Oeffentliche Prüfungen.

Donnerstag, den 14. August.

Nachmittags	3 — 4	Uhr.	Vorschule B. Deutsch und Rechnen. Herr Lube.
„	4 — 5	„	Vorschule A. Deutsch und Rechnen. Herr Stein.

Freitag, den 15. August.

Vormittags	9 — $9^3/_4$	Uhr.	Sexta. Französisch. Herr P. Herber.
„	$9^3/_4$—$10^1/_2$	„	Quinta B. Geographie. Herr E. Foerster.
„	$10^1/_2$—$11^1/_4$	„	Quinta A. Französisch. Herr Dr. G. Looser.
„	$11^1/_4$—12	„	Unterquarta. Geographie. Herr F. Windmoeller.
Nachmittags	3 — $3^3/_4$	„	Oberquarta B. Geometrie. Herr Dr. F. Kremer.
„	$3^3/_4$— $4^1/_2$	„	Oberquarta A. Naturgeschichte. Herr G. Zoeller.
„	$4^1/_2$— $5^1/_4$	„	Untertertia. Geschichte. Herr Dr. C. Villatte.

Samstag, den 16. August.

Vormittags	9 — $9^3/_4$	Uhr.	Obertertia. Geometrie. Der Direktor.
„	$9^3/_4$—$10^1/_2$	„	Untersekunda. Geschichte. Herr Dr. Deußen.
„	$10^1/_2$—$11^1/_4$	„	Obersekunda. Englisch. Herr F. Geuer.
„	$11^1/_4$—12	„	Unterprima. Französisch. Herr Dr. Heiner.

Schlußfeier.

Samstag, den 16. August, nachmittags 3 Uhr.

1. Gesang.
2. Vorträge der Schüler:
   Sextaner Emil Busch: Versuchung. Von Reinick.
   Quintaner Karl Führmann: Der Knabe und der Stieglitz. Von Zachariae.
   Unterquartaner Wilhelm Ascherfeld: Die zwei Bauern. Von Pfeffel.
   Oberquartaner Richard Baeumers: Die Schlacht bei Zülpich. Von Simrock.
   Untertertianer Samuel Hirschland: Wallenstein vor Stralsund. Von Günther.
   Obertertianer Otto Retze: Die Sonne bringt es an den Tag. Von Chamisso.
   Untersekundaner Emil Sohn: Le hibou, le chat, l'oison et le rat. Par Florian.
   Obersekundaner Wilhelm Rachel: Vision of Belshazzar. By Byron.
   Unterprimaner Arnold Brass, Ferdinand Ohly, Eugen Manes, Markus Hirschland, Otto Schulz, Ernst Linderhaus, Eduard Mühlenfeld: Das Lied von der Glocke. Von Schiller.
   Oberprimaner Hugo Waldthausen: Discours d'adieu. (Eigene Arbeit.)
3. Gesang.
4. Schlußwort des Direktors und Entlaßung der Abiturienten.
5. Gesang.

Die Lehre vom Grösten und Kleinsten,

als Zweig des mathematischen Unterrichtes

an

höheren Schulen.

Einleitung.

1) Eine Größe, welche dadurch verschiedene Werthe annimmt, daß eine zweite Größe sich ändert, heißt eine Funktion von dieser, und diese ist ihre Veränderliche. Eine Funktion der Veränderlichen x ist also jede Größe, in deren Darstellung x vorkommt. Man bezeichnet eine Funktion meistens dadurch, daß man die Veränderliche in Klammern einschließt und zur Unterscheidung der verschiedenen Funktionen von derselben Veränderlichen einen Buchstaben als Funktionszeichen vorsetzt. Demnach sind $f(x)$, $g(x)$ u. s. w. verschiedene Funktionen von x. Auch kann man verschiedene Funktionen derselben Veränderlichen dadurch unterscheiden, daß man demselben Funktionszeichen verschiedene Zeiger anhängt; so sind $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ eine Reihe von n verschiedenen Funktionen der Veränderlichen x. Eben so werden Funktionen von mehren Veränderlichen, z. B. x, y, z, durch $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ u. s. w. dargestellt. In Fällen, wo durch Weglaßung der Veränderlichen keine Undeutlichkeit entsteht, kann auch das Funktionszeichen allein eine Funktion angeben.

2) Setzt man in eine Funktion $f(x)$ statt der Veränderlichen x willkürliche Werthe, z. B. 1, so bezeichnet man den Werth, welchen $f(x)$ dadurch annimmt, mit $f(1)$. Wenn also

$$f(x) = a + bx + cx^2,$$

so ist

$$\begin{aligned} f(o) &= a, \\ f(1) &= a + b + c, \\ f(2) &= a + 2b + 4c. \end{aligned}$$

Um den Gang einer Funktion anschaulich zu machen, läßt man die Veränderliche eine Reihe von Werthen annehmen und berechnet die Reihe der zugehörigen Werthe der Funktion. Wenn z. B.

$$f(x) = 3x - \tfrac{1}{4}x^3,$$

so ist

$$\begin{aligned} f(5) &= -\ 16\tfrac{1}{4} \\ f(4) &= -\ 4, \\ f(3) &= +\ 2\tfrac{1}{4}, \\ f(2) &= +\ 4, \\ f(1) &= +\ 2\tfrac{3}{4}, \\ f(o) &= 0, \\ f(-1) &= -\ 2\tfrac{3}{4}, \\ f(-2) &= -\ 4, \\ f(-3) &= -\ 2\tfrac{1}{4}, \\ f(-4) &= +\ 4, \\ f(-5) &= +\ 16\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Noch anschaulicher tritt das Wachsen und Abnehmen einer Funktion hervor, wenn man die Reihe der Werthe von x auf einer Geraden von einem willkürlich gewählten Nullpunkte an nach einem willkürlich gewählten Maße abträgt und in den Endpunkten dieser Strecken die zugehörigen Werthe von f(x) durch senkrechte Strecken nach demselben Maße darstellt.

3) Der Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Veränderlichen wird durch Gleichungen angegeben. Wenn eine solche Gleichung nach der Funktion aufgelöst ist, so heißt diese eine entwickelte Funktion der Veränderlichen, im anderen Falle ist sie eine unentwickelte Funktion.

4) Eine entwickelte Funktion ist rational, wenn sie durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen oder Divisionen aus den Veränderlichen und konstanten Größen gebildet ist; sie ist dagegen irrational, wenn darin Wurzeln mit veränderlichen Radikanden vorkommen.

5) Eine rationale Funktion ist gebrochen oder ganz, je nach dem sie veränderliche Divisoren enthält oder nicht.

6) Eine ganze rationale Funktion von einer Veränderlichen ist vom n^{ten} Grade, wenn darin die höchste Potenz der Veränderlichen vom n^{ten} Grade ist. Eben so ist eine ganze Funktion von mehren Veränderlichen vom n^{ten} Grade, wenn darin wenigstens ein Produkt mit n veränderlichen Faktoren aber kein Glied mit mehr als n veränderlichen Faktoren vorkommt. Auch nennt man die Funktionen des ersten, zweiten, dritten Grades linear, quadratisch, kubisch.

7) Eine Größe ist von einer oder mehren anderen eine algebraische Funktion, wenn der Zusammenhang zwischen jener und diesen durch eine Gleichung dargestellt ist, in welcher sie selbst sowie die rationalen und irrationalen Funktionen derselben nur als Basen von Potenzen mit unveränderlichen Exponenten vorkommen. Die nicht algebraischen Funktionen heißen transcendent; hierzu gehören solche, in denen veränderliche Exponenten, Logarithmen oder goniometrische Funktionen von Veränderlichen enthalten sind.

8) Setzt man in eine Funktion f(x) für die Veränderliche zwei willkürliche Werthe a und b, so sind a — b und f(a) — f(b) entsprechende Differenzen der Veränderlichen und der Funktion. Wenn nun jeder beliebig kleinen Differenz der Veränderlichen eine beliebig kleine Differenz der Funktion entspricht, so ist die Funktion f(x) stetig (kontinuierlich). Wenn aber diese Bedingung für irgend einen bestimmten Werth c der Veränderlichen nicht erfüllt ist, so hat die Funktion f(x) bei dem Werthe f(c) eine Unstetigkeit (Diskontinuität).

9) Wenn eine Funktion f(x) durch Zu- oder Abnehmen der Veränderlichen x zwei gleiche Werthe f(a) = f(a + d) annimmt, und die Stetigkeit derselben für alle zwischen a und a + d liegenden Werthe von x keine Unterbrechung erleidet, so gibt es zwischen f(a) und f(a + d) wenigstens einen Werth von f(x), welcher sich dadurch auszeichnet, daß er zugleich kleiner als die nächstvorhergehenden Werthe von f(x) und auch kleiner als die nächstfolgenden ist, oder aber dadurch, daß er sowol diese als jene an Größe übertrifft. Ein in solcher Art ausgezeichneter Werth einer Funktion heißt im ersteren Falle ein kleinster Werth (Minimum), im letzteren ein gröster Werth (Maximum).

I. Abschnitt.

Funktionen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen mit ganzen positiven Exponenten entwickelt sind.

10) Eine ganze lineare Funktion einer Veränderlichen, deren allgemeine Form

$$f(x) = ax + b$$

ist, kann weder einen grösten noch einen kleinsten Werth in dem oben bezeichneten Sinne annehmen; sie durchläuft vielmehr alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst.

11) Eine quadratische Funktion, deren Glieder ein vollständiges $\left\{\begin{matrix}\text{positives}\\\text{negatives}\end{matrix}\right\}$ Quadrat bilden, hat den $\left\{\begin{matrix}\text{kleinsten}\\\text{grösten}\end{matrix}\right\}$ Werth null.

Die Funktion

$$f(x) = a^2x^2 + 2abx + b^2 = (ax + b)^2$$

kann für keinen realen Werth von x negativ werden, daher ist null oder

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \text{ der kleinste Werth von } f(x).$$

Eben so kann die Funktion

$$g(x) = -a^2x^2 - 2abx - b^2 = -(ax + b)^2$$

für keinen realen Werth von x positiv werden, daher ist null oder

$$g\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \text{ der gröste Werth von } g(x).$$

12) Jede quadratische Funktion einer Veränderlichen hat entweder einen kleinsten oder einen grösten Werth, je nach dem das quadratische Glied einen positiven oder negativen Koefficienten hat.

Wenn

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

so erhält man durch eine leichte Umformung

$$1)\ f(x) = \frac{4ac - b^2}{4a} + \frac{(2ax + b)^2}{4a}.$$

Ist nun der Koefficient a positiv, so ist in dieser Darstellung der zweite Summande immer positiv, also nach Nr. 11 sein kleinster Werth null. Da außerdem der erste Summande unveränderlich ist, so erreicht auch die Funktion f(x) zugleich mit ihrem zweiten Summanden den kleinsten Werth, nämlich wenn

$$2ax + b = 0, \text{ oder } x = -\frac{b}{2a}$$

gesetzt wird. Daher ist

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

der kleinste Werth der Funktion f(x).

Wenn dagegen der Koefficient a negativ ist, so ist in der obigen Gleichung 1) der zweite Summande für alle realen Werthe von x negativ, und daher nach Nr. 11 sein gröster Werth null. Mit diesem allein veränderlichen Summanden erreicht auch die Funktion f(x) selbst ihren grösten Werth, nämlich wenn

$$2ax + b = 0, \text{ oder } x = -\frac{b}{2a}$$

gesetzt wird. Daher ist hier

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

das Maximum der Funktion f(x).

13) Wenn eine Funktion f(x) aus zwei Faktoren besteht, und der eine von diesen ein vollständiges Quadrat einer linearen Funktion ist, so ist im allgemeinen null ein Maximum oder Minimum der Funktion f(x).

Es sei

$$f(x) = (x-\alpha)^2 \cdot f_1(x);$$

setzt man darin der Reihe nach

$$x = \alpha - \delta,\ x = \alpha,\ x = \alpha + \delta_1,$$

indem man mit δ und δ_1 beliebig kleine Größen bezeichnet, so erhält man

$$f(\alpha - \delta) = \delta^2 \,.\, f_1(\alpha - \delta), \quad f(\alpha) = 0, \quad f(\alpha + \delta_1) = \delta_1{}^2 \,.\, f_1(\alpha + \delta_1).$$

Da die Größen δ und δ_1 beliebig klein sein können, so sind die Funktionswerthe

$$f_1(\alpha - \delta),\ f_1(\alpha),\ f_1(\alpha + \delta_1)$$

im allgemeinen entweder alle drei positiv oder alle drei negativ, und ebenso sind daher auch $f(\alpha - \delta)$ und $f(\alpha + \delta_1)$ im allgemeinen entweder beide positiv oder beide negativ.

Wenn erstens

$$f(\alpha - \delta) > 0 \text{ und } f(\alpha + \delta_1) > 0,$$

so ist $f(\alpha) = 0$ kleiner als $f(\alpha - \delta)$ und kleiner als $f(\alpha + \delta_1)$, d. h. die Funktion $f(x)$ erreicht bei dem Werthe $x = \alpha$ das Minimum null, wenn $f_1(\alpha) > 0$ ist.

Wenn zweitens

$$f(\alpha - \delta) < 0 \text{ und } f(\alpha + \delta_1) < 0,$$

so ist $f(\alpha) = 0$ größer als $f(\alpha - \delta)$ und größer als $f(\alpha + \delta_1)$, d. h. die Funktion $f(x)$ erreicht bei dem Werthe $x = \alpha$ das Maximum null, wenn $f_1(\alpha) < 0$.

Wenn drittens die Funktionswerthe $f(\alpha - \delta)$ und $f(\alpha + \delta_1)$ und daher auch $f_1(\alpha - \delta)$ und $f_1(\alpha + \delta_1)$ verschiedene Vorzeichen haben, so geht die Funktion $f_1(x)$ entweder wachsend oder abnehmend durch null, indem x von $\alpha - \delta$ bis $\alpha + \delta_1$ wächst. Da aber δ und δ_1 beliebig klein sein können, so muß in diesem Falle $f_1(x)$ den Werth null für $x = \alpha$ annehmen, oder es muß $f_1(\alpha) = 0$ sein, wenn nicht bei diesem Werthe die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ unterbrochen ist. Daher wird die Funktion $f(x)$ bei dem Werthe $x = \alpha$ weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn $f_1(\alpha) = 0$ ist.

14) Wird in der Funktion

$$f(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx$$

jedes Glied mit dem Exponenten seiner Veränderlichen multipliciert und der Exponent als solcher um 1 vermindert, so entsteht eine neue Funktion, welche man die **erste Ableitung** von $f(x)$ nennt und mit $f'(x)$ bezeichnet. Die Funktion, welche aus der ersten Ableitung ebenso entsteht, wie diese aus der Funktion selbst, heißt die **zweite Ableitung** und wird mit $f''(x)$ bezeichnet. Daher ist hier

$$f'(x) = na_1 \,.\, x^{n-1} + (n-1)a_2 \,.\, x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-1} \,.\, x + a_n,$$
$$f''(x) = (n-1)\, na_1x^{n-2} + (n-2)\,(n-1)a_2x^{n-3} + \ldots + 1 \,.\, 2 \,.\, a_{n-1}.$$

15) Es ist bekanntlich

$$\frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} = x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \ldots + \alpha^{n-1}.$$

Wird dieser Quotient durch $(x - \alpha)$ dividiert, so entsteht

$$\frac{x^n - \alpha^n}{(x-\alpha)^2} = x^{n-2} + 2\alpha x^{n-3} + \ldots + (n-1)\alpha^{n-2} + \frac{n\alpha^{n-1}}{x - \alpha}.$$

Daher ist

1) $x^n = \alpha^n + (x - \alpha) \,.\, n\alpha^{n-1} + (x-\alpha)^2 \,.\, [x^{n-2} + 2\alpha x^{n-3} + \ldots + (n-1)\alpha^{n-2}]$.

Wendet man diese Gleichung zur Umformung aller Glieder der Funktion

$$f(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx$$

an, so erhält man drei Reihen von Gliedern. Die Glieder der ersten Reihe, welche $(x - a)$ nicht enthalten, bilden den Funktionswerth $f(\alpha)$; die Glieder der zweiten Reihe haben den Faktor $(x - \alpha)$ gemeinsam, und die Summe der anderen Faktoren ist $f'(\alpha)$; die Glieder der letzten Reihe enthalten alle den Faktor $(x - \alpha)^2$, und die Summe der anderen Faktoren ist eine Funktion $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, welche der Kürze wegen mit $f_1(x)$ bezeichnet sei. Daher ist

2) $f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) \,.\, f'(\alpha) + (x - \alpha)^2 \,.\, f_1(x)$.

Da $f_1(x)$ eine ganze Funktion $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist, so hat sie die Form

$$f_1(x) = b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots + b_{n-1},$$

und die wiederholte Anwendung der obigen Gleichung 1) zeigt, daß

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_2 &= 2a_1\alpha + a_2, \\ b_3 &= 3a_1\alpha^2 + 2a_2\alpha + a_3, \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= (n-1)\, a_1\alpha^{n-2} + (n-2)\, a_2\alpha^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2} \cdot \alpha + a_{n-1}. \end{aligned}$$

16) Eine ganze rationale Funktion

$$f(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n x$$

wird für den Werth $x = \alpha$ ein $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$, wenn $f'(\alpha) = 0$ und $\begin{Bmatrix} f''(\alpha) < 0 \\ f''(\alpha) > 0 \end{Bmatrix}$.

Dieselbe Funktion ist für $x = \alpha$ weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn $f'(\alpha) = 0$ und auch $f''(\alpha) = 0$ ist.

Setzt man in der obigen Gleichung 2) $f'(\alpha) = 0$ oder bestimmt die bisher willkürliche Größe α so, daß

$$na_1\alpha^{n-1} + (n-1)\, a_2\alpha^{n+2} + \ldots + a_n = 0$$

wird, so ist

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)^2 \cdot f_1(x).$$

Für diese Funktion ergibt sich aber nach Nr. 13 unmittelbar, daß sie für $x = \alpha$ ein Maximum oder ein Minimum oder aber weder ein Maximum noch ein Minimum wird, je nach dem $f_1(\alpha) < 0$ oder $f_1(\alpha) > 0$ oder aber $f_1(\alpha) = 0$ ist.

Setzt man nun in der Funktion $f_1(x)$ statt x die Größe α und beachtet die obigen Werthe der Koefficienten $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$, so erhält man

$$f_1(\alpha) = {}^1/_2 \cdot [(n-1)\, na_1\alpha^{n-2} + (n-2)\,(n-1)\, a_2\alpha^{n-3} + \ldots + 2 \cdot 3 \cdot a_{n-2} \cdot \alpha + 1 \cdot 2 \cdot a_{n-1}]$$

oder

$$f_1(\alpha) = {}^1/_2 \cdot f''(\alpha).$$

17) Wenn von einer Funktion, welche schon in der Form

$$f(x) = a + (x-b)^2 \cdot f_1(x)$$

gegeben ist, die grösten und kleinsten Werthe gesucht werden sollen, so hat man dennoch die Gleichung

$$f'(\alpha) = 0$$

zu bilden und aufzulösen, um alle Werthe von α zu finden, welche statt x gesetzt die Funktion zu einem Maximum oder Minimum machen. Die Auflösung dieser Gleichung ist hier jedoch in so fern leichter, als schon eine Wurzel derselben bekannt ist, nämlich $\alpha = b$.

18) Für Anfänger mag hier die einfachste Form der vorstehenden Erörterungen noch besonders durchgeführt werden. Es sei

$$f(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1}.$$

Nach Gleichung 1) unter Nr. 14 ist

$$a_1 x^n = a_1\alpha^n + (x-\alpha) \cdot na_1\alpha^{n-1} + (x-\alpha)^2 \cdot [a_1 x^{n-2} + 2a_1\alpha x^{n-3} + \ldots + (n-1)\, a_1\alpha^{n-2}],$$

$$a_2 x^{n-1} = a_2\alpha^{n-1} + (x-\alpha)(n-1)\, a_2\alpha^{n-2} + (x-\alpha)^2 \cdot [a_2 x^{n-3} + 2a_2\alpha x^{n-4} + \ldots + (n-2)\, a_2\alpha^{n-3}];$$

daher ist

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha) \cdot f'(\alpha) + (x-\alpha)^2 \cdot f_1(x),$$

und

$$f_1(x) = a_1 x^{n-2} + (2a_1\alpha + a_2)\, x^{n-3} + \ldots + (n-1)\, a_1\alpha^{n-2} + (n-2)\, a_2\alpha^{n-3}.$$

Setzt man nun

$$f'(\alpha) = na_1\alpha^{n-1} + (n-1)\, a_2\alpha^{n-2} = 0,$$

oder

$$na_1\alpha + (n-1)a_2 = 0,$$

so ist

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)^2 . f_1(x),$$

und die Funktion $f_1(x)$ geht über in

$$f_1(x) = \frac{a_1\alpha^{n-2}}{n-1} . \left[(n-1)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-2} + (n-2)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-3} + \ldots + 2 . \frac{x}{\alpha} + 1\right].$$

Das Vorzeichen dieser Funktion hängt für alle positiven Werthe von $\frac{x}{\alpha}$ allein von dem Faktor $a_1\alpha^{n-2}$ ab, denn alle Glieder der eingeklammerten Reihe sind positiv, wenn x bei positivem Werthe α von 0 bis $+\infty$ wächst, und auch, wenn x bei negativem Werthe α von 0 bis $-\infty$ abnimmt. Daher ist nach Nr. 13 null das Maximum oder das Minimum von $(x-\alpha)^2 . f_1(x)$, je nach dem $a_1\alpha^{n-2}$ negativ oder positiv ist, und die Funktion $f(x)$ erreicht mithin für $x = \alpha$ ein Maximum, wenn $f'(\alpha) = 0$ und $a_1\alpha^{n-2}$ negativ ist, dagegen ein Minimum, wenn $f'(\alpha) = 0$ und $a_1\alpha^{n-2}$ positiv ist.

19) Wenn eine Funktion nur Potenzen einer Veränderlichen mit ganzen negativen Exponenten enthält, wie

$$f(x) = a_1x^{-n} + a_2x^{-n+1} + \ldots + a_nx^{-1},$$

so kann man den reciproken Werth der Veränderlichen $y = x^{-1}$ als Veränderliche ansehn und dann für die Funktion von y Maximum und Minimum bestimmen, wie oben.

Eben so können Funktionen, in welchen eine Veränderliche als Basis von Potenzen mit gebrochenen Exponenten vorkommt, durch Einführung einer neuen Veränderlichen so umgeformt werden, daß diese nur Basis von Potenzen mit ganzen Exponenten ist.

II. Abschnitt.

Funktionen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen mit theils positiven, theils negativen Exponenten entwickelt sind.

20) Die einfachste Funktion, welche eine Veränderliche als Basis von Potenzen mit positiven und negativen Exponenten enthält, ist

$$f(x) = ax + bx^{-1}.$$

Nimmt man zunächst an, daß die Koefficienten a und b beide positiv sind, so zeigen die beiden Darstellungen

$$f(x) = 2\sqrt{ab} + (\sqrt{ax} - \sqrt{bx^{-1}})^2,$$

und

$$f(x) = -2\sqrt{ab} - (\sqrt{a(-x)} - \sqrt{b(-x)^{-1}})^2,$$

daß diese Funktion ein Maximum und ein Minimum hat. Das Minimum ist $+ 2\sqrt{ab}$ und tritt ein, wenn

$$\sqrt{ax} - \sqrt{bx^{-1}} = 0 \text{ oder } x = +\sqrt{\frac{b}{a}},$$

das Maximum ist $- 2\sqrt{ab}$ und wird erreicht, wenn

$$\sqrt{a(-x)} - \sqrt{b(-x)^{-1}} = 0 \text{ oder } x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$$

gesetzt wird. Die beiden Werthe von x, welche die Funktion zu einem Maximum oder Minimum machen, sind die Wurzeln der Gleichung

$$a - bx^{-2} = 0.$$

Die Stellung des grösten und des kleinsten Werthes in dem Gange der Funktion zeigt folgende Reihe von Werthen. Es ist

$$f(-\infty) = -\infty, \qquad f(+\infty) = +\infty,$$
$$f\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = -2\sqrt{ab}, \quad f\left(+\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = +2\sqrt{ab},$$
$$f(-0) = -\infty, \qquad f(+0) = +\infty.$$

Auch wenn die Koefficienten a und b beide negativ sind, findet man in gleicher Weise das Maximum und das Minimum der Funktion. Ist aber von den Koefficienten der eine negativ, der andere positiv, so hat die Funktion weder ein Maximum noch ein Minimum.

21) Wenn man die bekannte Gleichung

$$\frac{\alpha^n - x^n}{\alpha - x} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}.x + \ldots\ldots + x^{n-1}$$

mit $\alpha^{-n}.x^{-n}$ multipliciert, so erhält man

$$\frac{x^{-n} - \alpha^{-n}}{\alpha - x} = \alpha^{-1}.x^{-n} + \alpha^{-2}.x^{-n+1} + \ldots\ldots + \alpha^{-n}.x^{-1}.$$

Wird diese noch durch $(\alpha - x)$ dividiert, so entsteht

$$\frac{x^{-n} - \alpha^{-n}}{(\alpha - x)^2} = \alpha^{-2}.x^{-n} + 2\alpha^{-3}.x^{-n+1} + \ldots\ldots + n\alpha^{-n-1}.x^{-1} + \frac{n\alpha^{-n-1}}{\alpha - x},$$

und daher ist

$$1)\ x^{-n} = \alpha^{-n} + (\alpha - x).n\alpha^{-n-1} + (\alpha - x)^2.[\alpha^{-2}.x^{-n} + 2\alpha^{-3}.x^{-n+1} + \ldots + n\alpha^{-n-1}.x^{-1}].$$

Sollen von einer Funktion

$$f(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots\ldots + a_nx + c_mx^{-1} + c_{m-1}.x^{-2} + \ldots + c_1x^{-m},$$

welche die Veränderliche als Basis von Potenzen mit theils positiven, theils negativen Exponenten enthält, die grösten und kleinsten Werthe gefunden werden, so kommen auch hier wieder die erste und die zweite Ableitung in Betracht. Nach der oben unter Nr. 14 angegebenen Regel ist für die vorstehende Funktion die erste Ableitung

$$f'(x) = na_1x^{n-1} + (n-1)a_2x^{n-2} + \ldots + a_n - c_mx^{-2} - 2c_{m-1}.x^{-3} - \ldots\ldots - mc_1x^{-m-1},$$

und die zweite ist

$$f''(x) = (n-1)na_1x^{n-2} + (n-2)(n-1)a_2x^{n-3} + \ldots + 1.2.a_{n-1} + 1.2.c_mx^{-3} + 2.3.c_{m-1}.x^{-4}$$
$$+ \ldots\ldots + m(m+1)c_1x^{-m-2}.$$

Gebraucht man die obige Gleichung 1) zur Umformung aller Glieder der Funktion $f(x)$, welche die Veränderliche mit einem negativen Exponenten enthalten, und die entsprechende Gleichung unter Nr. 15 zur Umformung der übrigen, so erhält man

$$2)\ f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha).f'(\alpha) + (x - \alpha)^2.f_1(x),$$

wenn der Kürze wegen auch hier $f_1(x)$ die Summe der Glieder bezeichnet, welche zu $(x - \alpha)^2$ als Faktoren gehören. Die höchste Potenz von x in der Funktion $f_1(x)$ ist, wie oben unter Nr. 15, x^{n-2}, die niedrigste, wie sich aus der obigen Gleichung 1) ergibt, ist x^{-m}; daher ist

$$f_1(x) = b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots + b_{n-1} + d_m.x^{-1} + d_{m-1}.x^{-2} + \ldots\ldots + d_1.x^{-m}.$$

Die Koefficienten $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ haben hier dieselben Werthe, wie oben unter Nr. 15, und für die übrigen erhält man durch aufmerksame Verfolgung der Umformung folgende Ausdrücke:

$$d_1 = c_1\alpha^{-2},$$
$$d_2 = 2c_1\alpha^{-3} + c_2\alpha^{-2},$$
$$d_3 = 3c_1\alpha^{-4} + 2c_2\alpha^{-3} + c_3\alpha^{-2},$$
$$\vdots$$
$$d_m = mc_1\alpha^{-m-1} + (m-1)c_2\alpha^{-m} + \ldots\ldots + 2c_{m-1}.\alpha^{-3} + c_m\alpha^{-2}.$$

22) Eine Funktion

$$f(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_nx + c_mx^{-1} + c_{m-1}\,.\,x^{-2} + \dots + c_1x^{-m},$$

welche nach Potenzen einer Veränderlichen mit theils positiven, theils negativen ganzen Exponenten entwickelt ist, wird für den Werth $x = \alpha$ ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$, wenn $f'(\alpha) = 0$ und $\begin{Bmatrix}f''(\alpha) < 0\\ f''(\alpha) > 0\end{Bmatrix}$.

Dieselbe Funktion wird für $x = \alpha$ weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn $f'(\alpha) = 0$ und auch $f''(\alpha) = 0$ ist.

Setzt man in der Gleichung 2) unter Nr. 21 $f'(\alpha) = 0$ oder bestimmt die bisher willkürliche Größe α so, daß sie der Gleichung

$$na_1\alpha^{n-1} + (n-1)\,a_2\alpha^{n-2} + \dots + a_n - c_m\,.\,\alpha^{-2} - 2c_{m-1}\,.\,\alpha^{-3} - \dots - mc_1\alpha^{-m-1} = 0$$

genügt, so wird

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)^2.f_1(x),$$

und diese Gleichung zeigt, daß $f(x)$ für $x = \alpha$ ein Maximum oder ein Minimum oder weder ein Maximum noch ein Minimum wird, je nach dem $f_1(\alpha) < 0$ oder $f_1(\alpha) > 0$ oder $f_1(\alpha) = 0$ ist.

Setzt man aber in der Funktion $f_1(x)$ die Veränderliche $x = \alpha$ und beachtet die Werthe der Koefficienten $b_1, b_2, \dots b_{n-1}, d_1, d_2, \dots d_m$, so erhält man

$$f_1(\alpha) = {}^1/_2\,.\,f''(\alpha).$$

III. Abschnitt.

Zusammengesetzte und transcendente Funktionen.

23) In den bisherigen Untersuchungen kamen nur solche Funktionen vor, welche nach Potenzen einer Veränderlichen als endliche Reihen entwickelt waren. Aber selbst einfache rationale Funktionen haben nicht immer diese regelmäßige Form, sondern sind nicht selten aus anderen Funktionen zusammengesetzt. Daher sollen hier auch noch die wichtigsten dieser verbundenen Funktionen in Betracht gezogen werden.

a) $f(x) = g(x) \pm h(x)$.

Nach der Umformung unter Nr. 21 ist unmittelbar,

$$f'(\alpha) = g'(\alpha) \pm h'(\alpha), \text{ also auch } f'(x) = g'(x) \pm h'(x),$$
$$f''(\alpha) = g''(\alpha) \pm h''(\alpha), \quad „ \quad „ \quad f''(x) = g''(x) \pm h''(x).$$

b) $f(x) = g(x)\,.\,h(x)$.

Nach der Gleichung 2) unter Nr. 21 ist

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)\,.\,f'(\alpha) + (x-\alpha)^2\,.\,f_1(x),$$
$$g(x) = g(\alpha) + (x-\alpha)\,.\,g'(\alpha) + (x-\alpha)^2\,.\,g_1(x),$$
$$h(x) = h(\alpha) + (x-\alpha)\,.\,h'(\alpha) + (x-\alpha)^2\,.\,h_1(x).$$

Wird nun noch das Produkt $g(x)\,.\,h(x)$ entwickelt, so ergibt sich zuerst

$$f'(\alpha) = g'(\alpha)\,.\,h(\alpha) + g(\alpha)\,.\,h'(\alpha),$$

also ist auch

$$f'(x) = g'(x)\,.\,h(x) + g(x)\,.\,h'(x).$$

Man erhält hiernach die Ableitung eines Produktes aus zwei Funktionen, indem man jede Funktion mit der Ableitung der anderen multipliciert und die Produkte addiert.

Diese Regel und ihre Herleitung kann leicht so verallgemeinert werden, daß sie auf Produkte aus beliebig vielen Funktionen anwendbar ist.

Bildet man nach derselben aus der ersten Ableitung die zweite, so entsteht

$$f''(x) = g''(x)\,.\,h(x) + 2g'(x)\,.\,h'(x) + g(x)\,.\,h''(x).$$

Dasselbe erhält man aus den vorstehenden Umformungen. Danach ist

$$f_1(x) = g_1(x) \,.\, h(\alpha) + g'(\alpha) \,.\, h'(\alpha) + g(\alpha) \,.\, h_1(x) + (x-\alpha) \,.\, [g_1(x) \,.\, h'(\alpha) + g'(\alpha) \,.\, h_1(x)] + (x-\alpha)^2 \,.\, g_1(x) \,.\, h_1(x);$$

setzt man hier $x = \alpha$ und beachtet, daß

$$f_1(\alpha) = {}^1\!/_2 \,.\, f''(\alpha), \quad g_1(\alpha) = {}^1\!/_2 \,.\, g''(\alpha), \quad h_1(\alpha) = {}^1\!/_2 \,.\, h''(\alpha),$$

so geht diese Gleichung über in

$$f''(\alpha) = g''(\alpha) \,.\, h(\alpha) + 2g'(\alpha) \,.\, h'(\alpha) + g(\alpha) \,.\, h''(\alpha).$$

c) $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

Wenn man zunächst die ganzen Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ umformt, so erhält man

$$f(x) = \frac{g(\alpha) + (x-\alpha) \,.\, g'(\alpha) + (x-\alpha)^2 \,.\, g_1(x)}{h(\alpha) + (x-\alpha) \,.\, h'(\alpha) + (x-\alpha)^2 \,.\, h_1(x)},$$

und die Ausführung der Division ergibt

$$f = \frac{g}{h} + (x-\alpha) \,.\, \frac{g' \,.\, h - g \,.\, h'}{h^2}$$
$$+ (x-\alpha)^2 \,.\, \frac{g_1 h^2 - g \,.\, h \,.\, h_1 - g' \,.\, h \,.\, h' + g \,.\, h'^2 - (x-\alpha) \,.\, h_1(g' \,.\, h - g \,.\, h')}{h^2(h + (x-\alpha) \,.\, h' + (x-\alpha)^2 \,.\, h_1)},$$

wenn zur Abkürzung f statt $f(x)$,, g statt $g(\alpha)$ u. s. w. gesetzt wird. Hierdurch ist auch für die gebrochene $f(x)$ die Umformung

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha) \,.\, f'(\alpha) + (x-\alpha)^2 \,.\, f_1(x)$$

als richtig erwiesen, und zwar ist

$$f(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)},$$

$$f'(\alpha) = \frac{g'(\alpha) \,.\, h(\alpha) - g(\alpha) \,.\, h'(\alpha)}{(h(\alpha))^2},$$

$$f_1(x) = \frac{g_1(x)\,(h(\alpha))^2 - g(\alpha)\, h_1(\alpha) h_1(x) - g'(\alpha)\, h(\alpha)\, h'(\alpha) + g(\alpha)\,(h'(\alpha))^2 - (x-\alpha)\, h_1(x) [g'(\alpha)\, h(\alpha) - g(\alpha)\, h'(\alpha)]}{(h(\alpha))^2 \,.\, [h(\alpha) + (x-\alpha) \,.\, h'(\alpha) + (x-\alpha)^2 \,.\, h_1(x)]}$$

Daher ist für die gebrochene Funktion $f(x)$ die erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{g'(x) \,.\, h(x) - g(x) \,.\, h'(x)}{(h(x))^2},$$

und diese bestimmt, wenn sie gleich null gesetzt wird, im allgemeinen die Werthe von x, welche die Funktion $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen.

Setzt man ferner in dem vorstehenden Werthe von $f_1(x)$ statt der Veränderlichen x die Größe α, also wie oben,

$$f_1(\alpha) = {}^1\!/_2 \,.\, f''(\alpha), \quad g_1(\alpha) = {}^1\!/_2 \,.\, g''(\alpha), \quad h_1(\alpha) = {}^1\!/_2 \,.\, h''(\alpha),$$

so erhält man die zweite Ableitung für $x = \alpha$, nämlich

$$f''(\alpha) = \frac{g''(\alpha) \,.\, (h(\alpha))^2 - g(\alpha) \,.\, h(\alpha) \,.\, h''(\alpha) - 2g'(\alpha) \,.\, h(\alpha) \,.\, h'(\alpha) + 2g(\alpha) \,.\, (h'(\alpha))^2}{(h(\alpha))^3}$$

welche sich auch in gleicher Weise als Ableitung von $f'(x)$ ergeben hätte.

d) $f(x) = (g(x))^n$.

Betrachtet man die Potenz als ein Produkt aus n gleichen Faktoren, so erhält man nach dem Obigen die Ableitung

$$f'(x) = n \,.\, (g(x))^{n-1} \,.\, g'(x),$$

aus welcher sich leicht eine Regel für die Bildung der Ableitung von potenzierten Funktionen ergibt.

$$\text{e) } f(x) = \sqrt[n]{g(x)}.$$

Für die Funktion

$$g(x) = (f(x))^n$$

erhält man nach dem Vorstehenden

$$g'(x) = n \,.\, (f(x))^{n-1} \,.\, f'(x),$$

daher ist

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{n\sqrt[n]{(g(x))^{n-1}}}.$$

Wenn insbesondere

$$f(x) = \sqrt{x},$$

so ist

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man die Funktion

$$f(x) = [g(\alpha) + (x - \alpha) \,.\, g'(\alpha) + (x - \alpha)^2 \,.\, g_1(x)]^{\frac{1}{n}}$$

in eine Reihe mit fortschreitenden Potenzen von $(x - \alpha)$ entwickelt: der Koefficient des zweiten Gliedes ist $f'(\alpha)$, und der des dritten Gliedes geht in $f''(\alpha)$ über, wenn man $x = \alpha$ setzt.

24) Für die transcendenten Funktionen erhält man aus den Reihen, in welche sie entwickelt werden können, die Ableitungen.

$$\text{a) } f(x) = \log \text{nat } x.$$

Da hiernach bekanntlich

$$f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + (-1)^k \,.\, \frac{(x-1)^{k+1}}{k+1} + \ldots,$$

so ist

$$f'(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \ldots + (-1)^k \,.\, (x-1)^k + \ldots,$$

oder

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x-1)} = \frac{1}{x}.$$

$$\text{b) } f(x) = \log \text{vulg } x = \log \text{vulg } e \,.\, \log \text{nat } x.$$

Daraus ergibt sich nach dem Vorstehenden

$$f'(x) = \frac{\log \text{vulg } e}{x}.$$

$$\text{c) } f(x) = e^x.$$

Hier ist

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots,$$

daher

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

oder

$$f'(x) = e^x.$$

$$\text{d) } f(x) = a^x.$$

Setzt man $a = e^{\gamma}$ oder $\gamma = \log \text{nat}\, a,$

so ist
$$f(x) = 1 + \frac{\gamma x}{1!} + \frac{\gamma^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\gamma^k . x^k}{k!} + \ldots$$

also
$$f'(x) = \gamma\left(1 + \frac{\gamma x}{1!} + \frac{\gamma^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\gamma^{k-1} . x^{k-1}}{(k-1)} + \ldots\right),$$

oder
$$f'(x) = \gamma \,.\, e^{\gamma x} = a^x \,.\, \log \text{nat}\, a.$$

e) $f(x) = \sin x.$

Da
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots,$$

und
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots,$$

so erhält man
$$f'(x) = \cos x.$$

f) $f(x) = \cos x.$

Hier erhält man eben so
$$f'(x) = -\sin x.$$

g) $f(x) = \text{tng}\, x.$

Wendet man auf
$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$
die oben unter Nr. 23c abgeleitete Regel an, so entsteht
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

h) $f(x) = \cot x.$

Dem Vorigen entsprechend ergibt sich
$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

IV. Abschnitt.

Entwickelte Funktionen von mehren Veränderlichen.

25) Es sei $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ oder in kürzerer Darstellung f eine entwickelte Funktion von den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche alle voneinander unabhängig sind. Auf Grund dieser gegenseitigen Unabhängigkeit kann man der Reihe nach jede Veränderliche als allein veränderlich betrachten. Wenn man zuerst x_1 als allein veränderlich ansieht, so erhält man nach den obigen Erörterungen eine Bedingung für das Eintreten der grösten oder kleinsten Werthe, welche die Funktion f durch die Aenderungen von x_1 annehmen kann. Diese Bedingung sei
$$f'_{x_1} = 0,$$
es bedeutet also das Zeichen f_{x_1} die erste Ableitung der Funktion f in Bezug auf die Veränderliche x_1. Wird eben so jede der übrigen Veränderlichen als allein veränderlich betrachtet, so erhält man der Reihe nach als Bedingungen für das Eintreten eines Maximums oder Minimums die Gleichungen
$$f'_{x_2} = 0,\ f'_{x_3} = 0,\ \ldots\ f'_{x_n} = 0.$$

Diese n Gleichungen sind nothwendig und hinreichend zur Bestimmung der n Veränderlichen, welche die Funktion f zu einem Maximum oder Minimum machen.

26) Zweitens ist der Fall in Betracht zu ziehen, wo die n Veränderlichen der Funktion $f(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ durch m Nebenbedingungen unter sich verbunden sind. Es seien diese Nebenbedingungen dargestellt durch die Zeichen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots . x_n) &= 0 \text{ oder } f_1 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots . x_n) &= 0 \quad \text{„} \quad f_2 = 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2 \ldots . x_n) &= 0 \quad \text{„} \quad f_m = 0. \end{aligned}$$

Man kann diese Gleichungen, wenn der Grad derselben es zuläßt, dazu benutzen, um m Veränderliche durch die übrigen auszudrücken, und dann die gefundenen Werthe in die Funktion f einsetzen. Diese wird dadurch eine Funktion von (n — m) Veränderlichen, welche alle voneinander unabhängig sind. Daher erhält man ihre grösten und kleinsten Werthe durch das oben nachgewiesene Verfahren.

Sehr oft aber ist die Auflösung der Nebenbedingungen unausführbar oder doch umständlich; in solchen Fällen betrachtet man vorläufig die n Veränderlichen als voneinander unabhängig, indem man von den Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots . f_m = 0$ absieht und nur die Funktionen $f_1, f_2, \ldots . f_m$ beibehält. Aus diesen und der ursprünglichen Funktion f bildet man eine neue Funktion

$$F = f + k_1 . f_1 + k_2 . f_2 + \ldots . + k_m . f_m,$$

in welcher die n Veränderlichen alle voneinander unabhängig und die Größen $k_1, k_2, \ldots . k_m$ unbestimmte Koefficienten sind.

Für diese Funktion F erhält man nun als Bedingungen eines Maximums oder Minimums die n Gleichungen

$$F'_{x_1} = 0, \; F'_{x_2} = 0, \; \ldots . F'_{x_n} = 0.$$

Man kann hier leicht die Koefficienten $k_1, k_2, \ldots k_m$ eliminieren, weil sie nur als lineare Faktoren darin vorkommen. Es bleiben danach noch (n—m) Bedingungen übrig, welchen die Veränderlichen für sich genügen müßen, damit die Funktion F einen grösten oder kleinsten Werth annimmt. Läßt man jetzt die anfänglichen Nebenbedingungen

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; \ldots . f_m = 0$$

wieder eintreten, so geht eines Theils die Funktion F in die ursprügliche Funktion f über, und anderen Theils sind diese m Nebenbedingungen in Verbindung mit den übrig gebliebenen (n—m) Gleichungen hinreichend und nothwendig, um die Werthe der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu bestimmen, welche die Funktion f zu einem Maximum oder Minimum machen.

Ich habe hier des beschränkten Raumes wegen die Uebungsbeispiele ganz weglaßen müßen. Wer solche wünscht, wird in meiner Schrift „Ueber gröste und kleinste Werthe“ (Leipzig bei Teubner) eine genügende Auswahl finden.

Heilermann.