}^{3}/_{5}$
	$\psi_1 = 143^0 7' 48'',3$	$\psi_2 = 143^0 7' 48'',3$	$\frac{\psi}{2} = 63^0 26' 5'',8$
3) $1 : {}^5/_2 : \infty$	$\cos.\ \psi_1 = -{}^{20}/_{29}$	$\cos.\ \psi_2 = -{}^{25}/_{29}$	$\cos.\ \psi = -{}^{21}/_{29}$
	$\psi_1 = 133^0 36' 10'' 1$	$\psi_2 = 149^0 32' 58'',8$	$\frac{\psi}{2} = 68^0 11' 54'',9$
4) $1 : 3 : \infty$	$\cos.\ \psi_1 = -{}^{3}/_{5}$	$\cos.\ \psi_2 = -{}^{9}/_{10}$	$\cos.\ \psi = -{}^{4}/_{5}$
	$\psi_1 = 126^0 52' 11'',6$	$\psi_2 = 154^0 9' 29''$	$\frac{\psi}{2} = 71^0 33' 54'',1$

Der Pyramedenwürfel Nr. **2**, welcher durch gleiche Kanten ausgezeichnet ist, kommt selbstständig in der Natur vor beim Golde und Kupfer.

VII. Die Hexakisoktaeder (Achtundvierzigflächner).

Jede Fläche dieser Krystallform schneidet von den drei Axen drei verschiedene endliche Längen ab. Um die Begrenzungsflächen zu construiren, trägt man auf jede Axe die drei Stücke $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ auf, wobei $a < b < c$ angenommen werden mag, und legt so oft als möglich eine Ebene durch solche drei der 18 Endpunkte, welche auf verschiedenen Axen zu drei verschiedenen Längen gehören. Nun giebt es offenbar nur 8 verschiedene Ebenen, welche von der x Axe $+a$ abschneiden, nämlich diejenigen, welche von der y und z Axe gleichzeitig respective die Stücke 1) $+b$, $+c$; 2) $+c$, $+b$; 3) $-c$, $+b$; 4) $-b$, $+c$; 5) $-b$, $-c$; 6) $-c$, $-b$; 7) $+c$, $-b$; 8) $+b$, $-c$ abtrennen, also sind bei dieser Krystallform die Flächen zu acht um jede Oktaederecke vertheilt. Aus den zu diesen 8 Ebenen gehörenden Gleichungen:

$$1)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1;\ 2)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{b}=1;\ 3)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{-c}+\frac{z}{b}=1;$$
$$4)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{-b}+\frac{z}{c}=1;\ 5)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{-b}+\frac{z}{-c}=1;\ 6)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{-c}+$$
$$\frac{z}{-b}=1;\ 7)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{-b}=1;\ 8)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{-c}=1$$

ergeben sich an den aufeinander folgenden Kanten abwechselnd gleiche Neigungswinkel, denn der Cosinus der Neigung erhält abwechselnd den Werth

$$\cos.\ \psi_1=-\frac{(b^2c^2+2a^2bc}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\text{ und }\cos.\ \psi_2=$$
$$-\frac{(b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2};$$ daher sind die Oktaederecken bei dieser Krystallform symmetrisch.

Betrachtet man nun die Ebenen, welche einem körperlichen Octanten entsprechen, so findet man für denjenigen, der zur positiven x, y, z Axe gehört, folgende 6 Ebenen:

$$1)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1;\ 2)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{b}=1;\ 3)\ \frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{a}=1;$$
$$4)\ \frac{x}{c}+\frac{y}{b}+\frac{z}{a}=1;\ 5)\ \frac{x}{c}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}=2;\ 6)\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1,$$

welche den gemeinschaftlichen Punkt $x=y=z=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$ haben, und da ein solcher Punkt mit einer Hexaederecke vollkommen der Lage nach übereinstimmt, so kann man die 48 Begrenzungsflächen auch zu sechs um die 8 Hexaederecken gruppirt denken. Diese Hexaederecken sind symmetrisch, denn jene 6 Gleichungen führen auf abwechselnd gleiche Neigungswinkel an den 6 Kanten, und zwar werden die Cosinus dieser Winkel

$$\cos.\ \psi_1 = -\frac{(b^2c^2 + 2a^2bc)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \text{ und}$$

$$\cos.\ \psi_3 = -\frac{(a^2b^2 + 2c^2ab)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}.$$

Endlich giebt es noch eine dritte Art von Ecken an dieser Krystallform, in welchen immer je zwei Ebenenpaare zusammentreffen, die ebensowohl zu den Flächensystemen von zwei benachbarten Oktaederecken als auch zu denen von zwei benachbarten Hexaederecken gehören. Die Gleichungen solcher 4 Ebenen sind z. B. folgende:

1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{b}=1$; 2) $\frac{x}{a}+\frac{y}{-c}+\frac{z}{b}=1$; 3) $\frac{x}{b}+\frac{y}{-c}+\frac{z}{a}=1$; 4) $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{a}=1$, welche offenbar den Punct $y=0$; $x = z = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$ enthalten, woraus man also erkennt, daß die Ecken der dritten Art auf denjenigen Linien liegen, welche die 12 rechten Winkel der Oktaederaxen halbiren. Auch kann man aus jenen 4 Gleichungen leicht schließen, daß diese 12 Ecken symmetrisch sein müssen, denn die Cosinus der Neigungswinkel an den aufeinanderfolgenden Kanten werden abwechselnd $\cos.\ \psi_2$ und $\cos.\ \psi_3$.

Untersucht man nun, wieviele Ecken des Körpers zu jeder Begrenzungsebene gehören, so findet man, daß nur eine Ecke von jeder Art darinn liegen kann. Es genügen nämlich der Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

nur die Coordinaten 1) der Oktaederecke $x=a$, $y=z=0$, 2) der Hexaederecke $x=y=z=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$, 3) einer Ecke der dritten Art $z=0$; $x=y=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$; und da Aehnliches für die Gleichungen aller 48 Ebenen gilt, so müssen die Begrenzungsfiguren der Hexakisoktaeder congruente Dreiecke sein. Aus den Coordinaten für die Ecken eines solchen Dreiecks

1) $x = a$, $y = z = 0$; 2) $x = y = z = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)}$

3) $z = 0$, $x = y = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)}$ ergeben sich für die drei Seiten folgende Werthe: 1) für die Seite, welche eine Oktaederecke mit einer Hexaederecke verbindet $\dfrac{\sqrt{(a^4(b+c)^2 + 2a^2b^2c^2}}{bc + ca + ab}$; 2) für die Seite, welche eine Oktaederecke mit einer 4flächigen Ecke verbindet $\dfrac{\sqrt{(a^4 + a^2b^2)}}{b + a}$; 3) für die Seite, welche eine 4flächige mit einer Hexaederecke verbindet $\dfrac{\sqrt{(a^2b^2c^2(b+a)^2 + 2a^4b^4)}}{(b+a)(bc+ca+ab)}$ und aus ihrer Vergleichung folgt, daß alle drei Seiten immer verschieden lang sind. Die 48 congruenten Begrenzungsfiguren der Hexakisoktaeder sind also ungleichseitige Dreiecke und zwar verbindet die längste Seite eine Oktaederecke mit einer Hexaederecke, die mittlere Seite eine Oktaederecke mit einer 4flächigen Ecke und die kürzeste Seite eine Hexaederecke mit einer 4flächigen Ecke.

Die letzte Krystallform des regulären Systems wird hiernach von 48 congruenten ungleichseitigen Dreiecken begrenzt; ihre Ecken sind symmetrisch und dreierlei Art: 1) 6 achtflächige Oktaederecken, 2) 8 sechsflächige Hexaederecken und 3) 12 vierflächige Ecken auf den Linien, welche die 12 rechten Winkel der Oktaederaxen halbiren; auch die 3.24 Kanten sind dreierlei Art, 1) 24 längere, bei welchen für den Neigungswinkel die Gleichung $\cos.\ \psi_1 = -\dfrac{(b^2c^2 + 2a^2bc)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$ gilt, 2) 24 mittlere, an welchen die Neigung durch die Gleichung $\cos.\ \psi_2 = -\dfrac{(b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$ bestimmt wird, und 3) 24 kürzere, an welchen die Neigung nach der Formel $\cos.\ \psi_3 = -\dfrac{(a^2b^2 + 2c^2ab)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$ zu berechnen ist.

In besonderen Fällen können an dieser Form auch reguläre Ecken vorkommen. Sollen z. B. die Oktaederecken regulär sein, so muß $\cos.\ \psi_1 = \cos.\ \psi_2$ werden, welche Annahme auf die

Bedingungsgleichung $b : c = 1 : \sqrt{2}$ führt. Reguläre Hexaederecken können nur dann vorhanden sein, wenn die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ erfüllt wird, und die 4flächigen Ecken werden nur dann regulär sein, wenn $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{\sqrt{2}}{c}$ ist. Im einzelnen Falle können auch bei dieser Krystallform alle Ecken regulär werden oder alle Kanten gleich sein, wofür die beiden Bedingungsgleichungen gelten

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}; \quad \frac{1+\sqrt{2}}{c} = \frac{1}{b}$$

oder $a : b : c = 1 : (3-\sqrt{2}) : (1 + 2\sqrt{2})$. Bei dieser Art der Hexakisoktaeder ergiebt sich für die Neigung an der Kante $\cos. \psi_1 = \cos. \psi_2 = \cos. \psi_3 = -\frac{49}{17-12\sqrt{2}}$ und daraus $\psi = 155^0\ 4'\ 55'',9$ und für die Seiten der 48 congruenten Dreiecke findet man das Verhältniß $(4+\sqrt{2}):(3+3\sqrt{2}):(6+2\sqrt{2})$. In der Natur ist diese Form bis jetzt nicht angetroffen worden, wohl aber kommen die nicht weniger merkwürdigen Species vor, bei welchen die längeren Kanten ihrer Lage nach mit den Kanten des Granatoeders vollkommen übereinstimmen. Es erscheinen an denselben die 4flächigen Ecken als Spitzen vierseitiger Pyramiden, welche auf die Granatoederflächen aufgesetzt sind, wovon diese Krystallformen den Namen Pyramidengranatoeder (Tetrakisdodekaeder) erhalten haben. Man findet leicht, daß zu dieser Art der Hexakisoktaeder die Bedingungsgleichung $bc = a(b + c)$ gehört.

Die Achtundvierzigflächner kommen in der Natur zwar selbstständig beim Diamant vor, jedoch läßt die Unvollkommenheit der Krystalle keine nähere Bestimmung zu. Anders verhält es sich hiermit bei dem Granat und Flußspath, welche man als Combinationen der Hexakisoktaeder mit dem Leucitoeder, Rhombendodekaeder und Würfel antrifft. — Man kennt bis jetzt überhaupt 9 Species dieser Krystallform, von denen folgende 6 die bekanntesten sind.

Verhältniß d. auf d. Axen abgeschnittenen Stücke. a : b : c.	Längere Kante.	Mittlere Kante.	Kürzere Kante.
1) 2:3:6	$\cos. \psi_1 = -{}^{13}/_{14}$ $\psi_1 = 158^\circ 12' 47'',5$	$\cos. \psi_2 = -{}^{6}/_{7}$ $\psi_2 = 148^\circ 59' 50'',2$	$\cos. \psi_3 = -{}^{13}/_{14}$ $\psi_3 = 158^\circ 12' 47'',5$
2) 3:4:12	$\cos. \psi_1 = -{}^{11}/_{13}$ $\psi_1 = 147^\circ 47' 48'',1$	$\cos. \psi_2 = -{}^{12}/_{13}$ $\psi_2 = 157^\circ 22' 48'',4$	$\cos. \psi_3 = -{}^{25}/_{26}$ $\psi_3 = 164^\circ 3' 27'',6$
3) 3:5:15	$\cos. \psi_1 = -{}^{31}/_{35}$ $\psi_1 = 152^\circ 20' 22'',4$	$\cos. \psi_2 = -{}^{33}/_{35}$ $\psi_1 = 160^\circ 32' 13'',4$	$\cos. \psi_3 = -{}^{31}/_{55}$ $\psi_3 = 152^\circ 20' 22'',4$
4) 1:2:4	$\cos. \psi_1 = -{}^{20}/_{21}$ $\psi_1 = 162^\circ 14' 50''$	$\cos. \psi_2 = -{}^{19}/_{21}$ $\psi_2 = 154^\circ 47' 28'',4$	$\cos. \psi_3 = -{}^{17}/_{21}$ $\psi_3 = 144^\circ 2' 57'',9$
5) 3:7:21	$\cos. \psi_1 = -{}^{55}/_{59}$ $\psi_1 = 158^\circ 46' 51'',3$	$\cos. \psi_2 = -{}^{57}/_{59}$ $\psi_2 = 165^\circ 2' 20'',4$	$\cos. \psi_3 = -{}^{43}/_{59}$ $\psi_3 = 136^\circ 47' 13'',2$
6) 15:33:55	$\text{eos.}\ \psi_1 = -{}^{151}/_{155}$ $\psi_1 = 166^\circ 57' 18'',2$	$\cos. \psi_2 = -{}^{137}/_{155}$ $\psi_2 = 152^\circ 6' 46'',4$	$\cos. \psi_3 = -{}^{119}/_{155}$ $\psi_3 = 140^\circ 9' 5'',5$

Die Formen 1 uud 2 sind offenbar Pyramidengranatoeder und die Formen 1 und 3 haben reguläre Hexaederecken.