

Bemerkungen über den mathematischen Unterricht an der Realschule.

Die Mathematik ist dadurch von fast allen Lehrgegenständen an höheren Schulen von Grund aus verschieden, daß das Objekt des mathematischen Wissens, die mathematischen Begriffe und Gesetze, dem Lernenden nicht fremd gegenübersteht, sondern aus seinem eigenen Geiste hervorgehoben wird. Während im übrigen die Schüler Fremdes zunächst als Fremdes in sich aufnehmen, ist der mathematische Unterricht vorwiegend eine Erforschung mathematischer Wahrheiten, welche von Lehrer und Schülern in gemeinsamer Arbeit ausgeführt wird. Das Bewußtsein hiervon zu wecken und zu stärken, ist eine der ersten Aufgaben des mathematischen Unterrichts, und durch dies Bewußtsein wird dann wieder die Teilnahme der Schüler und somit der Erfolg des Unterrichtes gemehrt.

Wegen der Einfachheit ihres Lehrobjektes ist die Mathematik diejenige Wissenschaft, die dem jugendlichen Geiste zuerst zugänglich ist und doch durch ihren Inhalt einen Begriff von dem strengen Aufbau eines wissenschaftlichen Systems gewährt. Mathematische Kenntnisse sind aber zugleich die unumgängliche Vorbedingung für eine gründliche Auffassung der Naturwissenschaften und ihrer Anwendungen, und auch aus diesem Grunde ist die Mathematik wiederum für alle höheren Schulen, für die Realschulen aber insbesondere, einer der wichtigsten Zweige des gesamten Unterrichtes. Eben so bedeutungsvoll ist andererseits die mathematische Belehrung in formaler Hinsicht um deswillen, weil sie die Energie der innern Anschauungen und Abstraktionen entwickelt, die Schüler an Klarheit und Bestimmtheit der Begriffe gewöhnt und im folgerichtigen Denken übt.

Einige Pädagogen, welche diesen formalen Zweck einseitig betonen und die erwähnte reale Aufgabe aufser acht lassen oder weit unterschätzen, haben die Meinung ausgesprochen, daß der Umfang des mathematischen Unterrichtes auf ein Minimum zu beschränken und daß demgemäß auch jetzt noch Euklids Elemente das Muster eines mathematischen Lehrbuchs seien, weil sie eine Kette von mathematischen Wahrheiten in strenglogischer Folge und mustergiltiger Form darbieten. Wie viel Bewunderung man aber auch dem Werke Euklids namentlich in Rücksicht auf die Zeit seines Entstehens mit Recht zollen mag, so muß doch jeder Kundige einräumen, daß ein an dasselbe sich anschließender Unterricht durchaus nicht geeignet ist, in unsern Quartanern und Tertianern die Auffassung räumlicher Gestalten zu wecken, zu beleben und zum kräftigen Bewußtsein zu bringen.

Von andrer Seite hat insbesondere Gallenkamp auf die Thatsache hingewiesen, daß die an unsern höhern Schulen erworbene mathematische Ausbildung für das Verständnis der neuern Naturwissenschaften unzulänglich ist, und dementsprechend die Ansicht vertreten, daß die Bildungsaufgabe des Gymnasiums die Aufnahme der Elemente der analytischen Geometrie und Differentialrechnung fordere und daß darüber hinaus die Realschule ihre Zöglinge in die grundlegenden Anschauungen und Methoden der höhern Mathematik einführen und zu wissenschaftlicher Arbeit auf diesem Gebiete befähigen müsse. Wenn auch die Gegner dieser Forderung zugeben, daß wenigstens für einen großen Teil dieses umfang- und inhaltreichen mathematischen Wissens durch Beseitigung zweckloser Übungen und einiger für den Aufbau desselben entbehrlicher Abschnitte die Zeit ohne Vermehrung der mathematischen Unterrichtsstunden frei gemacht und durch vervollkommnete Methoden die Aneignung und Verarbeitung erleichtert werden könne, so halten sie doch an der Ansicht fest, daß die Qualität der vorgeschlagenen Disciplinen der Aufnahme entgegenstehe.

Hier sind für die einzelnen Klassen die Lehrpläne beibehalten, welche gemäß der Unterrichts- und Prüfungsordnung von 1859 üblich sind, nämlich folgende.

Quarta. Einleitung zur Planimetrie. Die Winkel an zwei sich schneidenden Geraden. Symmetrische Punkte und Linien. Die Parallelen. Die Eigenschaften eines Dreieckes. Deckung der Dreiecke. Eigenschaften eines Parallelogrammes. Planimetrische Aufgaben.

Untertertia. a. Vergleichung der Parallelogramme hinsichtlich des Inhaltes. Die Lehre von dem Kreise, den Sehnen und Winkeln im Kreise, den ein- und umgeschriebenen Vielecken. Konstruktionsaufgaben mit Analysis. — b. Die vier Grundrechnungen mit positiven und negativen Zahlen und Polynomen.

Obertertia. a. Die Verhältnisse und Proportionen. Die ähnliche Lage, die Ähnlichkeit der Dreiecke und Vielecke. Die Flächen geradliniger Figuren. Aufgaben. — b. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten. Potenzen und Wurzeln. Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Untersekunda. a. Einiges aus der neuern Geometrie. Berechnung des Kreises. Ebene Trigonometrie. Aufgaben. — b. Die Logarithmen. Die Determinanten und Anwendung derselben zur Auflösung der linearen Gleichungen. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Obersekunda. a. Stereometrie. Geometrische und trigonometrische Übungen. — b. Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten. Kubische und biquadratische Gleichungen.

Unterprima. a. Analytische Geometrie. — b. Progressionen. Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. Kombinationslehre. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Oberprima. a. Elemente der darstellenden Geometrie und sphärische Trigonometrie. — b. Der binomische Satz. Die Exponentialreihe, die Sinus- und Cosinusreihe, die logarithmische Reihe. Größte und kleinste Werte.

* * *

Die pädagogische Bedeutung und methodische Behandlung der einzelnen Disciplinen auf den verschiedenen Stufen will ich durch folgende Bemerkungen zu erläutern suchen.

1. Von der größten Wichtigkeit für den ersten algebraischen Unterricht ist die methodische Behandlung des Rechenunterrichtes in den untern Klassen und die Vorbildung, welche die Schüler dadurch erlangt haben. Der angehende Sextaner besitzt eine gewisse Übung und Sicherheit in den vier Grundrechnungen mit ganzen Zahlen. Durch die in Sexta vorkommende Wiederholung derselben Rechnungen muß die Zahlenauffassung geklärt und befestigt und auch durch Aufnahme der niedern Einheiten erweitert werden. Als wesentlich neu treten dann die Brüche und die Bruchrechnungen hinzu. Das Lehrobject ist somit in den untersten Klassen mit dem des Rechenunterrichtes der allgemeinen Elementarschule übereinstimmend, aber die Methode muß den Rechenunterricht in den untern Klassen an höhern Schulen als eine Vorbereitung zu der Algebra kennzeichnen. Namentlich sind auf Grund der gewonnenen und geklärten Zahlenanschauungen die Begriffe der Grundrechnungen und ihrer Ergebnisse zu entwickeln, aus den Begriffen die Rechnungsregeln abzuleiten und in Form eines knappen treffenden Ausdruckes zu befestigen. Im engsten Anschluß an diese Abstraktion der Begriffe hat der erste algebraische Unterricht dann nur einen leichten, weil wohl-vorbereiteten Schritt zu thun, indem er die schon gewonnenen abstrakten Begriffe und Regeln auch noch durch abstrakte Zeichen darstellt und auf abstrakte Zahlengrößen anwendet. So wird der Anfang der Algebra eine wissenschaftliche Wiederholung des auf bestimmte Zahlen beschränkten Rechnens und dieses eine Vorschule für jene.

2. Die Darstellung der algebraischen Sätze durch identische Gleichungen und die Umsetzung einer solchen Gleichung in Worte muß schon in der Klasse Untertertia bis zu sicherer Geläufigkeit geübt werden. In der folgenden Klasse Obertertia nimmt danach einestheils die Erweiterung des Zahlgebietes von der diskontinuierlichen Reihe der natürlichen Zahlen bis zu der unbegrenzten Zahlenebene wegen der fortgesetzten und gesteigerten Abstraktionen alle Sorgfalt des Lehrers in Anspruch, und eben so wichtig ist hier andernteils die Einführung in die Lehre und die Anleitung zur Auflösung von den algebraischen Gleichungen und den Aufgaben, welche auf solche Gleichungen führen. Jede Aufgabe, die den Schülern

in der Schule oder als häusliche Arbeit gestellt wird, muß hier und eben so auf allen Stufen mit Rücksicht auf den Standpunkt der Schüler geprüft und gewählt sein; denn durch Vermeidung unfruchtbarer Aufgaben und solcher, die zu schwer sind, kann für den fortschreitenden Unterricht viel Zeit erübrigt werden.

3. Wie alle neuen Begriffe ist auch der einer Determinante auf induktivem Wege zu entwickeln und dann bis zur vollkommenen Klarheit zu fördern. Die nächste Anwendung bietet die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen und namentlich die Frage nach der Auflösbarkeit eines solchen. Später führt die ähnliche Frage nach der Zerlegbarkeit eines quadratischen Ausdruckes mit zwei Unbekannten wieder auf eine Bedingung (die Diskriminante), für welche nur die Form einer Determinante eine durchsichtige Darstellung ermöglicht. Die Entwicklung der Diskriminante aber ist die notwendige Grundlage für die wissenschaftliche Behandlung der Aufgabe, von zwei quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten die gemeinsamen Wurzeln zu finden; nur auf dieser erlangt der Schüler die begründete Erkenntnis, daß das Gelingen oder Mißlingen der Auflösung nicht vom Zufalle und nicht von Kunstgriffen, sondern von einer leicht anzusetzenden Gleichung abhängt.

4. Wenn die Auflösung der quadratischen Gleichungen von einer Unbekannten sich auf die Ableitung der Wurzelwerte beschränkt, so bleibt eine wichtige Gelegenheit, die Kenntnis der algebraischen Formen zu erweitern und vertiefen, unbeachtet und unbenutzt. Durch eine leichte Umformung des quadratischen Ausdruckes in die Summe oder Differenz zweier Quadrate und durch näheres Eingehen auf die Werte, welche der Ausdruck annehmen kann, wird nicht bloß die Bestimmung der beiden Wurzeln, sondern auch die des größten oder kleinsten Wertes vermittelt und zugleich die Abhängigkeit dieser drei Werte von der Diskriminante aufgeklärt. Dies Verfahren hat außerdem, auch wenn man allein die Auflösung der Gleichungen bezweckt, vor dem mehr üblichen der quadratischen Ergänzung den Vorzug, daß es nicht so leicht in einen vom Denken losgelösten Mechanismus ausartet.

Wenn endlich später da, wo es sich um kubische oder biquadratische Gleichungen handelt, zunächst die kubische Form in die Summe zweier Kuben und die biquadratische in die Summe der Quadrate von zwei quadratischen Formen verwandelt wird, so liegt der Behandlung aller Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades derselbe Gedanke zu Grunde, und der Grad der Gleichung bezeichnet den Weg der Durchführung desselben.

5. In den bisher erwähnten Zweigen der elementaren Algebra werden dem Lernenden nur Polynome von engbegrenzter Gliederzahl vorgeführt und alle Glieder einzeln angegeben. Die Formen, durch welche diese engen Schranken beliebig weit hinausgerückt werden, sind die Progressionen. Hier tritt zum ersten Male anstatt der vollständig verzeichneten Glieder das Gesetz ein, nach welchem sie zu bilden sind, und ein abstraktes Zeichen zur Bestimmung ihrer Anzahl. Diese Abstraktion gewinnt noch größere Bedeutung durch die darauf folgende Summierung der abnehmenden geometrischen Progression, welche zeigt, daß auch Summen von unbegrenzter Gliederzahl bestimmte endliche Werte haben können. Daran schließt sich dann die Frage nach der einfachsten Bedingung der Konvergenz der Reihen; und endlich bilden die wichtigen Eigenschaften der Reihen und die Lehre vom Größten und Kleinsten die letzte Aufgabe des elementaren algebraischen Unterrichtes.

6. Da eine lebendige Auffassung der räumlichen Gestalten die Grundlage alles geometrischen Wissens ist, so hat man vielseitig empfohlen, daß dem ersten planimetrischen Unterrichte eine propädeutische Formenlehre vorausgehe und neben demselben fortgesetzt werde. Nun dienen aber einestheils mehr Unterrichtsgegenstände der untersten Klassen, insbesondere das Zeichnen, als Vorbereitung für den geometrischen Unterricht, und andernteils sind Anschauungsübungen gerade im Anschluß an den wissenschaftlichen Unterricht nicht allein notwendig, sondern auch besonders geeignet, die Vorstellungskraft anzuregen und zu stärken; es liegt also gewiß kein Grund vor, warum diese beiden so nahe verwandten Unterrichtszweige sich getrennt nebeneinander entwickeln sollen, es folgt vielmehr aus der Notwendigkeit der Anschauungsübungen nur, daß der Lehrer im Anfange des planimetrischen Unterrichtes langsam voranschreiten und die lebendige Auffassung der Gestalten und ihrer Bewegungen als die wichtigste Aufgabe im Auge behalten muß.

7. Hinsichtlich der Auswahl des planimetrischen Lehrstoffes gewähren die Entscheidung folgende Gesichtspunkte. Der gesamte mathematische Unterricht der mittlern Klassen soll für den der obern den Unterbau fest und sicher begründen und ausführen. Was zu diesem Zwecke wesentlich beiträgt, ist vollständig zu erledigen, alles übrige zu vermeiden. Wird außerdem der Grundsatz festgehalten, daß der Lehrer, ausgehend von den Elementen (einem Punkte und einer Geraden) und vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreitend, die Begriffe der geometrischen Gebilde und ihre trotz der Bewegung gleichbleibenden Eigenschaften unter steter Mitarbeit der Schüler zu entwickeln, wissenschaftlich zu begründen und fest einzuprägen hat, so ergibt sich eine organische Anordnung des planimetrischen Lehrstoffes, die nur an wenigen Stellen eine Verschiebung gestattet.

Mit dieser festen Gliederung ist es wohl vereinbar, daß einem Begriffe, welcher anfangs durch die einfachste, faßlichste Abstraktion gewonnen ward, später an geeigneter Stelle eine erweiterte Bedeutung gegeben wird; wenn dagegen im Anfange, etwa im Quartapensum, ein Begriff, z. B. die Symmetrie oder Projektion, umgangen und nachher bei einer Wiederholung desselben Pensums eingeführt und zum systematischen Aufbau verwandt wird, so entsteht aus dieser zwiefach gearteten Behandlung desselben Stoffes für den Schüler nicht die beabsichtigte Erleichterung, sondern im Gegenteil Unsicherheit und Verwirrung.

8. Wie in der Algebra die Lehre von den irrationalen Zahlen, so muß in der Planimetrie die entsprechende von den inkommensurablen Linien mit besonderer Sorgfalt entwickelt und durchgeführt werden. Wenn die in der Natur des Gegenstandes liegende Schwierigkeit ganz bewältigt und das Wesen desselben zum klaren Ausdruck und lebendigen Bewußtsein gebracht wird, so ist die geistige Entwicklung der Schüler um einen wichtigen Schritt gefördert worden; wenn aber über die Schwierigkeit hinweggegangen wird, so fehlt nicht allein für Späteres die Grundlage, sondern es erleidet dadurch auch der wissenschaftliche Charakter des mathematischen Unterrichtes empfindlichen Abbruch.

9. Neben dem systematischen Aufbau des geometrischen Wissens muß auch die praktische Seite dieses Unterrichtes durch Lösung von Aufgaben gefördert werden. Aber auch hierbei ist die Rücksicht maßgebend, daß die Aufgaben nicht allein dem Zwecke der formalen Übung im Denken, daß sie vielmehr in erster Linie zur Kräftigung und Sicherung des geometrischen Wissens dienen sollen. Wenn jedoch die Aufgaben mit Rücksicht auf die Schüler zweckmäßig gewählt und diese zur Lösung sowie zur korrekten Darstellung der Analysis, der Konstruktion und des Beweises in methodischer Weise angeleitet werden, so geschieht beiden Zwecken Genüge. Eine vollständig durchgeführte Determination ist nicht von den Anfängern, sondern erst in der zweiten Hälfte des planimetrischen Unterrichtes zu verlangen.

10. Daß der Unterricht der mittlern Klassen eine Vorbereitung für den der obern ist, tritt besonders deutlich nach Absolvierung der Planimetrie hervor; denn nun werden auf die gewonnenen Kenntnisse zwei neue Disciplinen, Trigonometrie und Stereometrie, gestützt, welche an die erworbene Kraft der Abstraktion gesteigerte Ansprüche machen. Der Anfang des trigonometrischen Unterrichtes hat um so mehr die klarste Veranschaulichung zu erstreben, weil das Lehrobjekt, die goniometrischen Funktionen, sich nicht unmittelbar so anschaulich wie die ebenen Gestalten darbietet. Wenn der gesetzmäßige Gang dieser Funktionen, insbesondere auch ihre Periodicität durch Abstraktion ermittelt worden ist, so gewährt die graphische Darstellung der gewonnenen Ergebnisse ein wichtiges Hilfsmittel zur Veranschaulichung und Befestigung derselben.

Die Anwendung der goniometrischen Funktionen auf die Winkel eines Dreieckes zeigt, daß die Eigenschaften, für welche die planimetrische Untersuchung nur den mangelhaften Ausdruck einer Ungleichung ergab, hier in trigonometrischer Form allgemein gültig und scharf treffend durch Proportionen ausgedrückt werden. Und allgemein ist nun durch Einführung der trigonometrischen Funktionen die Möglichkeit gewonnen, den Zusammenhang zwischen den bestimmenden Größen einer Figur und den übrigen durch Gleichungen vollständig darzustellen. Wenn das geschehen ist, so kann jede der letztern durch algebraische Operationen aus den erstern berechnet werden. Somit ist auch die algebraische Auflösung der geometrischen Aufgaben und insbesondere die vollständige Erledigung der zugehörigen Determination ermöglicht. Für die Zwecke der Trigonometrie bleibt nach der algebraischen Lösung einer Aufgabe nur noch übrig, die Form der gesuchten Werte abzuleiten, welche eine bequeme Anwendung der Logarithmen gestattet.

11. Ein wesentlich neues Feld bietet sich für die trigonometrische Untersuchung dar, wenn der stereometrische Unterricht die Schüler mit der Entstehung und den Bestimmungsgrößen eines Dreikantes vertraut gemacht hat. Der zwischen diesen bestehende Zusammenhang in seiner trigonometrischen Darstellung zeigt ihnen die Gesetze der vollkommenen räumlichen Gestalten. Jeder Schluss von dem Allgemeinen auf die beschränkten Formen der Ebene bringt es ihnen zum Bewusstsein, dass Planimetrie und ebene Trigonometrie nur die Vorkenntnisse für die Geometrie des Raumes liefern; und die Anwendung dieser räumlichen oder sphärischen Trigonometrie zur Darstellung der Gesetze der Himmelsbewegung weist von einer andern Seite auf die hohe Bedeutung dieser Kenntnisse hin.

12. Wie im ersten planimetrischen Unterrichte, so ist auch im Anfange der Stereometrie auf klare Anschaulichkeit vor allem Bedacht zu nehmen. Während jedoch dort die Zeichnung einen festen Anhalt für die Auffassung der räumlichen Gestalten darbot und die Anschauungskraft durch die Bewegung der Formen geübt ward, ist hier im Gegensatze zu der gezeichneten Figur das Objekt der Untersuchung aus der Ebene der Zeichnung in den Raum zu versetzen. Einige wollen nun diese Schwierigkeit, welche die Auffassung der Gestalten von drei Dimensionen dem Lernenden macht, durch Modelle aus dem Wege räumen; andere dagegen betonen, wie mir scheint, mit Recht, dass auf dieser Stufe durch den vorangegangenen Zeichen- und planimetrischen Unterricht das Anschauungsvermögen genügend entwickelt sein müsse, um auch Gestalten von drei Dimensionen ganz ohne Figur nach Angabe der wesentlichen Merkmale klar aufzufassen, und dass die fortgesetzte Übung der stereoskopischen Anschauung eines der wesentlichsten Ergebnisse des stereometrischen Unterrichtes sei.

Das räumliche Gebilde, welches hier in gleicher Weise wie das Dreieck der Ebene sowohl hinsichtlich der Eigenschaften als der Konstruktion eine eingehende Behandlung beansprucht, ist das Dreikant. Bei diesen Erörterungen ist dann auch der wichtige Begriff der Symmetrie dadurch zu vollständiger Klarheit zu bringen, dass den ebenen Formen, welche symmetrisch liegen und daher auch kongruent sind, hier räumliche Gebilde gegenüber treten, welche wegen Gleichheit der Seiten und Winkel symmetrisch sind und nicht zur Deckung gebracht werden können.

Eben so zeigt bei den regelmässigen Körpern und wieder bei der Begründung der Sätze über das Volumen der Vergleich mit den entsprechenden ebenen Gebilden zwar eine Übereinstimmung, zugleich aber auch die übergeordnete Stellung der Gestalten von drei Dimensionen.

13. Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes können als ein geeigneter Abschluss des gesamten mathematischen Unterrichtes betrachtet werden, weil sie das ganze erworbene algebraische Wissen für die Untersuchung der räumlichen Gestalten verwenden und die Gesetze dieser Formen aus neuen Gesichtspunkten zeigen. Überdies werden dadurch die Schüler mit dem Gebrauche einer Methode vertraut, durch die der menschliche Geist seine Leistungen wesentlich gesteigert hat.

14. Die gemeinsame Arbeit von Lehrer und Schülern kommt durch die genetische Entwicklung und Behandlung des Lehrstoffes am vollkommensten zur Geltung; dennoch wird kaum ein Lehrer diese Lehrweise ausschließlich zur Anwendung bringen, vielmehr aus verschiedenen Rücksichten, welche sich theils auf die Schüler, deren Zahl und ungleiche Fassungskraft, theils auf das Lehrobjekt beziehen, statt derselben nicht selten ein analytisches oder synthetisches Verfahren eintreten lassen.