Die aufgewickelte Kettenlinie als Gleichgewichtslinie.

§. 1.

Wenn die Endpunkte eines homogenen, unelastischen, biegsamen Fadens von konstantem Querschnitt frei im Raum befestigt werden, so nimmt der Faden unter dem Einfluss der Schwere die Gestalt einer Kettenlinie an.

Bezeichnen wir das Fadenelement mit ds, bezogen auf 3 rechtwinklige Raumkoordinaten X, Y, Z, wobei die positive Z-Axe der Schwere entgegengesetzt gerechnet wird, sodann mit T die Spannung in jedem Punkte des Fadens und durch g die Constante der Schwerkraft, so erhalten wir für das Gleichgewicht folgende 3 Bedingungsgleichungen:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,\quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0,\quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) - g ds = 0.$$

Bekanntlich erhalten wir aus ihnen die Gleichung für die Gleichgewichtslinie, wenn wir jene der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multipliciren und dann addiren. Wir erhalten:

$$dT - g dz = 0, \text{ mithin } T = gz + c. \tag{1}$$

Die Integration der letzten der 3 obigen Gleichgewichtsbedingungen ergibt $T\frac{dz}{ds} = gs + c_1$. Aus den (2) beiden letzten Gleichungen folgt durch Elimination von T als Gleichung für die Gleichgewichtslage:

$$(gz + c)\frac{dz}{ds} = gs + c_1, \tag{3}$$

die Gleichung einer Kettenlinie zwischen s und z.

§. 2.

Zu derselben Gleichung werden wir auch dann noch kommen, wenn wir in jedem Element des Fadens Kräfte angreifen lassen, deren Richtungen auf der des Fadens senkrecht stehen. Eine solche Kraft, in dem Punkte x, y, z angreifend, sei N; ihre Winkel mit den 3 positiven Coordinatenaxen bez. α, β, γ. Für diesen Fall erhalten wir als Bedingungen des Gleichgewichtes:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + N \cos\alpha\, ds = 0, \tag{4}$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + N \cos\beta\, ds = 0, \tag{5}$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + N \cos\gamma\, ds - g ds = 0. \tag{6}$$

Verfahren wir wieder wie oben, so ergibt sich auch hieraus $dT - g dz = 0$. Wollen wir aber auch hier zur Gleichung (2) gelangen, so müssen wir eine Beschränkung einführen: Wir dürfen in der Richtung der vertikalen Coordinatenaxe keine Componente von N wirken lassen. Die Kraft N muss daher parallel der XY-Ebene wirken, etwa durch den Widerstand eines vertikalen Cylinders hervorgebracht werden. Wenn auf dessen Oberfläche die Enden eines Fadens von oben angegebener Beschaffenheit befestigt sind, so ist auch hier wieder die Gleichung der Gleichgewichtskurve:

$$(gz + c)\frac{dz}{as} = gs + c_1,$$

eine Gleichung, die, wenn sie eine ebene Curve bezeichnete, die Kettenlinie ergäbe. Zu beachten ist jedoch, dass wir hier eine Curve von doppelter Krümmung haben. Aus dieser lässt sich übrigens leicht durch Abwicklung des Cylinders in eine vertikale Ebene die Kettenlinie herstellen. Denn da bei der Abwicklung weder die Länge des Bogens s noch die Länge der vertikalen Coordinaten z geändert werden, so gilt auch Gleichung (3) noch für die abgewickelte Gleichgewichtsfigur, welche somit eine Kettenlinie ist.

Wir sind mithin zu dem Resultat gekommen: Ein homogener etc. Faden, dessen Enden auf einem vertikalen Cylinder befestigt sind, bildet, wenn auf ihn keine andere Kraft als die Schwerkraft wirkt, im Gleichgewicht eine Curve, deren Abwicklung eine Kettenlinie ist.

§. 3.

Versuchen wir jetzt, indem wir die Abwicklung analytisch vornehmen, die Gleichung der Kettenlinie in ihrer gewöhnlichen Form, zwischen Ordinate und Abscisse, herzuleiten. Hierbei wollen wir der Einfachheit der Rechnung wegen den Cylinder als vertikalen Kreiscylinder annehmen, unbeschadet der Allgemeingültigkeit der zu erhaltenden Resultate (vergl. §. 13).

Wir unterstellen, die Enden des Fadens seien auf der Oberfläche eines vertikalen Kreiscylinders befestigt, dessen Gleichung sei: $x^2 + y^2 = r^2$.
Die in den Gleichungen (4), (5), (6) vorkommenden Grössen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ werden nunmehr bezüglich:

$$\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ 0,$$

so dass wir als neue Gleichgewichtsbedingungen erhalten:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + N\frac{x}{r}\,ds = 0,$$
$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + N\frac{y}{r}\,ds = 0,$$
$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) - g\,ds = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ und addiren, so erhalten wir, wie schon oben erwähnt, $dT = gdz$, mithin $T = gz + c$.
Diesen Werth setzen wir in die beiden ersten Gleichungen ein. Sie werden dadurch:

(7) $$d\left(\frac{dx}{ds}(gz + c)\right) + N\frac{x}{r}\,ds = 0 \quad \text{und} \quad d\left(\frac{dy}{ds}(gz + c)\right) + N\frac{y}{r}\,ds = 0,$$

aus welchen durch Elimination von N eine neue erhalten wird, die mit der Cylindergleichung die Gestalt des Fadens im Gleichgewicht vollständig bestimmt.

Erwähnte Elimination ergibt, indem wir zugleich die Differentiale entwickeln:

(8) $$x\left(g\frac{dz}{ds}\frac{dy}{ds} + (gz + c)\frac{d^2y}{ds^2}\right) - y\left(g\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} + (gz + c)\frac{d^2x}{ds^2}\right) = 0.$$

§. 4.

Wir werden nunmehr die Gleichungen der Projektionen der Gleichgewichtsfigur auf die vertikalen Coordinatenebenen, etwa zunächst auf die XZ-Ebene, aufstellen.

Zu dem Ende schaffen wir y und seine Differentialquotienten nach s weg.

Die Gleichung des Cylinders ergibt:

(9) $$y = \sqrt{r^2 - x^2},\ \frac{dy}{ds} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\frac{dx}{ds},\ \frac{d^2y}{ds^2} = -r^2(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Setzen wir diese Werthe in (8) ein, so erhalten wir nach einer einfachen Reduktion:

$$g \frac{dz}{ds} \frac{dx}{ds} + (gz + c) \left\{ \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{x}{r^2 - x^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \right\} = 0,$$

woraus sich ohne Weiteres, mit Hülfe der Substitutionen: $\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds}$, $\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dx} \frac{dx}{ds}$ und nachher ausgeführter Division der ganzen Gleichung durch $\frac{dx}{ds} \frac{gz + c}{ds}$, durch Integration ergibt:

$$\log (gz + c) + \log \left(\frac{dx}{ds}\right) + \tfrac{1}{2} \log (r^2 - x^2) = C.$$

Durch Transformation der willkührlichen Konstanten C in log c′ wird hieraus:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c' \sqrt{r^2 - x^2}}{gz + c}. \tag{10}$$

Um diese Gleichung zu integriren, drücken wir ds durch x und z aus. Wir bewerkstelligen dies mittelst der Gleichung $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, wobei wir für $\frac{dy}{dx}$ aus (9) den Werth $\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ einführen. Alsdann wird $ds = dx \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$. Mithin geht die Gleichung (10) über in:

$$\frac{gz + c}{c' \sqrt{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \text{ oder } \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{c'dz}{\sqrt{(gz + c)^2 - c'^2 r^2}}. \tag{11}$$

Auf entsprechende Weise erhalten wir:

$$\frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{c'dz}{\sqrt{(gz + c)^2 - c'^2 r^2}}. \tag{12}$$

Die Integration lässt sich jetzt sofort durchführen. Wir erhalten unter Einführung der beiden willkührlichen Constanten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Gleichungen:

$$\arcsin \frac{x}{r} = \varkappa_1 + \frac{c'}{g} \log \left(gz + c + \sqrt{(gz + c)^2 - r^2 c'^2}\right),$$

$$\arcsin \frac{y}{r} = \varkappa_2 + \frac{c'}{g} \log \left(gz + c + \sqrt{(gz + c)^2 - r^2 c'^2}\right),$$

mithin

$$x = r \sin \left[\varkappa_1 + \frac{c'}{g} \log \left(gz + c + \sqrt{(gz + c)^2 - r^2 c'^2}\right)\right] \tag{13}$$

$$y = r \sin \left[\varkappa_2 + \frac{c'}{g} \log \left(gz + c + \sqrt{(gz + c)^2 - r^2 c'^2}\right)\right]. \tag{14}$$

Zu beachten ist, dass $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ von einander abhängig sind. Ihr Verhältniss bestimmen wir mittelst der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$, woraus folgt, dass sich $\varkappa_1$ um $\frac{\pi}{2}$ von $\varkappa_2$ unterscheiden, also $\varkappa_1 = \frac{\pi}{2} + \varkappa_2$ sein muss, so dass die Gleichungen (13) und (14) nunmehr übergehen in:

$$x = r \cos \left[\varkappa_2 + \frac{c'}{g} \log \left(gz + c + \sqrt{(gz + c)^2 - r^2 c'^2}\right)\right]$$

$$y = r \sin \left[\varkappa_2 + \frac{c'}{g} \log \left(gz + c + \sqrt{(gz + c)^2 - r^2 c'^2}\right)\right].$$

Hieraus erhalten wir endlich durch Einführung der Constanten $\varkappa_2$ unter der Form $\varkappa_2 = \frac{c'}{g} \log \varkappa$, wo $\varkappa$ eine neue willkührliche Constante ist:

$$x = r \cos \left[\frac{c'}{g} \log \varkappa \left(gz + c + \sqrt{(gz + c)^2 - r^2 c'^2}\right)\right] \tag{15}$$

$$y = r \sin \left[\frac{c'}{g} \log \varkappa \left(gz + c + \sqrt{(gz + c)^2 - r^2 c'^2}\right)\right]. \tag{16}$$

Diese beiden Gleichungen geben die Projektionen unserer Gleichgewichtscurve auf die beiden vertikalen Coordinatenebenen.

§. 5.

Bevor wir nunmehr zur Abwicklung des Cylinders sowie der auf demselben durch die Gleichungen (15) und (16) charakterisirten Curve in eine Ebene übergehen, wollen wir eine Zwischenbetrachtung anstellen. Beschäftigen wir uns mit der Aufwicklung irgend einer gegebenen ebenen Curve auf einen gegebenen Kreiscylinder.

Die gegebene Curve sei auf ein in ihrer Ebene liegendes rechtwinkliges Coordinatensystem (T, U) bezogen; ihre Gleichung sei: $u = f(t)$.

Der gegebene Cylinder sei auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (X, Y, Z) bezogen, dessen Z-Axe mit der Cylinderaxe zusammenfalle. Ist nun der Radius eines Kreisschnittes dieses Cylinders r, so ist die Cylinder-Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$.

Die Aufwicklung der ebenen Curve gehe in folgender Weise von Statten:

Die T-Axe des ebenen Coordinatensystems falle mit der durch die positive X-Axe gehenden erzeugenden Geraden des Cylinders zusammen, und zwar falle der Coordinatenursprung des TU-Systems in den Schnittpunkt der positiven X-Axe und der erwähnten erzeugenden Geraden. Nunmehr wickeln wir die Ebene TU um den Cylinder und zwar in dem Sinne von + X nach + Y. Alsdann fällt die U-Axe mit dem Kreis zusammen, in welchem Cylinder und XY-Ebene sich schneiden. Die T-Ordinaten erleiden jedoch keine Veränderung; sie bleiben gerade Linien, da sie in die erzeugenden Geraden des Cylinders hineinfallen.

Die laufenden Coordinaten x, y, z der aufgewickelten Curve bestimmen sich jetzt leicht folgender Massen. Es ist

$$x = r \cos \frac{u}{r}, \quad y = r \sin \frac{u}{r}, \quad z = t$$

oder, da $u = f(t) = f(z)$ ist,

$$x = r \cos \frac{f(z)}{r}, \quad y = r \sin \frac{f(z)}{r}, \quad z = t.$$

Wäre die TU-Ebene in entgegengesetzter Richtung um den Cylinder herumgewickelt, so hätten uns ähnliche Betrachtungen folgende drei Gleichungen ergeben:

$$x = r \cos \frac{f(z)}{r}, \quad y = -r \sin \frac{f(z)}{r}, \quad z = t.$$

Durch Umkehrung unserer Betrachtungsweise erhalten wir nun folgendes Resultat:

Sind

$$x = r \cos \frac{f(z)}{r} \text{ und } y = \pm r \sin \frac{f(z)}{r}$$

die Gleichungen einer auf einer Kreiscylinder-Oberfläche liegenden Curve, so ist die Gleichung der durch Abwicklung des Cylinders in eine Ebene entstehenden Curve

$$u = f(t),$$

wenn wir zur U-Axe die Abwicklung des Kreises nehmen, in dem Cylinder und XY-Ebene sich schneiden, zur T-Axe die Abwicklung der erzeugenden Geraden des Cylinders, die von der positiven X-Axe geschnitten wird.

§. 6.

Wenden wir das Resultat dieser Zwischenbetrachtung auf die Abwicklung der durch die Gleichungen (15) und (16) bestimmten Gleichgewichtscurve an, so erhalten wir unmittelbar, wenn wir die Abwicklung des Cylinders, ebenso wie in unserer Zwischenbetrachtung vornehmen, als Gleichung der Abwicklung unsrer Gleichgewichtsfigur: $u = \frac{rc'}{g} \log \varkappa\left(gt + c + \sqrt{(gt + c^2) - r^2c'^2}\right)$, oder, wenn wir statt t den Buchstaben z beibehalten, da beide dieselbe Bedeutung haben:

$$u = \frac{rc'}{g} \log \varkappa\left(gz + c + \sqrt{(gz + c)^2 - r^2c'^2}\right). \tag{17}$$

Offenbar ist dies die Gleichung einer Kettenlinie. Die Constanten c, c' und $\varkappa$ bestimmen sich durch die Coordinaten der Befestigungspunkte und die Länge des Fadens.

§. 7.

Interessant ist der Nachweis, dass auch in unserm Falle der Faden in 2 Lagen auf dem Cylinder im Gleichgewicht sein kann, wie dies der Fall ist, wenn die Endpunkte des Fadens frei im Raume befestigt sind. Da wir bei dieser Untersuchung die in der Gleichung (17) vorkommenden willkührlichen Constanten bestimmen müssen, so wollen wir zunächst zur Bestimmung derselben übergehen.

Zuerst geben wir der Gleichung (17) eine andere Form, indem wir z als Funktion von u geben. Eine einfache Transformation ergibt:

$$z = -\frac{c}{g} + \frac{e^{\frac{gu}{rc'}} + \varkappa^2 r^2 c'^2 e^{-\frac{gu}{rc'}}}{2\varkappa g}. \tag{18}$$

Statt der bisherigen 3 willkührlichen Constanten führen wir jetzt 3 andre mit Hülfe folgender Gleichungen ein:

$$-\frac{rc'}{g} = \alpha, \quad -\frac{c}{g} = \beta, \quad g\varkappa = \gamma, \tag{19}$$

so wird die Gleichung unsrer abgewickelten Gleichgewichtsfigur:

$$z = \beta + \frac{\alpha^2\gamma^2 e^{\frac{u}{\alpha}} + e^{-\frac{u}{\alpha}}}{2\gamma}. \tag{20}$$

Neben dieser Gleichung ist zur Bestimmung der Constanten die Gleichung zwischen Bogen und Abscisse nothwendig. Bezeichnen wir den Bogen mit s, so ergibt die Gleichung

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}, \quad \text{da } \frac{dz}{du} = \frac{\alpha^2\gamma^2 e^{\frac{u}{\alpha}} - e^{-\frac{u}{\alpha}}}{2\alpha\gamma} \text{ ist,}$$

$$\frac{ds}{du} = \frac{\alpha^2\gamma^2 e^{\frac{u}{\alpha}} + e^{-\frac{u}{\alpha}}}{2\alpha\gamma}, \quad \text{somit endlich } s = \delta + \frac{\alpha^2\gamma^2 e^{\frac{u}{\alpha}} - e^{-\frac{u}{\alpha}}}{2\gamma}. \tag{21}$$

Hierbei ist durch δ eine vierte zu bestimmende Constante bezeichnet.

Das Maximum resp. Minimum der abgewickelten Curve erhalten wir, wenn wir aus $\frac{dz}{du} = 0$ und der Gleichung (20) z und u bestimmen.

$$\frac{dz}{du} = \frac{\alpha^2\gamma^2 e^{\frac{u}{\alpha}} - e^{-\frac{u}{\alpha}}}{2\alpha\gamma} = 0 \text{ ergibt } \frac{2u}{\alpha} = -\log(\alpha\gamma)^2.$$

Somit ist, wenn die Coordinaten des Maximums resp. Minimums mit $\overline{z}$ und $\overline{u}$ bezeichnet werden,

$$\overline{u} = -\alpha \log(\alpha\gamma), \tag{22}$$

woraus durch Einsetzen dieses Werthes in (20) folgt:

$$\overline{z} = \alpha + \beta. \tag{23}$$

Beziehen wir nunmehr die Kettenlinie auf ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem $(\eta; \xi)$, dessen Axen den ursprünglichen Axen parallel seien. Dabei gehe die neue η-Axe durch das Maximum resp. Minimum der Kettenlinie, während die neue ξ-Axe im alten Coordinatensystem die Gleichung $z = \beta$ besitze. Substituiren wir also:

$$\xi = u + \alpha \log(\alpha\gamma) \text{ und } \eta = z - \beta, \tag{24}$$

so nehmen die Gleichungen (20) und (21) folgende einfache Form an:

$$\eta = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{\xi}{\alpha}} + e^{-\frac{\xi}{\alpha}}\right), \tag{25}$$

$$s = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{\xi}{\alpha}} - e^{-\frac{\xi}{\alpha}}\right). \tag{26}$$

Die Constanten α, β, γ lassen sich nun leicht bestimmen, wenn wir die Coordinaten η_1, ξ_1 und η_2, ξ_2 derjenigen Punkte, auf die die ursprünglich gegebenen Befestigungspunkte bei der Abwicklung des Cylinders in unsre Ebene fallen, und ferner die Länge L des gegebenen Fadens kennen.

Bei der Abwicklung behält L seinen Werth. Achten wir auf die Herleitung der Werthe für η_1, ξ_1 und η_2, ξ_2 aus den ursprünglichen Coordinaten der Befestigungspunkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 des Fadens auf dem Cylinder.

Da der Faden offenbar auf dem Cylinder mehrere Gleichgewichtslagen annehmen wird, die zunächst abhängig sein werden von dem Sinne, in welchem wir den Faden um den Cylinder herumgeschlungen denken, dann auch von der Anzahl der Windungen, in denen wir ihn um den Cylinder führen, so wollen wir, um jede Mehrdeutigkeit auszuschliessen, annehmen, der Faden sei so um den Cylinder geschlungen, dass seine Horizontalprojektion $2r\pi \,.\, n + \sigma$ betrage, wobei n eine ganze Zahl und σ die Horizontalprojektion der auf dem Cylinder zwischen den Punkten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 gezogenen kürzesten Linie ist. Alsdann wird bei der Abwicklung des Cylinders, die wir ebenso wie in §. 5 angegeben vornehmen, der Punkt x_1, y_1, z_1 in einen Punkt z_1, u_1 fallen, dessen Vertikalkoordinate dieselbe bleibt, dessen Horizontalkoordinate durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$u_1 = r \arccos \frac{x_1}{r}.$$

Für u_2 finden wir ebenso $u_2 = u_1 + 2r\pi \,.\, n + \sigma = r \arccos \frac{x_2}{r}$, während z_2 seinen Werth behält.

Mit diesen so bestimmten Grössen u_1, u_2, z_1, z_2, L lassen sich die Constanten der Gleichungen (20) und (21) folgendermassen bestimmen:

Wir bezeichnen den Abstand des Punktes (u_1, z_1) von der η-Axe mit k_1, den Abstand des Punktes (u_2, z_2) von derselben Axe mit k_2, ferner die Länge des Fadens vom Punkt (u_1, z_1) bis zu dem Punkt, in dem die η-Axe den Faden trifft, mit l_1 und das andere Stück mit l_2, so ist $k_1 + k_2 = u_2 - u_1$ und $l_1 + l_2 = L$.

Die Gleichungen (20) und (21) müssen nur für $\xi = -k_1$ sowohl $\eta = z_1 - \beta$ als auch $s = -l_1$ wie für $\xi = k_2$ $\eta = z_2 - \beta$ und $s = l_2$ liefern. Hieraus ergeben sich dann die vier Bedingungsgleichungen:

$$z_1 - \beta = \frac{\alpha}{2}\left(e^{+\frac{k_1}{\alpha}} + e^{-\frac{k_1}{\alpha}}\right), \quad -l_1 = \frac{\alpha}{2}\left(e^{-\frac{k_1}{\alpha}} - e^{+\frac{k_1}{\alpha}}\right),$$

$$z_2 - \beta = \frac{\alpha}{2}\left(e^{+\frac{k_2}{\alpha}} + e^{-\frac{k_2}{\alpha}}\right), \quad +l_2 = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{k_2}{\alpha}} - e^{-\frac{k_2}{\alpha}}\right),$$

woraus weiter durch Subtraktion folgen:

$$z_1 - z_2 = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{k_1}{\alpha}} + e^{-\frac{k_1}{\alpha}} - e^{\frac{k_2}{\alpha}} - e^{-\frac{k_2}{\alpha}}\right),$$

$$L = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{k_1}{\alpha}} - e^{-\frac{k_1}{\alpha}} + e^{\frac{k_2}{\alpha}} - e^{-\frac{k_2}{\alpha}}\right).$$

Quadriren und Subtrahiren vorstehender Gleichungen ergibt dann nach gehöriger Reduktion und Einführung einer neuen Constanten ε statt α mittelst der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{2\alpha}, \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{u_2 - u_1}{2\varepsilon}, \tag{27}$$

$$\frac{e^{\varepsilon} - e^{-\varepsilon}}{2\varepsilon} = \sqrt{\frac{L^2 - (z_1 - z_2)^2}{(u_2 - u_1)^2}}.$$

Sind die einzelnen Glieder des rechtsstehenden Ausdrucks in Zahlen gegeben, so können wir einfach den Werth von ε bestimmen, indem wir y und ε als Veränderliche ansehen und die durch die Gleichung

$$y = e^{\varepsilon} - e^{-\varepsilon} \tag{28}$$

dargestellte Curve mit einer Geraden schneiden, deren Gleichung

$$y = 2\varepsilon\sqrt{\frac{L^2 - (z_1 - z_2)^2}{(u_2 - u_1)^2}} \quad \text{ist.} \tag{29}$$

Eine Untersuchung der durch Gleichung (28) dargestellten Curve und der Werth des unter dem Wurzelzeichen in (29) stehenden Ausdrucks, welcher grösser als 1 ist, ergibt, dass unsre Curve in allen

Fällen von der Geraden geschnitten wird und zwar in 2 gleichweit von dem Coordinatenanfang entfernt liegenden Punkten.

Wir erhalten somit 2 gleiche und entgegengesetzte Werthe für ε, daher auch 2 entgegengesetzt gleiche Werthe für α.

Die sich diesen beiden Werthen zuordnenden γ erhalten wir durch Einsetzen von α in die Gleichung

$$\gamma = \frac{z_2 - z_1 \pm \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + \alpha^2\left(e^{\frac{u_2 - u_1}{2\alpha}} - e^{-\frac{u_2 - u_1}{2\alpha}}\right)^2}}{\alpha^2\left(e^{\frac{u_2}{\alpha}} - e^{\frac{u_1}{\alpha}}\right)}. \tag{30}$$

Letztere Gleichung erhalten wir, wenn wir in die Gleichung (20) der Reihe nach die Werthe z_2, u_2 und z_1, u_1 für z und u einsetzen und dann die erhaltenen Gleichungen subtrahiren.

Endlich erhalten wir β durch Einsetzen der zusammengehörenden Werthe für α und γ in die aus (20) folgende Gleichung:

$$z_1 = \beta + \frac{\alpha^2\gamma^2 e^{\frac{u_1}{\alpha}} + e^{-\frac{u_1}{\alpha}}}{2\gamma}.$$

Sind die willkührlichen Constanten so bestimmt, so ist die Abwicklung der Gleichgewichtscurve in eine Ebene als vollständig gelöst anzusehen.

§. 8.

Untersuchen wir die Lage der Kettenlinie für die verschiedenen Werthe von β und γ, die, wie oben gezeigt, von dem Vorzeichen abhangen, das wir α geben.

Nehmen wir den Werth von α absolut und bezeichnen wir die dem Werth $+\alpha$ sich zuordnenden Werthe von β und γ durch $\overset{+}{\beta}$ und $\overset{+}{\gamma}$, die dem $-\alpha$ sich zuordnenden β und γ durch $\overset{-}{\beta}$ und $\overset{-}{\gamma}$, so ersehen wir aus der Gleichung (30), dass die Zähler für $\overset{-}{\gamma}$ und $\overset{+}{\gamma}$ dieselben sind, hingegen die Nenner für entgegengesetzte Werthe von α verschieden ausfallen.

Es ist nämlich, wenn wir den Zähler in (30) mit M, $e^{\frac{u_1}{\alpha}}$ mit P, $e^{\frac{u_2}{\alpha}}$ mit Q bezeichnen,

$$\overset{+}{\gamma} = \frac{M}{\alpha^2(Q - P)}, \tag{31}$$

$$\overset{-}{\gamma} = \frac{MQP}{\alpha^2(P - Q)}. \tag{32}$$

Die Werthe von β erhalten wir durch Einsetzen von α und $\overset{+}{\gamma}$ und $-\alpha$ und $\overset{-}{\gamma}$ in die Gleichung (20). Setzen wir dort mit α und $\overset{+}{\gamma}$ zugleich für z und u z_1 und u_1, mit $-\alpha$ und $\overset{-}{\gamma}$ für z und u z_2 und u_2 ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen (31) und (32) nach einer einfachen Reduktion

$$\overset{+}{\beta} = z_1 - \left(\frac{MP}{2(Q - P)} + \frac{\alpha^2(Q - P)}{2MP}\right), \tag{33}$$

$$\overset{-}{\beta} = z_2 - \left(\frac{MP}{2(Q - P)} + \frac{\alpha^2(Q - P)}{2MP}\right). \tag{34}$$

Die so bestimmten beiden Gruppen von Werthen für α, β, γ bestimmen 2 verschiedene Kettenlinien. Beide gehen offenbar durch die beiden Punkte, auf welche bei der Abwicklung des Cylinders in eine Ebene die Befestigungspunkte des Fadens auf dem Cylinder fallen, beide Kettenlinien haben ferner Parameter, deren absolute Werthe gleich sind.

Wie unterscheidet sich aber die Lage der einen Kettenlinie von der der andern? Rufen wir uns unser Verfahren bei der Abwicklung ins Gedächtniss zurück.

Die durch die Abwicklung erhaltene Curve bezogen wir mit Hülfe der Gleichungen

$$\xi = u + \alpha \log(\alpha\gamma), \quad \eta = z - \beta$$

cf. §. 7 auf ein neues Coordinatensystem η_1, ξ_1, dessen η-Axe, parallel der Z-Axe, die Symmetrie-Axe der Kettenlinie wurde und um $-\alpha \log (\alpha\gamma)$ von der ursprünglichen Z-Axe entfernt war, dessen ξ-Axe um β von der U-Axe abstand. Die neue Gleichung war:

$$\eta = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{\xi}{\alpha}} + e^{-\frac{\xi}{\alpha}}\right).$$

Sie stellt bei Benutzung der Werthe $+\alpha$, $\overset{+}{\beta}$, $\overset{+}{\gamma}$ eine Kettenlinie dar, welche **oberhalb** der ξ-Axe liegt. Dabei ist die Entfernung der letzteren von der U-Axe $\overset{+}{\beta}$, die Entfernung der η-Axe von der Z-Axe $-\alpha \log (\alpha\overset{+}{\gamma})$. Bei Benutzung der Werthe $-\alpha$, $\overset{-}{\beta}$, $\overset{-}{\gamma}$ erhalten wir eine Kettenlinie, welche ganz **unterhalb** der neuen ξ-Axe liegt. Hierbei ist die Entfernung letzterer von der U-Axe $\overset{-}{\beta}$, und die Entfernung der η-Axe von der Z-Axe $\alpha \log (-\alpha\overset{-}{\gamma})$.

Achten wir jetzt darauf, wie weit die η- und ξ-Axen in beiden Fällen von der Mitte **der** beiden Punkte abstehen, die durch die Coordinaten z_1, u_1 und z_2, u_2 gegeben sind.

Diese Mitte hat zu Coordinaten die Werthe

$$\frac{u_1 + u_2}{2} \text{ und } \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Aus (31) und (32) folgt nun aber

$$\frac{-\alpha \log (\alpha\overset{+}{\gamma}) + \alpha \log (-\alpha\overset{-}{\gamma})}{2} = \frac{-\alpha \log \frac{\alpha M}{\alpha^2(Q-P)} + \alpha \log \frac{-\alpha MQP}{\alpha^2(P-Q)}}{2} = \frac{\alpha}{2} \log PQ = \frac{u_1 + u_2}{2}.$$

Ebenso aus (33) und (34) $\dfrac{\overset{+}{\beta} + \overset{-}{\beta}}{2} = \dfrac{u_1 + u_2}{2}$.

Mithin ist der geometrische Mittelpunkt der Ursprünge der beiden Coordinatensysteme, deren Lage durch die verschiedenen Werthe von α, β, γ bedingt ist, zugleich der geometrische Mittelpunkt jener beiden Punkte, in die bei der Abwicklung des Cylinders die beiden Befestigungspunkte fallen. Die eine Kettenlinie kehrt dem Erdmittelpunkt die konvexe, die andere die konkave Seite zu. Beide Kettenlinien sind kongruent. Aus der untern erhalten wir die obere, wenn wir erstere um den Mittelpunkt der beiden Befestigungspunkte um 180° drehen.

§. 9.

Wir sehen ferner sofort ein, dass die untere Kettenlinie die Abwicklung der stabilen, die obere die der labilen Gleichgewichtsfigur darstellt.

Die Bedingung für die stabile Gleichgewichtslage eines Systems ist ja, dass der Schwerpunkt des Systems am tiefsten, für eine labile, dass er am höchsten liege. Da nun für Curven von gleicher Länge der Schwerpunkt am tiefsten liegt, wenn die Curve eine nach oben sich öffnende, am höchsten, wenn sie eine nach unten sich öffnende Kettenlinie bildet, und da ferner bei allen auf einen Cylinder aufgewickelten Curven von gleicher Länge und gleichen Befestigungspunkten der Schwerpunkt derjenigen Curve am tiefsten liegt, deren Abwicklung eine nach oben sich öffnende Kettenlinie bildet, derjenigen Curve aber, deren Abwicklung eine nach unten sich öffnende Kettenlinie bildet, am höchsten liegt, so ergibt in der That die Gleichung (20) bei Einsetzung der Werthe $+\alpha$, $\overset{+}{\beta}$, $\overset{+}{\gamma}$ die stabile, bei Einsetzung der Werthe $-\alpha$, $\overset{-}{\beta}$, $\overset{-}{\gamma}$ die labile Gleichgewichtslage.

§. 10.

Wenden wir uns nunmehr zur Untersuchung des Widerstandes, den der Cylinder ausübt, da wir hieraus weitere Schlüsse auf das Eintreten einer der beiden Gleichgewichtslagen zu gewärtigen haben.

Zunächst bestimmen wir die Spannung in jedem Punkte des Fadens und beziehen, um die Rechnungen zu vereinfachen, unsre Gleichgewichtsfigur auf dem Cylinder auf ein neues Coordinatensystem.

Wir verschieben die XY-Ebene parallel sich selbst um β, substituiren $\zeta = z - \beta$. Hierdurch gehen die (35) Gleichungen (15) und (16) unter Berücksichtigung der Gleichungen (19) über in:

$$x = r \cos\left[-\frac{\alpha}{r}\log\gamma(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - \alpha^2})\right], \quad (36)$$
$$y = r \sin\left[-\frac{\alpha}{r}\log\gamma(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - \alpha^2})\right].$$

Die Gleichung (1) liefert uns unter diesen Substitutionen

$$T = g(z - \beta) = g\zeta.$$

Hierdurch ist die Spannung in jedem Punkte des Fadens gegeben; sie ist proportional der ζ-Coordinate und zwar positiv für die stabile Gleichgewichtslage, da für diese sämmtliche Punkte der Curve über der XY-Ebene liegen, negativ für die labile, für welche sämmtliche Punkte unter der XY-Ebene liegen. Im ersteren Fall strebt die Kraft T die Elemente des Fadens auseinanderzureissen, im zweiten sie zusammenzudrücken. Ein Minimum ist die Spannung zugleich mit dem Minimum von ζ. Der Minimalwerth von ζ ergibt sich aus der Gleichung (23) §. 7. Darnach ist $\bar{\zeta} = \alpha$. Mithin ist die Spannung des Fadens in dem tiefsten Punkt der stabilen wie in dem höchsten Punkt der labilen Gleichgewichtslage $g\alpha$, gleich dem Gewicht eines Fadenstücks von derselben Beschaffenheit, wie die des gegebenen ist, und der Länge α.

Die Spannungen in den beiden festen Punkten sind:

$$T_1 = g(z_1 - \beta) = g\zeta_1,$$
$$T_2 = g(z_2 - \beta) = g\zeta_2.$$

§. 11.

Beschäftigen wir uns nunmehr mit dem Widerstand, den der Cylinder auf jeden Punkt des Fadens ausübt. Aus der ersten Gleichung in (7) §. 3 erhalten wir:

$$N = -\frac{r}{x}\left\{g\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} + (gz + c)\frac{d^2x}{ds^2}\right\},$$

woraus mit Rücksicht auf unsre später eingeführten Substitutionen (vergl. (19) §. 7 und (35) §. 10) folgt:

$$N = -\frac{rg}{x}\left\{\frac{d\zeta}{ds}\frac{dx}{ds} + \zeta\frac{d^2x}{ds^2}\right\}.$$

Nun ist aber cf. (36) §. 10, wenn wir den in (36) mit eckigen Klammern umschlossenen Ausdruck mit V bezeichnen:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\alpha}{\sqrt{\zeta^2 - \alpha^2}} \sin V \frac{d\zeta}{ds} \text{ und}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \sin V \cdot \frac{-\alpha\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - \alpha^2)^3}}\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 + \frac{\alpha \sin V}{\sqrt{\zeta^2 - \alpha^2}}\frac{d^2\zeta}{ds^2} - \frac{\alpha^2 \cos V}{r(\zeta^2 - \alpha^2)}\left(\frac{d\zeta^2}{ds}\right),$$

somit, wenn wir diese Werthe oben einsetzen und soviel als möglich die rechte Seite der Gleichung vereinfachen:

$$N = \frac{g\alpha^2}{r}\left(\frac{\alpha r \tan V + \zeta\sqrt{\zeta^2 - \alpha^2}}{(\zeta^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 - \frac{g\alpha\,\zeta \tan V}{(\zeta^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{d^2\zeta}{ds^2}.$$

Die hier auftretenden Differentialquotienten $\frac{d\zeta}{ds}$ und $\frac{d^2\zeta}{ds^2}$ lassen sich mit Rücksicht auf Gleichung (2) §. 1 durch s und ζ ausdrücken, da diese Gleichung, wegen des Bestehens der Gleichungen

$$-\frac{c}{g} = \beta, \text{ vergl. (19) §. 7, und}$$

$$z - \beta = \zeta, \text{ vergl. (35) §. 10,}$$

wenn wir den Bogen s vom höchsten bez. tiefsten Punkt rechnen, $\frac{d\zeta}{ds} = \frac{s}{\zeta}$ ergibt, woraus dann weiter folgt:

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = \frac{1}{\zeta} - \frac{s}{\zeta^2}\frac{d\zeta}{ds} = \frac{1}{\zeta} - \frac{s^2}{\zeta^3}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe wird

$$N = \frac{g\alpha^2[\alpha r \tan V + \zeta\sqrt{\zeta^2 - \alpha^2}]}{r(\zeta^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{s^2}{\zeta^2} - \frac{g\alpha\zeta \tan V}{(\zeta^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{s^2}{\zeta^2}\right).$$

Substituiren wir sodann hier für s seinen Werth durch ζ ausgedrückt. Diesen erhalten wir durch Elimination von ξ aus den Gleichungen (25) und (26) §. 7, da wir in der so entstehenden Gleichung zwischen s und η statt η die dasselbe bedeutende Grösse ζ einsetzen dürfen. Die Elimination ergibt uns $s = \pm\sqrt{\zeta^2 - \alpha^2}$.

Somit ist, wenn wir diesen Werth oben einsetzen:

$$N = \frac{g\alpha^2}{r\zeta} = \frac{g^2\alpha^2}{rT}.$$

Es ist also der vom Cylinder auf jeden Punkt des Fadens ausgeübte Widerstand umgekehrt proportional der ζ-Coordinate und zwar positiv, d. h. nach aussen gerichtet, bei einem positiven ζ, im Fall des stabilen Gleichgewichtes, hingegen nach innen gerichtet bei dem labilen Gleichgewicht, da in diesem Fall ζ negativ ist.

Das stabile Gleichgewicht findet somit statt, wenn die Enden des Fadens auf der äussern, das labile, wenn sie auf der innern Cylinderoberfläche befestigt sind.

Der Widerstand ist ein Maximum, wenn ζ seinen kleinsten Werth annimmt, im tiefsten bez. höchsten Punkt der Gleichgewichtslinie. Für diesen ist, vergl. §. 10, $\zeta = \alpha$, also $\overline{N} = \frac{g\alpha}{r} = \frac{\overline{T}}{r}$, wenn wir mit $\overline{T}$ die Spannung in jenem ausgezeichneten Punkte bezeichnen.

Der Druck, den der Cylinder auszuhalten hat, ist entgegengesetzt gleich der Widerstandskraft, die der Cylinder erzeugt.

Also:
$$D = -\frac{g\alpha^2}{r\zeta}.$$

Das im tiefsten bez. höchsten Punkt der Gleichgewichtskurve eintretende Maximum des Druckes beträgt

$$\overline{D} = -\frac{g\alpha}{r}.$$

§. 12.

Bevor wir die Erörterung der Verhältnisse beim allgemeinsten Cylinder aufnehmen, wollen wir kurz die erhaltenen Resultate zusammenstellen. Wir fanden:

„Ist ein Faden von gegebener Länge, konstantem Querschnitt, homogener Beschaffenheit, der zugleich biegsam und unausdehnbar ist, mit seinen beiden Enden auf der Oberfläche eines vertikalen Kreiscylinders befestigt und nur der Schwere unterworfen, und ist ferner bestimmt, in wie vielen Windungen er sich um den Cylinder herumwickeln soll, so kann er in 2 Lagen im Gleichgewicht sein. Eine labile Gleichgewichtslage kann er annehmen, wenn seine Enden auf der innern Oberfläche des Cylinders befestigt sind, eine stabile, wenn sie auf der äussern befestigt sind. Beide Gleichgewichtslagen bilden, wenn wir den Cylinder in eine Ebene abwickeln, kongruente Kettenlinien. Nebenbei fanden wir die Spannung des Fadens direkt, den vom Faden erzeugten Druck umgekehrt proportional der vertikalen Coordinate."

§. 13.

Wir wenden uns nunmehr zurück zur Betrachtung der Gleichgewichtsverhältnisse bei dem allgemeinen vertikalen Cylinder. Derselbe sei gegeben durch die Gleichung:

$$y = f(x).$$

Die in den Gleichungen (4), (5), (6) §. 2 auftretenden Winkel werden dann bestimmt durch die Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{df}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}},\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}},\quad \cos\gamma = 0.$$

Mithin erhalten wir statt der Gleichung (8) §. 3

$$-\frac{df}{dx}\left\{g\frac{dz}{ds}\frac{dy}{ds} + (gz+c)\frac{d^2y}{ds^2}\right\} - \left\{g\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} + (gz+c)\frac{d^2x}{ds^2}\right\} = 0,$$

somit, da

$$\frac{dy}{ds} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{ds}$$

und

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{df}{dx}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \text{ ist,}$$

$$\frac{df}{dx}\left\{g\frac{df}{dx}\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} + (gz+c)\frac{df}{dx}\frac{d^2x}{ds^2} + (gz+c)\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right\} + g\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} + (gz+c)\frac{d^2x}{ds^2} = 0$$

oder

$$\left(1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right) g\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} + \left(1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)(gz+c)\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dx}\frac{dx}{ds} + (gz+c)\frac{d^2f}{dx^2}\frac{df}{dx}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0,$$

oder, wenn wir ξ statt $\frac{dx}{ds}$, mithin $ds = \frac{dx}{\xi}$ setzen und zugleich durch $\left(1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)(gz+c)\,\xi^2$ dividiren:

$$\frac{gdz}{gz+c} + \frac{d\xi}{\xi} + \frac{\frac{d^2f}{dx^2}\frac{df}{dx}}{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$\log(gz+c) + \log\xi + \log\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2} = C,$$

somit

$$\xi = \frac{c_1}{(gz+c)\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}},$$

wobei wir statt der willkührlichen Constanten C die neue Constante $\log c_1$ eingeführt haben. Substituiren wir nunmehr $\frac{dx}{ds}$ für ξ und $ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, so ergibt sich nach einfacher Transformation:

$$dx\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2} = \frac{c_1 dz}{\sqrt{(gz+c)^2 - c_1^2}}.$$

Beachten wir nun, dass $dx\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}$ die Horizontalprojektion des Bogens ds bedeutet, welche wir durch $d\sigma$ bezeichnen wollen, so ergibt sich:

$$d\sigma = \frac{c_1 dz}{\sqrt{(gz+c)^2 - c_1^2}},$$

also

$$\sigma = \frac{c_1}{g}\log\varkappa\left(gz + c + \sqrt{(gz+c)^2 - c_1^2}\right).$$

Letzteres ist die Gleichung unserer Gleichgewichtsfigur auf dem allgemeinen Cylinder zwischen der Horizontalprojektion des Bogens und der vertikalen Coordinate. Wickeln wir den Cylinder in eine Ebene ab, so ändert sich weder die Länge der vertikalen Coordinate noch die der Horizontalprojektion von s, die eine Gerade wird, so dass, wenn wir sie, wie in der voraufgegangenen Erörterung, zur Abscisse der Abwicklung unter der Bezeichnung u nehmen, die Gleichung der Abwicklung auch in diesem allgemeinsten Falle

$$u = \frac{c_1}{g} \log \varkappa\left(gz + c + \sqrt{(gz + c)^2 - c_1{}^2}\right)$$

ist. Wir erkannten sie als Gleichung einer Kettenlinie. Die hier auftretenden Constanten bestimmen sich auch hier, auf dieselbe Weise wie bei der Betrachtung des Kreiscylinders, durch die Länge des Fadens und die Coordinaten derjenigen Punkte, auf die bei der Abwicklung des Cylinders die Befestigungspunkte des Fadens fallen. Eine Untersuchung der Gleichgewichtsverhältnisse darf unterbleiben, da dieselbe ganz analog der oben durchgeführten vorgenommen werden kann.