Programm

des

Realgymnasiums

in

den Franckeschen Stiftungen zu Halle

für

das Schuljahr 1883—1884

vom

Direktor Dr. Schrader,
Inspektor des Realgymnasiums.

I. Teil:
Die Determinanten im Schulunterricht
und ihre Anwendung auf Gegenstände der analytischen Geometrie.
Von Direktor Dr. Schrader.

Halle a. S.,
Druck der Buchdruckerei des Waisenhauses.

1884.

1884. Progr. Nr. 239.

Die Determinanten im Schulunterricht

und ihre Anwendung auf Gegenstände der analytischen Geometrie.

Die große Bedeutung, welche die Determinanten für die höhere Rechnung erlangt haben, legt die Notwendigkeit nahe, die Einführung in die Elemente dieser Rechnung schon in der Schule vorzunehmen, weshalb auch einzelne Staaten diesen Zweig des mathematischen Unterrichts obligatorisch für ihre höheren Schulen gemacht haben. Man kann kaum sagen, daß hierdurch der mathematische Unterricht besonders belastet wird; denn die geringe Zeit, welche ausreichend ist, um die Elemente der Determinantenlehre einzuüben, wird reichlich wieder eingebracht durch den Gewinn, welcher in der erlangten Vereinfachung vieler Rechnungen erzielt wird. Deshalb sollten alle die Schulen, welche die analytische Geometrie in den Kreis ihrer Unterrichtsgegenstände aufgenommen haben, es nicht versäumen, diesem Unterricht die Elemente der Determinantenlehre vorauszuschicken, falls dieselben nicht in dem Vortrage der Analysis Platz gefunden haben. Aber insofern durch die Anwendung der Determinanten auf geometrische Gegenstände in der Rechnung eine Einfachheit gewonnen wird, welche die Klarheit der geometrischen Konstruktion erreicht, wenn nicht zuweilen übertrifft, hat die Determinantenlehre auch an sich hohen didaktischen Wert.

Im Nachfolgenden sollen zunächst in gedrängter Ableitung die Hauptsätze aus den Elementen der Determinantenlehre, so weit sie für den höheren Schulunterricht zweckmäßig und ausreichend sind, zusammengestellt werden, um sodann daran die fruchtbare Anwendung derselben auf Gegenstände der analytischen Geometrie anzuknüpfen.

I. Die Determinanten im Schulunterricht.

1. Eine Determinante n. Grades wird von n^2 Elementen gebildet, die in n Horizontalreihen (Zeilen) und n Vertikalreihen (Spalten) geordnet sind, und man versteht unter der Determinante die algebraische Summe aller Produkte, die man erhält, wenn man aus jeder Horizontalreihe und aus jeder Vertikalreihe je ein Element als Faktor nimmt. Von diesen Produkten erhalten je zwei dann entgegengesetzte Vorzeichen, wenn sie sich nur in der Reihenfolge zweier Indices unterscheiden, wobei dasjenige Produkt, welches aus den Elementen der Hauptdiagonale der quadratisch geordneten Elemente gebildet ist, das positive Vorzeichen enthält.

Es ist:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 d_3 - a_1 b_3 c_2 d_4 + a_1 b_3 c_4 d_2 + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_1 b_4 c_3 d_2 \\ - a_2 b_1 c_3 d_4 + a_2 b_1 c_4 d_3 + a_2 b_3 c_1 d_4 - a_2 b_3 c_4 d_1 - a_2 b_4 c_1 d_3 + a_2 b_4 c_3 d_1 \\ + a_3 b_1 c_2 d_4 - a_3 b_1 c_4 d_2 - a_3 b_2 c_1 d_4 + a_3 b_2 c_4 d_1 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_3 b_4 c_2 d_1 \\ - a_4 b_1 c_2 d_3 + a_4 b_1 c_3 d_2 + a_4 b_2 c_1 d_3 - a_4 b_2 c_3 d_1 - a_4 b_3 c_1 d_2 + a_4 b_3 c_2 d_1. \end{cases}$$

2. Jedes Element besitzt einen Zeilenindex und einen Spaltenindex. Man erhält nun sämtliche Glieder der Determinante, wenn man die eine Art der Indices in der natürlichen Reihenfolge beibehält, dagegen die andere Art permutiert. Deshalb ist die Zahl der Glieder einer Determinante n. Grades gleich n!. Deshalb ist auch das Vorzeichen irgend eines Gliedes der Determinante positiv oder negativ, jenachdem die Reihenfolge der verstellbaren Indices in ihm sich durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen aus der Reihenfolge derselben Indices des ersten Gliedes ableiten läßt.

Das 18. Glied der obigen Entwicklung $-a_3 b_4 c_2 d_1$ hat das Minuszeichen, weil die Stellung seiner Indices 3421 aus der ursprünglichen durch dreimalige Umstellung gefunden wird. Es folgt: 1234, 3214, 3412, 3421.

3. Da die Definition keinen Unterschied zwischen Zeilen und Spalten macht, so bleibt eine Determinante unverändert, wenn man unter Beibehaltung der Reihenfolge die Zeilen in Spalten und die Spalten in Zeilen verwandelt.

Es ist:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

4. Ebenso folgt unmittelbar aus der Definition, daß abgesehen vom Vorzeichen die Glieder der Determinante dieselben bleiben, wenn man auch die Reihenfolge der Zeilen oder Spalten beliebig verändert. Es bleiben auch die Vorzeichen dieselben, wenn man die veränderte Folge der Zeilen hervorgebracht hat, indem man eine gerade Anzahl mal die Reihen vertauscht hat, dagegen kehren sich alle Vorzeichen und damit auch das Vorzeichen der Determinante um, wenn diese Vertauschungen eine ungerade Anzahl mal stattgefunden haben.

5. Man kann also einer Determinante n. Grades eine 2n!mal veränderte Gestalt geben; von diesen verschiedenen Formen stimmt die Hälfte mit der ursprünglichen Determinante auch im Vorzeichen überein, die andere Hälfte hat das entgegengesetzte Vorzeichen.

6. Im besonderen liegen in dem allgemeinen Satze Nr. 4 folgende Behauptungen: Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei gleichnamige Reihen miteinander vertauscht. Verrückt man eine Reihe parallel um eine gerade oder ungerade Anzahl von Reihen, so bleibt der Wert der Determinante unverändert, oder er verkehrt sein Vorzeichen.

Es ist:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

7. Da die Null die einzige Zahl ist, deren Wert sich bei verändertem Vorzeichen nicht ändert, so folgt, daß eine Determinante mit zwei identischen gleichnamigen Reihen den Wert Null hat.

Es ist:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Denkt man sich in einer Determinante n. Grades in Bezug auf ein bestimmtes Element die diesem Elemente zugehörige Zeile und Spalte fort, so bleibt eine Determinante (n — 1). Grades übrig, die man positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Summe der beiden Indices jenes bestimmten Elementes eine gerade oder ungerade Zahl ist. Diese so bestimmte Determinante (n — 1). Grades nennt man die Unterdeterminante jenes Elementes.

In der in Nr. 1 aufgestellten Determinante ist die Unterdeterminante zu b_3:

$$-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}.$$

9. Jedes einzelne Element einer Determinante n. Grades tritt in $(n-1)!$ Gliedern derselben auf, sondert man dasselbe aus diesen Gliedern aus, so erkennt man, daß es in ihnen mit seiner Unterdeterminante multipliziert ist. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Jede Determinante ist gleich der Summe der Produkte, die man erhält, wenn man die Elemente irgend einer Reihe mit ihren Unterdeterminanten multipliziert. — Es lassen sich bei einer Determinante n. Grades $2n$ solcher Summen bilden, von welchen jede den Wert der Determinante angiebt.

Die in Nr. 1 aufgestellte Determinante löst sich nach den Elementen der dritten Spalte auf in folgende Summe:

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - d_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}.$$

10. Unmittelbar folgt nun, daß eine Determinante, wenn die Elemente einer Reihe bis auf eins Nullen sind, gleich dem Produkt dieses einzelnen Elementes mit seiner Unterdeterminante ist.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = -c_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

11. Umgekehrt kann man jede Determinante in eine andere, um einen Grad höhere Determinante verwandeln, wenn man an beliebiger Stelle eine neue Zeile und eine neue Spalte einführt, an der Kreuzungsstelle beider Reihen eine Eins anbringt, in die übrigen Stellen der einen Reihe Nullen, der anderen Reihe aber willkürliche Zahlen setzt, dem Ganzen aber ein Minuszeichen zufügt, wenn die Indexsumme der beiden neuen Reihen eine ungerade Zahl ist.

Es ist: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ p & q & r & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix}$. Für p, q, r können beliebige Zahlenwerte gesetzt werden.

12. Multipliziert man die Unterdeterminanten, welche zu den Elementen einer Reihe gehören, nicht mit diesen Elementen, sondern mit beliebigen anderen Faktoren, so ist die Summe der erhaltenen Produkte einer Determinante gleich, welche man erhält, wenn man in der ursprünglichen Determinante an die Stelle der Elemente, deren Unterdeterminanten genommen waren, entsprechend jene beliebigen Faktoren setzt.

Demnach ist: $p \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - s \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & p & a_4 \\ b_1 & b_2 & q & b_4 \\ c_1 & c_2 & r & c_4 \\ d_1 & d_2 & s & d_3 \end{vmatrix}.$

13. Ein besonderer Fall dieses Satzes ist folgender: Multipliziert man die Unterdeterminanten der Elemente einer Reihe mit den gleichnamigen Elementen einer anderen Parallelreihe, so ist die Summe der Produkte gleich Null. — Aus jeder Determinante n. Grades lassen sich also $2n(n-1)$ solcher Summen ableiten, die gleich Null sind.

Demnach ist: $a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$

14. Weiter folgt aus Nr. 9, daß man den allen Elementen einer Reihe gemeinschaftlichen Faktor aussondern und als Faktor der Determinante schreiben kann, so wie, daß man eine Determinante mit einer Zahl multipliziert oder dividiert, wenn man die Elemente einer Reihe mit dieser Zahl multipliziert oder dividiert.

Es ist: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ nb_1 & nb_2 & nb_3 & nb_4 \\ mc_1 & mc_2 & mc_3 & mc_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

15. Eine Determinante hat den Wert Null, wenn die Elemente zweier Reihen proportional sind.

Es ist: $$\begin{vmatrix} ma_1 & ma_2 & ma_3 & ma_4 \\ na_1 & na_2 & na_3 & na_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

16. Ebenso folgt aus Nr. 9, dem Prinzip der Auflösung einer Determinante nach den Elementen einer Reihe, daß man zwei Determinanten gleichen Grades, die in allen gleichnamigen Reihen bis auf eine übereinstimmen, algebraisch addieren kann, wenn man diese Addition mit den Elementen der nicht übereinstimmenden Reihen vornimmt, die übrigen Reihen aber unverändert läßt. Umgekehrt kann man eine Determinante, in welcher die Elemente einer Reihe Summen sind, in die Summe von Determinanten auflösen, deren Elemente einfach sind. — Hat man eine Determinante n. Grades, deren Elemente m gliedrige Summen sind, so läßt sich dieselbe auflösen in m^n Determinanten mit einfachen Elementen.

Es ist: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 + a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 + b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 + c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 + d_5 \end{vmatrix}.$$

17. Addiert man zu den Elementen einer Reihe oder subtrahiert man von ihnen das beliebige Vielfache der entsprechenden Elemente einer anderen Reihe, so bleibt der Wert der Determinante unverändert. Denn löst man nach Nr. 16 diese Determinante wieder auf, so erhält man zunächst die erste wieder und dann eine zweite, welche nach Nr. 15 gleich Null ist.

Mit Hilfe dieses fruchtbaren Satzes kann man zunächst eine gegebene Determinante so umformen, daß die Elemente die möglichst kleinsten Werte erhalten; dann kann man so umformen, daß die Elemente einer Reihe bis auf eins Nullen werden, worauf sich dann der Grad der Determinante um eins erniedrigen läßt.

Es ist: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 + na_3 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 + nb_3 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 + nc_3 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 + nd_3 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

18. Haben die aus den Elementen zweier oder mehrerer Reihen in gleicher Weise gebildeten algebraischen Summen einen Faktor gemein, so ist derselbe auch ein Faktor der Determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\,(a+b-c-d)\,(a+c-b-d)\,(a+d-b-c).$$

Jeder dieser vier Faktoren läßt sich aus den Elementen jeder Zeile jedesmal in derselben Weise bilden, dann aber ist auch das erste Glied der Determinante gleich dem ersten Gliede des Produkts.

19. Multipliciert man zwei Determinanten gleichen Grades miteinander, so läßt sich das Produkt als eine Determinante desselben Grades darstellen, in welcher das k. Element der l. Reihe die Summe der

Produkte aus den Elementen der k. Reihe der einen mit den Elementen der l. Reihe der anderen Determinante ist. Da man zu diesen Reihen beliebig die Zeilen oder Spalten nehmen kann, so kann man die Produktdeterminante in vier verschiedenen Formen schreiben. — In der Produktdeterminante ist jedes Element eine Summe von n Gliedern, wenn die beiden multiplizierten Determinanten n. Grades waren. Löst man diese Determinante nach Nr. 16 auf, so erhält man n^n einfache Determinanten. Von diesen verschwinden nach Nr. 15 alle diejenigen, in welchen man aus den Summen der Elemente wenigstens zwei gleichnamige Summanden zusammengestellt hatte, und es bleiben nur diejenigen übrig, in denen nur ungleichnamige Summanden zusammentreten. Ihre Anzahl ist nur n!. Jede Zeile oder Spalte dieser Determinanten hat einen Faktor gemein; sondert man nun aus jeder der n! Determinanten diese n Faktoren aus, so bleibt überall dieselbe Determinante, nämlich eine der beiden ursprünglichen Determinanten übrig, die ausgesonderten n! Produkte aber schließen sich abermals zu einer Determinante, nämlich zu der zweiten der gegebenen Determinanten, zusammen. Die aufgelöste Determinante war also das Produkt der beiden gegebenen.

Es ist:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

20. Ersetzt man in einer Determinante jedes Element durch seine Unterdeterminante, so heißt die neue Determinante die konjugierte der gegebenen.

21. Der Wert der konjugierten Determinante einer Determinante n. Grades ist die (n — 1). Potenz der letzteren. — Man beweist diesen Satz, indem man zeigt, daß das Produkt der Determinanten mit ihrer konjugierten gleich der n. Potenz der ersteren ist. Führt man diese Multiplikation nach Nr. 19 aus, so erhält man eine Determinante, in welcher alle Elemente ngliederige Summen sind. Jede Summe, die in der Hauptdiagonale steht, hat nach Nr. 9 den Wert der gegebenen Determinante, jede andere Summe ist nach Nr. 13 gleich Null. Deshalb reduziert sich der Wert des Ganzen auf das Produkt der in der Hauptdiagonale stehenden Zahlen, also auf die n. Potenz des Wertes der gegebenen Determinante.

Bezeichnet man die zu den Elementen der in Nr. 1 aufgestellten Determinante zugehörigen Unterdeterminanten mit den entsprechenden großen Buchstaben, so ist:
$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}^3.$$

22. Die Hauptanwendung der Determinantenlehre in der Arithmetik erstreckt sich auf die Auflösung algebraischer Gleichungen ersten Grades. Hat man n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten, so lassen sich dieselben stets so schreiben, daß die übereinstimmend geordneten unbekannten Glieder auf der einen Seite, die bekannten absoluten Glieder allein auf der anderen Seite stehen. Dann lassen sich die geordneten Koeffizienten der n Unbekannten als die Elemente einer Determinante n. Grades ansehen, so daß in jeder Spalte die Koeffizienten derselben Unbekannten stehen. Multipliziert man nun jede Gleichung mit der Unterdeterminante, die zu dem in ihr vorkommenden Koeffizienten einer gewissen, zu bestimmenden Unbekannten gehört, und addiert alle Produkte, so fallen nach Nr. 13 (n — 1) Summen und damit (n — 1) Unbekannte weg, und es bleibt bloß das Produkt der einen Unbekannten mit der Determinante aller Koeffizienten übrig, und die Summe der Produkte auf der anderen Seite läßt sich nach Nr. 12 ebenfalls als Determinante schreiben. Das Resultat kann man aber in folgender Weise ausdrücken:

Hat man n Gleichungen mit n Unbekannten, welche in der angegebenen Weise geordnet sind, so ist jede dieser Unbekannten gleich einem Quotienten; der Divisor desselben ist die Determinante aus allen

Koeffizienten der Unbekannten, der Dividendus aber wird aus der Divisor-Determinante abgeleitet, indem man an die Stelle der Koeffizienten der zu bestimmenden Unbekannten die entsprechenden absoluten Werte substituiert.

Sind folgende vier algebraische Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 &= a_5 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 &= b_5 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 &= c_5 \\ d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4 &= d_5 , \end{aligned}$$

so geben diese Gleichungen sofort ohne weitere Zwischenrechnung die Lösung:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_5 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_5 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_5 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_5 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_5 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_5 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_5 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}, \text{ u. s. f.}$$

23. Ganz gleichbedeutend mit Nr. 22 ist folgendes Eliminationsverfahren:

Hat man n auf Null gebrachte und geordnete Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten, und will man $(n-1)$ derselben eliminieren, so ist das Resultat eine gleich Null gesetzte Determinante, in welcher $(n-1)$ Spalten durch die Koeffizienten der eliminierten Unbekannten, die n. Spalte aber durch die beiden übrigen Glieder der n Gleichungen gebildet werden. Da der Wert der Determinante Null ist, so kommt es auf die Reihenfolge der Spalten nicht an.

Will man aus den in Nr. 22 aufgestellten vier algebraischen Gleichungen die drei Unbekannten x_1, x_3, x_4 eliminieren, so ist das Ergebnis der Elimination:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 x_2 - a_5 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 x_2 - b_5 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 x_2 - c_5 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 x_2 - d_5 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

24. Wir schließen hier mit einem speziellen Satze, der zwar noch eine reiche Verallgemeinerung zuläßt, den wir aber für das Folgende nur in dieser Beschränkung gebrauchen werden. — Bildet man aus den Elementen einer Determinante dritten Grades eine Determinante zweiten Grades, deren Elemente die Unterdeterminanten zu den Eckelementen jener ersten Determinante sind, so ist die letzte gleich der ersten multipliziert mit ihrem mittelsten Elemente. — Löst man die zusammengesetzte Determinante auf, so erhält man acht Glieder, von welchen sich zwei wegheben, die übrigen haben jenes mittelste Element zum gemeinschaftlichen Faktor, nach dessen Aussonderung die ursprüngliche Determinante übrigbleibt.

Es ist:

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Es braucht wohl nicht versichert zu werden, daß die hier aufgestellten Sätze nicht sofort in dieser Allgemeinheit an die Schüler gebracht werden, sondern daß die in ihnen zum Ausdruck gebrachten Thatsachen zuerst an einfachen Beispielen zur Anschauung und Erkenntnis gebracht werden, bis sich die allgemeine Fassung ergiebt. Dennoch ist der Gegenstand einfach und in seiner Folgerichtigkeit so leicht eingehend, daß man den oben gegebenen Abriß der Elemente in einer Prima eines Realgymnasiums in etwa 6 Unterrichtsstunden bis zu ausreichender Fertigkeit absolvieren kann.

II. Anwendung der Determinanten auf Gegenstände der analytischen Geometrie.

1. Wir wollen unter dem Punkt (k) denjenigen Punkt verstehen, dessen — meist rechtwinklig zu denkende — Koordinaten x_k und y_k sind. Der doppelte Inhalt (2 J) des Dreiecks, dessen Ecken die drei Punkte (1) (2) (3) sind, läßt sich in Determinantenform schreiben:

$$2\,J = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix}.$$

2. Der Inhalt des Vierecks, dessen Ecken die Punkte (1) bis (4) sind, bestimmt sich durch die Addition der Inhaltswerte der beiden Dreiecke (1) (2) (3) und (1) (3) (4). Es ist:

$$2\,J = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 \\ x_4 & y_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Liegt der veränderliche Punkt $x\,y$ in gerader Linie mit den beiden festen Punkten (1) (2), so ist der Inhalt des durch diese Punkte bestimmten Dreiecks gleich Null, und wir erhalten aus Nr. 1 sofort die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ als Gleichung der gedachten Geraden.}$$

Aber auch abgesehen von dieser Ableitung erkennt man unmittelbar aus dieser Gleichung ihre Bedeutung. Sie ist nach x und y vom ersten Grade, bezeichnet also eine gerade Linie; diese geht durch die Punkte (1) und (2), weil die Gleichung nach I 7 erfüllt wird, wenn $x\,y$ in $x_1\,y_1$ oder in $x_2\,y_2$ übergehen.

4. Diese Schlußweise eröffnet eine weite Perspektive. Kennt man die allgemeine Gestalt der Gleichung einer Linie und ist eine ausreichende Anzahl von Punkten gegeben, durch welche die Linie gehen soll, so kann man sofort die Gleichung der Linie in Determinantenform schreiben. Die Glieder der in ihrer allgemeinen Gestalt bekannten Gleichung bilden ohne die zur Zeit unbekannten Koeffizienten die Elemente der ersten Zeile. Ist m die Anzahl dieser Elemente, so besitzt die Gleichung (m — 1) selbständige Koeffizienten, und es sind ebenso viele Punkte nötig, um die Lage der Linie zu bestimmen. Setzt man die Koordinaten dieser Punkte an die Stelle der veränderlichen Koordinaten der ersten Zeile, so erhält man die übigen (m — 1) Zeilen, welche mit der ersten Zeile eine Determinante des m. Grades bilden, welche gleich Null gesetzt die Gleichung der Linie giebt. So hat z. B. die Gleichung 2. Grades in x und y sechs Glieder mit 5 unabhängigen Koeffizienten; es genügen also 5 Punkte, durch welche der Kegelschnitt gehen soll, zu seiner Bestimmung. Die Koordinaten dieser fünf Punkte lassen sofort eine Determinante 6. Grades entstehen, welche die Gleichung des Kegelschnitts liefert. Die Koeffizienten der einzelnen Gleichungsglieder erscheinen als die Unterdeterminanten, welche zu den Elementen der ersten Zeile gehören. Kennt man nun die geometrische Bedeutung dieser Koeffizienten, so lassen sich manche Eigentümlichkeiten der Kurve unmittelbar aus der Determinantengleichung ablesen. Beispiele werden folgen. Vergl. Nr. 16, 19, 21, 24.

5. Unter der Geraden (k) wollen wir diejenige Gerade verstehen, welche durch die Gleichung $A_k x + B_k y + C_k = 0$ dargestellt wird. Bezeichnet man die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden

(1) und (2) mit x_0 und y_0, so findet man die Werte derselben durch algebraische Auflösung der beiden Gleichungen für (1) und (2) und man erhält sofort nach I 22:

$$x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad y_0 = - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

6. Will man den Inhalt (J) des Dreiecks finden, welches von den drei Geraden (1) (2) (3) eingeschlossen wird, so bestimme man nach Nr. 5 die Koordinaten der drei Schnittpunkte und setze ihre Werte in den Wert der Nr. 1 ein. Man findet nach einer nahe liegenden Umformung zunächst:

$$2\,J = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_3 & C_3 \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}.$$

Nun ist offenbar nach I 20 die zusammengesetzte Determinante des Dividendus die konjugierte Determinante zu:

$$\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

ist also nach I 21 gleich dem Quadrat derselben; da aber hier die erste Zeile nach I 6 an die dritte Stelle gesetzt werden kann, so folgt:

$$2\,J = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2 : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}.$$

Schneiden sich die drei Geraden in einem Punkte, so verschwindet der Inhalt des von ihnen begrenzten Dreiecks, und man erhält als Bedingsgleichung

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe Gleichung erhält man unmittelbar, wenn man aus den drei Gleichungen für die Geraden die jetzt übereinstimmenden Werte für x und y nach I 23 eliminiert.

7. Die Gleichung einer der Winkelhalbierenden, welche die von den Geraden (1) und (2) gebildeten Winkel halbieren, ist:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}} = \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2}} \text{ oder:}$$

$$x \begin{vmatrix} A_1 & \sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \\ A_2 & \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2} \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} B_1 & \sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \\ B_2 & \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & \sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \\ C_2 & \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Bestimmt man ebenso die Gleichung einer Winkelhalbierenden der Geraden (2) und (3) und bestimmt durch algebraische Auflösung beider Gleichungen die Koordinaten $x_0\, y_0$ des Schnittpunktes derselben, so erhält man zunächst für x_0 nach I 22 einen Quotienten zweier Determinanten zweiten Grades, deren Elemente wiederum Determinanten zweiten Grades sind; beide lassen sich aber nach I 24 in Determinanten dritten Grades mit einfachen Elementen verwandeln. Man erhält:

$$x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & \sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \\ B_2 & C_2 & \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2} \\ B_3 & C_3 & \sqrt{A_3{}^2 + B_3{}^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \\ A_2 & B_2 & \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2} \\ A_3 & B_3 & \sqrt{A_3{}^2 + B_3{}^2} \end{vmatrix}$$

Den Wert für y_0 findet man ohne besondere Rechnung einfach durch Vertauschung der A-Werte mit den B-Werten. Es folgt:

$$y_0 = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 & \sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \\ A_2 & C_2 & \sqrt{A_1{}^2 + B_2{}^2} \\ A_3 & C_3 & \sqrt{A_3{}^2 + B_3{}^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \\ A_2 & B_2 & \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2} \\ A_3 & B_3 & \sqrt{A_3{}^2 + B_3{}^2} \end{vmatrix}.$$

Die Symmetrie dieser Ausdrücke zeigt, daß durch diesen Schnittpunkt auch die eine der Halbierenden des dritten Winkels der drei Geraden gehen muß.

8. Will man den Radius r des Berührungskreises finden, der den Punkt $x_0\, y_0$ zum Mittelpunkt hat, so findet man bekanntlich:

$$r = \frac{A_1\, x_0 + B_1\, y_0 + C_1}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}}.$$

Setzt man hier für x_0 und y_0 die oben gefundenen Werte, bringt das C-Glied auf denselben Nenner, den die beiden vorhergehenden Glieder haben, so nimmt der Dividendus nach I 12 folgende Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \\ A_2 & B_2 & C_2 & \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2} \\ A_3 & B_3 & C_3 & \sqrt{A_3{}^2 + B_3{}^2} \end{vmatrix}.$$

Denken wir an die Stelle 0 der ersten Zeile das Element $\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}$ eingesetzt, so hätte die Determinante nach I 7 den Wert Null, woraus folgt, daß sie in der vorliegenden Gestalt den Wert

$$\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

hat. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch, wenn man nach I 17 die Elemente der ersten Zeile von denen der zweiten abzieht und dann nach I 10 verfährt. — Es folgt also:

$$r = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \\ A_2 & B_2 & \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2} \\ A_3 & B_3 & \sqrt{A_3{}^2 + B_3{}^2} \end{vmatrix}$$

Nun giebt es für die Winkelhalbierenden eines Dreiecks vier Punkte, in denen sich je drei Winkelhalbierende schneiden, und ebenso vier Berührungskreise. Man findet für die drei übrigen Fälle die entsprechenden Werte, wenn man in den oben aufgestellten Ausdrücken je eine der drei Quadratwurzeln mit dem negativen Vorzeichen nimmt.

9. In dem Dreieck, dessen Ecken die drei Punkte (1) (2) (3) sind, ist die Gleichung für das von der Ecke (1) ausgehende Höhenperpendikel

$$x\,(x_2 - x_3) + y\,(y_2 - y_3) - x_1\,(x_2 - x_3) - y_1\,(y_2 - y_3) = 0.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung und aus der ähnlichen für das von der Ecke (2) ausgehende Lot nach I 22 durch algebraische Auflösung die Koordinaten $(x_0\, y_0)$ des Schnittpunktes, so erhält man zunächst:

$$x_0 = -\begin{vmatrix} y_2 - y_3 & x_1\,(x_2 - x_3) + y_1\,(y_2 - y_3) \\ y_3 - y_1 & x_2\,(x_3 - x_1) + y_2\,(y_3 - y_1) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Formt man diese Determinanten nach I 11, 17, 14, 6 um, so nimmt zunächst die Determinante des Dividendus folgende Formen an:

$$\begin{vmatrix} y_3 & -x_1 x_2 - y_1 y_2 & 1 \\ y_2 - y_3 & x_1(x_2 - x_3) + y_1(y_2 - y_3) & 0 \\ y_3 - y_1 & x_2(x_3 - x_1) + y_2(y_3 - y_1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_3 & -x_1 x_2 - y_1 y_2 & 1 \\ y_2 & -x_1 x_3 - y_1 y_3 & 1 \\ -y_1 & x_2 x_3 + y_2 y_3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_3 & x_1 x_2 + y_1 y_2 & 1 \\ y_2 & x_1 x_3 + y_1 y_3 & 1 \\ y_1 & x_2 x_3 + y_2 y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & x_2 x_3 + y_2 y_3 & 1 \\ y_2 & x_1 x_3 + y_1 y_3 & 1 \\ y_3 & x_1 x_2 + y_1 y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ebenso folgt für die Determinante des Divisors

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ -x_1 & -y_1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Deshalb ist:

$$x_0 = \begin{vmatrix} y_1 & x_2x_3+y_2y_3 & 1 \\ y_2 & x_1x_3+y_1y_3 & 1 \\ y_3 & x_1x_2+y_1y_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Durch Vertauschung der Buchstaben findet man:

$$y_0 = - \begin{vmatrix} x_1 & x_2x_3+y_2y_3 & 1 \\ x_2 & x_1x_3+y_1y_3 & 1 \\ x_4 & x_1x_2+y_1y_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Symmetrie dieser Ausdrücke zeigt, daß auch die dritte Dreieckshöhe durch denselben Punkt geht.

10. Behandelt man zwei Mittelsenkrechte dieses Dreiecks, so erhält man in ähnlicher Weise für die Koordinaten $x_0\,y_0$ ihres Schnittpunktes die Werte:

$$x_0 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ und } y_0 = -\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

11. Ebenso erhalten wir für den Durchschnittspunkt der Mittellinien des Dreiecks:

$$x_0 = -\tfrac{1}{3} \begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1y_2-x_2y_1 & 1 \\ x_2-x_3 & x_2y_3-x_3y_2 & 1 \\ x_3-x_1 & x_3y_1-x_1y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ und } y_0 = -\tfrac{1}{3} \begin{vmatrix} y_1-y_2 & x_1y_2-x_2y_1 & 1 \\ y_2-y_3 & x_2y_3-x_3y_2 & 1 \\ y_3-y_1 & x_3y_1-x_1y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber $x_0 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ und $y_0 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$; es müssen sich also die eben gefundenen Werte noch weiter umformen lassen. Die Determinante im Dividendus für x_0 nimmt nun nach I 16, 6, 16 nach und nach folgende Formen an:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1y_2-x_2y_1 & 1 \\ x_2 & x_2y_3-x_3y_2 & 1 \\ x_3 & x_3y_1-x_1y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_1y_2-x_2y_1 & 1 \\ x_3 & x_2y_3-x_3y_2 & 1 \\ x_1 & x_3y_1-x_1y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1y_2-x_2y_1 & 1 \\ x_2 & x_2y_3-x_3y_2 & 1 \\ x_3 & x_3y_1-x_1y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3y_1-x_1y_3 \\ x_2 & x_1y_2-x_2y_1 \\ x_3 & x_2y_3-x_3y_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1(y_2+y_3)-y_1(x_2+x_3) & 1 \\ x_2 & x_2(y_3+y_1)-y_2(x_3+x_1) & 1 \\ x_3 & x_3(y_1+y_2)-y_3(y_1+y_2) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1(y_1+y_2+y_3)-y_1(x_1+x_2+x_3) & 1 \\ x_2 & x_2(y_1+y_2+y_3)-y_2(x_1+x_2+x_3) & 1 \\ x_3 & x_2(y_1+y_2+y_3)-y_3(x_1+x_2+x_3) & 1 \end{vmatrix} = -(x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Daraus ergiebt sich für x_0 der erwartete Wert. Ebenso ist der Ausdruck für y_0 zu behandeln.

12. Unter dem Kreis (a, b, r) wollen wir den Kreis verstehen, dessen Mittelpunkt die Koordinaten a, b hat und dessen Radius r ist, zugleich setzen wir $a^2 + b^2 - r^2 = c$. Die allgemeine Gleichung des Kreises ist nun:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

So oft nun eine Bestimmung eines Kreises auf eine Gleichung führt, in welcher die Koeffizienten a, b, c im ersten Grade vorkommen, so oft läßt sich diese Gleichung zur Determinantenbildung benutzen. Das ist zunächst der Fall, wenn der Kreis durch einen gegebenen Punkt gehen soll. Sind $x_1\,y_1$ die Koordinaten dieses Punktes, so hat man die Gleichung

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c = 0,$$

in welcher a, b und c nur im ersten Grade vorkommen.

Soll ferner der gesuchte Kreis den gegebenen Kreis $(a_1\,b_1\,r_1)$ rechtwinklig schneiden, so ist die Zentrale beider Kreise die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die beiden Radien sind. Es ist also

$$(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 = r^2 + r_1^2 \text{ oder}$$

$$a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - 2aa_1 - 2bb_1 + c = 0, \text{ denn es ist } a^2 + b^2 - r^2 = c.$$

Diese Gleichung enthält die Koeffizienten a, b, c nur im ersten Grade.

Soll der gesuchte Kreis den gegebenen Kreis $(a_1 b_1 r_1)$ halbierend schneiden, so ist der Radius des ersten Kreises die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem die Zentrale beider Kreise und der Radius des zweiten Katheten sind. Es ist alsdann:

$$(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + r_1{}^2 = r^2 \text{ oder}$$
$$a_1{}^2 + b_1{}^2 + r_1{}^2 - 2aa_1 - 2bb_1 + c = 0.$$

Soll der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der Geraden

$$Ax + By + C = 0$$

liegen, so ist $\quad Aa + Bb + C = 0,$

wofür man auch die Form $\quad -2C - 2aA - 2bB = 0$ wählen kann.

Ein Kreis ist durch drei Bestimmungsstücke bestimmt. Werden diese in der oben bezeichneten Art gewählt, so läßt sich die Aufgabe so lösen, daß sich die Gleichung des gesuchten Kreises sofort ohne weitere Rechnung niederschreiben läßt. Von den vier oben angegebenen Bestimmungsarten kann jede der drei ersten ein bis dreimal gewählt werden, die vierte aber nur ein oder zwei mal, da der Kreismittelpunkt nicht zugleich auf drei beliebigen Geraden liegen kann. Hieraus ergeben sich 19 verschiedene Aufgaben, die in der angegebenen Art behandelt werden können. Es möge hier nur eine derselben herausgehoben werden.

Soll ein Kreis bestimmt werden, der durch den Punkt (1) geht, den Kreis $(a_1 b_1 r_1)$ rechtwinklig und einen zweiten Kreis $(a_2 b_2 r_2)$ halbierend schneidet, so ergiebt sich als Gleichung des Kreises:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ a_1{}^2 + b_1{}^2 - r_1{}^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + r_2{}^2 & a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Will man für diesen Kreis die Lage des Mittelpunktes d. h. die Koordinaten a, b seines Mittelpunktes finden, so findet man aus dieser Determinante sofort:

$$a = \begin{vmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 & y_1 & 1 \\ a_1{}^2 + b_1{}^2 - r_1{}^2 & b_1 & 1 \\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + r_2{}^2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} : 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ und}$$

$$b = -\begin{vmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1 & 1 \\ a_1{}^2 + b_1{}^2 - r_1{}^2 & a_1 & 1 \\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + r_2{}^2 & a_2 & 1 \end{vmatrix} : 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Da man ebenfalls c angeben kann, es ist:

$$c = -\begin{vmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1 & y_1 \\ a_1{}^2 + b_1{}^2 - r_1{}^2 & a_1 & b_1 \\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + r_2{}^2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix},$$

so findet man auch den Radius aus: $r^2 = a^2 + b^2 - c$.

13. Ist $x_1 y_1$ ein Punkt auf der Peripherie des Kreises

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

so ist die Gleichung für die Tangente dieses Punktes:

$$x_1 x + y_1 y - a(x + x_1) - b(y + y_1) + c = 0 \text{ oder}$$
$$x(x_1 - a) + y(y_1 - b) - ax_1 - by_1 + c = 0.$$

Ist nun die Tangente gegeben durch die Gleichung:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

welcher Gleichung auch die Form: $\quad Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0,$

gegeben werden kann, so folgt aus der Identifizierung beider Gleichungen die Doppelgleichung:

$$\frac{x_1 - a}{A} = \frac{y_1 - b}{B} = \frac{ax_1 + by_1 - c}{Ax_1 + By_1}.$$

Je nachdem man den ersten dieser drei Quotienten gleich dem zweiten oder gleich dem dritten oder den zweiten gleich dem dritten setzt, so folgen folgende drei geordnete Gleichungen:

$$x_1 B - y_1 A - aB + bA = 0$$
$$x_1 (Ax_1 + By_1) - a(2Ax_1 + By_1) - Aby_1 + Ac = 0$$
$$y_1 (Ax_1 + By_1) - aBx_1 - b(Ax_1 + 2By_1) + Bc = 0.$$

Nimmt man dazu noch die Gleichung für den Punkt $x_1 y_1$:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c = 0,$$

so hat man für die angegebene Bestimmung des Kreises vier Gleichungen, von denen allerdings nur zwei von einander unabhängig sind. Zwei beliebige von ihnen kann man zur Determinantenbildung benutzen; man wird am besten dazu die beiden einfachsten, also die erste und vierte benutzen.

Soll man die Gleichung eines Kreises angeben, welcher die Gerade

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

in dem Punkte x_1 y_1 berührt und dessen Mittelpunkt auf der Geraden

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

liegt, so erhält man dafür nach dem vorigen sofort die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ 2(x_1 B - y_1 A) & B & -A & 0 \\ -2C_1 & A_1 & B_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

14. Ist von den drei Koeffizientenwerten der allgemeinen Gleichung einer bereits in der Aufgabe gegeben und sind die beiden anderen Bestimmungen zur Determinantenbildung brauchbar, so erhält man für die Gleichung des Kreises eine Determinante dritten Grades.

So ist die Gleichung eines Kreises, für welchen der Anfangspunkt der Koordinaten die Potenz c hat, und welcher durch die Punkte (1) und (2) geht, folgende:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + c & x & y \\ x_1^2 + y_1^2 + c & x_1 & x_1 \\ x_2^2 + y_2^2 + c & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso findet man als Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Abscisse a hat und der die beiden Kreise $(a_1 b_1 r_1)$ und $(a_2 b_2 r_2)$ rechtwinklig schneidet:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - 2ax & y & 1 \\ a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - 2aa_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2 + b_1^2 - r_2^2 - 2aa_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

15. Bestimmungsstücke des Kreises, welche auf eine Gleichung zwischen a, b und c führen, die nicht vom ersten Grade ist, schließen die Determinantenbildung aus. Soll der Kreis z. B. die Gerade $Ax + By + C = 0$ berühren, so ist zunächst:

$$r = \frac{Aa + Bb + c^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ oder}$$
$$a^2B^2 - 2ab\,AB + b^2A^2 - 2a\,AC - 2b\,BC - (A^2 + B^2)c - C^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber nach a, b und c nicht vom ersten Grade.

Soll der Kreis $(a_1 b_1 r_1)$ berührt werden, so ist

$$(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 = (r \pm r_1)^2 \text{ oder}$$
$$a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - 2aa_1 - 2bb_1 + c = \pm 2r_1 \sqrt{a^2 + b^2 - c},$$

eine Gleichung, welche ebenfalls zur Determinantenbildung nicht zu verwenden ist.

16. Die Gleichung einer Parabel, deren Achse mit der Abscissenachse parallel läuft, hat die Form:

$$y^2 - 2dx - 2ey + f = 0.$$

Giebt man dieser Gleichung die Form:

$$(y - e)^2 = 2d\left(x - \frac{f - e^2}{2d}\right),$$

so sieht man, daß der Scheitel der Parabel die Koordinaten $\frac{f - e^2}{2d}$ und e hat, und daß der Parameter $2d$ ist.

Eine solche Parabel ist durch drei Peripheriepunkte bestimmt. Sind dieselben in den Punkten (1) (2) (3) gegeben, so ist die Gleichung der Parabel:

$$\begin{vmatrix} y^2 & x & y & 1 \\ y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ y_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Parameter der Parabel ist also nach oben:

$$2d = \begin{vmatrix} y_1{}^2 & y_1 & 1 \\ y_2{}^2 & y_2 & 1 \\ y_3{}^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Ordinate des Scheitels ist:

$$e = -\begin{vmatrix} y_1{}^2 & x_1 & 1 \\ y_2{}^2 & x_2 & 1 \\ y_3{}^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} : 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Abscisse des Scheitels findet man nach dem Ausdruck $\frac{f - e^2}{2d}$, wenn man

$$f = -\begin{vmatrix} y_1{}^2 & x_1 & y_1 \\ y_2{}^2 & x_2 & y_2 \\ y_3{}^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

setzt.

17. Liegt der Punkt (1) auf der oben angegebenen Parabel, so ist die Gleichung seiner Tangente:

$$y_1 y - d(x + x_1) - e(y + y_1) + f = 0$$

oder

$$xd + y(e - y_1) + dx_1 + ey_1 - f = 0.$$

Ist diese Tangente durch die Gleichung

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

gegeben, so findet man analog dem Verfahren in Nr. 13:

$$\frac{d}{A} = \frac{e - y_1}{B} \text{ oder}$$

$$Ay_1 + Bd - Ae = 0.$$

Hiernach läßt sich sofort die Gleichung einer Parabel niederschreiben, deren Achse mit der Abscissenachse parallel läuft, und welche die Gerade $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ in dem Punkte $x_1 y_1$ berührt und durch den Punkt $x_2 y_2$ geht. Dieselbe ist:

$$\begin{vmatrix} y^2 & x & y & 1 \\ y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ 2Ay_1 & -B & A & 0 \\ y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

18. Denkt man sich außer der oben in Nr. 16 gedachten Parabel noch eine zweite durch dieselben drei Punkte gelegt, deren Achse aber mit der Ordinatenachse parallel läuft, so ist die Gleichung derselben:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Beide Parabeln schneiden sich noch in einem vierten Punkte. Daß dieser vierte Punkt mit den drei gegebenen auf einer Kreisperipherie liegt, folgt sofort, wenn man die Gleichungen beider Parabeln addiert. Man erhält nämlich nach I 16:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber nach Nr. 12 die Gleichung eines Kreises. Deshalb schneiden sich zwei Parabeln, deren Achsen auf einander senkrecht stehen, in vier Punkten eines Kreises.

Die Koordinaten des vierten Schnittpunktes lassen sich aus den Koordinaten der drei gegebenen Punkte leicht ableiten. Löst man die beiden Parabelgleichungen nach I 9 in Bezug auf die Elemente der ersten Zeilen auf, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$Ay^2 + Bx + Cy + D = 0 \text{ und}$$
$$Ax^2 + B'x + C'y + D' = 0,$$

in welchen die sieben Koeffizienten die leicht abzulesenden Unterdeterminanten der entsprechenden Elemente sind. Eliminiert man hieraus y, so erhält man für x eine Gleichung vierten Grades, von welcher nur die ersten zwei Glieder gebraucht werden; es ist:

$$x^4 + \frac{2B'}{A}x^3 + \cdots\cdots = 0.$$

Die vier Werte von x sind die Abscissen der vier Schnittpunkte, von denen drei Werte schon bekannt sind. Ihre negativ genommene Summe ist gleich $\frac{2B'}{A}$; da nun

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ und } B' = -\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

so folgt für den vierten Schnittpunkt:

$$x_4 = 2\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - (x_1 + x_2 + x_3) = \begin{vmatrix} x_1(x_1-x_2-x_3) & y_1 & 1 \\ x_2(x_2-x_1-x_3) & y_2 & 1 \\ x_3(x_3-x_1-x_2) & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ebenso findet man:

$$y_4 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1(y_1-y_2-y_3) & 1 \\ x_2 & y_2(y_2-y_1-y_3) & 1 \\ x_3 & y_3(y_3-y_1-y_2) & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

19. Hat die Parabel eine allgemeine Lage, und ist a der Winkelkoeffizient ihrer Achsenrichtung, so hat die Gleichung der Parabel die Form:

$$(y - ax)^2 - 2dx - 2ey + f = 0.$$

Ist nun a bekannt und soll außerdem die Parabel durch die drei Punkte gehen (1) (2) (3), so ist die Gleichung der Parabel:

$$\begin{vmatrix} (y-ax)^2 & x & y & 1 \\ (y_1-ax_1)^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ (y_2-ax_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ (y_3-ax_3)^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soll aber diese Parabel die Gerade

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

in dem Punkte (1) berühren und außerdem durch den Punkt (2) gehen, so findet man analog nach Nr. 13 und 17 die Parabelgleichung:

$$\begin{vmatrix} (y-ax)^2 & x & y & 1 \\ (y_1-ax_1)^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ 2(A+aB)(y_1-ax_1) & -B & A & 0 \\ (y_2-ax_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

20. Ist hingegen die Achsenrichtung unbekannt, sind aber vier Peripheriepunkte gegeben, so muß man darauf verzichten, die Gleichung der Parabel durch eine Determinante fünften Grades auszudrücken, wohl aber kann man die Achsenrichtung a aus der Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} (y_1-ax_1)^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ (y_2-ax_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ (y_3-ax_3)^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ (y_4-ax_4)^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

entwickeln.

Löst man nach I 16 diese Determinante nach den Gliedern der Elemente in der ersten Spalte auf, so findet man zur Bestimmung von a die quadratische Gleichung:

$$a^2\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} - 2a\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Es kann nun nicht schwer sein, diese beiden letzten Gleichungen für den Fall niederzuschreiben, daß die Parabel, anstatt durch den Punkt (4) zu gehen, in dem Punkte (1) die Gerade

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

berührt.

Soll aber die Parabel die Geraden

$$A\,(x-x_1)+B\,(y-y_1)=0 \text{ und}$$
$$A'(x-x_2)+B'(y-y_2)=0$$

beziehungsweise in den Punkten (1) und (2) berühren, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} (y_1-ax_1) & x_1 & y_1 & 1 \\ (y_2-ax_2) & x_2 & y_2 & 1 \\ 2(A+aB)(y_1-ax_1) & -B & A & 0 \\ 2(A'+aB')(y_2-ax_2) & -B' & A' & 0 \end{vmatrix}=0$$

und

$$a^2\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ -2Bx_1 & -B & A & 0 \\ -2B'x_2 & -B' & A' & 0 \end{vmatrix} - 2a\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ Ax_1-By_1 & -B & A & 0 \\ A'x_2-B'y_2 & -B' & A & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ 2Ay_1 & -B & A & 0 \\ 2A'y_2 & -B' & A & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Von den beiden Parabeln, welche im allgemeinen für diese Aufgaben möglich sind, geht in diesem letzten Falle die eine in zwei zusammenfallende gerade Linien über, für welche a den Wert $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ haben muß, da diese Doppelgerade durch die beiden Berührungspunkte geht. Daß aber der eine von den beiden Werten, die zu a gehören, gleich $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ist, giebt sich auch darin zu erkennen, daß dieser Wert der vorletzten Gleichung genügt. Substituiert man ihn in die vorletzte Determinante, so geht diese über in:

$$\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{(x_2-x_1)^2}\begin{vmatrix} y_1 x_2 - y_2 x_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_1 x_2 - y_2 x_1 & x_2 & y_2 & 1 \\ 2[A\,(x_2-x_1) + B\,(y_2-y_1)] & -B & A & 0 \\ 2[A'\,(x_2-x_1) + B'\,(y_2-y_1)] & -B' & A' & 0 \end{vmatrix}$$

Multipliziert man die Elemente der zweiten Spalte mit $2(y_2-y_1)$, die der dritten mit $2(x_2-x_1)$, addiert die ersten Produkte zu den Elementen der ersten Spalte, subtrahiert aber die zweiten Produkte davon, so geht diese Determinante über in:

$$-\left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2-x_1}\right)^2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & -B & A & 0 \\ 0 & -B' & A' & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese aber hat nach I 7 den Wert Null.

Für den anderen Wurzelwert von a findet man nun nach einer bekannten Eigenschaft quadratischer Gleichungen:

$$a = (x_2-x_1)\begin{vmatrix} y_1^{\,2} & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^{\,2} & x_2 & y_2 & 1 \\ 2A\,y_1 & -B & A & 0 \\ -2A'\,y_2 & -B' & A' & 0 \end{vmatrix} : (y_2-y_1)\begin{vmatrix} x_1^{\,2} & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^{\,2} & x_2 & y_2 & 1 \\ -2B\,x_1 & -B & A & 0 \\ -2B'\,x_2 & -B' & A' & 0 \end{vmatrix}.$$

Das ist also der Winkelkoeffizient für die Achsenrichtung der einen Parabel, welche die Gerade $A(x-x_1) + B(y-y_1) = 0$ in $x_1\,y_1$ und die Gerade $A'(x-x_2) + B'(y-y_2) = 0$ in $x_2\,y_2$ berührt.

21. Die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel, deren Achsen mit den Koordinatenachsen parallel laufen, ist:

$$ax^2 + cy^2 - 2dx - 2ey + f = 0.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form:

$$a\left(x - \frac{d}{a}\right)^2 + c\left(y - \frac{e}{c}\right)^2 + f - \frac{d^2}{a} - \frac{e^2}{c} = 0,$$

so sieht man, daß die Koordinaten des Mittelpunktes $\frac{d}{a}$ und $\frac{e}{c}$ und die Halbachsen

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{cd^2 + ae^2 - acf}{c}} \text{ und } \frac{1}{c}\sqrt{\frac{cd^2 + ae^2 - acf}{a}}$$

sind.

Da die Gleichung vier unabhängige Veränderliche besitzt, so ist die Kurve durch vier Bestimmungsstücke bestimmt. Sind dieses die vier Punkte (1) bis (4), die auf der Peripherie liegen sollen, so erhält man als Gleichung des Kegelschnitts:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^{\,2} & y_1^{\,2} & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^{\,2} & y_2^{\,2} & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^{\,2} & y_3^{\,2} & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^{\,2} & y_4^{\,2} & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Tangente in dem Punkte (1) wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$ax_1 x + cy_1 y - d\,(x + x_1) - e\,(y + y_1) + f = 0.$$

Soll diese Tangente gegeben sein durch die Gleichung:

$$A(x - x_1) + B\,(y - y_1) = 0,$$

so führt die Identifikation beider Gleichungen auf die ausreichende Gleichung:

$$aBx_1 - cAy_1 - Bd + Ae = 0.$$

Soll also unser Kegelschnitt die Gerade $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ in dem Punkte (1) und die Gerade $A'(x-x_2)+B'(y-y_2)=0$ in dem Punkte (2) berühren, so schreibt sich die Gleichung desselben in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ Bx_1 & -Ay_1 & -B & A & 0 \\ B'x_2 & -A'y_2 & -B' & A' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Bestimmt man nun aus diesen beiden Determinanten-Gleichungen die Werte für a, c, d, e, f durch die entsprechenden Unterdeterminanten, so kann man sofort die Koordinaten des Mittelpunkts und die Länge der Halbachsen angeben.

22. Liegt der Mittelpunkt eines Kegelschnitts im Anfangspunkt der Koordinaten, so hat bei allgemeiner Lage der Achsen die Gleichung desselben die Form:

$$ax^2+2bxy+cy^2+f=0.$$

Dieser Kegelschnitt ist durch drei Bestimmungsstücke bestimmt. Wir übergehen jetzt die Aufstellung der Gleichungen für Kegelschnitte dieser Art, wenn sie durch Peripheriepunkte oder durch Tangenten mit dem Berührungspunkte bestimmt sind, da Fälle dieser Art schon oben vorgekommen sind und einer noch vorkommen wird, sondern wir fragen sogleich, wie man die Lage der Achsen direkt finden kann. Ist a der Winkelkoeffizient für die eine Achsenrichtung, also $-\frac{1}{a}$ für die andere, so kann man die Gleichung der Ellipse auch in folgender Form schreiben:

$$(y-ax)^2+c(ay+x)^2+f=0.$$

Ist a bekannt, so sind zur Bestimmung des Kegelschnitts nur noch zwei Bestimmungsstücke nötig, diese können sein entweder zwei Peripheriepunkte oder eine Tangente mit dem Berührungspunkte. Für die Gleichung erhalten wir in beiden Fällen Determinanten dritten Grades. Ist aber a unbekannt, so sind drei Bestimmungsstücke nötig. Sind z. B. die drei Peripheriepunkte (1) (2) (3) gegeben, so erhält man zur Bestimmung von a die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (y_1-ax_1)^2 & (ay_1+x_1)^2 & 1 \\ (y_2-ax_2)^2 & (ay_2+x_2)^2 & 1 \\ (y_3-ax_3)^2 & (ay_3+x_3)^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante läßt sich nach I 16 in die Summe von neun einfachen Determinanten auflösen; drei von diesen sind Null nach I 15, von den sechs übrigen lassen sich je zwei durch Aussonderung der Faktoren und Umstellung der Reihen gleichartig machen und addieren; es folgt:

$$(a^4-1)\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & 1 \end{vmatrix} + 2a(a^2+1)\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & 1 \end{vmatrix} + 2a(a^2+1)\begin{vmatrix} y_1^2 & x_1y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2y_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch a^2+1 und addiert die letzten zwei Glieder, so erhält man:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & 1 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden Werte, welche man für a aus dieser Gleichung findet, sind die Winkelkoeffizienten für die beiden Achsen der einen Ellipse, welche möglich ist.

23. Ist die Lage des Kegelschnitts, dessen Mittelpunkt im Koordinatenanfang liegen soll, bestimmt durch den Peripheriepunkt $x_1\ y_1$, durch die Gleichung der Tangente dieses Punktes $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$, sowie durch den zweiten Peripheriepunkt $x_2\ y_2$, so beachte man, daß in dem Kegelschnitt:

$$(y-ax)^2 + c\,(ay + x)^2 + f = 0$$

die Gleichung der Tangente des Punktes $x_1\ y_1$ folgende Form hat:

$$(y-ax)\,(y_1-ax_1) + c\,(ay + x)\,(ay_1 + x_1) + f = 0.$$

Die Identifikation dieser Gleichung mit der gegebenen Tangentengleichung führt auf die Gleichung:

$$[c\,(ay_1 + x_1) - a\,(y_1-ax_1)] : [ac\,(ay_1 + x_1) + (y_1-ax_1)] = A : B$$

oder

$$(A + Ba)\,(y_1-ax_1) + c\,(Aa - B)\,(ay_1 + x_1) = 0.$$

Hiernach ergiebt sich zur Bestimmung von a zunächst folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (y_1-ax_1)^2 & (ay_1 + x_1)^2 & 1 \\ (y_2-ax_2)^2 & (ay_2 + x_2)^2 & 1 \\ (A + B_2)\,(y_1-ax_1) & (Aa-B)\,(ay_1 + x_1) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun kann man diese Determinante ähnlich wie die entsprechende der vorigen Nummer behandeln, und man findet zuletzt zur Bestimmung von a die Gleichung:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & 1 \\ -Bx_1 & Ay_1 & 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & 2x_1\,y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & 2x_2\,y_2 & 1 \\ Ay_1 + Bx_1 & By_1-Ax_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

24. Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts ist die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit zwei Veränderlichen. Sie hat die Form:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Hieraus erkennt man, daß der Kegelschnitt durch fünf Peripheriepunkte bestimmt ist. Sind dieses die Punkte (1) bis (5), so schreibt sich die Gleichung des Kegelschnitts sofort in der Form einer Determinante sechsten Grades:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

25. Die Gleichung der Tangente dieses Kegelschnitts in dem Punkte $x_1\ y_1$ ist:

$$ax_1x + b\,(x_1y + y_1x) + cy_1y + d\,(x + x_1) + e\,(y + y_1) + f = 0 \quad \text{oder:}$$

$$x\,(ax_1 + by_1 + d) + y\,(bx_1 + cy_1 + e) + dx_1 + ey_1 + f = 0.$$

Ist diese Gleichung aber in der Gestalt:

$$A\,(x-x_1) + B\,(y-y_1) = 0$$

gegeben, so ergiebt sich aus der Identifikation der beiden letzten Gleichungen die zur Determinanten-Bildung brauchbare Gleichung:

$$aBx_1 - b\,(Ax_1-By_1) - c\,Ay_1 + dB - e\,A = 0.$$

Nimmt man nun als fünftes Bestimmungsstück nicht den fünften Peripheriepunkt, sondern die Tangente des Punktes (1), so ergiebt sich jetzt als Gleichung des Kegelschnitts:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ 2Bx_1 & By_1-Ax_1 & -2Ay_1 & B & -A & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In ganz ähnlicher Weise bestimmt man die Gleichung des Kegelschnitts, wenn man den vierten Peripheriepunkt auch fortläßt und dafür die Tangente des Punktes (2) setzt. Man braucht zu dem Zweck nur die fünfte Zeile der letzten Determinante durch eine nach der Gestalt der sechsten Zeile gebildeten zu ersetzen.

26. Auch in diesem allgemeinen Falle kann man die Bestimmung der Achsenrichtung vor der Bildung der Kurvengleichung vornehmen. Sind a und $-\frac{1}{a}$ die Winkelkoeffizienten der beiden Achsen, so hat die Gleichung des Kegelschnitts folgende Form:

$$(y-ax)^2 + c\,(ay+x)^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Sind nun die fünf Peripheriepunkte (1) bis (5) gegeben, so erhält man sofort zur Bestimmung von a folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (y_1-ax_1)^2 & (ay_1+x_1)^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ (y_2-ax_2)^2 & (ay_2+x_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ (y_3-ax_3)^2 & (ay_3+x_3)^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ (y_4-ax_4)^2 & (ay_4+x_4)^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ (y_5-ax_5)^2 & (ay_5+x_5)^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Behandelt man diese Determinante so, wie in Nr. 22 angegeben ist, so erhält man zur Bestimmung von a folgende Gleichung:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} + 2a \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2+y_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

27. Hält man die in der vorigen Nummer aufgestellte Gleichung des Kegelschnitts fest, so ist die Gleichung für die Tangente des Punktes (1):

$$(y_1-ax_1)(y-ax) + c\,(ay_1+x_1)(ay+x) + d\,(x_1+x) + e\,(y_1+y) + f = 0, \text{ oder:}$$

$$x\,[c\,(ay_1+x_1) - a\,(y_1-ax_1) + d] + y\,[ac\,(ay_1+x_1) + (y_1-ax_1) + e] + dx_1 + ey_1 + f = 0.$$

Aus der Identifikation dieser Gleichung mit der gegebenen Tangentengleichung:

$$A\,(x-x_1) + B\,(y-y_1) = 0$$

folgt:

$$(A+Ba)(y_1-ax_1) + c\,(Aa-B)(ay_1+x_1) - Bd + Ae = 0.$$

Hiernach ist nun die erste Form der Gleichung zur Bestimmung der Achsenrichtung des Kegelschnitts, der durch die vier Punkte (1) bis (4) geht, und für welchen die Tangente des Punktes (1) gegeben ist, folgende:

$$\begin{vmatrix} (y_1-ax_1)^2 & (ay_1+x_1)^2 & x^1 & y_1 & 1 \\ (y_2-ax_2)^2 & (ay_2+x_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ (y_3-ax_3)^2 & (ay_3+x_3)^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ (y_4-ax_4)^2 & (ay_4+x_4)^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ 2(A+Ba)(y_1-ax_1) & 2(Aa-B)(ay_1+x_1) & -B & A & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

woraus sich nach dem in Nr. 22 angegebenen Verfahren folgende Schlußgleichung ableitet:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ -2Bx_1 & 2Ay_1 & -B & A & 0 \end{vmatrix} + 2a \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ 2(Ay_1-Bx_1) & Ax_1-By_1 & -B & A & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In ähnlicher Weise wird die Aufgabe gelöst, wenn statt des vierten Peripheriepunktes die Tangente des zweiten Punktes gegeben ist.

28. Zum Schluß möge eine Aufgabe in bestimmten Zahlenwerten stehen.

Es soll der Kegelschnitt näher bestimmt werden, welcher die durch die Gleichung $x-y=0$ gegebene Gerade in dem Punkte 1, 1 und die andere durch die Gleichung $x-4=0$ gegebene Gerade in dem Punkte 4, 1 berührt und außerdem durch den Punkt 3,0 geht. Die Koordinaten seien rechtwinklige.

Bezeichnen wir wie bisher die gegebenen Bestimmungsstücke durch allgemeine Zeichen, so wird die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts nach Nr. 25 in folgender Art zu schreiben sein:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ 2B_1x_1 & B_1y_1-A_1x_1 & -2A_1y_1 & B_1 & -A_1 & 0 \\ 2B_2x_2 & B_2y_1-A_2x_2 & -2A_2y_2 & B_2 & -A_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist $x_1=1$, $y_1=1$, $A_1=1$, $B_1=-1$, $x_2=4$, $y_2=1$, $A_2=1$, $B_2=0$, $x_3=3$, $y_3=0$.

Setzt man diese Werte ein, so erhält man als Gleichung des Kegelschnitts:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Formt man diese Determinante nach I 17 um, wobei man zugleich gemeinschaftliche Faktoren aus sämtlichen Gliedern einer Zeile fortlassen kann, da die Determinante den Nullwert hat, so erhält man nach und nach:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Löst man die letzte Determinante nach I 9 in Bezug auf die Elemente der ersten Zeile auf und wertet dann die einfachen Unterdeterminanten aus, so erhält man die Gleichung des Kegelschnitts:

$$x^2 - xy + 3y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

Hieraus erkennt man leicht, daß unser Kegelschnitt eine Ellipse ist. Die bekannten Mittel der analytischen Geometrie bestimmen die Koordinaten des Mittelpunktes zu $2\frac{4}{11}$ und $\frac{8}{11}$, die Winkelkoeffizienten der Achsen zu $-2 \pm \sqrt{5}$, sowie die Längen der Halbachsen zu $\frac{3}{11}\sqrt{24 \pm 6\sqrt{5}}$.

Die Winkelkoeffizienten der beiden Achsen kann man aber auch direkt aus den gegebenen Bestimmungsstücken ableiten.

Ist a der eine dieser Winkelkoeffizienten, so findet man nach Analogie von Nr. 27 zu seiner Bestimmung die Gleichung:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ -2B_1x_1 & 2A_1y_1 & -B_1 & A_1 & 0 \\ -2B_2x_2 & 2A_2y_2 & -B_2 & A_2 & 0 \end{vmatrix} + 2a \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ 2(A_1y_1-B_1x_1) & A_1x_1-B_1y_1 & -B_1 & A_1 & 0 \\ 2(A_2y_2-B_2x_2) & A_2x_2-B_2y_2 & -B_2 & A_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Setzt man hier die oben angegebenen bestimmten Werte ein, so erhält man zunächst:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 17 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich nach und nach in folgender Art:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(a^2-1) + 4a = 0.$$

Diese Gleichung führt auf die oben schon angegebenen Werte

$$a = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Setzt man hier … , so erhält man zunächst:

… 1 1
… 1 1
… 0 1 | = 0.
… 1 0
… 1 0

Diese Gleichung … Art:

… 1 1   1 1
… 1 1   0 0
… 1 2 —1 0 | = 0
… 2 1   1 0
… 4 0   1 0

… 1   0
… 2 —1 | = 0.
… 1   1
… 0   1

… 1
… 2 | = 0.
… 1

… = 0.

Diese Gleichun… …erte