

Beilage zum Jahresbericht der Oberrealschule und des Realgymnasiums
in Heilbronn.

Einführung

in die

Perspektive und die projektive Geometrie.

Ein Beitrag zum darstellend-geometrischen Unterricht
der Oberrealschule

von

Professor Adolf Schaufler.



1909.

Druck von Carl Rembold
Heilbronn.

1909. Jahresbericht - Nr. 812.

Ophe
7 (1909)



812



Einführung

von

Perspektive und die projektive Geometrie

von

Ein Beitrag zum abstrakten-geometrischen Unterricht
der Oberstufe

von

Professor Adolf Schönfleiter



1907

Verlag von C. W. Schmidt
Düsseldorf

www.uni-duesseldorf.de

Vorwort.

Die Einführung der projektiven Geometrie mit ihrem hohen Bildungswert in den Schulunterricht hat Reye in seiner Rektoratsrede als unabweislich bezeichnet. Ein anderes unabweisliches Bedürfnis ist die Aufnahme der Perspektive in den darstellend-geometrischen Unterricht der Schule, gibt doch sie allein unter den verschiedenen Projektionsarten dem Schüler das richtige mathematische Verständnis für die Bilder, die sein Auge tagtäglich selbst entwirft.

Perspektive und projektive Geometrie stehen in organischem Zusammenhang unter sich und mit der darstellenden Geometrie. In diesem Zusammenhang sind sie in vorliegender Schrift behandelt, und zwar für Schüler der 8. Klasse der Oberrealschule, die aus dem früheren Freihandzeichnenunterricht einerseits, aus dem darstellend-geometrischen und analytisch-geometrischen Unterricht der 7. und auch der 8. Klasse andererseits die nötigen Vorkenntnisse mitbringen. Für sie bilden diese beiden Disziplinen eine notwendige und wertvolle Ergänzung zu früher Gelerntem, und ausserdem eine vorzügliche Gelegenheit zur Übung im funktionellen Denken und in der Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens.

Zeit und Raum für diese wichtigen Bildungselemente, soweit sie für diese Stufe in Betracht kommen, lassen sich innerhalb der darstellenden Geometrie der 8. Klasse gewinnen, wenn man in dieser minder Notwendiges ausscheidet und bei jenen sich auf das Wichtigste beschränkt. Da andererseits doch ein möglichst einheitliches und abgerundetes Ganzes gegeben werden muss, so bilden Auswahl und Behandlung des Stoffs keine ganz leichte Aufgabe. Der Einheitlichkeit der Behandlung dient auch die vorzugsweise geometrische Ableitung der Sätze der Perspektive. Ausser obigen Gesichtspunkten war bei der Abfassung der Schrift massgebend die Rücksicht auf Einfachheit und Anschaulichkeit, um dem Schüler möglichst viel Interesse für den neuen Unterrichtsstoff abzugewinnen.

Der beschränkte Rahmen der Schrift drängte die Darstellung da und dort zu einer nur mehr andeutenden Kürze, doch hofft der Verfasser, dass dadurch die Klarheit der Darstellung nicht zu sehr beeinträchtigt worden ist.

Vorwort

Die Einführung der projektiven Geometrie mit ihrem hohen Bildungswert in den Schulunterricht hat Kaye in seiner Rektoratsrede als nachweislich bezeichnet. Ein anderes mathematisches Bedürfnis ist die Aufnahme der Perspektive in den darstellend-geometrischen Unterricht der Schule, gibt doch sie allein unter den verschiedenen Projektionsarten dem Schüler das richtige mathematische Verständnis für die Bilder, die sein Auge tatsächlich wahrnimmt.

Perspektive und projektive Geometrie stehen in organischer Zusammenhang unter sich und mit der darstellenden Geometrie. In diesem Zusammenhang sind sie in vorliegenden Schrift behandelt, und zwar für Schüler der 8. Klasse der Oberschule, die aus dem früheren Lehrbuchunterricht einseitig, aus dem darstellend-geometrischen und mathematischen Unterricht der 7. und auch der 8. Klasse andererseits die nötigen Vorkenntnisse mitbringen. Für sie bilden diese beiden Hefen eine notwendige und wertvolle Ergänzung zu früher Gelesenen, und besonders eine vorzügliche Gelegenheit zum Übung im handhabenden Denken und in der Anbahnung der räumlichen Anschauungsvermögen.

Zeit und Raum für diese wichtigen Bildungselemente, soweit sie in diese Stufe in Betracht kommen, lassen sich innerhalb der darstellenden Geometrie der 8. Klasse gewinnen, wenn man in dieser Hinsicht Notwendiger zusehnet und bei jenen sich auf das Wichtigste beschränkt. Es nachzulesen doch ein mögliches einseitiges und abgerundetes Gänze gegeben werden muss, so bilden Anzahl und Behandlung des Stoffes keine leichte Aufgabe. Die Einfachheit der Behandlung dient auch die vorzuziehende geometrische Ableitung der Sätze der Perspektive. Ausser obigen Gesichtspunkten war bei der Abfassung der Schrift massgebend die Rücksicht auf Einfachheit und Anschaulichkeit, um dem Schüler möglichst viel Interesse für den neuen Unterrichtsstoff abzugewinnen.

Der beschränkte Rahmen der Schrift dürfte die Darstellung da und dort zu einer nur mehr andeutenden Kürze, doch hofft der Verfasser, dass dadurch die Klarheit der Darstellung nicht zu sehr beeinträchtigt worden ist.

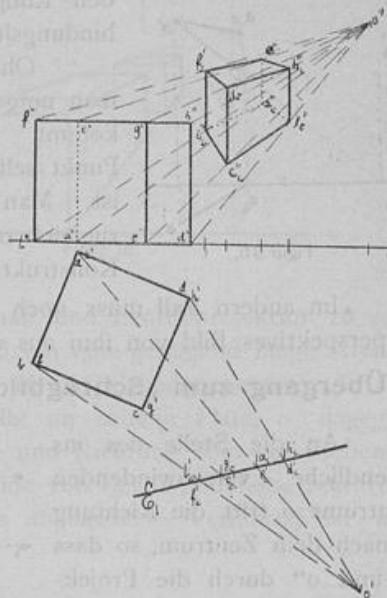
Perspektive nach der Durchschnittemethode.

Führt man den Umriss eines Kreises (eines Hauses u. a.), den man mit **einem** Auge betrachtet, auf einer Glastafel mit der Feder nach, so erhält man ein „perspektives“ Bild des Kreises auf der Tafel. Man kann es auffassen als Verbindungslinie der Punkte, in denen die Sehstrahlen oder die vom Zentrum (Auge) ausgehenden Projektionsstrahlen die Tafel „durchschneiden“.

Das perspektive Bild oder die „Perspektive“ eines Gegenstandes ist also seine Zentralprojektion auf eine Ebene, die „Bildebene“. Diese Auffassung führt im Anschluss an die Orthogonalprojektion zunächst zur Konstruktion eines perspektiven Bildes nach der „Durchschnittemethode“.

Ein Würfel sei in Orthogonalprojektion gegeben, ebenso das Projektionszentrum o . Der Anschaulichkeit halber stellt man zunächst die Bildebene $E \perp P_1$ und schief gegen P_2 . Die Konstruktion ist aus der nebenstehenden Figur ersichtlich. Diese Anordnung hat den Nachteil, dass man die Perspektive des Würfels nicht unmittelbar erhält, sondern erst nach Umlegung oder Drehung der Bildebene.

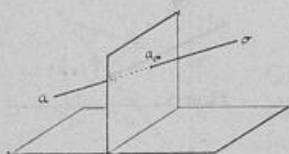
Um das Bild direkt zu erhalten, stellt man die Bildebene $\parallel P_2$, oder noch einfacher, man macht P_2 selbst zur Bildebene, wobei allerdings der Gegenstand hinter die Vertikalebene kommt, eine Sachlage, an die man sich aber bald gewöhnt. Die obere Bildebene denkt man sich dann nach hinten in die hintere Horizontalebene oder „Grundebene“ um den Grundschnitt oder die Achse X hinuntergeklappt.



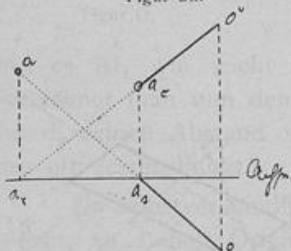
Figur 1.

Perspektive des Punkts.

Das perspektive Bild eines Punkts a ist nun nichts anderes als die V-Spur seines projizierenden Strahls ao .



Figur 2a.

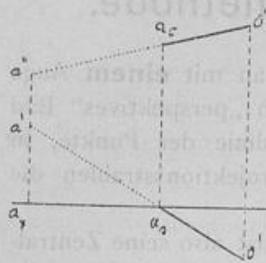


Figur 2b.

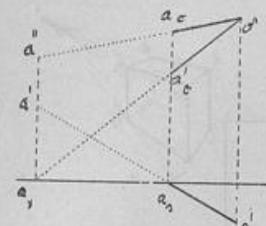
a) Punkt in der Grundebene. Konstruktionsregel nach der nebenstehenden „perspektiven Grundfigur“: Fällt von a das Grundlot aa_x , verbinde a mit o' , a_x mit o'' , durch a_s , wo ao' die Achse trifft, ziehe das Grundlot, dieses schneidet $a_x o''$ in dem Bild a_c von a .

b) Punkt nicht in der Grundebene. Für diesen Fall lässt sich eine ähnliche Konstruktionsregel aufstellen.

Eine andere, für viele Fälle praktischere, erhält man durch folgende Betrachtung:



Figur 3a.



Figur 3b.

Zieht man $a_x o''$, so schneiden sich $a_x o''$ und $a_s a_c$ in dem Bild a'_e des Punktes a' , d. h. des orthogonalen Grundrisses des Punktes a ; daher nennt man a'_e den „perspektiven Grundriss“ des Punktes a . Das Bild eines Punktes im Raum liegt also senkrecht über (oder unter) seinem perspektiven Grundriss.

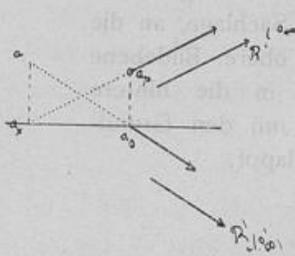
Kennt man nun den perspektiven Grundriss a'_e eines Punktes a und ausserdem dessen Abstand ε von der Grundebene, so geht man in der Linie $o'' a'_e$ bis zur Achse, errichtet hier das Grundlot und trägt auf ihm von der Achse aus ε nach oben (oder unten) ab, den Endpunkt verbindet man mit o'' und durchschneidet die Verbindungslinie mit dem Grundlot aus a'_e in a_c .

Ohne Schwierigkeit lässt sich auch der Weg angeben, auf dem man umgekehrt vom Bild eines Punktes zu seiner Orthogonalprojektion kommt. Liegt der Punkt in der Grundebene, so ist klar, dass der Punkt selbst die Zentralprojektion seines Bildes auf die Grundebene ist. Man vertauscht nun einfach Grundebene und Bildebene und zugleich o' mit o'' und erhält dann genau dieselbe Konstruktion und Konstruktionsregel wie oben.

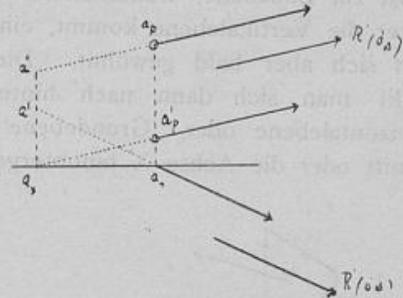
Im andern Fall muss noch der Abstand des Punktes von der Grundebene oder ein 2. perspektives Bild von ihm aus einem andern Zentrum gegeben sein.

Übergang zum „Schrägbild“ a_p des Punktes a (schiefe Parallelprojektion).

An die Stelle des ins Unendliche verschwindenden Zentrums o tritt die Richtung R nach dem Zentrum, so dass o' und o'' durch die Projektionen R' und R'' von R vertreten werden. Die Figuren 4 und 5 erläutern von selbst die Konstruktion.

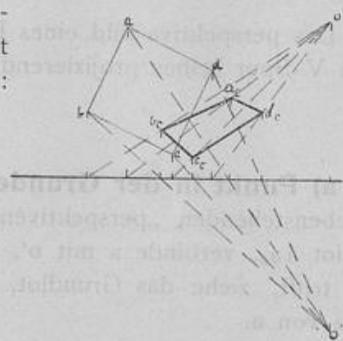


Figur 4.

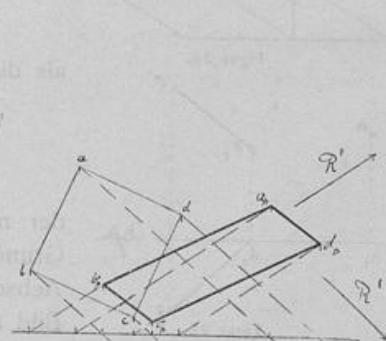


Figur 5.

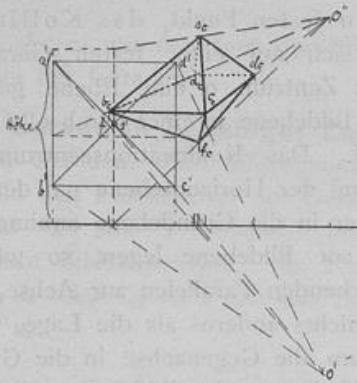
Nach der Durchschnittsmethode sind die folgenden, leicht verständlichen Figuren gezeichnet:



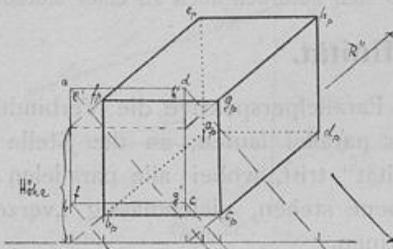
Figur 6. Quadrat in der Grundebene.



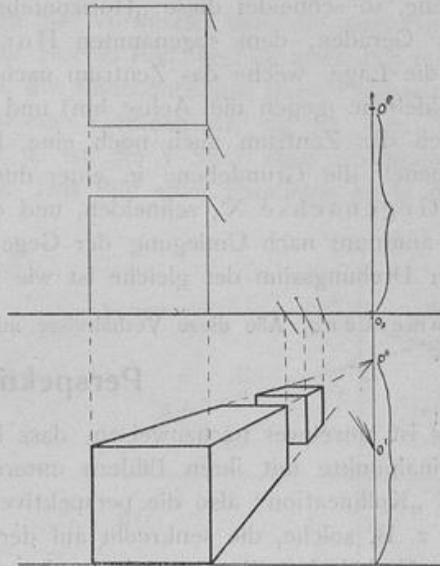
Figur 7. Quadrat in der Grundebene.



Figur 8. Oktaeder auf einer Ecke stehend.



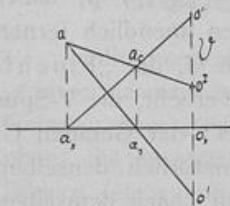
Figur 9. Würfel auf einer Fläche liegend.



Figur 10.

Um das verwirrende Aufeinanderfallen von Orthogonal- und Zentralprojektion zu vermeiden, rückt man die Bildebene mit dem perspektiven Bild um eine genügend lange Strecke nach vorne gegen den Beschauer und legt sie dann erst in die Grundebene um. In der Zeichnung laufen dann die Grundlote in sich selbst, o' bleibt an seinem Platz, o'' dagegen kommt in eine neue Lage, nämlich um $o'' o_x$ nach Grösse und Richtung vom verschobenen Grundschnitt entfernt, wie denn überhaupt sämtliche Abstände von der Grundebene nun vom neuen Grundschnitt aus aufgetragen werden müssen. Das abgeänderte Verfahren ist aus Figur 10 zu ersehen.

Perspektive Kollineation.



Figur 11.

Liegen alle Punkte des abzubildenden Gegenstandes in der Grundebene, so zeigt die perspektive Grundfigur ohne weiteres, dass alle Verbindungslinien von Originalpunkten mit ihren Bildern durch 1 festen Punkt gehen.

Schneidet nämlich aae die Gerade $o'o''$, die sogen. Hauptvertikale V in o^I , so hat man eine der Steiner'schen Linealkonstruktionsfiguren, und es ist, wie leicht durch Proportionen zu erweisen, $o'' o^I = o_x o'$ oder $o' o^I = o_x o''$. Bezeichnet man nun den Abstand des Zentrums o von der Bildebene, die sogenannte Distanz, mit d , seinen Abstand von der Grundebene mit e , so ist $o'' o^I = d$ und $o' o^I = e$. o^I ist also ein fester Punkt.

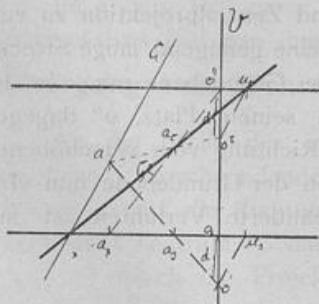
Da selbstverständlich auch jede Gerade der Grundebene ihrem Bild auf der Achse begegnet, so stehen Original und Bild in „perspektiver Kollineation“, d. h. die Verbindungs-

linien entsprechender Punkte gehen alle durch einen festen Punkt, das Kollineationszentrum, und entsprechende Gerade schneiden sich auf einer festen Geraden, der Kollineationsachse. Denkt man sich durch das Zentrum o eine Ebene gelegt \parallel zur Grundebene, so schneidet diese „Horizontebene“ die Bildebene in einer durch o'' \parallel zur Achse gehenden Geraden, dem sogenannten Horizont H . Das Kollineationszentrum ist dann offenbar die Lage, welche das Zentrum nach Umlegung der Horizontebene um den Horizont in die Bildebene (gegen die Achse hin) und mit dieser in die Grundebene annimmt. Würde man durch das Zentrum auch noch eine Ebene \parallel zur Bildebene legen, so würde diese „Gegenebene“ die Grundebene in einer durch o' gehenden Parallelen zur Achse, der sogenannten Gegenachse X' , schneiden, und o^I wäre nichts anderes als die Lage, welche das Zentrum annimmt nach Umlegung der Gegenebene um die Gegenachse in die Grundebene, wobei der Drehungssinn der gleiche ist wie bei der Umlegung der Bildebene selbst.

Anmerkung: Alle diese Verhältnisse macht man sich natürlich auch an einer stereometrischen Figur klar.

Perspektive Affinität.

Es ist unschwer nachzuweisen, dass bei der Parallelperspektive die Verbindungslinien der Originalpunkte mit ihren Bildern untereinander parallel laufen, an die Stelle der perspektiven „Kollineation“ also die perspektive „Affinität“ tritt, wobei alle parallelen Originalstrecken, z. B. solche, die senkrecht auf der Bildebene stehen, gleichmässig „verzerrt“ und im selben Verhältnis verlängert oder verkürzt erscheinen.



Figur 12.

Perspektive der Geraden.

a) Gerade in der Grundebene. Das Bild einer Geraden ist die Verbindungslinie der Bilder zweier ihrer Punkte. Das Bild ihrer Bildebenenspur g_x (auf X) ist g_x selbst. Das Bild eines anderen Punktes a der Geraden ist a_e , wobei $a a_e$ durch o^I geht. $g_x a_e$ ist also das Bild G_e der Geraden G . Schneidet G_e den Horizont in u_e , und zieht man $o^I u_e$, so ist $g_x a_e : a_e u_e = a_x a_e : a_e o^I = a a_e : a_e o^I$, folglich $o^I u_e \parallel G$. Fällt man noch $u_e u_s \perp X$ und zieht $o' u_s$, so ist $\triangle o'' o^I u_e \cong \triangle o' u_s$, daher auch $o' u_s \parallel o^I u_e \parallel G$. $o^I u_e$ verbindet also den unendlich fernen

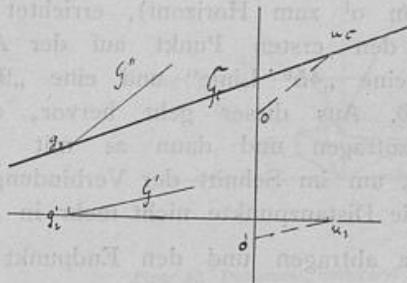
Punkt von G mit o^I , u_e ist somit das Bild des unendlich fernen Punktes von G , der „Fluchtpunkt“ von G . Als solcher ist er, wie auch ohne weiteres aus der Figur erhellt, die V -Spur einer durch das Zentrum o zu G gezogenen Parallelen, des „Fluchtstrahls“ der Geraden G , wobei die Bildebene zugleich V -Ebene. Alle Parallelen zu G liefern natürlich denselben Punkt u_e , m. a. W: die Bilder paralleler Geraden der Grundebene „fliehen“ nach demselben Punkt der Bildebene.

Zur Bestimmung des Bildes einer Geraden wählt man demnach 2 besondere Punkte, nämlich ihre Bildebenenspur und ihren Fluchtpunkt (Fundamentalpunkte). Dieser ist das Bild ihres unendlich fernen Punktes oder ihrer Spur mit der unendlich fernen Geraden der Grundebene und liegt auf dem Horizont, der offenbar nichts anderes ist als das Bild der unendlich fernen Geraden der Grundebene. Umgekehrt ergibt sich auch leicht aus dem Bild einer Geraden die Gerade selbst wieder als Parallele durch die Spur des Bildes auf der Achse zu

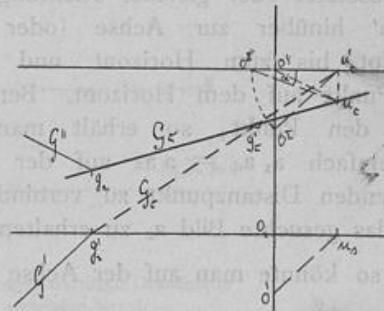
der Linie, die o' mit der Spur des Bildes auf dem Horizont verbindet, d. h. zum umgelegten Fluchtstrahl der Geraden.

b) Gerade in beliebiger Lage. Auch hier verwendet man die zwei Fundamentalpunkte der Geraden. Ihre Bildebenenspur ist ihr eigenes Bild, und ihr unendlich ferner Punkt hat als Bild den Fluchtpunkt der Geraden, d. h. die Bildebenenspur ihres Fluchtstrahls.

Sind G' und G'' Grund- und Aufriss der Geraden G , so ist ihre V-Spur g_2 zugleich ihre Bildebenenspur. Ihr Fluchtpunkt u_e ist die V-Spur ihres Fluchtstrahls. Die Gerade $g_2 u_e$ oder G_e ist somit das Bild von G . Das Bild einer Parallelen zu G flieht ebenfalls nach u_e .



Figur 13.



Figur 14.

Zweckmässigerweise führt man auch hier den perspektiven Grundriss der Geraden ein, d. h. das Bild G'_e ihres orthogonalen Grundrisses G' . Schneidet das Grundlot $u_s u_e$ den Horizont in u'_e , so ist u'_e der Fluchtpunkt für die H-Projektion G' der Geraden G . Der Fluchtpunkt einer Geraden liegt also senkrecht über (oder unter) dem ihres orthogonalen Grundrisses. Wie weit, das lässt sich leicht aus einem rechtwinkligen Dreieck bestimmen, das man erhält, wenn man $u'_e o'$ auf den Horizont herüberschlägt nach $u'_e o''$ und $o'' u_e$ zieht. In ihm ist dann der Winkel bei o'' gleich der H.-Neigung α des Fluchtstrahls ou_e der Geraden G und damit dieser selbst.

Vorstehende Betrachtungen führen zur

Perspektive nach der Fluchtpunktmethode.

Alle horizontalen Geraden haben ihre Fluchtpunkte auf dem Horizont. Dieser ist gewissermassen das Bild des Horizonts des Beschauers einer Gegend. Die horizontalen Geraden über dem Auge des Beschauers laufen im Bild nach unten, die unter ihm nach oben, die in gleicher Höhe mit ihm im Horizont. Dieser lässt sich daher auf vielen Bildern leicht auffinden; auch kann man aus seiner Lage zu andern Teilen des Bildes erkennen, ob der Künstler bei seiner Arbeit gesessen oder gestanden ist. Ferner soll ein Bild so aufgehängt werden, dass das Lot vom Auge des Beschauers auf die Fläche des Bildes den Horizont trifft.

Die Fluchtpunkte horizontaler 45° Linien sind die beiden „Distanzpunkte“, d. h. die Punkte des Horizonts, die von o'' um die Distanz d entfernt sind. Der Fluchtpunkt aller zur Bildebene senkrechten Geraden ist der Hauptpunkt o'' .

Gerade, die in Ebenen senkrecht zur Achse liegen, haben ihre Fluchtpunkte auf der Hauptvertikalen, auf der es auch zwei Distanzpunkte gibt.

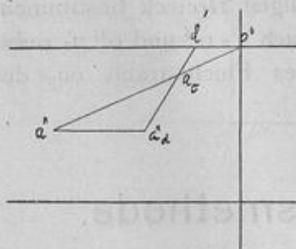
a) Punkt in der Grundebene.

Man betrachtet einen Punkt a , dessen Bild bestimmt werden soll, als Schnittpunkt zweier Geraden G und L der Grundebene, deren Bilder sich dann im gesuchten Bild a_0 schneiden.

Als Konstruktionsregel gilt: „holt man in irgend einer Richtung herüber“ in die Achse, fährt dann in entgegengesetzter oder gleicher Richtung

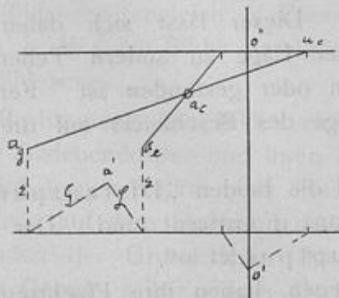
von o^I hinüber zur Achse (oder direkt von o^I zum Horizont), errichtet hier das Grundlot bis zum Horizont und verbindet den ersten Punkt auf der Achse mit dem Punkt auf dem Horizont. Benutzt man eine „ 45° Linie“ und eine „ 90° Linie“ durch den Punkt, so erhält man Figur 16. Aus dieser geht hervor, dass man auch einfach $a_x a_d = a_x a$ auf der Achse abzutragen und dann ad mit dem entsprechenden Distanzpunkt zu verbinden braucht, um im Schnitt der Verbindungslinie mit $a_x o''$ das gesuchte Bild a_0 zu erhalten. Lügen die Distanzpunkte nicht mehr in der Zeichnung, so könnte man auf der Achse auch $\frac{1}{n} a_x a$ abtragen und den Endpunkt mit dem entsprechenden „reduzierten“ Distanzpunkt verbinden, der von o'' um $\frac{1}{n} d$ absteht.

b) Punkt nicht in der Grundebene. Letztere Konstruktion gilt auch dann noch, wenn der Punkt a nicht in der Grundebene liegt. Auf der Parallelen durch a'' zur Achse trägt man $a'' a''_d = a a''$ ab und verbindet den Endpunkt mit dem entsprechenden Distanzpunkt. Die Verbindungslinie schneidet $a'' o''$ in a_0 .

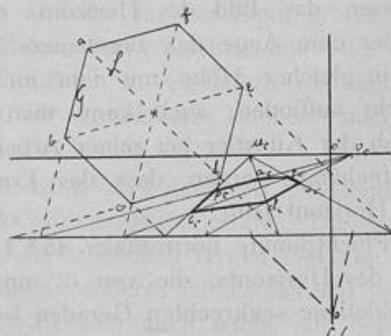


Figur 17.

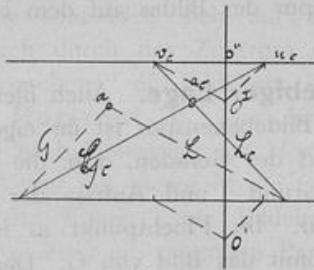
Verwendet man (Figur 18) statt einer 45° Linie eine beliebige „Horizontale“, so geht man in irgend einer Richtung G von a' herüber an die Achse, von hier um die Entfernung ε des Punktes a von der Grundebene senkrecht herauf (oder herunter) bis a_g , dann ist a_g die Bildspur einer durch $a \parallel G$ gezogenen Horizontalen. Deren Bild ist dann $a_g u_0$, wenn u_0 der Fluchtpunkt von G (also auch ihrer Parallelen) ist. Auf diese Weise sind die beiden folgenden Bilder gezeichnet, das erste bei fester, das zweite bei nachträglich verschobener Bildebene.



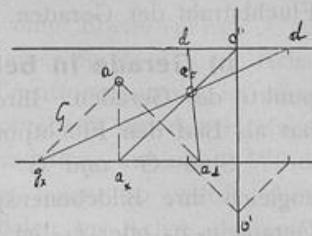
Figur 18.



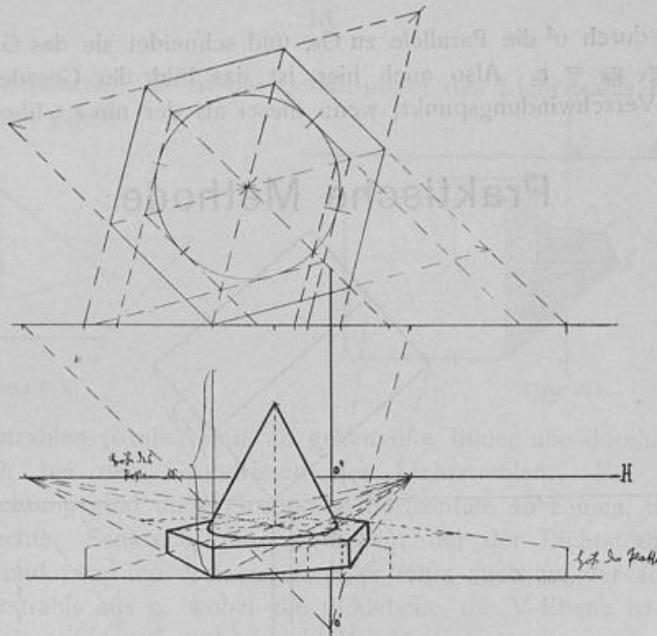
Figur 19. Regelmäßiges Sechseck in der Grundebene.



Figur 15.



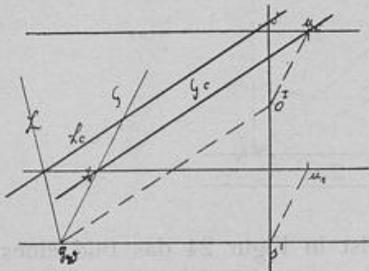
Figur 16.



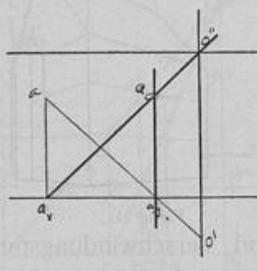
Figur 20. Postament, bestehend aus der regelmässigen 6 seitigen Grundplatte auf der Grundebene und einem auf ihr stehenden Kegel.

Verschwindungspunkt einer Geraden.

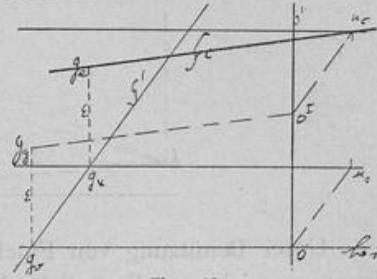
Verbindet man o^l mit der Spur g_v einer Geraden G der Grundebene auf der Gegenachse, so ist $G_c \parallel g_v o^l$, denn $o^l u_c \neq o^l u_s \neq g_v g_x$. Das Bild einer Geraden ist also parallel zur Verbindungslinie des umgelegten Zentrums mit der „Gegenspur“ der Geraden. Dies erhellt auch daraus, dass das Bild des Punktes g_v der Geraden G ins Unendliche fällt



Figur 21.



Figur 22.



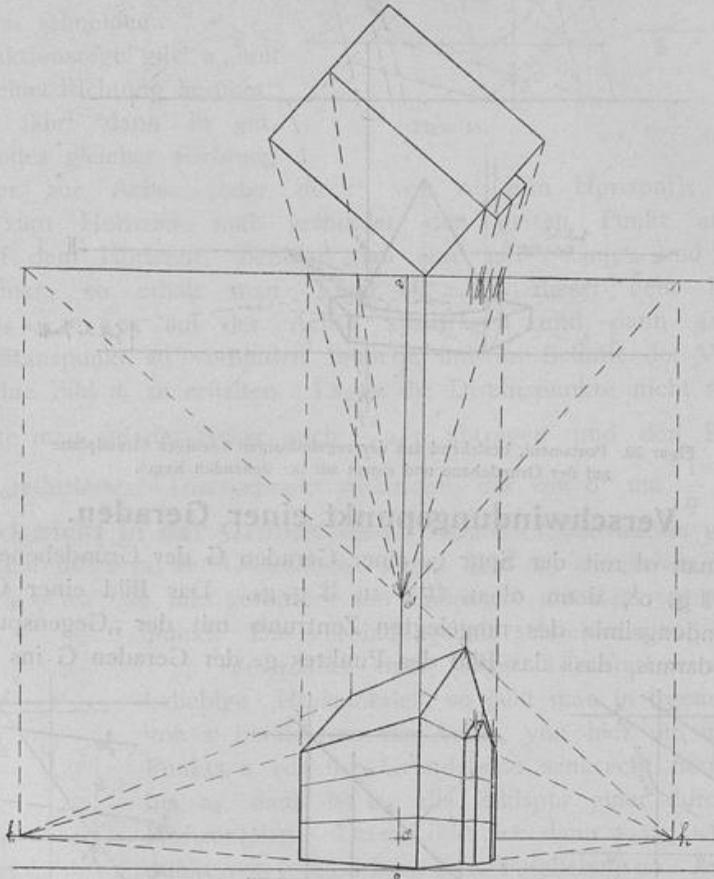
Figur 23.

($o^l g_v$ schneidet X im Unendlichen), und zwar in der Richtung $o^l g_v$. Alle Gerade der Grundebene, die durch g_v gehen und damit denselben „Verschwindungspunkt“ haben, besitzen parallele Bilder, denn diese müssen alle $\parallel g_v o^l$ sein. Die Bilder aller durch o^l gehenden Geraden der Grundebene sind also nichts anderes als Grundlote, da das Bild der Hauptvertikalen mit ihr selbst zusammenfällt. Damit erscheint auch die Grundkonstruktion des Bildes eines Punktes a der Grundebene in einem neuen Licht. Das Bild der 90° Linie durch a (Fig. 22) flieht nach o'' , und das Bild des Strahls $o^l a$ ist das Grundlot durch die Spur a_s des Strahls auf der Achse. Beide Bilder schneiden sich im Bild a_c des Punktes a .

Liegt G nicht in der Grundebene, aber noch horizontal und um die Strecke ε über ihrem Grundriss G' (Figur 23), so ist ihre Bildspur g_o um ε senkrecht über g_x , und ihr Bild

ist $g_v u_o$. Zieht man durch o^I die Parallele zu G_e , und schneidet sie das Grundlot durch g_v in g_g , so ist offenbar $g_v g_g = \varepsilon$. Also auch hier ist das Bild der Geraden parallel zur Linie von o nach ihrem Verschwindungspunkt, wenn dieser als der um $\varepsilon \perp$ über g_v gelegene Punkt eingeführt wird.

Praktische Methode:



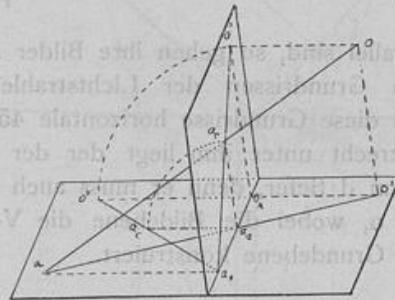
Figur 24.

Unter Benützung von Flucht- und Verschwindungspunkt ist in Figur 24 das Bild eines Hauses gezeichnet. Bezüglich der besten Anordnung ist zu bemerken: Die Distanz $o' o_x$ wählt man gleich dem $1\frac{1}{2}$ —2fachen der grössten Längenausdehnung, die man dem Bild geben will, und o' nimmt man in der „perspektiven Mitte“ vor dem Grundriss des Hauses, d. h. so, dass das Lot $o' o_x$ den Winkel der äussersten Sehstrahlen von o' nach dem Grundriss halbiert. (Die Bildebene ist wieder als nachträglich um eine genügende Länge vorgerückt zu denken).

Schattenkonstruktion bei Parallelbeleuchtung.

Den Schatten eines Punkts auf die Grundebene findet man dadurch, dass man den Schatten zunächst nach der Methode der Orthogonalprojektion konstruiert und dann den Schattenpunkt vermittelt einer der bisherigen Methoden ins Bild überträgt. Man kann ihn

$a_c a_s$, $b_c b_s$ und V ist. Auch ist wieder $o' o'' = o' o_x$. Dreht man nun die Bildebene mit den Punkten o'' , a_c , b_c u. s. w. um die Achse in eine beliebige Lage, so bewegen sich diese Punkte mit ihren Grundloten in Ebenen senkrecht zur Achse, und die Lote behalten ihre wahren Längen. Zieht man dann in der neuen Lage durch o' die Parallele zu $o'' o_x$ und durch o'' die zu $o' o_x$, so müssen sich diese Parallelen schneiden. Ihr Schnittpunkt o liegt aber dann so, dass die Verbindungslinie von a mit a_c durch ihn hindurchgeht, denn es ist $a_s a_c \parallel o_x o'' \parallel o o'$ und $a_c a_s : o_x o'' = a_x a_s : a_x o_x$, also auch $a_c a_s : o o' = a_s a_c : a o'$. Dies gilt für alle Verbindungslinien entsprechender Punkte. Da ausserdem in der Zeichenebene schon entsprechende Gerade sich auf der Achse schneiden, so ist dies natürlich jetzt auch noch



Figur 27.

der Fall. Man sieht nun, dass die eine Figur das perspektive Bild der andern ist unter Annahme des Punkts o als Zentrum. Ferner ist klar, dass man für jede Lage der Bildebene ein Zentrum konstruieren kann. Da dasselbe aber immer in der Normalebene durch o_x zur Achse sich bewegt und seinen Abstand von o' beibehält, so ist leicht einzusehen, dass man das Zentrum auf einem in dieser Ebene liegenden Kreis um o' mit $o o'$ als Halbmesser beliebig wählen kann. Fallen Bild- und Grundebene wieder zusammen, dann ist das Zentrum der eine Schnittpunkt dieses Kreises mit der Zeichenebene, d. h. wieder der Punkt o' . Der zweite Schnittpunkt wäre das Zentrum für ein Zusammenfallen von Bild- und Grundebene nach der Herabdrehung der Bildebene in entgegengesetztem Sinn.

Die Figur zeigt ausserdem, dass die Konstruktionsmethoden der Perspektive auch dann noch gelten, wenn Grund- und Bildebene beliebig gegeneinander geneigt sind. Und zwar ist dies nicht nur der Fall bei Punkten, die in der Grundebene liegen, sondern auch bei beliebig im Raum gegebenen Punkten, wobei nur noch zu bemerken ist, dass Grund- und Aufriss der Punkte durch Projektion in Richtung der Spurnormalen $o_x o''$ und $o_x o'$ zu bestimmen sind.

Perspektive und lineare Transformation.

Durchläuft der Punkt a in der Grundebene irgend eine Kurve, so beschreibt sein Bild ebenfalls eine Kurve. Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass die durch Zentralprojektion aus einer gegebenen Kurve hervorgegangene neue Kurve analytisch-geometrisch durch eine lineare Transformation der gegebenen erhalten wird, dass also perspektive Kollineation gleichbedeutend ist mit linearer Transformation.

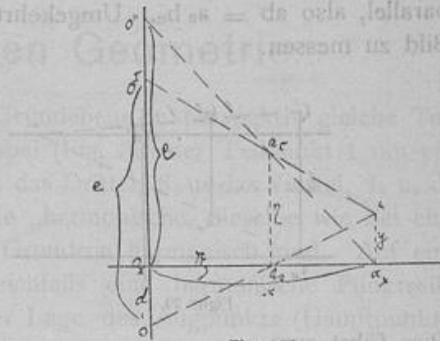
Sei a_c das Bild eines Punkts a der Grundebene. Nun führt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, wobei die Achse die X-Achse und die Hauptvertikale die Y-Achse ist.

Die Koordinaten des Punkts a seien x und y , die seines Bildes a_0 dagegen ξ und η . Man findet nun:

$$\begin{aligned} x : \xi &= O_x O'' : O_x O'' - a_0 a_s \\ &= e : e - \eta, \\ \text{woraus } x &= \frac{e\xi}{e - \eta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner } y : O_x O' &= a_x a_s : a_s O_x \\ &= a_s a_e : O_x O'' - a_s a_e \\ &= \eta : e - \eta, \end{aligned}$$

$$\text{woraus } y = \frac{d\eta}{e - \eta}.$$



Figur 28.

Die Gleichheit der Nenner ist charakteristisch für die lineare Transformation.

Setzt man nun diese Werte für x und y etwa in die allgemeine Kegelschnittsgleichung $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ ein, so erhält man:

$$a_{11} \cdot \frac{e^2 \xi^2}{(e - \eta)^2} + 2a_{12} \frac{e\xi d\eta}{(e - \eta)^2} + a_{22} \frac{d^2 \eta^2}{(e - \eta)^2} + 2a_{13} \frac{e\xi}{e - \eta} + 2a_{23} \frac{d\eta}{e - \eta} + a_{33} = 0.$$

Multipliziert man die ganze Gleichung mit $(e - \eta)^2$ durch, so folgt:

$$a_{11} \cdot e^2 \cdot \xi^2 + 2a_{12} e\xi \cdot d\eta + a_{22} d^2 \eta^2 + 2a_{13} e\xi (e - \eta) + 2a_{23} d\eta (e - \eta) + a_{33} (e - \eta)^2 = 0.$$

Man sieht, dass die Gleichung der neuen Kurve vom selben Grad ist wie die der alten. Dies gilt offenbar ganz allgemein. Durch Zentralprojektion wird also der Grad der Kurve nicht geändert, d. h. Zentralprojektion ist gleichbedeutend mit linearer Transformation. Aus einem Kegelschnitt geht daher durch Zentralprojektion wieder ein Kegelschnitt hervor.

Anmerkung: Auch die Umkehrung lässt sich sehr einfach beweisen:

Ist irgend eine Kurve gegeben durch die Gleichung $f(x, y) = 0$, und macht man die Gleichung durch Einführung von z homogen, so erhält man $f(x, y, z) = 0$. Diese Gleichung stellt in einem rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystem einen Kegel mit Spitze im Ursprung vor. Der Schnitt dieses Kegels mit der Ebene $z = 1$ liefert die gegebene Kurve. Nimmt man nun eine Koordinatentransformation vor mit Zugrundelegung der Formeln:

$$\begin{aligned} x &= a x' + b y' + c z', \\ y &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \\ z &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z', \end{aligned}$$

so heisst die Gleichung des Kegels im neuen System:

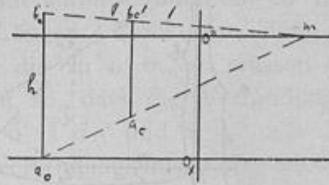
$$f(a x' + b y' + c z', a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', a_2 x' + b_2 y' + c_2 z') = 0.$$

Der Schnitt dieses Kegels mit der Ebene $z' = 1$ liefert aber offenbar nichts anderes als die Kurve, die aus der gegebenen durch lineare Transformation nach obigen Formeln hervorgeht. Die beiden Kurven sind also ebene Schnitte eines und desselben Kegels, d. h. die eine Kurve ist eine Zentralprojektion der andern. Zwei Kurven, von denen die eine durch lineare Transformation aus der andern hervorgegangen ist, lassen sich somit in perspektivkollineare Lage zu einander bringen. Dies lässt sich an einfachen Beispielen auch geometrisch leicht nachweisen.

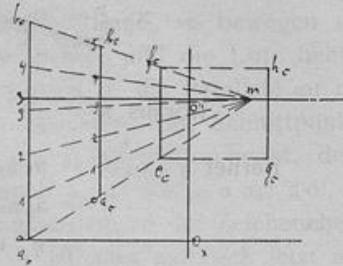
Perspektive Massstäbe.

Mehrfach schon wurde die Aufgabe gelöst, einer vertikalen Geraden, deren Bild bekannt ist, eine vorgeschriebene Länge zu geben. So z. B. einer auf der Grundebene aufstehenden Vertikalen $a_e b_e$ die wahre Länge h . Man verbindet a_e mit einem beliebigen Punkt m des Horizonts, errichtet im Schnittpunkt a_0 der Verbindungslinie mit der Achse ein Grundlot, schneidet darauf $a_0 b_0 = h$ ab und zieht $b_0 m$. Diese Linie wird dann von der Vertikalen

a_c in dem gesuchten Endpunkt b_o geschnitten. Die Linien $a_o m$ und $b_o m$ sind in Wirklichkeit parallel, also $ab = a_c b_o$. Umgekehrt dient diese Konstruktion dazu, eine vertikale Strecke im Bild zu messen.



Figur 29.



Figur 30.

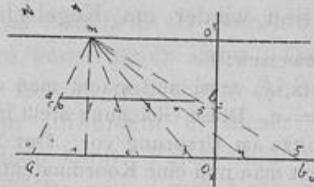
Dies führt zum

Höhenmassstab. (Figur 30.)

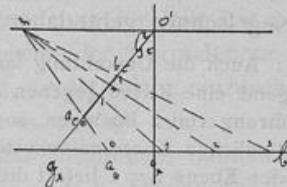
Die parallelen Linien $a_o m, 1 m, \dots$ von den Teilpunkten des Massstabs $a_o b_o$ übertragen diesen in wahrer Grösse auf die Geraden $a b, e f$. Strecken, die zwischen denselben Strahlen aus m liegen, sind also gleich lang. So ist auch gh den andern Strecken gleich. Ein aufrechter Gegenstand erscheint somit umso kleiner, je näher er dem „Horizont“ ist.

Breitenmassstab. (Figur 31.)

Für Linien der Grundebene in der Breitenrichtung dient auch wieder jeder Punkt m des Horizonts als „Messpunkt“. Damit kann man sich einen „Breitenmassstab“ verschaffen. Die wahren Längen müssen hierbei auf der Achse abgemessen werden.



Figur 31.



Figur 32.

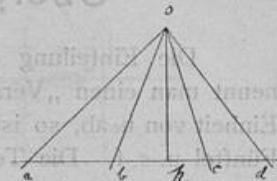
Tiefenmassstab. (Figur 32.)

Wollte man für Strecken der Grundebene in der Tiefenrichtung dieselbe Konstruktion vornehmen, so würde man kein wirkliches Mass für sie erhalten, wohl aber eine Einteilung der Strecken in gleiche Teile. Die Strahlen aus m sind allerdings parallel, aber sie schneiden auf der Geraden G nicht die gleichen Stücke ab wie auf der Achse. Dies ist nur der Fall, wenn die Parallelen mit der Achse 45° einschliessen, d. h. der „Messpunkt“ beim „Tiefenmassstab“ ist ein Distanzpunkt, während jeder andere Punkt des Horizonts ein „Teilungspunkt“ für solche Gerade ist. Dies ist er aber nicht nur für Linien in der Tiefenrichtung, sondern für alle Gerade der Grundebene. Ein „Messpunkt“ für solche kann nur der Fluchtpunkt von Parallelen sein, die in der Grundebene liegen und mit der Achse denselben Winkel machen wie mit der gegebenen Geraden. Denn nur solche übertragen Strecken von der einen zur andern in wahrer Grösse. Der Fluchtstrahl dieser Parallelen macht dann mit dem Fluchtstrahl der Geraden G und mit dem Horizont auch gleiche Winkel. Ebenso ist es bei den umgelegten Fluchtstrahlen. Man erhält also den Messpunkt einer Geraden G , indem man um ihren Fluchtpunkt u_c einen Kreis mit $u_c o'$ bis zum Horizont beschreibt.

$$\begin{aligned}
 2\Delta asc &= sh \cdot ca = sa \cdot sc \cdot \sin \hat{CA} && \text{Entsprechend} \\
 2\Delta bsc &= sh \cdot cb = sb \cdot sc \cdot \sin \hat{CB}, \\
 2\Delta asd &= sh \cdot da = sa \cdot sd \cdot \sin \hat{DA}, \\
 2\Delta bsd &= sh \cdot db = sb \cdot sd \cdot \sin \hat{DB}.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $\frac{ca}{cb} = \frac{sa \cdot \sin \hat{CA}}{sb \cdot \sin \hat{CB}}$, und $\frac{da}{db} = \frac{sa \cdot \sin \hat{DA}}{sb \cdot \sin \hat{DB}}$,

somit $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{\sin \hat{CA}}{\sin \hat{CB}} : \frac{\sin \hat{DA}}{\sin \hat{DB}}$.



Figur 35.

$\frac{ca}{cb}$ ist das Teilverhältnis des Punktes c i. B. auf die Punkte a und b, desgleichen $\frac{da}{db}$ das des Punktes d i. B. auf dieselben Punkte. Entsprechend ist $\frac{\sin \hat{CA}}{\sin \hat{CB}}$ das Teilverhältnis des Strahls C i. B. auf die Strahlen A und B, und ebenso $\frac{\sin \hat{DA}}{\sin \hat{DB}}$ das des Strahls D i. B. auf dieselben Strahlen.

$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$, abgekürzt geschrieben (abcd), ist das Verhältnis der beiden Teilverhältnisse oder das Doppelverhältnis der 4 Punkte a, b, c, d, desgleichen $\frac{\sin \hat{CA}}{\sin \hat{CB}} : \frac{\sin \hat{DA}}{\sin \hat{DB}}$ oder (ABCD) das Doppelverhältnis der 4 Strahlen A, B, C, D.

Man hat also den

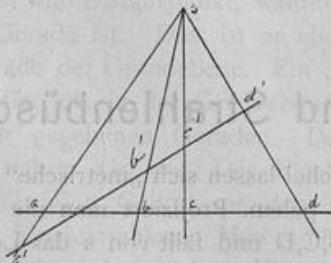
Satz:

Vier Strahlen eines Strahlenbüschels haben dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden 4 Punkte einer zu ihm „perspektiv gelegenen“ Punktreihe.

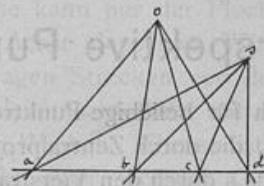
Diese Doppelverhältnisse stimmen auch in den Vorzeichen überein. Sie sind nur dann negativ, wenn das eine Paar (c und d) der 4 „Elemente“ das andere (a und b) „trennt“.

Anmerkung: Behufs eindeutiger Bestimmung des Winkels zweier Geraden kann man zuerst nach Döhlemann, Projektive Geometrie (Götschen, Band 72), einen „Trennungsstrahl“ einführen, von dem übrigens obiger Satz unabhängig ist, wenn Winkel über 180° ausgeschlossen bleiben.

Erzeugt nun ein Strahlenbüschel s auf 2 Geraden die Punktfolgen a b c d e und a' b' c' d' e', so ist $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c' a'}{c' b'} : \frac{d' a'}{d' b'}$, oder (abcd) = (a' b' c' d'), ebenso (acde) = (a' c' d' e') u. s. f.



Figur 36.



Figur 37.

In perspektiven Punktreihen (Schnitten desselben Büschels) haben somit irgend 4 entsprechende Punkte dasselbe Doppelverhältnis. Dasselbe gilt für 4 entsprechende Strahlen perspektiver Strahlenbüschel (Scheinen derselben Punktreihe).

Fällt der Mittelpunkt des Büschels s ins Unendliche, so wird der Büschel zum Parallelstrahlenbüschel, und die Punktreihen werden ähnlich. Ebenso erhält man einen besonderen Fall perspektiver Strahlenbüschel, wenn die gemeinsame Punktreihe ins Unendliche rückt. In beiden Büscheln sind dann entsprechende Strahlen parallel, die Büschel somit kongruent.

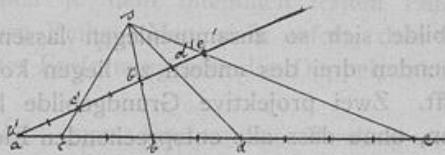
Doppelverhältnisse in Zahlenwerten.

In Figur 38 ist: $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = -\frac{1}{2} : \frac{5}{2} = -\frac{1}{5}$, und $\frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'} = -\frac{2}{2} : \frac{5}{1} = -\frac{1}{5}$.

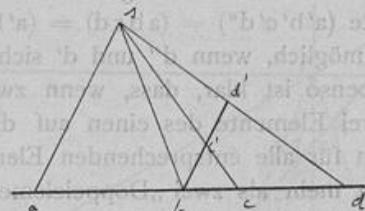
Es ist aber auch $\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = -\frac{1}{2} : -\frac{2}{2} = \frac{1}{2}$, und $\frac{da}{db} : \frac{d'a'}{d'b'} = \frac{5}{2} : \frac{5}{1} = \frac{1}{2}$.

Ebenso ist $\frac{ea}{eb} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, $\frac{e'a'}{e'b'} = \frac{6}{2} = 3$, dhr. $\frac{ea}{eb} : \frac{e'a'}{e'b'} = \frac{1}{2}$, u. s. f.

Man kann also auch sagen, in perspektiven Punktreihen (und Strahlenbüscheln) steht das Teilverhältnis dreier „Elemente“ des einen „Grundgebildes“ zu dem Teilverhältnis dreier entsprechenden Elemente des andern in einem konstanten Verhältnis, wie in ähnlichen Punktreihen eine Strecke der einen Geraden zu ihrer entsprechenden auf der andern Geraden ein konstantes Verhältnis besitzt.



Figur 38.



Figur 39.

Zurückführung des Doppelverhältnisses auf ein einfaches Linienverhältnis.

Zieht man (Fig. 39) durch a und b einer Punktreihe $abcde$, ... zwei Parallelen und die Strahlen von b, c, d , nach einem beliebigen Punkt s der ersten Parallelen, die auf der andern die Strecken bc' und $c'd'$ ausschneiden, so ist $ca : cb = sa : bc'$ und $da : db = sa : bd'$, woraus $(abcd) = bd' : bc'$. c' und d' liegen auf derselben Seite von ad , wenn $(abcd)$ pos., auf verschiedenen Seiten, wenn $(abcd)$ negativ, wie z. B. bei 4 harmonischen Punkten, bei welchen $(abcd) = -1$.

Sind a, b, c als fest gedacht, und durchläuft d die ganze Reihe von a über b nach c und in derselben Richtung weiter bis a , so nimmt $(abcd)$, wie sich aus obiger Figur unmittelbar ergibt, alle möglichen Werte von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis $+\infty$ an. Liegt d im Unendlichen, so ist sein Teilungsverhältnis

$$da : db = (db + ba) : db = 1 + \frac{ba}{db} = 1, \text{ also } (abcd) = ca : cb.$$

Sind nun in einer Punktreihe 3 Elemente und das Doppelverhältnis geg., das bei geg. Reihenfolge ein 4. mit jenen bildet, so ist das 4. eindeutig bestimmt.

Ist z. B. $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \lambda$ gegeben, so ist $\frac{da}{db} = \frac{1}{\lambda} \frac{ca}{cb}$. Es ist somit das Teilverhältnis des Punkts d i. B. auf die Punkte a und b nach Grösse und Vorzeichen bekannt, d also eindeutig bestimmt. Die Konstruktion von d folgt aus obiger Figur.

Projektive Grundgebilde.

Nimmt man perspektive Grundgebilde auseinander, so sind entsprechende Doppelverhältnisse immer noch gleich, die Grundgebilde heissen aber dann nicht mehr perspektiv, sondern „projektiv“.

Projektive Grundgebilde sind also solche, bei denen die Doppelverhältnisse von je 4 entsprechenden Elementen gleich sind. Sind z. B. a, b, c, d... und a', b', c', d',... projektive Punktreihen (auf verschiedenen Trägern), so ist

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'}, \text{ oder } (abcd) = (a'b'c'd'), \text{ ebenso } (bcde) = (b'c'd'e') \text{ u. s. f.}$$

Zwei projektive Grundgebilde können nun immer auch in perspektive Lage gebracht, gleichartige Grundgebilde somit durch Zentralprojektion auseinander erzeugt werden.

Bringt man z. B. (Fig. 38) zwei projektive Punktreihen so zusammen, dass irgend zwei entsprechende Punkte a und a' zusammenfallen, und schneiden sich bb' und cc' in s, so müssen auch dd', ee' u. s. f. durch s gehen. Würde etwa sd den Träger a'b' in d'' statt in d' schneiden, so müsste $(a'b'c'd'') = (abcd) = (a'b'c'd')$ sein, woraus folgt, dass $d''a : d''b = d'a : d'b$, was nur möglich, wenn d'' und d' sich decken.

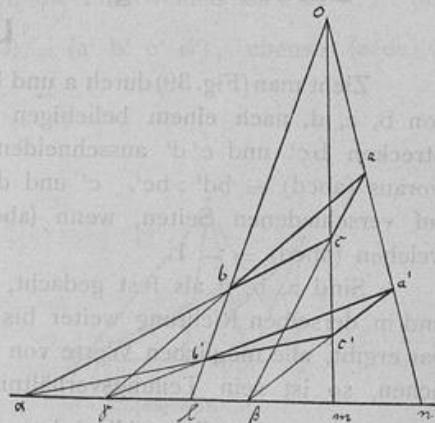
Ebenso ist klar, dass, wenn zwei Grundgebilde sich so zusammenlegen lassen, dass irgend drei Elemente des einen auf die entsprechenden drei des andern zu liegen kommen, dies dann für alle entsprechenden Elemente zutrifft. Zwei projektive Grundgebilde können also nicht mehr als zwei „Doppelemente“ besitzen, ohne dass alle entsprechenden Elemente ineinander fallen. Eine hübsche Anwendung hierzu liefert der

Satz von Desargues.

(Fundamentalsatz der Kollineationstheorie.)

Haben zwei Dreiecke abc und a'b'c' in einer Ebene eine solche Lage, dass die Linien aa', bb' und cc' durch einen Punkt (o) gehen, so liegen die Schnittpunkte γ , β , α der Geraden ab, a'b' und bc, b'c' und ca, c'a' in einer Geraden.

Schneiden nämlich die Strahlen aus o die Gerade $\alpha\beta$ in n, l, m, so wird die Punktgruppe obb'l auf ol aus α in die Punktgruppe occ'm auf om projiziert und diese wieder aus β in die Gruppe oaa'n auf on. Die Punktreihen obb'l und oaa'n sind also projektiv und in perspektiver Lage, weil o sich selbst entspricht. Es müssen somit die Linien ab, a'b' und nl durch einen Punkt gehen, d. h. ab und a'b' schneiden sich auf $\alpha\beta$.



Figur 40.

Ähnlich lässt sich die Umkehrung beweisen:

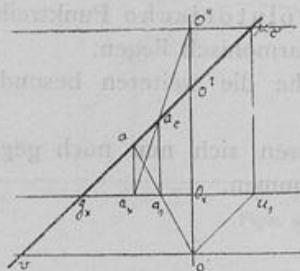
Haben 2 Dreiecke abc und $a'b'c'$ in einer Ebene eine solche Lage, dass die Schnittpunkte γ, α, β der Seitenpaare ab und $a'b'$, bc und $b'c'$, ca und $c'a'$ in einer Geraden liegen, so gehen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken a und a' , b und b' , c und c' durch einen Punkt.

Schneiden sich nämlich bb' und cc' in o , und schneiden die Geraden aa' , bb' , cc' die Gerade $\alpha\beta$ bzw. in n, l, m , so sind die Punktgruppen $obb'l$ und $occ'm$ als Schnitte derselben Strahlengruppe α , $obb'l$ perspektiv. Somit sind die Strahlengruppen $\gamma, obb'l$ und $\beta, occ'm$ projektiv, und da die entsprechenden Strahlen γl und βm zusammenfallen, auch perspektiv. Sie müssen also eine Punktgruppe gemein haben, d. h. die Punkte o, a, a' und n müssen in einer Geraden liegen, aa' muss somit durch o gehen.

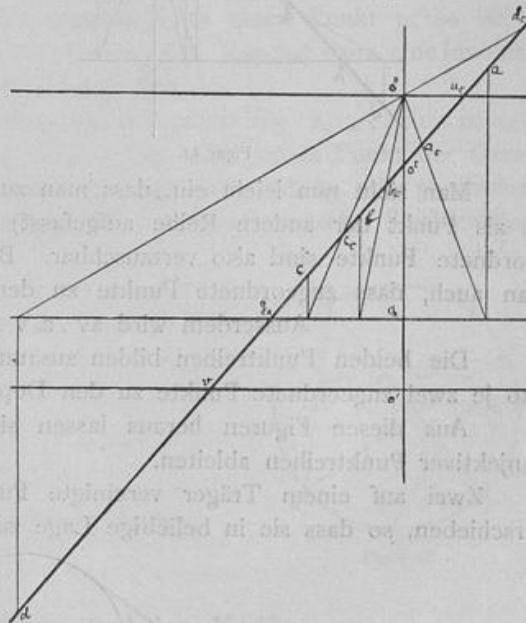
Konjektive Punktreihen. Involution.

Fällt (Fig. 41) bei der Zentralprojektion eine Gerade der Grundebene mit ihrem Bild zusammen, so müssen beide durch o^l gehen, weil alle Verbindungslinien von Punkten der Grundebene mit ihren Bildern sich in o^l schneiden. Man hat dann zwei perspektive Punktreihen auf demselben Träger oder „konjektive“ Punktreihen. Der Spurpunkt g_x des Trägers auf der Achse ist wie o^l ein „Doppelpunkt“, weil er mit seinem Bild zusammenfällt. Einen weiteren Doppelpunkt kann es nicht geben, denn zu dem Punkt a findet man den entsprechenden a_c durch das Grundlot aa_x und die Linie $a_x o''$. Die Schnittpunkte des Trägers mit dem Horizont und mit der Gegenachse, die Punkte u_c und v , nennt man die „Gegenpunkte“. Sie entsprechen je dem unendlich fernen Punkt der andern Reihe. Man sieht sofort, dass sie in gleicher Entfernung von den Doppelpunkten liegen.

Zieht man durch o' die Parallele zum Träger bis zum Schnitt mit der Achse in u_s , so ist $u_s u_c$ Grundlot, und man hat:



Figur 41.



Figur 42.

$$av : g_x v = a o' : a_s o',$$

$$a_c u_c : g_x u_c = a_s u_s : g_x u_s, \text{ woraus durch Multiplikation:}$$

$$av \cdot a_c u_c : g_x v \cdot g_x u_c = a o' \cdot a_s u_s : a_s o' : g_x u_s.$$

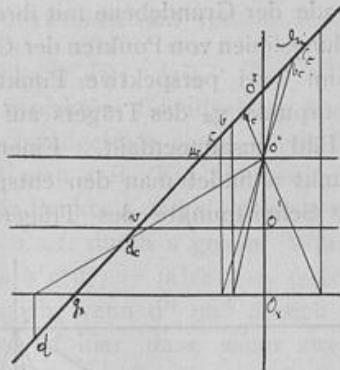
Da aber auch $a_s o' : a_s u_s = a o' : g_x u_s$ und damit
 $a o' \cdot a_s u_s = a_s o' \cdot g_x u_s$, so folgt
 $a v \cdot a_e u_e = g_x v \cdot g_x u_e = o^I u_e \cdot o^I v$ (denn $g_x v = o^I u_e$).

Es ist also das Produkt aus den Entfernungen zugeordneter Punkte von den Gegenpunkten ihrer eigenen Reihe konstant.

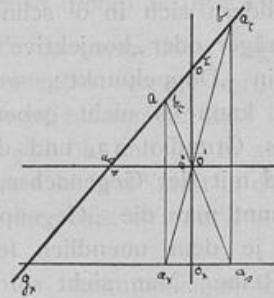
Konstruiert man (Fig. 42) die Bilder mehrerer Punkte $a, b, c, d \dots$, so zeigt sich, dass man es mit „gleichläufigen“ Reihen zu tun hat.

Rückt das Projektionszentrum hinter die Bildebene, wobei allerdings von Perspektive im eigentlichen Sinn nicht mehr die Rede sein kann, so erhält man die in folgender Figur 43 dargestellte Sachlage. Die Punktreihen sind „gegenläufig“. Die Doppelpunkte liegen auf der unendlichen Strecke $v u_e$, während sie im vorhergehenden Fall auf der endlichen Strecke lagen.

Fallen nun noch die Punkte o' und o'' zusammen, d. h. liegt das Projektionszentrum in der zweiten Medianebene des Grundsystems, so rücken auch die Gegenpunkte v und u_e zusammen in die Mitte zwischen den beiden Doppelpunkten.



Figur 43.



Figur 44.

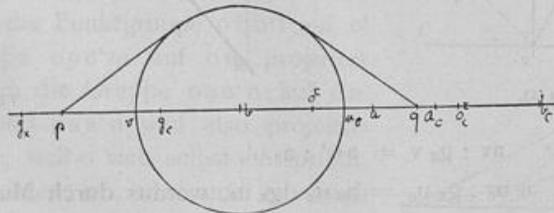
Man sieht nun leicht ein, dass man zum Punkt a das Bild a_e , aber auch zum Punkt b (a_e als Punkt der andern Reihe aufgefasst) als Bild den Punkt $b_e = a$ erhält. Je zwei zugeordnete Punkte sind also vertauschbar. Betrachtet man das Trapez $a a_x a_s a_c$, so erkennt man auch, dass zugeordnete Punkte zu den Doppelpunkten g_x und o^I harmonisch liegen.

$$\text{Ausserdem wird } a v \cdot a_e v = b v \cdot b_e v = (g_x v)^2 = (o^I v)^2.$$

Die beiden Punktreihen bilden zusammen eine involutorische Punktreihe, bei der also je zwei zugeordnete Punkte zu den Doppelpunkten harmonisch liegen.

Aus diesen Figuren heraus lassen sich ohne Mühe die weiteren besonderen Fälle konjektiver Punktreihen ableiten.

Zwei auf einem Träger vereinigte Punktreihen lassen sich nun noch gegeneinander verschieben, so dass sie in beliebige Lage zu einander kommen.



Figur 45.

Beschreibt man dann im Fall der gegenläufigen Punktreihen über der Strecke der beiden Gegenpunkte v, u_c als Durchmesser einen Kreis, so lassen sich auf beiden Seiten von ihm immer zwei Punkte p und q finden, für welche die von ihnen an den Kreis gezogenen Tangenten $= \sqrt{av \cdot a_c u_c} = \sqrt{bv \cdot b_c u_c}$. Diese Punkte sind dann Doppelpunkte, denn es ist $p v \cdot p_c u_c = q v \cdot q_c u_c = av \cdot a_c u_c$, wobei p_c mit p und q_c mit q identisch sind. p und q können nicht im Kreis liegen, da die Produkte positiv sein müssen.

Zwei gegenläufige Punktreihen auf demselben Träger haben somit immer zwei (reelle) Doppelpunkte.

Verschiebt man die Reihen so, dass ihre Gegenpunkte zusammenfallen, so kommen die Doppelpunkte in gleiche Entfernung zu beiden Seiten des betreffenden Punkts. Die Reihen bilden zusammen eine Involution, und zwar eine ungleichlaufende oder hyperbolische, die also immer zwei Doppelpunkte besitzt.

Verschiebt man nun auch zwei gleichlaufende Punktreihen desselben Trägers gegeneinander und beschreibt über $v u_c$ den Halbkreis, so gibt es, wie eine einfache algebraisch-geometrische Untersuchung zeigt, auf seinem Durchmesser zwei

reelle getrennte	}	Punkte
reelle zus.-fallende		
imaginär-konjugierte		

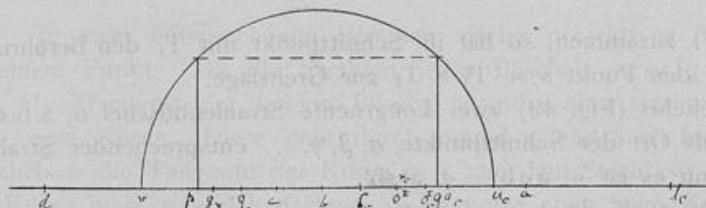
p und q , für die $p v \cdot p_c u_c = q v \cdot q_c u_c = av \cdot a_c u_c = bv \cdot b_c u_c$, wobei wieder p und q mit ihren entsprechenden Punkten p_c und q_c zusammenfallen.

p und q müssen hier in den Kreis fallen, da die Produkte $av \cdot a_c u_c = bv \cdot b_c u_c$ negativ sind.

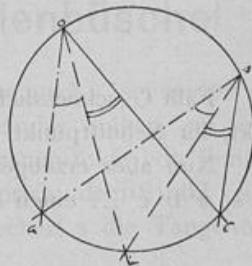
Rücken wieder die beiden Gegenpunkte zusammen in einen Punkt u , so ist kein Doppelpunkt möglich, wohl aber ist $au \cdot a_c u = bu \cdot b_c u$, u. s. f. Man hat dann eine Involution, und zwar eine gleichlaufende oder elliptische ohne Doppelpunkte.

Der Punkt u ist nur dann zugleich Doppelpunkt, wenn $au \cdot a_c u = bu \cdot b_c u = 0$, d. h. wenn in jedem Produkt eine Strecke den Wert 0 hat, oder jedem Punkt der Geraden der Punkt u zugeordnet ist. Eine solche Involution heisst eine uneigentliche oder parabolische.

Die aufgefundenen Sätze lassen sich unmittelbar auf konzentrische Strahlenbüschel übertragen.



Figur 46.



Figur 47.

Projektive Strahlenbüschel im Kreis.

Projektive Strahlenbüschel erhält man z. B. dadurch, dass man zwei Punkte o und s der Peripherie eines Kreises mit allen andern Punkten des Umrisses verbindet. Denn wenn man die Strahlen einander zuordnet, die sich auf der Peripherie schneiden, so schliessen entsprechende Strahlenpaare nach dem Satz vom Peripheriewinkel gleiche Winkel ein, auch

folgen die Strahlen einander im gleichen Sinn, die Büschel sind also kongruent und deshalb projektiv.

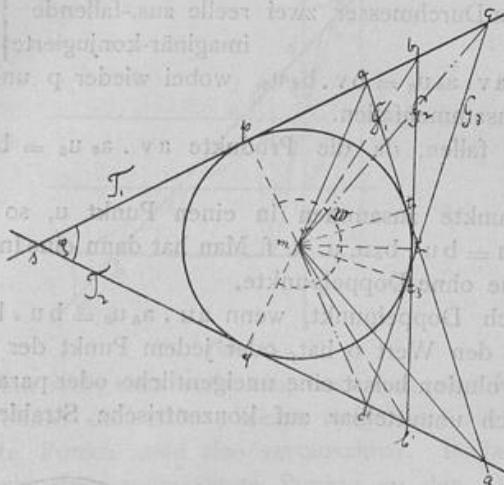
Auch projektive Punktreihen finden sich am Kreis. Eine veränderliche Tangente G des Kreises m erzeuge auf der festen Tangente T_1 die Punktreihe a, b, c, \dots , auf der festen Tangente T_2 die Punktreihe a', b', c', \dots (Fig. 48.)

T_1 berühre den Kreis in p , T_2 in q . Beide bilden miteinander den $\sphericalangle \varphi$. Die Berührungspunkte der G seien t_1, t_2, \dots .

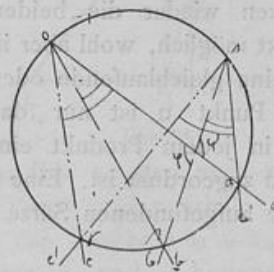
$$\begin{aligned} \text{Nun ist} \quad & \sphericalangle pma = \sphericalangle t_1 ma \\ & \text{und } \sphericalangle qma' = \sphericalangle t_1 ma' \end{aligned}$$

$$\text{somit } \sphericalangle ama' = \frac{1}{2} \sphericalangle w = \frac{1}{2} \sphericalangle (180 + \varphi), \text{ d. h.}$$

der Winkel, unter dem das Stück der veränderlichen Tangente zwischen den zwei festen Tangenten vom Kreismittelpunkt aus erscheint, ist konstant. Bewegt sich G , so beschreiben die Schenkel dieses Winkels stets gleiche Winkel, d. h. die Büschel m, abc, \dots und $m, a'b'c', \dots$ sind projektiv, also auch die Punktreihen abc, \dots und $a'b'c', \dots$



Figur 48.



Figur 49.

Fällt G schliesslich mit T_1 zusammen, so hat ihr Schnittpunkt mit T_1 den Berührungspunkt, ihr Schnittpunkt mit T_2 den Punkt $s = T_1 \times T_2$ zur Grenzlage.

Nun aber erzeugen umgekehrt (Fig. 49) zwei kongruente Strahlenbüschel o, abc, \dots und $s, a'b'c', \dots$ einen Kreis als Ort der Schnittpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ entsprechender Strahlen,

$$\text{denn es ist } \sphericalangle aob = \sphericalangle a'sb',$$

$$\text{also auch, da } \sphericalangle \varphi = \sphericalangle \psi,$$

$$\sphericalangle o\beta s = \sphericalangle o\alpha s,$$

$$\text{ebenso } = \sphericalangle o\gamma s, \text{ u. s. f.}$$

d. h. die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ liegen alle auf einem Kreis über os .

Das Erzeugnis zweier kongruenten Strahlenbüschel ist also ein Kreis, der auch durch die Mittelpunkte der Büschel geht. Der Geraden os als Strahl des Büschels o entspricht im Büschel s die Tangente in s und umgekehrt, denn wenn man die entsprechenden Winkel zeichnet, so sind dieselben nach dem Satz vom Tangentensehnenwinkel einander

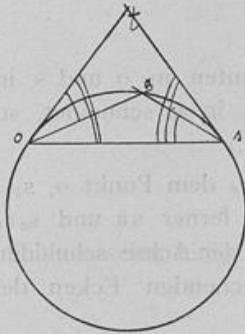
gleich, oder wenn der Punkt a sich dem Punkt s nähert, bis er mit ihm zusammenfällt, so fällt die Kreissehne ao mit os zusammen, die Sehne as aber wird zur Tangente in s .

Man kann den Satz auch so aussprechen: zwei projektive Strahlenbüschel erzeugen einen Kreis, wenn drei Schnittpunkte α, β, γ entsprechender Strahlenpaare auf der Peripherie eines Kreises liegen, der auch durch die Mittelpunkte o und s der Büschel geht. In diesem Fall sind nämlich die projektiven Strahlenbüschel kongruent, weil sich die drei Paare entsprechender Strahlen $o, \alpha\beta\gamma$ und $s, \alpha\beta\gamma$ zur Deckung bringen lassen.

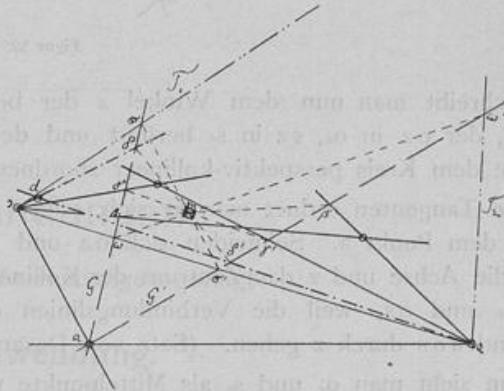
Ein besonderer Fall tritt ein, wenn der Kreis die der Geraden os entsprechenden Strahlen beider Büschel in o und s berührt und ausserdem durch den Schnittpunkt a eines Paares entsprechender Strahlen der Büschel geht.

Es ist hier (Fig. 50): $\sphericalangle toa = \sphericalangle osa$
und $\sphericalangle tos = \sphericalangle ost$.

Die entsprechenden Strahlen folgen sich ausserdem in demselben Sinn, somit sind die Büschel o, tas und s, oat kongruent, ihr Erzeugnis also der Kreis.



Figur 50.



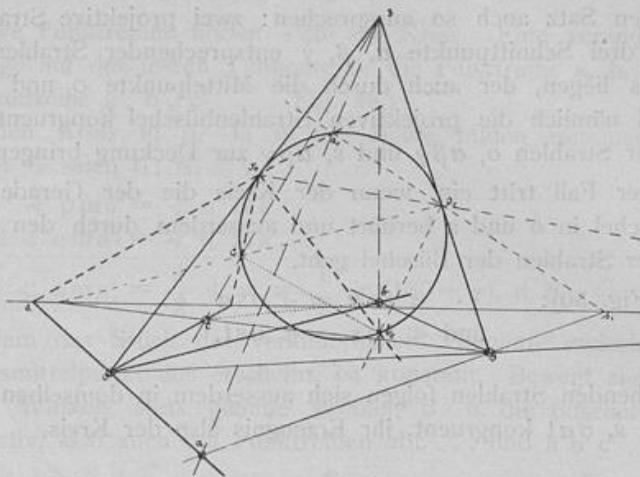
Figur 51.

Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel.

Je zwei entsprechende Strahlen zweier projektiven Büschel o und s schneiden sich in einem Punkt. Da die Strahlen jedes Büschels stetig aufeinander folgen, so erhält man als Erzeugnis der beiden Büschel o und s eine stetige Aufeinanderfolge von Punkten, d. h. eine Kurve. Diese geht durch o und s , und auch hier entspricht dem Strahl os des Büschels o die Tangente der Kurve in s und dem Strahl so des Büschels s die Tangente an die Kurve in o , was sich nachweisen lässt wie oben beim Kreis.

Diese Tangenten lassen sich, wie überhaupt jeder einem gewissen Strahl des einen Büschels zugeordnete Strahl des andern, leicht konstruieren: Legt man (Fig. 51) durch den Schnittpunkt zweier zugeordneten Strahlen, etwa a , zwei Gerade G und G' , so schneidet G den Büschel o in einer Punktreihe $\alpha\beta\gamma\dots$ und G' den Büschel s in einer projektiven Reihe $\alpha'\beta'\gamma'\dots$. Diese Reihen sind perspektiv, da in a entsprechende Punkte vereinigt sind. Es müssen also $\beta\beta', \gamma\gamma', \dots$ durch einen Punkt (m) gehen. Schneidet nun ein gewisser Strahl od des Büschels o die G in δ , so schneidet δm die G' in δ' , und es ist $s\delta'$ der zu-

geordnete Strahl zu od . Zum Strahl os erhält man so die Tangente T_2 der Kurve in s , zum Strahl so die Tangente T_1 in o .



Figur 52.

Beschreibt man nun dem Winkel z der beiden Tangenten in o und s irgend einen Kreis ein, der oz in o_e , sz in s_e berührt und den Strahl za in a_e schneidet, so lässt sich die Kurve dem Kreis perspektiv-kollinear zuordnen. (Fig. 52.)

Die Tangenten ordnet man je sich selbst zu, ferner o_e dem Punkt o , s_e dem Punkt s und a_e dem Punkt a . Schneiden sich oa und $o_e a_e$ in s_1 , ferner sa und $s_e a_e$ in s_2 , so ist $s_1 s_2$ die Achse und z das Zentrum der Kollineation. Auf der Achse schneiden sich dann auch $o_e s_e$ und os , weil die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken der Dreiecke $a_e o_e s_e$ und $a o s$ durch z gehen. (Satz von Desargues).

Nun sieht man o_e und s_e als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln an und ordnet jedem Strahl des Büschels o den Strahl des Büschels o_e zu, der ihm auf der Achse $s_1 s_2$ begegnet, ebenso jedem Strahl des Büschels s einen Strahl des Büschels s_e .

Durchläuft nun der Strahl oa den Büschel o , dann durchläuft sein entsprechender Strahl im Büschel s diesen Büschel. Zum Büschel o ist perspektiv der Büschel o_e , ebenso der Büschel s_e dem Büschel s . Da nun die Büschel o und s projektiv sind, so sind es auch die Büschel o_e und s_e . Einem beliebigen Kurvenpunkt $b = ob \times sb$ entspricht der Schnittpunkt b_e der Strahlen $o_e b_e$ und $s_e b_e$, die den Strahlen ob und sb entsprechen.

Da sich die entsprechenden Seiten der Dreiecke osb und $o_e s_e b_e$ auf $s_1 s_2$ schneiden, so muss $b b_e$ durch z gehen, ebenso $c c_e$, $d d_e$ u. s. w. Ausserdem müssen sich die entsprechenden Geraden, z. B. bc und $b_e c_e$ auf $s_1 s_2$ schneiden, weil die Dreiecke $s b c$ und $s_e b_e c_e$ perspektiv-kollinear sind. Das Erzeugnis der Büschel o und s ist also dem Erzeugnis der Büschel o_e und s_e perspektiv-kollinear zugeordnet.

Zum Büschel o_e gehören nun die Strahlen $o_e z$, $o_e a_e$ und $o_e s_e$, zum Büschel s_e die entsprechenden $s_e o_e$, $s_e a_e$ und $s_e z$. Die beiden Büschel erzeugen also den Kreis. Dieser ist somit das perspektive Bild der Kurve, diese folglich eine (ebene, und räumliche) Zentralprojektion eines Kreises. Das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel ist also ein Kegelschnitt.

In ähnlicher Weise lässt sich beweisen, dass auch das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen die Zentralprojektion eines Kreises, d. h. ein Kegelschnitt ist.

Es lassen sich somit die projektiven Eigenschaften des Kreises, insbesondere auch seine polaren, unmittelbar auf die Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel und Punktreihen übertragen. Zwischen diesen Erzeugnissen und den Zentralprojektionen des Kreises, die als die ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels bekannt sind, kann daher kein wesentlicher Unterschied bestehen, d. h. die Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel und Punktreihen sind Kurven II Grads: Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel.

Aus der Uebertragung der projektiven Eigenschaften des Kreises auf die Kegelschnitte seien die folgenden Sätze hervorgehoben:

Die Punkte eines Kegelschnitts werden von 2 festen Punkten desselben durch projektive Strahlenbüschel projiziert.

Die Tangenten eines Kegelschnitts schneiden 2 feste Tangenten desselben in projektiven Punktreihen.

Anwendungen.

Zum Schluss seien einige wertvolle Anwendungen gezeigt:

1. Anwendung.

Von einer Parabel sind zwei Tangenten T_1 und T_2 mit ihren Berührungspunkten b_1 und a_2 gegeben. Man soll die Parabel konstruieren.

Auflösung.

Eine Parabel wird von der unendlich fernen Geraden berührt. Da sämtliche Parabeltangente auf T_1 und T_2 projektive Punktreihen erzeugen, so müssen diese Punktreihen ähnlich werden, weil ihre unendlich fernen Punkte einander entsprechen, denn es ist dann

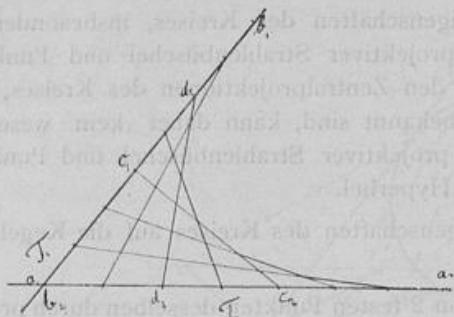
$$(a_1 \ b_1 \ c_1 \ \infty) = (a_2 \ b_2 \ c_2 \ \infty), \text{ woraus } \frac{c_1 \ a_1}{c_1 \ b_1} : \frac{\infty \ a_1}{\infty \ b_1} = \frac{c_2 \ a_2}{c_2 \ b_2} : \frac{\infty \ a_2}{\infty \ b_2}, \text{ oder}$$

$\frac{a_1 \ c_1}{b_1 \ c_1} : \frac{a_1 \ \infty}{b_1 \ \infty} = \frac{a_2 \ c_2}{b_2 \ c_2} : \frac{a_2 \ \infty}{b_2 \ \infty}$. Die Strecken $a_1 \ \infty$, $b_1 \ \infty$, $a_2 \ \infty$ und $c_2 \ \infty$ sind einander gleich, da sie sich nur durch eine endliche Grösse unterscheiden, somit folgt:

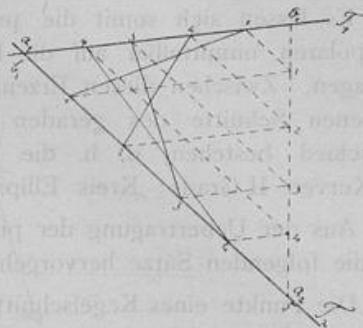
$$\frac{a_1 \ c_1}{b_1 \ c_1} = \frac{a_2 \ c_2}{b_2 \ c_2}, \text{ und ebenso: } \frac{a_1 \ d_1}{b_1 \ d_1} = \frac{a_2 \ d_2}{b_2 \ d_2}, \text{ u. s. f.}$$

Man erzeugt daher auf T_1 und T_2 ähnliche Punktreihen, in denen a_1 und a_2 , b_1 und b_2 einander entsprechen. Dies geschieht durch Einteilen von a_1 , b_1 und a_2 , b_2 in dieselbe Anzahl gleicher Teile, oder dadurch dass man die Punkte von T_2 durch Parallelen mit T_1

auf $a_2 b_1$ überträgt und dann von hier wieder durch Parallelen mit T_2 auf T_1 . Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von T_1 und T_2 „umhüllen“ die Parabel.



Figur 53.



Figur 54.

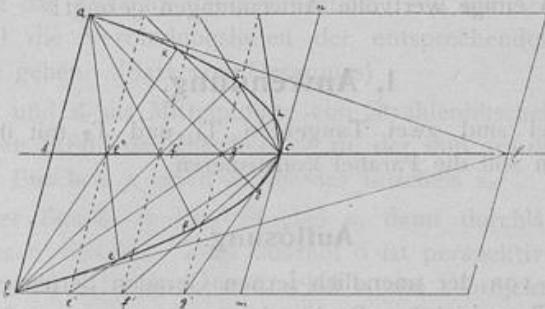
2. Anwendung.

Kegelschnitte aus zugeordneten Durchmessern.

Parabel aus einer Sehne ab und ihrem zugeordneten Durchmesser cd.

Auflösung.

e, f, g, h, i, k seien Punkte der gesuchten Parabel. Die Büschel a, b, f, g, c und c, b, f, g, c sind projektiv. Sie werden geschnitten von cd in d, e', f', g'' und von der Parallelen durch b zu cd in b, e', f', g' . (Die parallelen Träger gehen durch den unendlich fernen Punkt der Parabel.)



Figur 55.

Die Punktreihen b, e', f', g' und d, e'', f'', g'' sind somit projektiv, und weil ihre unendlich fernen Punkte einander entsprechen, so sind die Reihen ähnlich. Nun sind aber im Schnittpunkt der Träger entsprechende Punkte vereinigt, folglich sind die Punktreihen perspektiv. Da ferner die Parabel-Tangente in $c \parallel ab$ ist und, wie ab auch, 2 entsprechende Punkte der Reihen verbindet, so sind alle Verbindungslinien entsprechender Punkte der 2 Reihen parallel. Entsprechendes findet man für die Büschel b, h, i, k und c, h, i, k .

Man braucht demnach nur das Parallelogramm $abmn$ zu zeichnen und durch Parallelen zu ab zu schneiden, dann die aus der Figur ersichtliche Konstruktion zu vollenden. Dem Strahl ca des Büschels c entspricht die Tangente in a , d. h. der Strahl cl , ebenso dem Strahl cb des Büschels c die Tangente in b , d. h. der Strahl bl , wobei $cl = cd$.

Für die Ellipse und die Hyperbel erhält man durch ähnliche Ueberlegungen ganz entsprechende Konstruktionen aus zugeordneten Durchmessern.

3. Anwendung.

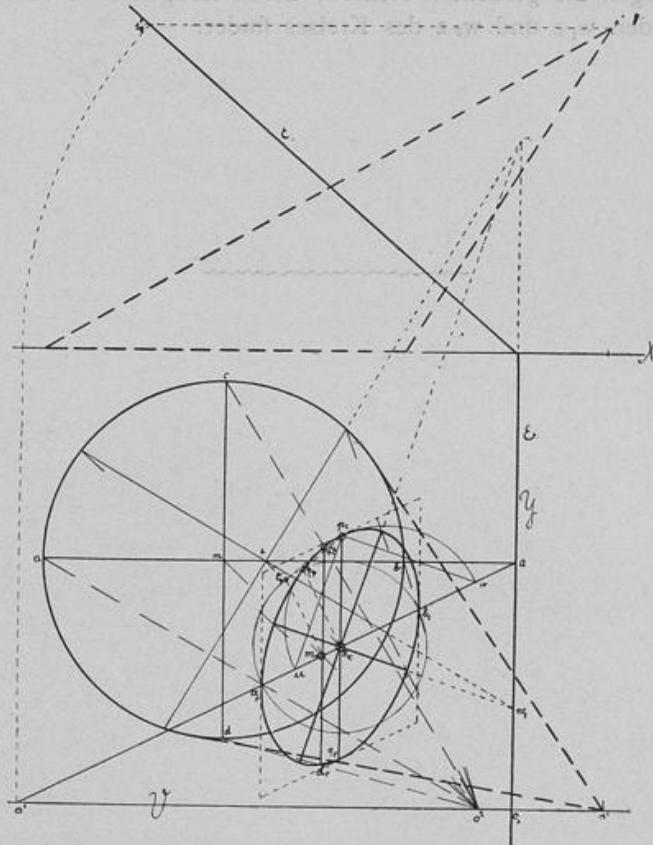
Ebene Schnitte des Kegels (Zylinders) II Grads.

Die Perspektive lässt sich mit Vorteil auch bei den Aufgaben über ebene Schnitte des Kegels II Grads, d. h. des Kegels, dessen Leitlinie ein Kegelschnitt ist, anwenden, insbesondere bei der Bestimmung der wahren Grösse solcher Schnitte. Diese sind als Zentralprojektionen von Kegelschnitten wieder Kegelschnitte, was unmittelbar einleuchtet, wenn man die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel auffasst.

Gegeben sei ein schiefer Kreiskegel mit der Spitze (s', s'') und dem in P_1 liegenden Kreis m als Grundfläche. Die schneidende Ebene E sei der Einfachheit halber $\perp P_2$ angenommen. Man soll die Schnittlinie in wahrer Grösse konstruieren.

Auflösung.

Man projiziert zunächst s auf die Ebenen E und P_1 , und zwar in Richtung ihrer Falllinien in die Punkte s_0 und s_1 (letzterer ist in der Figur weggelassen) und legt s_0 mit der



Figur 56.

Ebene E in P_1 um in die Lage o'' . Dann ist $o''o_x s'$ die Hauptvertikale und E_1 die Achse Y der Perspektive. Trägt man noch $o''o^l = s''s_e''$ auf V gegen o_x hin ab, so ist o^l der Mittelpunkt der perspektiven Kollineation, in die der ges. Kegelschnitt mit dem Kreis m kommen muss. Nun zieht man an den Kreis 2 zu $Y \parallel$ Tangenten. Der Berührungsdurchmesser ab hat die Gerade $a_e b_e$ zum Bild. Durch Strahlen aus o^l erhält man auf $a_e b_e$ die Bilder der Punkte a, b, m . Die Bilder der Kreistangenten sind wieder $\parallel Y$ und berühren den gesuchten Kegelschnitt in a_e und b_e , so dass man in $a_e b_e$ einen Durchmesser desselben hat. Das Bild des zu ab zugeordneten Kreisdurchmessers cd ist die Parallele zu Y durch m_e . Seine Länge ist ebenfalls leicht zu bestimmen, wie auch die Bilder und Längen aller zu cd parallelen Sehnen des Kreises, wodurch sich der gesuchte Kegelschnitt vollends leicht und rasch ergibt. Um seine Achsen für den Fall einer Ellipse zu bestimmen, verfährt man folgendermassen:

$c_e d_e$ ist eine dem Durchmesser $a_e b_e$ zugeordnete Sehne, da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die gesuchte Ellipse betrachtet man nun als Parallelprojektion des über $a_e b_e$ als Durchmesser beschriebenen Kreises z_e . Die der „schiefen Ordinate“ $m_e c_e$ entsprechende senkrechte Kreisordinate ist $m_e c_p \perp a_e b_e$. Die Konstruktion des dem $\Delta c_p m_e c_e$ ähnlichen und ähnlich liegenden $\Delta p_p z_e p_e$ liefert den zugeordneten Durchmesser $p_e q_e$ zu $a_e b_e$ und der Kreis über $p_p p_e$ mit Mittelpunkt auf $a_e b_e$ die Achsenrichtungen $u_p e$ und $v_p e$. Auf den Parallelen durch z_e zu $u_p e$ und $v_p e$ liegen die gesuchten Achsen, deren Längen man durch Konstruktion der entsprechenden Geraden $w_1 z$ und $w_2 z$ des Kreises findet.

Das Bild des zu ab zugeordneten Kreisdurchmessers cd ist die Parallele zu Y durch m_e . Seine Länge ist ebenfalls leicht zu bestimmen, wie auch die Bilder und Längen aller zu cd parallelen Sehnen des Kreises, wodurch sich der gesuchte Kegelschnitt vollends leicht und rasch ergibt. Um seine Achsen für den Fall einer Ellipse zu bestimmen, verfährt man folgendermassen:

$c_e d_e$ ist eine dem Durchmesser $a_e b_e$ zugeordnete Sehne, da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die gesuchte Ellipse betrachtet man nun als Parallelprojektion des über $a_e b_e$ als Durchmesser beschriebenen Kreises z_e . Die der „schiefen Ordinate“ $m_e c_e$ entsprechende senkrechte Kreisordinate ist $m_e c_p \perp a_e b_e$. Die Konstruktion des dem $\Delta c_p m_e c_e$ ähnlichen und ähnlich liegenden $\Delta p_p z_e p_e$ liefert den zugeordneten Durchmesser $p_e q_e$ zu $a_e b_e$ und der Kreis über $p_p p_e$ mit Mittelpunkt auf $a_e b_e$ die Achsenrichtungen $u_p e$ und $v_p e$. Auf den Parallelen durch z_e zu $u_p e$ und $v_p e$ liegen die gesuchten Achsen, deren Längen man durch Konstruktion der entsprechenden Geraden $w_1 z$ und $w_2 z$ des Kreises findet.

Fig. 10

Ebene E in P_1 um in Y der Perspektive. T der Mittelpunkt der perspektivischen Abbildung kommen muss. Nun zum Zirkel ab hat die Gerade ab die Geraden a_1b_1 und a_2b_2 die Bilder der Punkte a, b in den beiden gesuchten Kegelschnitten. Das Bild des zu a gehörenden Kreises hat die Länge a_1a_2 . Seine Länge ist ebenfalls die Länge der parallelen Sehnen des Kreises. Das rasch ergibt. Um seine Ellipse folgendermassen:

$c_e d_e$ ist eine dem Kreis ab entsprechende Gerade. Die gesuchte Ellipse ab ist der Durchmesser beschriebenen Kreis ab . Die Kreisordinate ist $m_e c_p$. Die Ellipse ab liegt in der Ebene E durch a, b und c_p . Die Ellipse ab liegt in der Ebene E durch a, b und c_p . Die Ellipse ab liegt in der Ebene E durch a, b und c_p . Die Ellipse ab liegt in der Ebene E durch a, b und c_p .



Hauptvertikale und E_1 die Achse o_1 gegen o_x hin ab, so ist o^1 der Kegelschnitt mit dem Kreis m tangential. Der Berührungsdurchmesser o^1 erhält man auf $a_e b_e$ die Ellipse ab sind wieder $\parallel Y$ und berühren ab einen Durchmesser desselben Kreises. Die Parallele zu Y durch m_e ist die Parallele zu Y durch m_e . Die Bilder und Längen aller zu cd gehörenden Kegelschnitte vollends leicht und ohne weitere Konstruktion zu bestimmen, verfährt man folgendermassen:

Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird.

Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird.

Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird. Die Ellipse ab da sie von $a_e b_e$ halbiert wird.



