Ueber eine merkwürdige Eigenschaft ebener Polygone.

§ 1.

Lehrsatz. In jedem ebenen Polygon giebt es im Allgemeinen zwei Punkte von der Eigenschaft, daß für jede durch einen dieser Punkte gelegte Gerade die Quadratsumme der aus den Ecken auf sie gefällten Lothe denselben Werth hat.

Beweis. Es seien OX und OY (Fig. 1) zwei rechtwinklige Coordinaten-Axen, M sei ein fester Punkt, gegeben durch die Coordinaten $ON = a$, $MN = b$; der Punkt A sei eine der n Ecken des gegebenen Polygons, und seine Lage sei bestimmt durch die Coordinaten $OB = x$, $AB = y$. Durch M sei eine beliebige Gerade gezogen, welche OX in Z und AB in C schneidet, und deren Lage durch die auf OX abgeschnittene Strecke $NZ = z$ gegeben sei; von A aus sei das Loth AD auf MZ gefällt.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ZMN und ZCB folgt:

$$CB = \frac{MN \cdot ZB}{ZN} = \frac{b(x-a+z)}{z}, \text{ also}$$

$$AC = y - \frac{b(x-a+z)}{z} = \frac{(y-b)z - b(x-a)}{z}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ZMN und ACD folgt:

$$AD = \frac{ZN \cdot AC}{ZM} = \frac{(y-b)z - b(x-a)}{\sqrt{z^2+b^2}}, \text{ also}$$

$$AD^2 = \frac{(y-b)^2 z^2 - 2bz(y-b)(x-a) + b^2(x-a)^2}{z^2+b^2}.$$

Denkt man sich für A nach einander die n Ecken des Polygons, sind $x_1, x_2, \cdots x_n$ die Abscissen und $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Ordinaten derselben, und bezeichnet

S die Quadratsumme der n Lothe AD, welchen von den Polygonecken auf die feste Gerade ZM gefällt sind, so erhält man:

$$1)\ S = \frac{z^2[(y_1-b)^2+(y_2-b)^2+\cdots] - 2bz[(y_1-b)(x_1-a)+(y_2-b)(x_2-a)+\cdots] + b^2[(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\cdots]}{z^2+b^2}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$2)\ y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n = \Sigma(y)$$
$$y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2+\cdots y_n{}^2 = \Sigma(y^2)$$
$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = \Sigma(xy) \text{ u. s. f.},$$

so geht nach Entwicklung der Klammern die Gleichung (1) in folgende Form über:

$$3)\ S = \frac{z^2[\Sigma(y^2)-2b\Sigma(y)+nb^2] - 2bz[\Sigma(xy)-a\Sigma(y)-b\Sigma(x)+nab] + b^2[\Sigma(x^2)-2a\Sigma(x)+na^2]}{z^2+b^2}.$$

Läßt man den Anfangspunkt der Coordinaten O mit dem Mittelpunkt der mittleren Entfernungen des Polygons zusammenfallen, so ist

$$4)\ \Sigma(y)=\Sigma(x)=o, \text{ und es folgt dann}$$

$$5)\ S = \frac{z^2[\Sigma(y^2)+nb^2] - 2bz[\Sigma(xy)+nab] + b^2[\Sigma(x^2)+na^2]}{z^2+b^2}.$$

Legt man den Coordinaten a, b des Punktes M solche Werthe bei, daß folgende zwei Gleichungen erfüllt werden:

$$6)\ \Sigma(xy)+nab = o$$
$$\Sigma(y^2)+nb^2 = \Sigma(x^2)+na^2,$$

so folgt aus (5)

$$7)\ S = \Sigma(y^2)+nb^2 = \Sigma(x^2)+na^2.$$

Dieser Werth für S ist von z, also von der besonderen Lage der Geraden MZ unabhängig. Die aus (6) sich ergebenden bestimmten Werthe von a und b bestimmen also einen oder mehrere Punkte M von der Eigenschaft, daß für jede durch einen solchen Punkt gezogene Gerade die Quadratsumme der aus den Polygon-Ecken auf sie gefällten Lothe denselben Werth hat.

Entwickelt man aus (6) die Werthe für a und b, so erhält man:

$$8)\ a = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(y^2)-\Sigma(x^2)\pm\sqrt{[\Sigma(y^2)-\Sigma(x^2)]^2+4[\Sigma(xy)]^2}}{2n}},$$

$$b = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)-\Sigma(y^2)\pm\sqrt{[\Sigma(y^2)-\Sigma(x^2)]^2+4[\Sigma(xy)]^2}}{2n}}.$$

Jeder dieser beiden Ausdrücke hat vier Werthe, davon sind je zwei reell und je zwei imaginär; denn von dem inneren Doppelzeichen giebt das obere Zeichen einen positiven, das untere einen negativen Radicanden. Es giebt also für a und b zwei reelle Werthe, also auch im Polygon zwei reelle Punkte von der angegebenen Eigenschaft. Die für jeden dieser Punkte zusammengehörenden Vorzeichen der beiden Coordinaten a und b bestimmen sich aus der ersten Gleichung in (6), wonach $ab = -\frac{\Sigma(xy)}{n}$ sein muß.

In dem besonderen Falle, daß $a = b = o$ ist, fallen die beiden reellen Punkte in einen und zugleich mit dem Mittelpunkt der mittleren Entfernungen zusammen.

§ 2.

Erklärung. Diejenigen Punkte in der Ebene eines Polygons oder einer Gruppe von Punkten, welche die Eigenschaft haben, daß für jede durch sie gelegte Gerade die Quadratsumme der von den Ecken oder jenen Punkten auf sie gefällten Lothe denselben Werth hat, sollen Mittelpunkte gleicher Quadratsummen genannt werden.

§ 3.

Zusätze. 1) Die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen liegen mit dem Mittelpunkt der mittleren Entfernungen in einer Geraden und haben von diesem Punkte gleiche Entfernungen.

2) Bezeichnet c den Abstand eines Mittelpunktes gleicher Quadratsummen von dem Mittelpunkte der mittleren Entfernungen, so folgt leicht:

$$9)\quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2}}{n}}.$$

3) Bezeichnet S_1 jene Quadratsumme der aus den Polygon-Ecken auf eine beliebige durch einen der Mittelpunkte gleicher Quadratsummen gelegte Gerade gefällten Lothe, so folgt aus 7) und 8)

$$10)\quad S_1 = \frac{\Sigma(y^2) + \Sigma(x^2) + \sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2}}{z}.$$

4) Die beiden Werthe für c und S_1 lassen sich auch in Formen bringen, die von der Lage der Coordinaten-Axen unabhängig sind. Bezeichnen wir die Länge der Geraden,

die vom Mittelpunkt der mittleren Entfernungen nach den Ecken $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3 \cdots$ gehen, mit r_1, r_2, r_3 $\cdots$, so ist

$$y_1{}^2 + x_1{}^2 = r_1{}^2$$

$$y_2{}^2 + x_2{}^2 = r_2{}^2 \text{ u. s. f., also:}$$

$$11) \; \Sigma(y^2) + \Sigma(x^2) = \Sigma(r^2).$$

Ferner ist

$$[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2 = [\Sigma(y^2) + \Sigma(x^2)]^2 - 4[\Sigma(y^2)\Sigma(x^2) - [\Sigma(xy)]^2]$$

Das Product $\Sigma(y^2)\Sigma(x^2)$ ist das Product zweier n-gliedriger Summen und hat n^2 quadratische Glieder; von diesen haben n Glieder quadratische Factoren gleicher Indices, wie $x_1{}^2 y_1{}^2$, $x_2{}^2 y_2{}^2, \cdots$, deren Summen wir durch $\Sigma(x^2 y^2)$ ausdrücken können, die übrigen $n(n-1)$ Glieder haben Factoren ungleicher Indices, wie $x_1{}^2 y_2{}^2$, $\cdots$ und ihre Summe sei durch $\Sigma(x_p{}^2 y_q{}^2)$ ausgedrückt, wobei p und q zwei ungleiche Zahlen aus der Zahlenreihe von 1 bis n bedeuten. Der Ausdruck $[\Sigma(xy)]^2$ ist ein Quadrat einer n-gliedrigen Summe, besteht also aus $\frac{n(n+1)}{2}$ Gliedern, von denen n Glieder Quadrate sind, nämlich $x_1{}^2 y_1{}^2$, $x_2{}^2 y_2{}^2, \cdots$, deren Summe also wie oben schon durch $\Sigma(x^2y^2)$ ausgedrückt wird; die übrigen $\frac{n(n-1)}{2}$ Glieder sind doppelte Producte aus zwei Factoren von der Form $x_p y_p$ und $x_q y_q$, ihre Summe läßt sich also ausdrücken durch $2\,\Sigma(x_p y_p x_q y_q)$. Es ist also:

$$\Sigma(y^2)\Sigma(x^2) = \Sigma(x^2y^2) + \Sigma(x_p{}^2 y_q{}^2), \text{ und}$$

$$[\Sigma(xy)]^2 = \Sigma(x^2y^2) + 2\Sigma(x_p y_p x_q y_q), \text{ also ist}$$

$$\Sigma(y^2)\Sigma(x^2) - [\Sigma(xy)]^2 = \Sigma(x_p{}^2 y_q{}^2) - 2\Sigma(x_p y_p x_q y_q).$$

Die erste Summe auf der rechten Seite der letzten Gleichung enthält $n\,(n-1)$ Glieder, die zweite $\frac{n\,(n-1)}{2}$ Glieder, es bilden aber jedesmal zwei Glieder der ersten Summe mit einem Gliede der zweiten Summe ein Quadrat, z. B.

$$x_p{}^2 y_q{}^2 + x_q{}^2 y_p{}^2 - 2\,x_p y_p x_q y_q = (x_p y_q - x_q y_p)^2; \text{ folglich ist:}$$

$$\Sigma(y^2)\Sigma(x^2) - [\Sigma(xy)]^2 = \Sigma(x_p y_q - x_q y_p)^2$$

Die Summe der rechten Seite umfaßt $\frac{n\,(n-1)}{2}$ quadratische Glieder. Nun ist aber $x_p y_q - x_q y_p$ die doppelte Fläche des Dreiecks, dessen Ecken die drei Punkte oo, $x_p y_p$, $x_q y_q$ sind; bezeichnen wir den Inhalt dieses Dreiecks mit f_{pq}, so ist:

$$x_p y_q - x_q y_p = 2\,f_{pq}, \text{ und folglich:}$$

$$\Sigma(y^2)\,\Sigma(x^2) - [\Sigma(xy)]^2 = 4\,\Sigma(f^2), \text{ also:}$$

$$12)\quad [\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4\,[\Sigma(xy)]^2 = [\Sigma(r^2)]^2 - 16\,\Sigma(f^2),$$

worin unter f also der Reihe nach die Inhalte der $\frac{n\,(n-1)}{2}$ Dreiecke zu verstehen sind, deren gemeinschaftliche Spitze im Mittelpunkt der mittleren Entfernungen liegt und deren Grundlinien die einzelnen zwischen den Ecken des Polygons möglichen Verbindungslinien sind. Setzt man nun die in 11) und 12) festgestellten Werthe in 9) und 10) ein, so folgt:

$$13)\quad c = \sqrt{\frac{\sqrt{[\Sigma(r^2)]^2 - 16\,\Sigma(f^2)}}{n}},$$

$$S_1 = \frac{\Sigma(r^2) + \sqrt{[\Sigma(r^2)]^2 - 16\,\Sigma(f^2)}}{2}.$$

5) Fallen die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen mit dem Mittelpunkte der mittleren Entfernungen zusammen, so ist

$$a = b = o, \text{ also nach 6)}$$

$$\Sigma(xy) = o$$

$$\Sigma(y^2) = \Sigma(x^2).$$

Hieraus folgt, daß für $(n-1)$ beliebige Punkte jedesmal ein n^{ter} Punkt so bestimmt werden kann, daß die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen zusammenfallen.

6) Die Lage der durch den Mittelpunkt der mittleren Entfernungen und durch die Mittelpunkte gleicher Quadratsummen gelegten Geraden gegen die Abscissen-Axe OX bestimmt sich durch den Quotienten $\frac{b}{a}$; es ist aber nach 8)

$$14)\quad \frac{b}{a} = \frac{b^2}{ab} = \frac{\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2) - \sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4\,[\Sigma(xy)]^2}}{2\,\Sigma(xy)}.$$

§ 4.

Lehrsatz. Die Mittelpunkte gleicher Quadratsummen eines Polygons oder einer Gruppe von Punkten, die in einer Ebene liegen, liegen auf derjenigen unter den durch den Mittelpunkt der mittleren Entfernungen gehenden Geraden, für welche die Quadratsumme der aus den Ecken des Polygons oder aus jenen Punkten gefällten Lothe ein Maximum ist.

Beweis. Die Gleichung 5) giebt den Werth der gedachten Quadratsumme für eine beliebige Gerade an, wobei der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Mittelpunkte der mittleren Entfernungen zusammenfällt. Soll die Gerade durch diesen Punkt selbst gehen, so ist $z = a$ zu setzen, und der Werth für S geht jetzt über in:

$$S = \frac{a^2 \Sigma(y^2) - 2ab\,\Sigma(xy) + b^2 \Sigma(x^2)}{a^2 + b^2}.$$

Nimmt man nun a als constant und b als veränderlich an und läßt b alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ durchlaufen, so hat auch die durch O und M gehende Gerade alle möglichen Lagen durchlaufen; es fragt sich nun, bei welchem Werthe von b der Werth von S ein Maximum ist.*) Es sei b_1 dieser Werth und S_1 dieses Maximum, so ist also:

$$S_1 = \frac{a^2 \Sigma(y^2) - 2ab_1\,\Sigma(xy) + b_1^{\,2} \Sigma(x^2)}{a^2 + b_1^{\,2}}.$$

Subtrahirt man ein S von S_1 und bringt man die beiden Glieder der Differenz auf gemeinschaftlichen Nenner, so folgt:

$$15)\quad S_1 - S = \frac{a(b_1 - b)\,[a(b_1 + b)(\Sigma(x^2) - \Sigma(y^2)) + 2(bb_1 - a^2)\Sigma(xy)]}{(a^2 + b_1^{\,2})(a^2 + b^2)}.$$

Ist S_1 ein Maximalwerth von S, so ist $S_1 - S$ eine stets positive Größe, folglich sind die beiden veränderlichen Factoren der rechten Seite zugleich positiv und zugleich negativ, müssen also auch zugleich der Null gleich werden können. Daraus folgt, daß für $b = b_1$ der Werth der [] in 15) der Null gleich zu setzen ist; es ist demnach:

$$16)\quad 2ab_1\,[\Sigma(x^2) - \Sigma(y^2)] + 2(b_1^{\,2} - a^2)\Sigma(xy) = 0.$$

Löst man diese Gleichung nach b_1 auf, so folgt:

$$17)\quad b_1 = a \cdot \frac{\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2) \pm \sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2}}{2\Sigma(xy)}.$$

Dieselbe Rechnung bei ganz ähnlichen Schlüssen würde sich ergeben, wenn man den Werth S_2, der ein Minimum von S ist, suchen wollte. Deßhalb ist zu vermuthen, daß der eine der beiden Werthe von b_1 auf ein Maximum, der andere auf ein Minimum führt.

---

*) Ueber die im Nachfolgenden angewendete Methode zur Bestimmung des Maximums sehe man des Verfassers „Neue allgemeine Methode zur elementaren Bestimmung des Maximums und Minimums. Halle, Schrödel und Simon," in welcher Schrift der hier allgemein behandelte Gegenstand vom Dreieck dargestellt ist.

Um diese beiden Werthe zu unterscheiden, subtrahire man den Nullwerth aus (16) von dem Inhalt der [] in 15) und man erhält nach einiger Umformung:

$$S_1 - S = \frac{a(b_1 - b)^2 [a(\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)) - 2b_1 \Sigma(xy)]}{(a^2 + b_1{}^2)\,(a^2 + b^2)}.$$

Substituirt man für b_1 im Innern der [] den oben gefundenen Doppelwerth, so folgt:

$$S_1 - S = \mp \frac{a(b_1 - b)^2}{(a^2 + b_1{}^2)\,(a^2 + b^2)} \sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2}.$$

Je nachdem S_1 ein Maximum oder ein Minimum ist, muß $S_1 - S$ positiv oder negativ sein; demnach deutet in (17) nur das untere Zeichen auf ein Maximum, und es ist für unseren Zweck:

$$18)\quad b_1 = a\,\frac{\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2) - \sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2}}{2\,\Sigma(xy)}.$$

Der hieraus sich sofort ergebende Werth für $\frac{b_1}{a}$ stimmt vollständig mit dem in 14) aufgestellten Werth für $\frac{b}{a}$ überein, woraus nun folgt, daß auf unserer Maximumslinie die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen liegen.

§ 5.

Zusätze. 1) Man findet den Maximumswerth S_1, wenn man aus 18) den Werth für b_1 in den oben für S_1 aufgestellten noch unbestimmten Ausdruck einsetzt.

Die hierzu nöthige Rechnung vereinfacht sich, wenn man zuvor den Ausdruck für b_1 umformt. Dieser Ausdruck hat offenbar die Form:

$$b_1 = a \cdot \frac{A - \sqrt{A^2 + B^2}}{B}$$ und läßt folgende Umformung zu:

$$b_1 = a\sqrt{\frac{(A - \sqrt{A^2 + B^2})^2}{B^2}} = a\sqrt{\frac{(A - \sqrt{A^2 + B^2})^2\,(A + \sqrt{A^2 + B^2})}{B^2(A + \sqrt{A^2 + B^2})}}$$

$$= a\sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{A + \sqrt{A^2 + B^2}}}.$$ Also ist:

$$b_1 = a\sqrt{\frac{\Sigma(x^2) - \Sigma(y^2) + \sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2}}{\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2) + \sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2}}}.$$

Die Substitution dieses Werthes führt bald auf:

$$19)\ S_1 = \frac{\Sigma[y^2) + \Sigma(x^2) + \sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2}}{2};$$

das ist derselbe Werth, der bereits in § 2, 10) als constante Quadratsumme der auf eine beliebige durch einen Mittelpunkt gleicher Quadratsummen gehende Gerade gefällten Lothe gefunden ist, und ist diese Uebereinstimmung eine weitere Bestätigung dafür, daß diese Mittelpunkte auf der Maximumslinie liegen.

2) Bezeichnet b_2 denjenigen Werth von b, der der Minimumslinie entspricht, so ist

$$b_2 = a\, \frac{\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2) + \sqrt{[\Sigma(y^2, - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2}}{2\Sigma(xy)}.$$

Der eine der beiden Werthe b_1 und b_2 ist positiv, der andere negativ; abgesehen vom Vorzeichen ist ihr geometrisches Mittel gleich a, woraus folgt, daß die Maximums- und die Minimumslinie auf einander senkrecht stehen.

3) Bezeichnet man mit S_2 die Quadratsumme der auf die Minimumslinie gefällten Lothe, so liefert die Substitution von b_2 in dem oben für S aufgestellten Ausdruck:

$$20)\ S_2 = \frac{\Sigma(y^2) + \Sigma(x^2) - \sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2}}{2} = \frac{\Sigma(r^2) - \sqrt{[\Sigma(r^2)]^2 - 16\Sigma(f^2)}}{2}.$$

Hieraus folgt:

$$S_1 - S_2 = \sqrt{[\Sigma(y^2) - \Sigma(x^2)]^2 + 4[\Sigma(xy)]^2} = \sqrt{[\Sigma(r^2)]^2 - 16\,\Sigma(f^2)}.$$

Vergleicht man hiermit Gl. 9, so findet man:

$$21)\ c = \sqrt{\frac{S_1 - S_2}{n}},$$

$$S_2 = S_1 - nc^2.$$

§ 6.

Lehrsatz. Geht die erste von zwei Parallelen durch den Mittelpunkt der mittleren Entfernungen eines n-Ecks, und bildet man für beide die Quadratsummen der aus den Ecken auf sie gefällten Lothe, so ist für die erste Gerade diese Quadratsumme um das n-fache Quadrat des Abstandes beider Parallelen von einander kleiner als die Quadratsumme für die zweite Gerade.

Beweis. Ist die erste Quadratsumme S, die zweite S^1, der Abstand beider Parallelen von einander d, so soll $S^1 = S + nd^2$ sein. Sind die auf die erste Gerade gefällten Lothe $v_1, v_2 \cdots v_n$, die auf die zweite gefällten Lothe aber $v'_1, v'_2 \cdots v'_n$, so ist:

$$S = \Sigma(v^2),\ S' = \Sigma(v'^2),$$

$$v'^2 = v_1 \pm d,\ v'_2 = v_2 \pm d_1 \text{ u. s. f., also ist:}$$

$$S'^2 = \Sigma(v'^2) = \Sigma(v \pm d)^2 = \Sigma(v^2) \pm 2\,\Sigma(vd) + \Sigma(d^2).$$

Nun ist aber:

$$\Sigma(vd) = d\,\Sigma(v) = o,$$

weil die erste Gerade durch den Mittelpunkt der mittleren Entfernungen geht, und ferner ist $\Sigma(d^2) = nd^2$, also ist

$$22)\quad S' = \Sigma(v^2) + \Sigma(d^2) = S + nd^2.$$

§ 7.

Zusätze. 1) Hat die durch den Mittelpunkt der mittleren Entfernungen gehende Gerade von einem Mittelpunkte der gleichen Quadratsummen den Abstand d, so ist $S = S' - nd^2$.

2) Hat eine beliebige Gerade von den beiden Mittelpunkten gleicher Quadratsummen die Abstände d und d', so ist für dieselbe

23) $S = S_1 + ndd'$. Denn denkt man sich zu der Geraden eine Parallele durch den Mittelpunkt der mittleren Entfernungen gelegt, so hat diese von jedem Mittelpunkte gleicher Quadratsummen die Entfernung $\frac{d - d'}{2}$, für sie hat also die Quadratsumme unserer Lothe den Werth: $S_1 - n\left[\frac{d - d'}{2}\right]^2$; von dieser Geraden hat aber die ursprünglich gegebene Gerade den Abstand $\left[\frac{d + d'}{2}\right]$, es folgt also:

$$S = S_1 - n\left[\frac{d - d'}{2}\right]^2 + n\left[\frac{d + d'}{2}\right]^2 = S_1 + ndd'.$$

Hierbei ist angenommen, daß die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen auf derselben Seite der Geraden liegen; liegen sie auf entgegengesetzten Seiten derselben, geht also die Gerade zwischen dem Mittelpunkte der mittleren Entfernungen und einem Mittelpunkte gleicher Quadratsummen durch, so ist einer der beiden Werthe d und d' negativ zu nehmen und es ist dann: $S = S_1 - ndd'$.

3) Die im Mittelpunkte der mittleren Entfernungen auf der durch die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen gehenden Geraden errichtete Senkrechte ist daher

diejenige Gerade, für welche die Quadratsumme der aus den Polygonecken auf sie gefällten Lothe ein absolutes Minimum ist. Der Werth dieses absoluten Minimums ist als S_2 in 20) und 21) angegeben.

§ 8.

Lehrsatz. Der geometrische Ort derjenigen Geraden, für welche die Quadratsumme der aus den Ecken eines Polygons oder aus den Punkten einer gegebenen Gruppe auf sie gefällten Lothe einen gegebenen Werth hat, ist ein Kegelschnitt, dessen zwei Brennpunkte mit den Mittelpunkten gleicher Quadratsummen zusammenfallen.

Beweis. Es sei A der gegebene Werth, so ist

$$A = S_1 + ndd',$$

wobei S_1 die bisherige Bedeutung hat und d und d′ wieder die übereinstimmend liegenden Lothe aus den Mittelpunkten gleicher Quadratsummen auf unsere Gerade bedeuten. Hiernach ist nun:

$$dd' = \frac{A - S_1}{n}.$$

Der gesuchte geometrische Ort ist demnach eine Curve von der Eigenschaft, daß das Rechteck unten den aus zwei festliegenden Punkten auf eine beliebige Tangente derselben gefällten Lothen einen unveränderlichen Werth hat. Diese Eigenschaft findet sich bei der Ellipse und der Hyperbel, wenn ihre Brennpunkte als die Ausgangspunkte der beiden Lothe genommen werden; bei der Ellipse haben beide Lothe übereinstimmende, bei der Hyperbel entgegengesetzte Lage. In dem letzten Falle ist einer der beiden Werthe von d und d′ negativ zu denken; bezeichnen aber diese Buchstaben nur die absoluten Werthe, so geht die letzte Gleichung über in:

$$dd' = \frac{S_1 - A}{n}.$$

Ist also $A > S_1$, so ist der gesuchte geometrische Ort eine Ellipse, ist $A < S_1$, so ist er eine Hyperbel.

§ 9.

Zusatz. Es sei (Fig. 2) O der Mittelpunkt der mittleren Entfernungen des gegebenen Polygons, A und B seien die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen, OD senkrecht zu AB. Da S_2 die absolut kleinste Quadratsumme von Lothen, die aus den Polygonecken auf irgend eine Gerade gefällt werden, ist, so darf A nicht kleiner als S_2 sein.

Ist $A = S_2$, so hat die Gerade nur die eine Lage OD; der geometrische Ort ist eine Gerade.

Ist $A > S_2$ und $< S_1$, so ist der geometrische Ort eine Hyperbel, deren Brennpunkte in A und B liegen und deren Asymptoten sich in O schneiden. Je mehr A sich dem Werthe S_1 nähert, desto kleiner wird der Winkel, den die Asymptoten mit der Hauptaxe bilden.

Ist $A = S_1$, so geht die Hyperbel in die Gerade AB mit den festen Punkten A und B über. Diese Gerade ist die Uebergangsform der Hyperbel in die Ellipse.

Ist $A > S_1$, so ist der geometrische Ort eine Ellipse mit den Brennpunkten in A und B.

In dem besonderen Falle, daß die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen zusammenfallen, ist der gesuchte geometrische Ort ein Kreis.

§ 10.

Aufgabe. Von einer Gruppe von n Punkten sind die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen gegeben; man soll durch Construction die neuen Mittelpunkte gleicher Quadratsummen bestimmen, wenn zu den n Punkten noch ein neuer Punkt hinzutritt.

Auflösung. Es seien in Fig. 3 A und B die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen der n Punkte; halbirt nun O die Strecke AB, so ist O der Mittelpunkt der mittleren Entfernungen der n Punkte. Nun wollen wir O als Anfangspunkt der Coordinaten nehmen und die Abscissenaxe OX durch den einen Mittelpunkt der gleichen Quadratsummen legen, die Ordinatenaxe OY stehe senkrecht darauf. Ist nun P ein weiterer $(n+1)^{\text{ter}}$ Punkt (in der Figur nicht angegeben) gegeben, zieht man dann die Gerade OP und theilt sie von O aus in O' in dem Verhältniß $1 : n$, so daß $OO' = \frac{O'P}{n}$ ist, so ist O' der Mittelpunkt der mittleren Entfernungen sämmtlicher $(n+1)$ Punkte.

Es sei die Lage des Punktes O' bestimmt durch die Coordinaten $OC = g$ und $O'C = h$. Von O' nach OY ziehe man $O'D // OX$. Durch O' sei eine beliebige Gerade gezogen, die OY in E und OX in F schneidet, und deren Lage durch die Strecke $DE = z$ bestimmt sei. Wir bestimmen zunächst den Werth T der Quadratsumme der aus sämmtlichen $(n+1)$ Punkten auf EF gefällten Lothe. Bezeichnet nun wie bisher S_1 die unveränderliche Quadratsumme der aus den n ersten Punkten auf irgend eine durch A gelegte Gerade gefällten Lothe, fällt man aus A, B und O auf EF die Lothe

AG, BH, OJ und beachtet man, daß das aus P auf EF gefällte Loth das nfache von OJ ist, so hat man nach § 7:

$$T = S_1 + n\,AG \cdot BH + (n \cdot OJ)^2$$

Nun folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke in Fig. 3 sehr einfach, wenn wir wie bisher $OA = OB = c$ setzen:

$$OF = \frac{O'D \cdot OE}{ED} = \frac{g\,(h+z)}{z},$$

$$AF = \frac{g\,(h+z)}{z} - c = \frac{gh + (g-c)z}{z},$$

$$BG = \frac{g\,(h+z)}{z} + c = \frac{gh + (g+c)z}{z},$$

$$AG = \frac{DE \cdot AF}{O'E} = \frac{gh + (g-c)z}{\sqrt{g^2+z^2}},$$

$$BH = \frac{DE \cdot BF}{O'E} = \frac{gh + (g+c)z}{\sqrt{g^2+z^2}},$$

$$OJ = \frac{AG + BH}{2} = \frac{gh + gz}{\sqrt{g^2+z^2}};\ \text{also:}$$

$$T = S_1 + n\,\frac{g^2(h+z)^2 - c^2z^2}{g^2+z^2} + \frac{n^2g^2(h+z)^2}{g^2+z^2}$$

$$= S_1 + \frac{n(n+1)g^2(h+z)^2 - nc^2z^2}{g^2+z^2}$$

$$= S_1 + n \cdot \frac{z^2[(n+1)g^2 - c^2] + 2(n+1)g^2hz + (n+1)g^2h^2}{z^2+g^2}.$$

Setzt man nun der Einfachheit wegen:

23) $\frac{c^2}{n+1} = f^2$, so daß f die mittlere Proportionale zu c und $\frac{c}{n+1}$ ist, so ist:

24) $$T = S_1 + n(n+1)\,\frac{z^2(g^2 - f^2) + 2g^2hz + g^2h^2}{z^2+g^2}.$$

Nun suchen wir denjenigen Werth z_1 von z, bei welchem T den Maximalwerth T_1 annimmt, so folgt bei Benutzung der bereits in § 4 angewendeten Methode:

$$T_1 = S_1 + n(n+1) \cdot \frac{z_1^{\,2}(g^2 - f^2) + 2g^2hz_1 + g^2h^2}{z_1^{\,2} + g^2},$$

25) $$T_1 - T = n(n+1) \cdot \frac{g^2(z_1 - z)[-(f^2 + h^2 - g^2)(z_1 + z) - 2hz_1z + 2g^2h]}{(z_1^{\,2} + g^2)(z^2 + g^2)}.$$

Ist nun T_1 ein Maximum von T, so ist $T_1 - T$ stets positiv, die beiden veränderlichen Factoren haben also stets gleiches Vorzeichen, werden also auch gleichzeitig der Null gleich. Es folgt also für $z = z_1$:

$$26) \quad -2 z_1 (f^2 + h^2 - g^2) - 2 h z_1{}^2 + 2 g^2 h = o.$$

Aus dieser Gleichung folgt nun:

$$z_1 = \frac{-(f^2 + h^2 - g^2) \pm \sqrt{(f^2 + h^2 - g^2)^2 + 4 g^2 h^2}}{2 h} \quad \text{oder}$$

$$27) \quad z_1 = \frac{-(f^2 + h^2 - g^2) \pm \sqrt{[(f+g)^2 + h^2]\,[(f-g)^2 + h^2]}}{2 h}.$$

Das eine der beiden Vorzeichen deutet auf ein Maximum, das andere auf ein Minimum; um diese beiden Fälle zu unterscheiden, subtrahire man den Nullwerth aus 26) von dem Inhalte der [] in 25), und es folgt:

$$T_1 - T = n(n+1) g^2 \frac{(z_1 - z)^2 [2 h z_1 + f^2 + h^2 - g^2]}{(z_1{}^2 + g^2)(z^2 + g^2)}$$

$$= \pm \frac{n(n+1) g^2 (z_1 - z)^2 \sqrt{(f^2 + h^2 - g^2)^2 + 4 f^2 g^2}}{2 h (z_1{}^2 + g^2)(2^2 + g^2)}.$$

Deshalb deutet das obere Zeichen auf ein Maximum und das untere auf ein Minimum. Setzt man nun den Werth für z_1 mit dem oberen Zeichen in den allgemeinen Ausdruck für T_1, so folgt nach einiger Umformung:

$$T_1 = S_1 + \frac{n(n+1)}{2} \left[g^2 + h^2 - f^2 + \sqrt{[(f+g)^2 + h^2]\,[(f-g)^2 + h^2]} \right].$$

Derjenige Werth von z_1, der aus dem unteren Zeichen sich ergiebt, liefert das Minimum von T; bezeichnen wir dasselbe mit T_2, so giebt die Substitution:

$$T_2 = S_1 + \frac{n(n+1)}{2} \left[g^2 + h^2 - f^2 - \sqrt{[(f+g)^2 + h^2]\,[(f-g)^2 + h^2]} \right].$$

Die beiden gesuchten Mittelpunkte gleicher Quadratsummen liegen auf der durch den ersten Werth von z_1 bestimmten Maximumslinie (§ 4), bezeichnen wir nun ihren Abstand von O' mit c', so folgt nach Analogie von 21):

$$28) \quad c' = \sqrt{\frac{T_1 - T_2}{n+1}} = \sqrt{n \sqrt{[(f+g)^2 + h^2]\,[(f-g)^2 + h^2]}}.$$

Die Lage der Maximumslinie und der Werth von c' lassen sich nun in folgender Weise durch Construction finden:

Die Punkte O und O¹, C und D und die Axen OX und OY sollen in Fig. 4 dieselbe Bedeutung als in Fig. 3 haben, so daß also auf OX die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen zu denken sind. Nun trage man auf OX von O aus die Länge $OK = OL = f = \frac{c}{\sqrt{n+1}}$, d. h. die mittlere Proportional zu c und $\frac{c}{n+1}$ ab; dann lege man durch L, K und O' einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf OY liegt und der OY in N und R schneidet; die Gerade ON ist die Maximumslinie, auf welcher die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen liegen. Es ist nämlich

$$O'K = \sqrt{(f-g)^2+h^2},$$

$$O'L = \sqrt{(f+g)^2+h^2},$$

$$MO' = \frac{O'K \cdot O'L}{2O'C} = \frac{\sqrt{[(f+g)^2+h^2][(f-g)^2+h^2]}}{2h},$$

$$MD = \sqrt{MO'^2 - O'D^2} = \sqrt{\frac{[(f+g)^2+h^2][(f-g)^2+h^2] - 4g^2h^2}{4h^2}} = \frac{f^2+h^2-g^2}{2h}.$$

Demnach ist also:

$$DN = MO' - MD = \frac{-(f^2)+h^2-g^2) + \sqrt{[(f+g)^2+h^2][(f-g)^2+h^2]}}{2h}.$$

Es ist demnach NO' die Gerade, auf welcher die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen sich befinden. Ferner ist nun: $c' = \sqrt{n \cdot O'K \cdot O'L}$ eine leicht zu construirende Länge, die von O' auf O'N beiderseitig abgetragen die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen liefert.

Schließlich ist

$$g^2+h^2-f^2 = OO'^2 - OK^2 = OO'^2 + OK^2 - 2\,OK^2 = \frac{O'K^2 + O'L^2}{2} - 2\,OK^2, \text{ also ist}$$

$$T_1 = S_1 + \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{(O'K + O'L)^{2'}}{2} - 2\,OK^2\right]$$

$$= S_1 + \frac{n(n+1)}{4}\left[O'K + O'L + LK\right]\left[O'K + O'L - LK\right].$$

§ 11.

Zusätze. 1) Fallen die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen der n Punkte zusammen, so ist $OK = OL = 0$, die Gerade O'N steht dann senkrecht auf OO', und es ist $c' = OO' \sqrt{n \cdot}$; $T_1 = S_1 + n(n+1)\,OO'^2$.

2) Liegt der neue Punkt P also auch O' auf der durch den Mittelpunkt der mittleren Entfernungen gelegten Minimumslinie OY, so ist $g = o$, also auch $z_1 = o$,

die Gerade O'N ist OX parallel, und es ist $c' = \sqrt{n(f^2+h^2)}$ ein leicht zu construirender Werth. Es ist $T_1 = S_1 + n(n+1)\, OO'^2$.

3) Fällt O' mit O zusammen, so ist auch $h = o$, es bleibt die Maximumslinie O'N in der Lage OX und es ist $c' = \sqrt{nf^2} = \sqrt{\frac{nc^2}{n+1}} = c\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. Es ist $T_1 = S_1$.

4) Liegt der neue Punkt P und also auch O' auf der Maximumslinie OX, so ist $h = o$, und es folgt aus 28):

$$c' = \sqrt{n(f^2-g^2)},\ \text{wenn}\ f > g,\ \text{aber}\ c' = \sqrt{n(g^2-f^2)},\ \text{wenn}\ g > f,$$

denn es ist in 27) und 28) die innere Wurzel stets in ihrem positiven Werthe zu nehmen. Um den Ausdruck für z_1 von seiner unbestimmten Form zu befreien, denke man zunächst h sehr klein, so daß die höheren Potenzen vernachlässigt werden können; es ist dann zunächst, wenn $f > g$ ist:

$$\sqrt{[(f+g)^2+h^2][(f-g)^2+h^2]} = f^2-g^2+\frac{f^2+g^2}{f^2-g^2}\,h^2,\ \text{also:}$$

$z_1 = \frac{g^2 h}{f^2-g^2}$; für $h = o$, ist also auch $z_1 = o$, und die Gerade O'N fällt mit OX zusammen. Es ist $T_1 = S_1$. Ist aber $f > g$, so ist:

$$\sqrt{[(f+g)^2+h^2][(f-g)^2+h^2]} = g^2-f^2+\frac{f^2+g^2}{g^2-f^2}\,h^2,\ \text{und}$$

$z_1 = \frac{g^2-f^2}{h}$, also für $h = o$ ist $z_1 = \infty$, d. h. die Gerade O'N steht auf OX senkrecht. $T_1 = S_1 + n\,(n+1)\,(g^2-f^2)$. Ist $f = g$, so wird z_1 unbestimmt und $c' = o$, es ist also für diesen Fall O' zugleich Mittelpunkt gleicher Quadratsummen. Will man also zu n gegebenen Punkten einen $(n+1)^{\text{ten}}$ so bestimmen, daß für alle $(n+1)$ Punkte die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen zusammenfallen, so ist zu setzen $g = f = \frac{c}{\sqrt{n+1}}$; da nun der neue Punkt in diesem Falle von O einen Abstand hat gleich $(n+1)\,g$, so ist also dieser Abstand $c\sqrt{n+1}$.

5) Die eben gewonnenen Resultate ergeben sich auch durch eine Betrachtung der Gleichung 24). Für $h = o$ ist:

$$T = S_1 + n\,(n+1)\,(g^2-f^2)\cdot\frac{z^2}{z^2+g^2},\ \text{d. h.}$$

$$T = S_1 - n\,(n+1)\,(f^2-g^2)\cdot\frac{z^2}{z^2+g^2}.$$

Nun ist aber $\frac{z^2}{z^2+g^2}$ offenbar für $z=o$ ein Minimum und für $z=\infty$ ein Maximum; also ist für $f>g$ T ein Maximum wenn $z=o$, aber für $f<g$, wenn $z=\infty$ ist. Ist $f=g$, so ist $T=S_1$, hat also einen von z unabhängigen Werth.

§ 12.

Aufgabe. Die Mittelpunkte gleicher Quadratsummen für zwei Punkte zu finden.

Auflösung. Für einen Punkt A fällt offenbar der Mittelpunkt der mittleren Entfernung O und der Mittelpunkt gleicher Quadratsummen mit A zusammen. Ist also $n=1$, so ist $c=o$, $S_1=o$. Ist nun ein zweiter Punkt B (Fig. 5) gegeben und ist $AB=l$, so liegt jetzt der Mittelpunkt O' der mittleren Entfernungen in der Mitte zwischen A und B, es ist also $OO'=AO'=\frac{1}{2}l$. Nach § 11 1) steht nun die Gerade O'N, auf welcher die gesuchten Punkte liegen, in O' senkrecht auf O'A und es ist $c'=OO'\sqrt{n}=\frac{1}{2}l$. Errichtet man also auf der Mitte von AB das Loth O'M und macht $O'M=O'N=\frac{1}{2}AB$, so sind M und N die Mittelpunkte gleicher Quadratsummen für A und B. — Ferner ist $T_1=S_1+n(n+1)\,OO^2=2\,AO'^2=\frac{1}{2}\,AB'^2$.

Zusatz. Für jede durch den Scheitel des rechten Winkels eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks gezogene Gerade hat die Quadratsumme der aus den Endpunkten der Hypotenuse auf sie gefällten Lothe denselben Werth, und zwar ist dieser Werth gleich dem halben Hypotenusen-Quadrat.

§ 13.

Aufgabe. Die Mittelpunkte gleicher Quadratsummen für drei Punkte zu finden.

Auflösung. Es seien wieder A und B (Fig. 6) die ersten zwei Punkte und M und N die zu ihnen gehörigen Mittelpunkte gleicher Quadratsummen, O sei der Halbirungspunkt von AB. Es sei ferner $AB=l$. C sei der dritte Punkt; man ziehe OC und mache $OO'=\frac{1}{3}OC$, dann ist O' der Mittelpunkt der mittleren Entfernungen für alle drei Punkte. Nun mache man $OK=OL=\frac{OM}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}l\sqrt{3}$; es sind also K und L die Mittelpunkte zweier über AB beschriebenen gleichseitigen Dreiecke. Nun beschreibe man durch K, L und O' einen Kreis, der AB in R und Q schneidet; zieht man nun O'Q, so liegen auf dieser Geraden die beiden Mittelpunkte gleicher Quadratsummen. Der Abstand c' jedes dieser beiden Mittelpunkte bestimmt sich durch die Construction der Formel $c'=\sqrt{2O'K \cdot O'L}$.

(Wir brechen hier wegen Mangel an Raum ab und überlassen es dem Leser, die oben allgemein entwickelten Gesetze auf Figuren von besonderer Gestalt zu übertragen.)

Fig. 1.

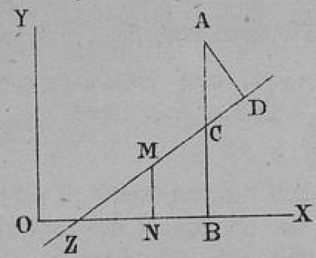

Fig. 2.

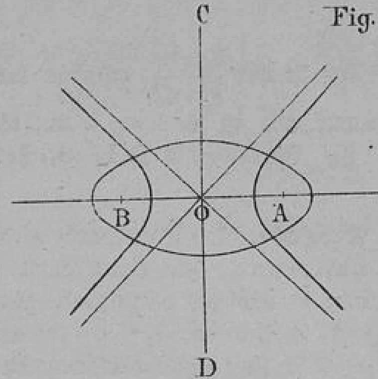

Fig. 3.

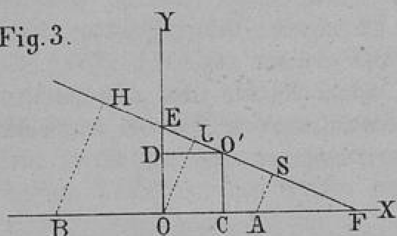

Fig. 4.

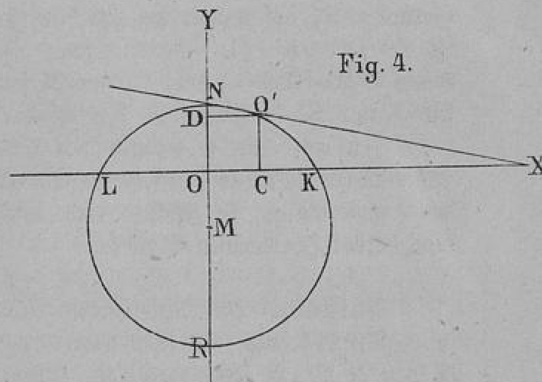

Fig. 5.

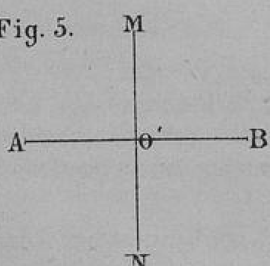

Fig. 6.