Analytische
Darstellung der Linien ersten und zweiten Grades.

(Ein Beitrag zum mathematischen Unterricht.)

Jede sachkundige Bemühung, aus dem reichhaltigen Stoff, welchen die analytische Geometrie bietet*), das Einfachste und Wichtigste nicht blos auszuwählen, sondern es auch zugleich auf die kürzeste, klarste und faßlichste Weise in derjenigen Gestalt dem Anfänger oder Laien (insbesondere dem Schüler der I. Klasse einer Realschule I. Ordnung) zu reichen, daß er durch sein eignes inneres Interesse immer mehr zu dem Gegenstande hingezogen wird — bedürfte wohl einer Rechtfertigung selbst dann nicht, wenn auch den Kegelschnitten eine minder wichtige Stellung in den physikalischen Wissenschaften zugetheilt worden wäre. Denn es giebt kaum ein Gebiet der mathematischen Wissenschaft, welches geeigneter wäre, einerseits die Lust und Liebe für diese Wissenschaft zu erwecken, stärken und dauernd zu befestigen, andererseits das mathematische Wissen und Können vom pädagogischen Gesichtspunkt aus zu concentriren — als die analytische Geometrie.

Aus dieser Quelle sind die nachfolgenden Bogen entstanden, welche dazu beitragen sollen, eine methodische Vorbereitung für die analytische Geometrie und das weitere Studium der Mathematik überhaupt zu geben.

I. Einleitende Betrachtung. Punkt und gerade Linie.

§. 1. Stellt man sich zwei sich schneidende unendliche Gerade vor und in der Ebene derselben irgend einen Punkt **B**, so läßt sich die Lage dieses Punktes bestimmen, indem man durch denselben die Linien **BC** und **BD** beziehlich parallel mit YY^{I} und XX^{I} zieht. Denn, sind $BC = AD$, $BD = AC$ bekannt und Winkel α gegeben, so ist Parallelogramm **ADBC** aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestimmt. In gleicher Weise kann die Lage jedes Punktes der Ebene **XAY** in Beziehung auf die gewählten unendlichen Geraden XX^{I}, YY^{I} und deren Durchschnittspunkt **A** festgestellt werden. Man nennt nun das Stück $AC = BD$ auf der Linie (Abcissenlinie) XX^{I} die Abcisse, das Stück $BC = AD$ auf der Linie (Ordinatenlinie) YY^{I} die Ordinate des Punktes **B**. Beide Linien als paarweis zusammengehörend, um die Lage beliebiger Punkte der Eben **XAY** zu bestimmen, heißen gemeinschaftlich Coordinaten. Fig. I.

*) Man vergleiche die ausführlichern Werke etwa von Plücker, Salmon, Magnus, Moßbrugger u. s. w.

Die beiden festliegenden Geraden XX' und YY' heißen Achsen (Beziehungslinien) und zwar XX' Abcissen-Achse (erste Achse, Xachse), YY' Ordinaten-Achse (zweite Achse, Yachse). Beide Achsen führen den gemeinschaftlichen Namen Coordinaten-Achsen und bestimmen mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel das Coordinaten-System; ihr Durchschnittspunkt heißt Anfangspunkt der Coordinaten. Da die Coordinaten eines beliebigen Punktes Parallelen zu den bezüglichen Achsen sind, so nennt man sie auch Parallel-Coordinaten. Nun darf es aus der algebraischen Auflösung geometrischer Aufgaben und der Trigonometrie als bekannt vorausgesetzt werden, daß Punkte oder Linien, welche in Beziehung auf einen festen Punkt oder eine feste Gerade (oder Ebene) entgegengesetzte Lage haben, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen und diese Zeichen keineswegs als additiv oder subtractiv aufzufassen sind, sondern nur den Gegensatz der Lage bezeichnen. Obwohl es im Allgemeinen gleichgültig ist, welche der beiden Entfernungen auf den Achsen man positiv nennt, und welche Coordinaten man als Ordinaten oder Abcissen bezeichnet, so muß man doch für die zusammenhängende Betrachtung eine bestimmte Wahl treffen.

Die Coordinaten-Achsen theilen nun die unendliche Ebene (**Fig. 1**) in vier Theile. Alle in dem Theil XAY (1. Region) liegende Punkte haben — nach unserer Annahme — positive Abcissen und Ordinaten. Demnach haben alle in dem Theile $X'AY$ (2. Region) liegende Punkte negative Abcissen und positive Ordinaten; alle in der 3. Region $X'AY'$ liegende Punkte Abcissen und Ordinaten negativ und endlich alle in der 4. Region XAY' liegende Punkte positive Abcissen, negative Ordinaten.

Daraus erhellt, daß die Lage eines Punktes in der Ebene durch Größe und Vorzeichen seiner Coordinaten völlig bestimmt ist.

Dabei werden die Coordinaten als veränderliche, einer stetigen Zu- oder Abnahme fähiger Größen mit den Buchstaben x und y und zwar die Abcissen mit x, die Ordinaten mit y bezeichnet.

Je nachdem der Coordinatenwinkel α — als welchen wir immer den Winkel der ersten Region oder den Winkel der positiven Achsenrichtungen bezeichnen — ein R, oder $\gtrless R$ ist, heißt das Coordinatensystem rechtwinklig oder schiefwinklig. Den folgenden Betrachtungen liegt, sofern nicht etwas Anderes ausdrücklich bemerkt wird, immer ein rechtwinkliges System zu Grunde.

Fragen: 1) Wie heißen die Coordinaten des Anfangspunktes; eines Punktes in der Abcissen-Achse; eines Punktes in der Ordinaten-Achse? 2) Wie findet man den Punkt, dessen Coordinaten $x = 5$, $y = 2$; $x = -3$, $y = 4$; $x = 0$, $y = -3$; $x = 4$, $y = 0$; $x = -6$, $y = -2$, sind?

§. 2. Aufgabe. Es ist **Fig. 1** ein Punkt **B** durch seine Coordinaten $x_{|}y_{|}$ gegeben. Es soll die Entfernung des Punktes **B** vom Anfangspunkt **A** gefunden, oder die Linie **AB** bestimmt werden.

Auflösung. Bezeichnet α den schiefen Coordinatenwinkel, dann ist nach bekanntem
Gl. 1. trigonometrischen Satz $AB = \sqrt{x_{|}^2 + y_{|}^2 - 2x_{|}y_{|}\cos.(2R - \alpha)} = \sqrt{x_{|}^2 + y_{|}^2 + 2x_{|}y_{|}\cos.\alpha}$.
Es erhellt leicht, daß dieser Ausdruck unabhängig von den Vorzeichen der Coordinaten und die Wurzel absolut zu nehmen ist.

2. Für $\alpha = R$ ist $AB = \sqrt{x_{|}^2 + y_{|}^2}$.

§. 3. Aufgabe. Zwei Punkte **B** und **C** sind durch ihre Coordinaten $x_{|}y_{|}$ und $x_{||}y_{||}$ gegeben. Die Entfernung der Punkte **B** und **C** ist zu bestimmen.

Auflösung. Man lege durch einen der Punkte, etwa **B** (**Fig. 2**) eine Parallele zur Achse **AX**, so ist in dem Dreieck **BCD** Seite $BD = x_{II} - x_{I}$, $CD = y_{II} - y_{I}$ und Winkel $BDC = 2R - \alpha$ (für α als Coordinatenwinkel), folglich $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2 + 2BD.CD.\cos.\alpha}$
$= \sqrt{(y_{II} - y_{I})^2 + (x_{II} - x_{I})^2 + 2(y_{II} - y_{I})(x_{II} - x_{I})\,.\cos.\alpha}$ oder auch $=$ 3.
$\sqrt{(y_{I} - y_{II})^2 + (x_{I} - x_{II})^2 + 2(y_{I} - y_{II})(x_{I} - x_{II})\cos.\alpha}$. Für $\alpha = R$, geht diese Gleichung über in $BC = \sqrt{(y_{II} - y_{I})^2 + (x_{II} - x_{I})^2} = \sqrt{(y_{I} - y_{II})^2 + (x_{I} - x_{II})^2}$, 4.
wobei die Wurzel absolut zu nehmen, so lange nicht andere Bedingungen hinzutreten.

Fragen: 1) Aendert sich die Form der vorstehenden Gleichungen, wenn die Coordinaten ihre Vorzeichen ändern? 2) Wie gelangt man zu denselben oder ähnlichen Gleichungen, indem man durch einen der Punkte, etwa **B**, Parallelen zu den Achsen zieht, welche als neue Coordinaten-Achsen mit **B** als Anfangspunkt gelten?

§. 4. **Aufgabe.** Zwei Punkte **B** und **C** (**Fig. 2**) sind durch ihre Coordinaten gegeben. Die Coordinaten der Mitte ihrer Verbindungslinie sind zu finden.

Aufl. **M** sei der Mittelpunkt der Verbindungslinie **BC** beider Punkte; die Coordinaten von **M** für ein schiefwinkliges System seien $x = AN$, $y = NM$. In dem Trapez **BCEF** ist **NM** die mittlere Länge. Dann ist $2\,NM = BF + CE = y_{I} + y_{II}$; $2\,AN = AN - FN + AN + FN = AF + AE = x_{I} + x_{II}$. Demnach ist $y = \frac{y_{II} + y_{I}}{2}$, 5.
$x = \frac{x_{II} + x_{I}}{2}$.

Fragen: 1) Wie ändern sich diese Ausdrücke nach der Lage der Punkte? 2) Sind diese Werthe abhängig vom Coordinatenwinkel?

§. 5. **Gleichung der geraden Linie.** 1) Durch den Anfangspunkt **A** eines Systems mit dem Winkel φ sei die unendliche Gerade **BD** gelegt (**Fig. 3**).

Man soll diese Linie in ähnlicher Weise **arithmetisch darstellen**, wie dies vorher mit Punkten und der Entfernung zweier Punkte geschehen ist.

Werden von beliebigen Punkten B^{I}, B^{II}, B^{III} u. s. w. der Geraden **BD** die Ordinaten BC, $B^{I}C^{I}$, $B^{II}C^{II}$ u. s. w. gezogen, so hat man in den ähnlichen Dreiecken ABC, $AB^{I}C^{I}\ldots$, $\frac{AB}{AC} = \frac{AB^{I}}{AC^{I}} = \frac{AB^{II}}{AC^{II}}\ldots$, d. h. für die beliebig gewählten Punkte der Geraden **BD** stehen Ordinaten und Abscissen in demselben sich gleichbleibenden (constanten) Verhältniß. Wird dieses constante Verhältniß mit **a** bezeichnet, so folgt $\frac{y^{I}}{x^{I}} = \frac{y^{II}}{x^{II}} = \frac{y^{III}}{x^{III}}\ldots\ldots = a$, welcher Ausdruck auch für alle Punkte der Linie in der Richtung von **A** nach **D** unverändert bleibt. Denken wir uns nun für **alle** Punkte der unendlichen Geraden in stetiger Aufeinanderfolge die zusammengehörigen Coordinaten (als veränderliche Größen) dergestalt, daß zu jedem Werth von **y** ein entsprechender von **x** sich bietet, so ist, unter **y** und **x** die laufenden (veränderlichen) Coordinaten verstanden, $\frac{y}{x} = a$, oder $y = ax$, die Gleichung der Geraden, welche durch 6.
den Anfangspunkt der Coordinaten geht. — Daß diese Gerade durch den Anfangspunkt gehen muß, folgt auch indirect aus $y = o$, für $x = o$, und umgekehrt.

2) Ist die Lage der Geraden **BC** beliebig gewählt (**Fig. 4**), so findet sich, $DE \parallel AX$ gezogen, und $AD = b$ gesetzt, in ähnlicher Weise wie vorher $\frac{CE}{DE} = \frac{C^{I}E^{I}}{DE^{I}} = \frac{C^{II}E^{II}}{DE^{II}}\ldots\ldots = c$.

(c. das constante Verhältniß bezeichnend) oder $\frac{y^{I} - b}{x^{I}} = \frac{y^{II} - b}{x^{II}} \dots = c$, und daraus, wenn man sich wiederum für alle Punkte der Geraden die zusammengehörigen Coordinaten vorstellt, $\frac{y - b}{x} = c$, oder $y = cx + b$. Demnach ist die allgemeine Form der Gleichung einer
7. Geraden, welche nicht durch den Anfangspunkt geht, $y = ax + b$.

Beachtet man, daß $CE : DE = C^{I}E^{I} : DE^{I} = \sin. \alpha : \sin. (\varphi - \alpha)$, so ergiebt sich
8. $\frac{y - b}{x} = \frac{\sin. \alpha}{\sin. (\varphi - \alpha)}$, oder $y = \frac{\sin. \alpha}{\sin. (\varphi - \alpha)} . x + b$; woraus folgt $a = \frac{\sin. \alpha}{\sin. (\varphi - \alpha)}$. Ist der Coordinatenwinkel $\varphi = R$, so entsteht $a = \mathrm{tg.}\ \alpha$. und unter dieser Voraussetzung bedeutet a die Tangente des Winkels α, welchen die Gerade mit der Abcissen-Achse bildet.

Es muß bemerkt werden, daß die Lage der Geraden durch den Winkel bestimmt wird, welchen sie mit einer der Achsen X oder Y bildet. Nennen wir den mit der Abcissen-Achse gebildeten Winkel der Geraden α, so verstehen wir darunter immer den Winkel, welchen die Gerade mit der positiven Achsenrichtung (nicht negativen) bildet, und ebenso den concaven (nicht converen) Winkel.

§. 6. Specielle Formen der Gleichung $y = ax + b$. Die Gleichung 7. der Geraden nimmt verschiedene Formen an, die als besondere (specielle) Fälle derselben anzusehen sind, je nachdem man den Größen a und b besondere Werthe beilegt; oder umgekehrt a und b erhalten verschiedene Werthe, je nach der Lage der Geraden.

Es kann sein $y = ax + b$; $y = -ax + b$; $y = ax - b$; $y = -ax - b$. Ist $b = 0$, so ist $y = ax$, eine Gerade durch den Anfangspunkt gehend. Ist $a = 0$, so entsteht $y = b$, eine Gerade parallel der Abcissen-Achse, welche ein Stück b auf der Yachse abschneidet. Denn $a = \mathrm{tg.}\ \alpha = 0$ heißt, der Richtungswinkel der Geraden ist $= 0$, oder, sie ist parallel mit der Xachse. Sind a und b zugleich Null, so entsteht $y = 0$, d. h. eine Gerade, welche die Abcissen-Achse selbst ist.

Durch ähnliche Betrachtung giebt $x = c$ eine Gerade, parallel mit der Ordinatenachse, welche von der Xachse ein Stück $= c$ abschneidet; und $x = 0$, eine Gerade, welche die Yachse selbst vorstellt.

Aus der allgemeinen Gleichung $y = ax + b$ ist endlich unmittelbar einleuchtend, daß für jeden beliebigen reellen Werth von x auch y reelle Werthe liefert. Wenn man demnach x alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt, so muß auch y immer entsprechende reelle Werthe geben, d. h. die Gerade erstreckt sich nach beiden Seiten ins Unendliche.

§. 7. Zusammenhang zwischen den Linien und ihrem arithmetischen Ausdruck. Die Figuren der Ebene werden sämmtlich gebildet durch gerade oder krumme Linien (Curven), oder beide zugleich; diese Linien selbst können wieder als eine stetige Reihenfolge von Punkten gedacht werden. Jeder dieser Punkte hat in Beziehung auf ein gegebenes Coordinatensystem seine bestimmte Abcisse und Ordinate. Schreitet man von einem Punkt einer Linie zu einem andern, so ändert sich damit jedenfalls die Eine und im Allgemeinen auch die Andere der Coordinaten, oder, was dasselbe ist, die Coordinaten eines jeden Punktes stehen in einem bestimmten Zusammenhange, die Eine drückt sich durch die Andere aus. Und diese beständige Relation zwischen den Coordinaten der einzelnen Punkte, bei jeder, einem mathematischen Gesetz unterworfenen Linie, enthält das Gesetzmäßige, das Wesen der Linie, welches sich in einer diophantischen Gleichung zwischen den Coordinatenwerthen x und y ausspricht. —

Stellt man sich andererseits vor, das x in einer diophantischen Gleichung zwischen den Größen x und y durchlaufe alle reellen Zahlenwerthe von $-\infty$ bis $+\infty$ in stetiger Folge, d. h. es ändere sich immer um Unendlichkleines, oder, wie man sich ausdrückt, es ändere sich stetig, so muß auch y eine Reihe von Werthen durchlaufen, die stetig auf einander folgen (es kann auch mehrere solcher Reihen durchlaufen, und unter diesen können sich imaginäre Partien befinden). Betrachtet man nun jeden einzelnen Werth von x als Abcisse und jeden zugehörigen reellen Werth von y als zugehörige Ordinate, und denkt sich alle Punkte aufgetragen, welche in solcher Art bestimmt werden, so entsteht eine zusammenhängende Linie; oder, der Punkt, von welchem ausgegangen wird, bewegt sich und beschreibt in seiner Bewegung die Linie, welche in der betreffenden Gleichung dargestellt wird.

Die Größen x und y nennt man veränderliche Größen, Veränderliche, Variable (unabhängig veränderlich, in der Regel x; abhängig veränderlich, oder Function, gewöhnlich y); die andern in der betreffenden Gleichung enthaltenen Größen heißen, da sie für dieselbe Linie oder Gleichung denselben Werth behalten, constante Größen, Constante (beständige), auch Parameter, der durch die Gleichung gegebenen Linie. Gleichung einer Linie, und Linie, welche einer Gleichung zugehört, sind nunmehr nicht mehr undeutliche Ausdrücke.

Linien heißen algebraisch, oder transcendent, je nachdem ihre Gleichungen algebraisch oder transcendent sind. Algebraische Linien heißen vom ersten, zweiten ... $n$ten Grade, oder $n$ter Ordnung, je nach dem Grade ihrer Gleichung.

Die analytische Geometrie bestimmt Linien (und Flächen) durch Gleichungen, und leitet die Eigenschaften der Linien (und Flächen) aus ihren Gleichungen ab.

Bei der folgenden Darstellung der Linien und ihrer Eigenschaften ist gewöhnlich die betreffende Gleichung zum Ausgangspunkt der Betrachtung gewählt.

II. Die Linie des ersten Grades.

§. 8. Jede Linie, deren Gleichung die allgemeine Form $Ay + Bx + C = 0$ hat, ist eine Gerade. 9.

Erläuterung. In dem Vorangegangenen hat sich für eine gerade Linie eine Gleichung ersten Grades zwischen den veränderlichen Coordinatengrößen x und y ergeben. Die allgemeinste Gleichung ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen x und y hat die Form $Ay + Bx + C = 0$, worin A, B und C constante Größen sind.

Um zu erkennen, daß dieser Gleichung immer eine Gerade entspricht, braucht man sich nur sämmtliche Punkte vorzustellen, welche die Coordinaten aller zusammengehörigen reellen Werthe von x und y in der gegebenen Gleichung liefern. Falls keine der Constanten $= 0$ ist, genügt es, drei Paar zusammengehöriger Werthe von x und y, welche der obigen Gleichung entsprechen, in Betracht zu ziehen. Diese Werthe seien $x^{I}y^{I}$, $x^{II}y^{II}$, $x^{III}y^{III}$ entsprechend den Punkten F^{I}, F^{II}, F^{III} in Fig. 5 für ein schiefwinkliges System. — Insofern diese Punkte der besagten Linie angehören sollen, finden die Gleichungen statt:

$Ay^{I} + Bx^{I} = -C$; $Ay^{II} + Bx^{II} = -C$; $Ay^{III} + Bx^{III} = -C$. Daraus folgt durch Subtraction: $A(y^{I} - y^{II}) + B(x^{I} - x^{II}) = 0$; $A(y^{I} - y^{III}) + B(x^{I} - x^{III}) = 0$, oder $y^{I} - y^{II} : x^{I} - x^{II} = y^{I} - y^{III} : x^{I} - x^{III} = -\frac{B}{A}$; und durch Vertauschen der Innenglieder $y^{I} - y^{II} : y^{I} - y^{III} = x^{I} - x^{II} : x^{I} - x^{III}$. Wie die Anschauung der Fig. lehrt, heißt dies nach planimetrischem Gesetz: die drei beliebig gewählten Punkte F^{I}, F^{II}, F^{III} liegen in gerader Linie. Daraus erhellt, daß $Ay + Bx + C = 0$, die Gleichung einer Geraden ist. —

Legt man den Constanten dieser Gleichung besondere Werthe bei, so nehmen auch die Geraden besondere Eigenschaften an.

Für $B = 0$, ist $y = -\frac{C}{A}$ für jeden Werth von x, d. h. der Gleichung entspricht eine Gerade, welche parallel der Xachse die Yachse in der Entfernung $-\frac{C}{A}$ vom Anfangspunkt schneidet. Ist zugleich $C = 0$, so wird für jeden Werth von x das entsprechende $y = 0$, und diese Gleichung liefert die Abcissen-Achse. — Setzt man weiter in der Gleichung $Ay + Bx + C = 0$, den Constanten $A = 0$, so ist für jeden Werth von y das entsprechende $x = -\frac{C}{B}$, und diese Gleichung bestimmt eine Gerade, parallel der Yachse, welche die Xachse in der Entfernung $-\frac{C}{B}$ vom Anfangspunkt schneidet. Wird auch C mit A zugleich $= 0$, so giebt Gleichung $x = 0$ die Ordinatenachse selbst. (vergl. §. 6.)

Hieraus sind für die Folge die Formen folgender vier Gleichungen und ihre Bedeutung besonders bemerkenswerth, nämlich: 1) $y = a$. 2) $y = 0$. 3) $x = a$. 4) $x = 0$.

§. 9. Ist der Coëfficient A nicht Null, so kann man der Gleichung $Ay + Bx + C = 0$, jedesmal die Form $y = ax + b$ geben, da durch Division $y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$ entsteht. Diese bequemere Form, welche mit der in §. 5 gefundenen übereinstimmt, steht der ursprünglichen an Allgemeinheit nur darin nach, daß der Factor von y nicht 0 sein kann.

Eine Betrachtung der Gleichung $y = ax + b$ ist schon in §. 5 und 6 gegeben. Es ist nur $-\frac{B}{A} = a = \frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ (\varphi - \alpha)}$, und $-\frac{C}{A} = b$ zu setzen. Demnach gelangt man zu dem Schluß: die Gleichung $Ay + Bx + C = 0$ giebt jedesmal eine Gerade, deren Natur durch den Coordinatenwinkel nicht geändert wird, und umgekehrt, eine Gerade giebt jedesmal eine Gleichung ersten Grades von der Form $y = ax + b$, die im Allgemeinen mit der ersten Form übereinstimmt.

§. 10. Aufgabe. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche durch zwei bestimmte Punkte C und D geht, deren Coordinaten beziehlich $x^{I}y^{I}$ und $x^{II}y^{II}$ gegeben sind.

Auflösung. Die gesuchte Gleichung der Geraden sei $y = Ax + B$; dann sind die unbekannten Constanten A und B zu bestimmen.

Insofern die Gerade durch Punkt C gehen soll, müssen die unbekannten Coëfficienten A und B der Bedingung genügen, daß $y^{I} = Ax^{I} + B$ werde; und damit die Linie auch Punkt D aufnehme, müssen dieselben Coëfficienten derartig bestimmt sein, daß $y^{II} = Ax^{II} + B$. Aus diesen beiden Gleichungen sind die Unbekannten A und B zu bestimmen, nämlich $A = \frac{y^{II} - y^{I}}{x^{II} - x^{I}} = \frac{y^{I} - y^{II}}{x^{I} - x^{II}}$, $B = \frac{x^{II}y^{I} - x^{I}y^{II}}{x^{II} - x^{I}} = \frac{x^{I}y^{II} - x^{II}y^{I}}{x^{I} - x^{II}}$. Und durch Substitution ist die gesuchte Gleichung der Geraden $\alpha)$ $y = \frac{y^{II} - y^{I}}{x^{II} - x^{I}} . x + \frac{x^{II}y^{I} - x^{I}y^{II}}{x^{II} - x^{I}}$, oder in anderer

10. Form, welche meist bequemer, $\beta)$ $y - y^{I} = \frac{y^{II} - y^{I}}{x^{II} - x^{I}} . (x - x^{I}) = \frac{y^{I} - y^{II}}{x^{I} - x^{II}} . (x - x^{I})$.

Beide Formen, besonders letztere, werden häufig angewendet.

Fragen: 1) Kann man in vorstehender Gleichung auch statt $y - y^{I}$ und $x - x^{I}$ beziehlich $y - y^{II}$ und $x - x^{II}$ setzen? 2) Welche Stücke schneidet die Linie auf jeder der beiden Achsen ab? 3) Welche Lage hat die Linie, wenn entweder $y^{II} - y^{I} = 0$, oder $x^{II} - x^{I} = 0$ wird?

Anmerkung. Denkt man sich Punkt C in der Xachse und Punkt D in der Yachse liegend und ihre Entfernungen vom Anfangspunkt beziehlich mit a und b bezeichnet, so geht

Gleichung 10 über in $ay + bx = ab$, oder $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$, eine Form, welche mit der ursprünglichen für die Gerade völlig übereinstimmt. 11.

§. 11. Aufgabe. Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch einen bestimmten Punkt C geht, dessen Coordinaten $x^I y^I$ gegeben sind.

Aufl. Die verlangte Gleichung hat die Form $y = Ax + B$, worin A und B unbekannt sind, aber die Bedingung erfüllen müssen, daß $y^I = Ax^I + B$ werde. Die letzte Gleichung ist diophantisch, liefert also unendlich viele Werthe für die Größen A und B. — Man bekommt α) $y - y^I = A(x - x^I)$, oder $\frac{y - y^I}{x - x^I} = A$; wird A eliminirt, so ist β) $\frac{y - B}{y^I - B}$ 12.
$= \frac{x}{x^I}$. Jede dieser Gleichungen stellt unzählige Geraden vor, welche der Aufgabe genügen. Auch diese Gleichungen kehren oft wieder.

Fragen: 1) Wie heißt die Gleichung $\frac{y - y^I}{x - x^I} = c$ geordnet nach der gewöhnlichen Form? 2) Wie lautet die Gleichung einer Geraden, welche durch einen bestimmten Punkt C geht und die Xachse unter dem Winkel α schneidet? 3) Wie findet man die Länge des Stücks CD einer Geraden, deren Gleichung $y = Ax + \alpha$, wenn die Abcissen der Punkte C und D x^I und x^{II} gegeben sind? (Antw. $CD = (x^I - x^{II})\sqrt{1 + A^2}$ nach §. 3.) 13.

Zwei Gerade.

§. 12. Nach §. 9 und 5 ist der Winkel, den eine Gerade $y = Ax + B$ mit der Abcissenachse bildet, durch den Coëfficienten A bestimmt, während B die Entfernung mißt, in welcher die Linie die Yachse trifft. Daraus folgt:

1) Zwei gerade Linien $y = ax + \alpha$ und $y = bx + \beta$ fallen zusammen, wenn a und b und zugleich α und β einander gleich sind;
2) die Linien sind parallel, wenn a und b gleich, α und β verschieden;
3) die Linien schneiden sich in demselben Punkt der Ordinatenachse, wenn $\alpha = \beta$, aber a und b verschieden sind;
4) die Linien schneiden sich überhaupt, wenn sowohl a und b, als α und β verschieden sind.

§. 13. Aufgabe 1. Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche mit einer gegebenen geraden Linie $y = ax + \alpha$ parallel und zugleich durch einen bestimmten Punkt $x^I y^I$ geht.

Aufl. Die gesuchte Gerade sei $y = bx + \beta$, dann muß nach vorigem §, damit die Linien parallel werden, $a = b$ sein, und dann ist nach §. 11 die Gleichung der Linie $\frac{y - y^I}{x - x^I} = a$. Aus der Gleichung $y^I = ax^I + \beta$ findet sich $\beta = y^I - ax^I$.

Aufgabe 2. Zwei gerade Linien $y = ax + \alpha$ und $y = bx + \beta$ sind gegeben; es werden die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes gesucht.

Aufl. Den Durchschnittspunkt haben beide Linien gemeinschaftlich. Daher müssen für seine Coordinaten $x^I y^I$ die Gleichungen gelten $y^I = ax^I + \alpha$, und $y^I = bx^I + \beta$; woraus folgt $x^I = \frac{\beta - \alpha}{a - b}$; $y^I = \frac{a\beta - b\alpha}{a - b}$. 14.

Man kann auch so schließen: Sollen die Linien einen Punkt gemeinschaftlich haben, so müssen für diesen Punkt die Werthe von x und y in beiden Gleichungen der Geraden identisch sein. Man braucht deshalb die Gleichungen nur algebraisch aufzulösen, um die Unbekannten zu finden.

Fragen: 1) Wie findet man den Abstand zweier Parallelen $y = ax + \alpha$ und $y = ax + \beta$ (Antw. Abstand $h = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{1 + a^2}}$.) 2) Wie findet man die Gleichung einer Geraden, die mit den beiden gegebenen parallel und gleichen Abstand von beiden hat? 3) Wie läßt sich das durch Construction zeigen? 15.

§. 14. Aufgabe 1. Den Winkel ε zu bestimmen, welche zwei Gerade $y = ax + \alpha$ und $y = a^{I}x + \alpha^{I}$ mit einander bilden.

Aufl. Die Linie $y = ax + \alpha$ bilde mit der Xachse den Winkel γ (Fig. 6), die Linie $y = a^{I}x + \alpha^{I}$ den Winkel δ mit derselben Achse und γ sei $> \delta$. Dann ist $\varepsilon = \gamma - \delta$ und

16. $\mathrm{tg.}\,\varepsilon = \dfrac{\mathrm{tg.}\,\gamma - \mathrm{tg.}\,\delta}{1 + \mathrm{tg.}\,\gamma . \mathrm{tg.}\,\delta}$, oder da $\mathrm{tg.}\,\gamma = a$, $\mathrm{tg.}\,\delta = a^{I}$, so folgt $\mathrm{tg.}\,\varepsilon = \dfrac{a - a^{I}}{1 + aa^{I}}$.

Fragen: 1) Welchen Sinn hat die Gleichung $\mathrm{tg.}\,\varepsilon = \dfrac{a - a^{I}}{1 + aa^{I}}$, wenn $a - a^{I} = 0$ wird? 2) Welche Form nimmt die Gleichung an, wenn die Linien parallel werden? 3) Welche Lage

17. haben die Linien für $1 + aa^{I} = 0$, oder $a = -\dfrac{1}{a^{I}}$ (Antw. sie stehen senkrecht.)

Aufgabe 2. Man soll die Gleichung einer Geraden finden, welche durch einen bestimmten Punkt $x^{I}y^{I}$ auf eine andere gegebene Gerade $y = ax + \alpha$ senkrecht gezogen ist.

Aufl. Die Gleichung der gesuchten Geraden sei $y = bx + \beta$. Da sie durch den gegebenen Punkt $(x^{I}y^{I})$ geht, heißt ihre Gleichung nach Gl. 12. $y - y^{I} = b\,(x - x^{I})$; und da sie zugleich senkrecht auf der gegebenen Geraden stehen soll, muß nach Gl. 17 zugleich $b = -$

18. $\dfrac{1}{a}$ sein. Demnach heißt die verlangte Gleichung $y - y^{I} = -\dfrac{1}{a}(x - x^{I})$, oder $y = -\dfrac{x}{a} + (\dfrac{x^{I}}{a} + y^{I})$

Fragen: 1) Aendert sich die Gleichung der Senkrechten, wenn der bestimmte Punkt in der gegebenen Geraden liegt? 2) Wie heißen die Coordinaten des Fußpunktes dieser Senk-

19. rechten? Antw. sie finden sich nach Gl. 14, nämlich $y^{II} = \dfrac{ax^{I} + a^{2}y^{I} + \alpha}{1 + a^{2}}$, $x^{II} = \dfrac{x^{I} + ay^{I} - a\alpha}{1 + a^{2}}$.

3) Die Länge der Senkrechten zwischen dem gegebenen Punkt und Fußpunkt zu bestimmen? (nach Gleichung 4 und 13) 4) Wie findet man die Gleichung der Geraden, welche durch einen bestimmten Punkt gehend, mit einer gegebenen Geraden den Winkel ε bildet?

Drei und mehr Gerade.

§. 15. Sind drei Gerade durch ihre Gleichungen $y = ax + b$, $y = a^{I}x + b^{I}$, $y = a^{II}x + b^{II}$ gegeben, so kann folgendes Verhältniß unter ihnen Statt haben:

1) Die Factoren von x sind alle gleich, dann sind sie parallel;
2) die Factoren von x sind in zwei Gleichungen übereinstimmend, aber verschieden von dem Factor des x in der dritten, dann sind zwei Linien parallel und werden von der dritten geschnitten;
3) alle drei Factoren von x sind verschieden, dann schneiden sich die Linien entweder α) in drei Punkten, oder β) in einem Punkte.

§. 16. Aufgabe 1. Drei Gerade $y = ax + b$, $y = a^{I}x + b^{I}$, $y = a^{II}x + b^{II}$ sind gegeben; man soll untersuchen, unter welchen Bedingungen diese Linien durch denselben Punkt gehen.

Aufl. Die Coordinaten des gemeinschaftlichen Punktes seien $x^{I}y^{I}$, dann hat man nach Gl. 14, insofern je zwei durch denselben Punkt gehen, $x^{I} = \dfrac{b^{I} - b}{a - a^{I}}$, $y^{I} = \dfrac{ab^{I} - a^{I}b}{a - a^{I}}$, und

$y^{I} = a^{II}x^{I} + b^{II} = a^{II}\left(\dfrac{b^{I} - b}{a - a^{I}}\right) + b^{II}$. Durch Combination der Werthe von y^{I} ergiebt sich $\dfrac{ab^{I} - a^{I}b}{a - a^{I}} = a^{II}\left(\dfrac{b^{I} - b}{a - a^{I}}\right) + b^{II}$. Durch Auflösung dieser letzten Gleichung erhält man

20. $a\,(b^{I} - b^{II}) + a_{1}\,(b^{II} - b) + a^{II}\,(b - b^{I}) = 0$. Dieser Bedingungsgleichung müssen die Constanten der Gleichung genügen, falls die Linien durch denselben Punkt gehen sollen; im andern Falle schneiden sie sich in 3 Punkten. Dasselbe Resultat erlangt man auch, indem man die drei gegebenen Gleichungen als algebraisch behandelt, d. h. x und y in allen identisch nimmt, und diese Größen eliminirt.

Aufgabe 2. Zwei Geraden sind durch ihre Gleichungen gegeben; es wird die Gleichung einer Geraden gesucht, welche mit beiden erstern gleiche Winkel bildet.

Auflösung findet sich mit Anwendung von §. 14.

Aufgabe 3. Es wird die Gleichung einer Geraden gesucht, welche den Winkel halbirt, den zwei gegebene gerade Linie bilden.

Auflösung nach §. 13, 14 und 11.

Aufg. 4. Drei gegebene Gerade schneiden sich in drei Punkten; man soll die Seiten des von ihnen gebildeten Dreiecks und den Inhalt dieses Dreiecks bestimmen.

Aufl. Die drei Geraden seien $y = ax + b$, $y = a'x + b'$, $y = a''x + b''$. Man bestimme nach §. 13 die Coordinaten eines jeden der drei Durchschnittspunkte. Hieraus sind auf bekannte Weise die Längen der drei Seiten, oder die Höhen auf den Seiten, oder auch die Winkel zu finden; und sodann nach einer der bekannten Methoden der Inhalt des Dreiecks.*)

III. Der Kreis.

§. 17. Erklärung. Die Linie, deren Gleichung für rechtwinklige Coordinaten $(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$, heißt Kreis. 21. Allgemeine Gleichung des Kreises.

Erläuterung. Die Gestalt und bekannten Eigenschaften der durch vorstehende Gleichung bestimmten Linie ergeben sich wie folgt:

1) Für irgend zwei Punkte der Linie seien die Coordinaten $x'y'$ und $x''y''$; dann ist $(y' - b)^2 + (x' - a)^2 = r^2$, und $(y'' - b)^2 + (x'' - a)^2 = r^2$. Daraus ist offenbar, die beiden beliebig gewählten Punkte haben, da a und b als die gegebenen Coordinaten eines festen Punktes M anzunehmen sind, immer dieselbe Entfernung r von M nach §. 3 Gl. 4, oder die Linie ist der geometrische Ort aller Punkte, welche vom gegebenen festen Punkte M (a, b). (als Mittelpunkt) gleichen Abstand haben.

2) Setzt man in der Gleichung $(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$, den Werth $b = 0$ und $a = r$, d. h. legt man die Xachse durch den Mittelpunkt M, und wählt den Durchschnittspunkt dieser Achse mit dem Kreise zum Anfangspunkt, so geht die Gleichung über in $y^2 + (x - r)^2 = r^2$, 22.
oder $y^2 = 2rx - x^2 = x(2r - x)$. Und diese Gleichung liefert das bekannte Gesetz: jede Senkrechte auf dem Durchmesser ist die mittlere Proportionale zu dessen Abschnitten. Scheitelgleichung.

3) Setzt man $a = b = 0$., d. h. wählt man den Mittelpunkt zum Anfangspunkt, so geht Gl. 21 über in $y^2 + x^2 = r^2$. 23. Mittelpunktsgleichung.

4) Die Mittelpunktsgleichung kann auch geschrieben werden $y^2 = r^2 - x^2$, oder $r + x : y = y : r - x$, und liefert dann ebenfalls das Gesetz unter 2.

5) Wird die Mittelpunktsgleichung $y^2 = r^2 - x^2$, oder $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ genauer in Betracht gezogen, so ergiebt sich weiter, was schon unter 1. angedeutet. Zu jedem Werth von x gehören nämlich zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y, d. h. die Kreislinie wird durch die Xachse in zwei congruente Theile, einen obern und untern getheilt. Und umgekehrt, zu jedem Werth von y gehören zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von x, oder die Kreislinie wird auch von der Yachse in zwei congruente Theile getheilt. — Da ferner die Ordinatenwerthe für jede zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von x (+ x und — x) dieselben sind, so folgt, daß die Doppel-Ordinaten oder Sehnen des Kreises in gleichem Abstande vom Mittelpunkt gleich sind. — Für $x = 0$, hat y seinen größten Werth $y = \pm r$, und für $y = 0$, hat x seinen größten Werth $x = \pm r$, d. h. der Kreis ist eine geschlossene krumme Linie, welche die vier Achsenrichtungen in gleicher Entfernung vom Anfangspunkt (Mittelpunkt) trifft. — Nennt man Durchmesser diejenigen Geraden (Sehnen), welche durch den Mittelpunkt gehen, so sind die durch die Kreislinie auf den Achsen abgeschnittenen Stücke Durchmesser, welche zugleich die größten Sehnen sind, da jeder $= 2r$ ist. Dies gilt aber für alle

*) Sammlungen von zahlreichen Uebungsaufgaben, insbesondere mit bestimmten Zahlen, welche diesem Abschnitt, so wie jedem der folgenden beigefügt sind, mußten hier weggelassen werden. Nur erwähnt möge Statt dessen sein, daß diese Aufgaben zum größern Theil dem trefflichen „Lehrbuch der Geometrie“ von Professor Aschenborn in Berlin entlehnt sind.

durch den Mittelpunkt gelegten Geraden, da man sich die Coordinaten-Achsen um den Anfangspunkt gedreht vorstellen kann. Endlich liegen offenbar die Mitten paralleler Sehnen immer in einem Durchmesser und dieser steht senkrecht auf jenen.

§. 18. Zusatz. 1) Die allgemeine Gleichung des Kreises $(y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2$ giebt aufgelöst $y^2 - 2by + b^2 + x^2 - 2ax + a^2 = r^2$, oder $y^2 + x^2 - 2by - 2ax = r^2 - a^2 - b^2$. In dieser Gleichung kommt das Produkt xy nicht vor, und die Factoren von x^2 und y^2 sind einander gleich $(+1)$. Daraus ergiebt sich als Form der Kreisgleichung
24. $x^2 + y^2 + px + qy = l^2$. — Um aus dieser die ursprüngliche Kreisgleichung herzustellen, hat man blos auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4}$ zu addiren, und die Summe auf der rechten Seite $= r^2$ zu setzen, so ist $\left(y + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = l^2 + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} = r^2$; wobei $a = -\frac{p}{2}$, $b = -\frac{q}{2}$ und $r = \sqrt{l^2 + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4}}$. —

Auch jede Gleichung von der Form $mx^2 + my^2 + px + qy = l^2$ ist eine Kreisgleichung, da sie durch Division mit m die vorige Form in 24 annimmt.

2. Aufgabe. Man soll den geometrischen Ort aller Punkte finden, welche von einem gegebenen Punkte M gleichen Abstand haben.

Auflösung ergiebt sich nach §. 3 als Kreislinie.

§. 19. Aufgabe 1. Gegeben sind ein Kreis $y^2 + x^2 = r^2$ und eine gerade Linie $y = ax + b$; es soll untersucht werden, ob die beiden Linien Punkte gemeinschaftlich haben (sich schneiden, berühren) oder nicht.

Aufl. Ob die beiden Linien zwei Punkte, einen, oder gar keinen Punkt gemein haben, hängt nach §. 13 und aus bekannten Eigenschaften des Kreises, davon ab, daß es zwei Paar, ein Paar oder gar keine reellen Werthe von x und y giebt, welche gleichzeitig den gegebenen Gleichungen $y^2 + x^2 = r^2$ und $y = ax + b$ entsprechen. — Man betrachte daher die gegebenen Gleichungen als algebraisch und löse sie nach x und y auf. Dadurch erhält man $x = \frac{-ab \pm \sqrt{r^2(1+a^2) - b^2}}{1 + a^2}$, $y = \frac{+b \mp \sqrt{r^2(1+a^2) - b^2}}{1 + a^2}$.

Wegen des doppelten Zeichens vor dem Wurzelausdruck erhält man zwei Werthe sowohl für x als y, und daher im Allgemeinen zwei gemeinsame Punkte (Durchschnittspunkte). Ist die Wurzel imaginär, d. h. $r^2(1 + a^2) < b^2$, so giebt es keine reellen Werthe für x und y, welche gleichzeitig beiden Gleichungen entsprechen, das heißt, die Gerade liegt ganz außerhalb des Kreises. — Stellt der Radicand eine positive Größe vor, oder ist $r^2(1 + a^2) > b^2$, so liefern x und y je zwei reelle, von einander verschiedene Werthe, und die Gerade ist Secante
25. des Kreises. — Ist der Radicand = Null, oder $r^2(1 + a^2) = b^2$, so geben x und y je einen reellen Werth, oder die beiden Durchschnittspunkte der Secante fallen in einen zusammen; die Gerade ist eine Tangente des Kreises. (Denkt man sich eine Secante um den einen Durchschnittspunkt als festen Punkt gedreht, so daß der andere Durchschnittspunkt sich diesem immer mehr nähert, bis sie sich decken, so geht die Secante über in die Tangente.)

Aufgabe 2. Für den Kreis $y^2 + x^2 = r^2$ soll die Gleichung der Tangente gefunden werden, wenn die Coordinaten des Berührungspunkts $x^I y^I$ gegeben sind.

Aufl. Die vorige Aufgabe ergab als Bedingung des Berührens das Wegfallen der Wurzelgröße für die Coordinaten x^I und y^I. Daraus ergaben sich als Coordinaten des Berührungspunktes einer Geraden mit dem Kreise: $x^I = \frac{-ab}{1 + a^2}$, $y^I = \frac{b}{1 + a^2}$. Nun sei die Gleichung der gesuchten Geraden, sofern sie durch den gegebenen Punkt $x^I y^I$ geht, $\frac{y - y^I}{x - x^I} = a$ nach §. 11, so hat man nur a zu bestimmen. Dies ermittelt sich aber aus obigen Werthen von $x^I y^I$, nämlich $\frac{x^I}{y^I} = -\frac{ab}{b} = -a$, oder $a = -\frac{x^I}{y^I}$; folglich ist die Gleichung der
26. Tangente $\frac{y - y^I}{x - x^I} = -\frac{x^I}{y^I}$, oder $\underline{yy^I + xx^I = y^{I2} + x^{I2} = r^2}$.

Fragen: 1) Wie kann man die Tangential-Gleichung anderweitig aus der Gleichung für die Secante, oder sonst ableiten? 2) Wie findet man die Gleichung der Tangente, welche durch einen Punkt außerhalb des Kreises $x^I y^I$ geht?

§. 20. Erklärungen. Zwei Linien **schneiden** sich, wenn sie einen Punkt gemeinschaftlich haben, und die beiden zunächst liegenden Punkte von jeder der Linien auf verschiedenen Seiten der andern Linie liegen. Zwei Linien **berühren** sich, wenn sie einen Punkt gemeinschaftlich haben und die beiden zunächst liegenden Punkte von jeder der Linien auf derselben Seite der andern Linie sich befinden. Zwei Gerade können sich daher nicht berühren, **nur** schneiden. Eine **gerade** Linie und eine **krumme**, oder zwei krumme können sich berühren oder schneiden. (Secante, Tangente, Durchschnittspunkt, Berührungspunkt.)

[Wenn man aus den Gleichungen zweier Linien die Veränderlichen in algebraischer Weise entwickelt, so ergeben sich die Coordinaten derjenigen Punkte, die beiden Linien gemeinschaftlich, sowohl Berührungs- als Durchschnittspunkte sein können.]

Normale heißt die im Berührungspunkt auf der Tangente errichtete Senkrechte. Man unterscheidet bei Tangente und Normale die **unbegrenzte** und **begrenzte** Linie. Im letztern Fall ist die Tangente die Länge vom Berührungspunkt bis zur **X**achse, und ebenso Normale die Länge vom Berührungspunkt der Tangente bis zur **X**achse. **Subtangente** ist die Projection der begrenzten Tangente auf der **X**achse, und **Subnormale** die Projection der begrenzten Normale auf der **X**achse.

§. 21. Aufgabe 1. Die Gleichung der Normale des Kreises zu finden.

Aufl. Da die Normale auf der Tangente im Berührungspunkt $x^I y^I$ senkrecht ist, so muß nach Gleichung 12 und 17 ihre Gleichung heißen $\frac{y - y^I}{x - x^I} = + \frac{1}{x^I : y^I} = \frac{y^I}{x^I}$, oder

$y - y^I = \frac{y^I}{x^I}(x - x^I)$, oder $y = \frac{y^I}{x^I} . x$, woraus folgt, daß dieselbe durch den Anfangspunkt 27.
(Mittelpunkt des Kreises) geht, oder Durchmesser ist.

Aufgabe 2. Ein Punkt in der Kreisperipherie sei $x^I y^I$. Man soll für diesen Punkt, Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale bestimmen.

Aufl. Die Tangente ist durch zwei Punkte begrenzt; der eine hat die Coordinaten $x^I y^I$, der andere bestimmt sich aus der Tangential-Gleichung, wenn $y = 0$ gesetzt wird; dann
ist nämlich $x = \frac{r^2}{x^I}$. Daher nach Gl. 4 Tang. $= \sqrt{y^{I2} + \left(\frac{x^{I2} - r^2}{x^I}\right)^2}$, T. $= \frac{r y^I}{x^I}$; die Nor- 28.
male N ist in ähnlicher Art bestimmt $= \sqrt{y^{I2} + x^{I2}} = r$, **Subtangente, St.** $= \frac{y^{I2}}{x^I}$, **Subnormale, Sn.** $= x^I$.

Aufgabe 3. Drei nicht in gerader Linie liegende Punkte sind gegeben; es soll die Gleichung des Kreises gefunden werden, der durch dieselben sich legen läßt.

Aufl. Man setzt die Gleichung 21 dreimal an, in Beziehung auf jeden der drei Punkte, und erhält drei Gleichungen, aus welchen die drei unbekannten Constanten a, b, r in bekannter Weise zu ermitteln sind.

Aufgabe 4. Zwei Punkte sind gegeben und ein Kreis (durch Mittelpunkt und Radius); man sucht die Gleichung des Kreises, welcher durch die beiden Punkte geht und den gegebenen Kreis berührt (von außen oder innen).

Aufl. Zwei Gleichungen lassen sich auf gleiche Weise, wie in voriger Aufgabe, ansetzen. Die dritte folgt aus der Betrachtung, daß die Centrale beider Kreise entweder die Summe oder Differenz der Radien ist, und daraus bestimmen sich die drei unbekannten Constanten.

Aufgabe 5. Die Gleichungen zweier Kreise sind gegeben $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ und $x^2 + y^2 + a^I x + b^I y + c^I = 0$. Man soll die Lage der Kreise bestimmen, und untersuchen, ob sie gemeinschaftliche Punkte haben oder nicht.

Aufl. Man entscheidet zunächst, ob die Kreise **concentrisch** sind oder **excentrisch**. Ersteres findet offenbar Statt, wenn $a = a^I$ und $b = b^I$. Sind die Kreise excentrisch, so geben nach §. 19 alle reellen und zusammengehörigen Werthe von x und y, welche den Gleichungen genügen, die Coordinaten der gemeinsamen Punkte. Man ersieht zugleich, da diese Operation immer zu einer quadratischen Gleichung führt, daß es **nie** mehr, als zwei Paar zusammengehöriger Coordinatenwerthe giebt, d. h. daß die Kreise nicht mehr als zwei Punkte gemeinsam haben können.

Aufgabe 6. Es sind zwei Kreise und eine Gerade durch ihre Gleichungen gegeben; man soll die Bedingung angeben, unter welcher die Gerade die Kreise berührt.

Aufl. ergiebt sich leicht nach Gl. 25, wenn man zur Vereinfachung den Mittelpunkt des einen Kreises zum Anfangspunkt und die Xachse mit der Centrale zusammenfallen läßt.

IV. Umgestaltung der Coordinaten.

§. 22. Obwohl die Lage der Coordinatenachsen im Allgemeinen einer willkührlichen Annahme unterliegt, so hat sich doch schon in §. 2 und 3 bei Bestimmung der Länge einer Geraden und ebenso bei der Betrachtung des Kreises ergeben, daß die Gleichungen der Linien sich einfacher gestalten, wenn man die Richtung der Achsen zweckmäßig ändert (den Coordinatenwinkel $= R$ werden läßt), oder einen andern Anfangspunkt wählt (Mittelpunkt des Kreises.) Es kann sich auch ereignen, daß die Gleichung einer krummen Linie (Curve) dadurch eine einfachere Form erhält, daß man ein schiefwinkliges statt des rechtwinkligen Systems einführt. Man spricht vom Verlegen der Coordinatenachsen, wenn man die erstgewählten Achsen verläßt und andere statt derselben gebraucht. Es ist offenbar, daß dadurch die ursprünglichen Coordinaten (z. B. eines bestimmten Punktes) sich durchgängig umgestalten müssen.

Besonders sind es zwei Verlegungen, die man häufig anwendet. Man verlegt nämlich die Achsen der Art, daß die neuen Achsen den alten parallel gehen (parallele Verschiebung), oder der Art, daß die neuen Achsen den alten nicht parallel gehen, ihr Anfangspunkt aber mit dem ursprünglichen zusammenfällt.

§. 23. 1) Rechtwinklige Coordinatenachsen. a. Parallele Verschiebung. Sind die Coordinaten des Punkts A Fig. 7 für rechtwinklige Achsen OX, OY mit x^{I} und y^{I} bezeichnet, so hat man für die neuen durch Punkt L den ersten parallel gelegten Achsen — die Constanten $LE = c$, $LD = d$ gesetzt — die Coordinaten x^{II} und y^{II} desselben Punktes
29. A, wie folgt ausgedrückt, $x^{II} = x^{I} - c$, $y^{II} = y^{I} - d$, oder $x^{I} = x^{II} + d$, $y^{I} = y^{II} + d$. Die Constanten c und d ändern sich nothwendig mit der Lage des neuen Anfangspunktes L, d. h. jede der Größen c und d kann positiv, negativ oder Null sein.

b. Drehung um den Anfangspunkt. Wenn man beide Coordinatenachsen LY^{II}, LX^{II} Fig. 7 gleichzeitig um den Winkel α in derselben Richtung gedreht denkt, so daß sie in der neuen Lage MLN wieder einen R. bilden, dann finden zwischen den ursprünglichen Coordinaten $x^{I}y^{I}$ des Punkts A und den neuen $x^{II}y^{II}$ folgende Gleichungen Statt: $LG = LF - FG$,
30. $AG = AH + GH$, oder 1) $x^{II} = x^{I}\cos.\alpha - y^{I}\sin.\alpha$. 2) $y^{II} = x^{I}\sin.\alpha - y^{I}\cos.\alpha$. Bei gleichzeitiger Verlegung des Anfangspunkts von L nach O hat man statt x^{I} den Werth $x^{I} + c$, statt y^{I} den Werth $y^{I} + d$ in die vorige Gleichung einzusetzen, wobei nach der Lage des Punktes O in Beziehung auf die ursprünglichen Achsen jede der Constanten c und d, positiv, negativ oder auch Null sein kann.

2) Schiefwinklige Coordinatenachsen. Die ursprünglichen rechtwinkligen Coordinatenachsen seien LX, LY Fig. 8 mit dem Anfangspunkt L, die neuen schiefwinkligen Achsen LN, LM mit demselben Anfangspunkt, der Art, daß LN mit LX den Winkel α, LM mit LX den Winkel β bilden. Dann haben folgende Gleichungen zwischen den ursprünglichen und neuen Coordinaten eines Punktes A Statt: $LB = LE + EB$, $AB = AC + CB$, oder
31. 1) $x^{I} = x^{II}\cos.\alpha + y^{II}\cos\beta$. 2) $y^{I} = x^{II}\sin.\alpha + y^{II}\sin.\beta$. Hat außerdem der Anfangspunkt eine Aenderung erfahren, etwa von L nach O verlegt, so treten statt x^{I} und y^{I} wie vorher die Werthe $x^{I} + c$ und $y^{I} + d$ ein.

Anmerkung. Geht man von den schiefwinkligen Achsen aus, so kann man die vorstehenden Gleichungen auch in umgekehrter Reihenfolge als besondere Formen der letzten ableiten. —

V. Die Parabel.

§. 24. Erklärung. Die Linie (Curve), deren Gleichung (für rechtwinklige Coordinaten) ist $y^2 = px$, heißt Parabel. 32.

Eigenschaften dieser Linie nach vorstehender Gleichung.

1) Ist in $y = \pm \sqrt{px}$ die Constante (Parameter) p negativ, so muß auch x negativ sein, um für y reelle Werthe zu geben; nimmt man dagegen, wie hier geschehen, p positiv, so bekommt man nur für jedes positive x ein reelles y. Die Curve liegt daher nur auf einer Seite der Ordinatenachse.

2) Aus $y = \pm \sqrt{px}$ folgt ferner, daß jedem positiven Werth von x zwei entgegengesetzte, absolut gleiche Werthe von y entsprechen. Ein Theil der Curve befindet sich also oberhalb der Abcissenachse, ein anderer Theil unterhalb derselben; beide Theile sind congruent. Darnach werden die mit der Yachse parallelen Sehnen von der Xachse halbirt.

3) Für $x = 0$, ist auch $y = 0$, und wenn x unendlichklein, ist $y \pm$ unendlichklein. Die Curve geht daher durch den Anfangspunkt, und schneidet die Abcissenachse im Anfangspunkt, da die beiden nächstliegenden Punkte von ihr zu verschiedenen Seiten der Abcissenachse sich befinden.

4) Wenn x bis ins Unendliche wächst, so durchläuft auch y (Fig. 9) die Werthe von 0 bis $\pm \infty$. Die krumme Linie ist also nicht geschlossen, ihre beiden Aeste entfernen sich immer mehr von der Xachse.

5) Aus der Gleichung 32 folgt für irgend zwei Punkte $x'y'$ und $x''y''$ der Parabel $y'^2 : y''^2 = px' : px'' = x' : x''$, d. h. die Abcissen verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Ordinaten. Daraus ist zu ersehen, daß das Wachsen der Veränderlichen (x und y) ein verschiedenes ist, die Curve anfangs sich rasch von der Abcissenachse entfernt, später weniger und endlich fast parallel mit der Xachse geht. 33.

§. 25. Erklärung. Der Anfangspunkt O, welchen die Parabel mit der ersten Achse gemeinschaftlich hat, heißt Scheitelpunkt der Parabel, die Gleichung 32 daher Scheitelgleichung, und die Abcissenachse OX die Achse der Parabel.

§. 26. Aufgabe. Eine Parabel $y^2 = px$ und eine Gerade $y = ax + b$ sind gegeben; man soll untersuchen, unter welchen Bedingungen beide Linien sich schneiden, berühren oder keinen Punkt gemeinschaftlich haben.

Aufl. Nach der Erörterung von §. 19 löst man die gegebenen Gleichungen nach x und y auf und zieht die dadurch erhaltenen zusammengehörigen Werthe von x und y in Betracht.

Man kann aber zunächst unterscheiden, ob $a = 0$, oder nicht Null ist. Für $a = 0$ ist die Gleichung der Geraden $y = b$ und stellt eine der Xachse parallele Gerade dar. Diese hat mit der Parabel einen Punkt gemein, dessen Coordinaten $x' = \frac{b^2}{p}$, $y' = b$ sind. Offenbar schneidet die Gerade die Parabel in diesem Punkte (berührt sie nicht), wie man dies des Genauern nach §. 20 erörtern kann. Demnach wird die Parabel von jeder mit der Achse parallelen Geraden in einem Punkte geschnitten. Eine solche gerade Linie heißt Durchmesser der Parabel, und der Durchschnittspunkt Scheitelpunkt dieses Durchmessers. 34.

Für den Fall, daß a nicht $= 0$ ist, erhält man im Allgemeinen für x und y zwei Werthe, nämlich $x = \frac{p - 2ab \pm \sqrt{p(p-4ab)}}{2a^2}$, $y = \frac{p \pm \sqrt{p(p-4ab)}}{2a}$. 35.

Dann sind 3 Fälle zu unterscheiden:

1) Für $p < 4ab$ sind die Werthe von x und y imaginär; die gegebene Gerade liegt ganz getrennt von der Parabel.
2) Wird $p > 4ab$, so giebt es zwei Paar zusammengehörige Werthe von x und y, nämlich $x'y'$, $x''y''$, welche reell und von einander verschieden sind. Parabel und Gerade haben demnach zwei Punkte gemeinschaftlich, oder die Gerade ist Secante der Parabel nach §. 20.
3) Für $p = 4ab$, haben die beiden Linien einen Punkt gemeinschaftlich, dessen Coordinaten $x' = \frac{p - 2ab}{2a^2}$, $y' = \frac{p}{2a}$. Nach §. 20 ist dieser Punkt ein Berührungspunkt und die Gerade folglich Tangente der Parabel. 36.

§. 27. Aufgabe. Die Gleichung der Tangente zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt P $(x'y')$ an die Parabel $y^2 = px$ gelegt ist.

Aufl. Die Gleichung der durch den Punkt P gehenden Geraden hat die Form $\frac{y - y'}{x - x'} = A$. Es kommt also darauf an, die unbekannte Constante A derartig zu bestimmen, daß die Gerade Tangente werde. Die Auflösung dieser Gleichung liefert $y = Ax + (y' - Ax')$ und nach Gl. 36 hat A die Bedingung zu erfüllen, daß $p = 4A\,(y' - Ax')$ werde. Diese letzte Gleichung giebt nach A aufgelöst $A = \frac{y' \pm \sqrt{y'^2 - px'}}{2x'}$. Demnach ist die Gleichung

37. der gesuchten Tangente $\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y' \pm \sqrt{y'^2 - p.x'}}{2x'}$.

War nun die Lage des Punkts P beliebig gewählt, so zeigt diese Gleichung, daß bei dieser Annahme es nicht immer eine Tangente für die Parabel giebt. Es kann nämlich sein

1) $y'^2 < px'$, so ist die Wurzelgröße imaginär, der Punkt P liegt innerhalb der Parabel und es besteht keine durch diesen Punkt gehende Tangente.

2) $y'^2 > px'$, dann liegt Punkt P außerhalb der Parabel und es bestehen zwei Gerade, welche durch den Punkt gehend die Parabel berühren, da für x und y je zwei reelle Werthe hervorgehen.

3) $y'^2 = px'$, dann befindet sich Punkt P in der Parabel, die Gleichung 37 geht über

38. in $\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'}{2x'}$ und stellt die Gerade vor, welche die Parabel im gegebenen Punkt P berührt. — Da im Punkte P, $y'^2 = px'$, also $x' = \frac{y'^2}{p}$, so folgt durch Substitution rechts in

39. voriger Gleichung $\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{p}{2y'} = \frac{\frac{p}{2}}{y'}$, oder $yy' = \frac{p}{2}(x + x')$; $y = \frac{p}{2y}(x + x')$ als Gleichung der Tangente.

Fragen: 1) Wie entwickelt man die Gleichung der Tangente aus der Betrachtung der Secante? 2) Wie legt man eine Tangente durch einen gegebenen Punkt außerhalb der Parabel? 3) Von welcher Art ist die Tangente, wenn Punkt P Anfangspunkt?

§. 28. Aufgabe 1. Die Gleichung der Normale für die Parabel zu finden.

Aufl. Nach §. 20 und 21 ist die Gleichung der Normale $y - y' = -\frac{2y'}{p}(x - x')$.

Aufgabe 2. Ein Punkt $x'y'$ in der Parabel ist gegeben; man soll für denselben Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale finden.

Aufl. Nach Anleitung von §. 20 und 21 findet sich **Fig. 9**, wenn man zuerst den Punkt D bestimmt $y'' = 0$, $x'' = -x'$, oder $OD = OB$ — Tang. $= \sqrt{y'^2 + 4x'^2} = \sqrt{(p + 4x')x'}$. Subt. $= BD = 2x'$; Normale, wenn man zunächst Punkt C bestimmt $y'' = 0$,

40. $x'' = \frac{p}{2} + x' = OC$ (daher $BC = \frac{p}{2}$), Norm. $= \sqrt{y'^2 + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\frac{4y'^2 + p^2}{4}} = \sqrt{\frac{(p + 4x')p}{4}} = \sqrt{(x' + \frac{1}{4}p)p}$; Subn. $= \frac{p}{2}$.

Besonders bemerkenswerth und bezeichnend für die Parabel ist, daß die Subtangente $= 2x'$, und die Subnormale, constant für jeden Parabelpunkt, $= \frac{p}{2}$.

§. 29. Lehrsatz. Der geometrische Ort für die Mitten paralleler Parabel-Sehnen ist eine mit der Achse parallele Gerade (Durchmesser).

Beweis. Es seien die Parabel $y^2 = px$ und eine Secante derselben $y = ax + b$; die Auflösung beider Gleichungen nach y giebt $y^2 - \frac{p}{a}y + \frac{pb}{a} = 0$. Diese Gleichung liefert zwei Werthe als Ordinaten der Durchschnittspunkte beider Linien y' und y''. Nennt man die Coordinaten des Halbirungspunktes dieser erhaltenen Sehnen u und v, so ist nach Gl. 5 $v = \frac{y' + y''}{2.}$. Nach einer bekannten Eigenschaft quadratischer Gleichungen ist aber die Summe der beiden Werthe $y^1 + y^{11}$ = dem Coëfficienten von y mit umgekehrtem Vorzeichen in obiger Gleichung, also $y^1 + y^{11} = \frac{p}{a}$, demnach $v = \frac{p}{2a}$. Da nun alle parallelen Sehnen dieselbe Richtungs-Constante oder denselben Factor a in ihren Gleichungen haben, so ist v für jede der parallelen Sehnen $= \frac{p}{2a}$ eine constante Größe; oder $y = \frac{p}{2a} = c$ ist die Gleichung für die Mitten aller paralleler Sehnen. Die Gleichung $y = c$ stellt aber einen Durchmesser der Parabel vor. 41.

Lehrsatz 2. Der Durchmesser für den Berührungspunkt einer Tangente der Parabel halbirt alle der Tangente parallelen Sehnen.

Bew. Nach vorigem Lehrsatz ist $y = \frac{p}{2a}$ die Gleichung des Durchmessers, welcher alle der Geraden $y = ax + b$ parallelen Sehnen halbirt. Denkt man für den Punkt y^1 der Parabel den Durchmesser gezogen, so ist $y = y^1$ die Gleichung desselben und aus $y^1 = \frac{p}{2a}$ folgt $a = \frac{p}{2y^1}$, folglich liefert die Gleichung $y = \frac{p}{2y^1}x + b$ bei veränderlichem b alle parallelen Sehnen der Parabel, welche durch jenen Durchmesser halbirt werden.

Nach Gleichung 39 hat aber die Tangente für den Punkt x_1y^1 der Parabel dieselbe Richtungs-Constante $\frac{p}{2y^1}$, ist folglich parallel den vom Durchmesser $y = y^1$ halbirten Sehnen.

§. 30. Aufgabe. Es ist Fig. 10 ein Punkt F gegeben und eine Gerade AB; man soll den geometrischen Ort aller Punkte bestimmen, welche von Punkt F und der Linie AB gleichen Abstand haben.

Aufl. Man ziehe durch Punkt F eine Senkrechte AD zu AB, bezeichne die constante Entfernung des Punkts F von AB mit c, so ist die Mitte von AF, nämlich O ein Punkt des gesuchten geometrischen Orts. Nimmt man O zum Anfangspunkt der Coordinaten, und wählt irgend einen zweiten C des zu suchenden Orts, so ist dessen Entfernung CB von der Geraden AB gleich CF, der Entfernung vom Punkte F, und man hat die Gleichung zwischen den Coordinaten x und y des Punkts C herzuleiten. — Da $OF = OA = \frac{c}{2}$, so ist $CF^2 = y^2 + (x - \frac{c}{2})^2$, und da ferner $CF = CB = AD = x + \frac{1}{2}c$, so hat man $(x + \frac{c}{2})^2 = y^2 + (x - \frac{c}{2})^2$; oder aufgelöst $y = 2cx$. Diese Gleichung stellt eine Parabel vor, mit dem Parameter $p = 2c$. Der verlangte geometrische Ort ist also eine Parabel mit dem Scheitelpunkt O, deren Parameter die doppelte Entfernung des Punkts F von der gegebenen Geraden AB ist.

Anmerkung. Man wählt diese Darstellungsweise häufig zum Ausgangspunkt für die Erklärung der Parabel.

§. 31. Erklärungen und Zusätze. 1) Aus vorigem §. folgt, falls die Parabeln $y^2 = px$ und $y^2 = 2c.x$ identisch sein sollen, muß $p = 2c$, oder $c = \frac{p}{2} = AF$ sein, folglich $OA = OF = \frac{p}{4}$. Der Punkt F heißt gewöhnlich Brennpunkt, Focus, die Gerade AB die Richtungslinie (Directrix) und die Gerade FC Brennstrahl, Leitlinie (radius vector) der Parabel. Und wenn x die Abscisse des Punktes C der Parabel, so ist $CF = CB = AD = x + \frac{1}{4}p$. Ferner ist die Ordinate im Brennpunkt $F = \frac{1}{2}p$, da sie gleich $x + \frac{p}{4} = \frac{p}{4} + \frac{p}{4} = \frac{p}{2}$ sich erweist. Die Linie HK, d. h. die Senkrechte auf der Xachse im Brennpunkt ist daher $= p$, dem Parabel-Parameter.

2) In Fig. 10 seien EC Tangente für den Punkt C, und F der Brennpunkt, so ist $EF = FC$. Denn nach Gleichung 40 ist $ED = 2.EO = 2x^1$, und daher $EF = x + \frac{1}{4}p$, und ebenso ist $FC = x + \frac{p}{4}$.

3) Die Tangente EC halbirt auch den Winkel BCF, welchen den Durchmesser BC und die Brennlinie FC bilden; wie sich leicht ergiebt, da BCE = CEF als Wechselwinkel zu Parallelen und CEF = ECF nach No. 2; woraus die Behauptung folgt.

4) Aus dem Vorigen ist ferner, wenn CG die Normale gezogen, Winkel FCG = GCN; weiter MCN = BCE = ECF, d. h. Durchmesser und Brennlinie bilden mit der Tangente für denselben Punkt der Parabel gleiche Winkel. (Dieser Satz ist physikalisch wichtig.)

Fragen: 1) Wie leitet man vorstehende Behauptungen aus den entsprechenden Gleichungen ab? 2) Wie läßt sich erweisen, daß eine Senkrechte im Punkt F auf CF errichtet, durch den Punkt L geht? 3) Wie ist zu beweisen, daß eine Senkrechte im Punkte O auf ED errichtet, durch die Mitte von EC, und ebenso ein Loth von F auf EC gefüllt, durch denselben Punkt geht?

§. 32. Umformung der Parabelgleichung $y^2 = px$.

1) Wenn man mit Beibehaltung der Xachse, die Directrix AB zur neuen Ordinatenachse statt der ursprünglichen wählt, so erhält man nach Gl. 29 als Parabelgleichung $y^2 = p\left(x - \frac{p}{4}\right)$.

2) Wählt man mit Beibehaltung der Xachse die im Brennpunkt senkrechte Sehne zur neuen Yachse, so hat man die Gleichung $y^2 = p\left(x + \frac{p}{4}\right)$.

3) Nimmt man den Scheitel eines Parabel-Durchmessers zum Anfangspunkt, den Durchmesser selbst zur Xachse, die durch den Scheitel desselben gelegte Tangente zur Yachse eines neuen Coordinatensystems, so geht man von rechtwinkligen zu schiefwinkligen Achsen über. — Der neue Coordinatenwinkel sei ϑ, und ein Punkt P der Parabel $y^2 = px$ habe die Coordinaten $x^I y^I$ für die ursprünglichen Achsen, $x^{II} y^{II}$ für die neuen, während die Coordinaten des neuen Scheitel- oder Anfangspunkts c und d heißen. Dann kann man nach Gl. 31 setzen $y^I = d + y^{II} . \sin. \vartheta$, $x^I = c + x^{II} + y^{II} \cos. \vartheta$. Durch Substitution dieser Werthe in die Parabelgleichung $y^{I2} = px^I$ für Punkt P erhält man:

$(d + y^{II} \sin. \vartheta)^2 = p(c + x^{II} + y^{II} \cos. \vartheta)$, oder $d^2 + 2dy^{II} \sin. \vartheta + y^{II\,2} \sin. \vartheta^2 = pc + px^{II} + py^{II} \cos. \vartheta$, oder $pc - d^2 + px^{II} = y^{II\,2} . \sin. \vartheta^2 + y^{II}(2d \sin. \vartheta - p \cos. \vartheta)$. Nun ist $pc - d^2 = 0$ (nach Parabelgleichung) und $(2d \sin. \vartheta - p \cos. \vartheta) = 0$, da $\tang. \vartheta = \frac{p}{2y^I}$ nach Gl. 39; folglich, wenn man substituirt, $y^{II\,2} \sin. \vartheta^2 = px^{II}$, oder $y^{II\,2} = \frac{p x^{II}}{\sin. \vartheta^2}$.

42. Bezeichnet man den Parameter $\frac{p}{\sin. \vartheta^2}$ mit p^{II}, so hat man $y^{II\,2} = p^{II} x^{II}$, eine Gleichung, welche der Form nach mit Gleichung 32 übereinstimmt.

Zusatz. Wird ein Durchmesser der Parabel zur Xachse und die durch den Scheitel desselben gelegte Tangente als Yachse gewählt, so heißen solche Coordinatenachsen conjugirte (zugeordnete) Achsen, während die ursprünglichen Hauptachsen genannt werden. (Haupt- und conjugirte Coordinaten.)

Auch für conjugirte Achsen findet nach dem Vorigen das Gesetz der Parabel in Gl. 33 Statt: die Abcissen verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Ordinaten.

§. 33. Inhaltsbestimmung eines Parabelsegments.

Lehrsatz 1. Man denke sich irgend eine Parabel-Sehne CD Fig. 11. und den zugehörigen Durchmesser AB (der sie halbirt), verbinde die Punkte C und D mit dem Scheitel A, verfahre in Bezug auf die Sehnen AC und AD in gleicher Weise, so entstehen die Sehnendreiecke ACD, ADF, ACG. Dann ist Dreieck ADF = ACG = dem achten Theil des Dreiecks ACD.

Bew. Zunächst ist CE = ED, AH = HD, und zieht man durch F und H die Geraden FK und HL ∥ CD, so ist $HL = FK = \frac{1}{2} . DE$; Dreieck $ALH = \frac{1}{4} . ADE$. — Nimmt man ferner die durch A gelegte Tangente und den Durchmesser AB zu conjugirten Achsen der Parabel, so sind DE und FK die Ordinaten der Punkte D und F für diese Achsen, daher findet nach vorigem §. die Gleichung Statt: $FK^2 : DE^2 = AK : AE$, oder $1 : 4 = AK : AE$, $AK = \frac{1}{4} . AE$; folglich $AK = KL = FH$. Nun ist $\triangle AKF = AHF = \frac{1}{2} ALH = \frac{1}{2} ADF$, woraus folgt $\triangle ALH = ADF = \frac{1}{4} ADE$; und endlich $\triangle ADF = \frac{1}{8} . ACD$. Eine ähnliche Betrachtung ergiebt $\triangle ACG = \frac{1}{4} . ACE = \frac{1}{8} . ACD$.

Lehrsatz 2. Der Inhalt eines Parabelsegments **ACD** beträgt $\frac{2}{3}$ des aus der Sehne **CD** und deren Abscisse **AE** gebildeten Parallelogramms **CDMN**.

Bew. Mit Anwendung des vorigen Lehrsatzes hat man **Fig. 11.** $\triangle ADF + \triangle ACG = \frac{1}{4} . ACD$. Verfährt man in Bezug auf jedes der Dreiecke **ADF** und **ACG** in gleicher Weise, so entstehen 4 Dreiecke über den Sehnen **DF, FA, AG, GC**, deren Summe $= \frac{1}{4} (\triangle ADF + \triangle ACG) = \frac{1}{16} . \triangle . ACD$ ist. Denkt man dies Verfahren ohne Ende fortgesetzt, so erhält man das Parabelsegment $S = \triangle ACD + \frac{1}{4} ACD + \frac{1}{16} ACD + \ldots$ ins Unendliche, $= ACD\,(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots \infty.)$, oder da die eingeklammerte geometrische Reihe für $n = \infty$ die Summe $\frac{4}{3}$ giebt, $S = \frac{4}{3} . ACD = \frac{4}{6}$. Parallelogramm 43.
$CDMN = \frac{2}{3} . CDMN$. Steht die Sehne senkrecht zur Achse, so ist der Parabelabschnitt $\frac{4}{3} . x^1 y^1$.

Fragen: 1) Wie findet man den Inhalt eines Paraboloids, d. h. desjenigen Körpers, welcher durch Drehung eines Parabelsegments um die Parabelachse entsteht? 2) Wie zeichnet man eine Parabel?

VI. Die Ellipse.

§. 34. Erklärung. Die Linie (Curve), welche durch die Gleichung $y^2 = px - qx^2$ 44.
bestimmt ist, heißt Ellipse. — Eigenschaften dieser Curve:

1) Da $y = \pm \sqrt{px - qx^2}$, so wird (bei positivem **p** und **q**) **y** stets imaginär für negative Werthe von **x**, d. h. die Curve liegt rechts (auf einer Seite) von der Ordinatenachse. (vergl. §. 24.)

2) Ist **y** überhaupt reell, so hat es stets zwei absolut gleiche, aber entgegengesetzte Werthe, d. h. die Linie liegt zu beiden Seiten der Abscissenachse symmetrisch, oder die beiden von der Xachse abgeschnittenen Theile derselben sind congruent.

3) **y** wird $= 0$, für $x = 0$; die Curve schneidet demnach die Xachse im Anfangspunkt.

4) Aber **y** wird noch einmal $= 0$, wenn $px - qx^2 = 0$, oder $px = qx^2$, d. h. wenn $x = \frac{p}{q}$ ist.

5) Wenn demnach **Fig. 12.** Punkt **O** der Anfangspunkt für die rechtwinkligen Achsen **OX** und **OY**, und $OA = \frac{p}{q}$ angenommen wird, so trifft die Curve die Xachse in den Punkten **O** und **A**. Es läßt sich leicht darthun, daß die Curve zwischen den Punkten **O** und **A** überall reell ist, und daß sie sich nicht über Punkt **A** hinaus erstreckt. Alle Werthe von $x \angle \frac{p}{q}$ liefern nämlich $qx \angle p$, oder $qx^2 \angle px$, d. h. das entsprechende **y** ist stets reell. Dagegen alle Werthe von $x \mathrel{7} \frac{p}{q}$ geben $qx \mathrel{7} p$, oder $qx^2 \mathrel{7} px$, d. h. das entsprechende **y** ist imaginär. Deshalb liegt die Curve über **OA** und ist geschlossen.

6) Bezeichnet man das Maximum der Abscisse $x = \frac{p}{q}$ mit **2a** und den Mittelpunkt der- 45.
selben mit **C**, so daß $OC = AC = a$, so kann man für jedes **x** den Werth $a \pm u$ **Fig. 12** substituiren (**u** veränderlich) und man hat:

$y = \pm \sqrt{p(a \pm u) - q(a \pm u)^2}$, oder, da $\frac{p}{q} = 2a$, also $p = 2aq$ ist, $y = \pm \sqrt{q(a^2 - u^2)}$. 46.

Aus dieser Gleichung ist offenbar, daß für die Abscissen $a + u$ und $a - u$, d. h. in gleichem Abstande vom Punkte **C**, die Ordinaten völlig übereinstimmen; oder für die Senkrechte **BD** im Punkte **C** der Xachse gilt dasselbe, wie oben für die Abscissenachse **OX**; diese Linie theilt die Curve in zwei congruente Theile. Zugleich wird in Gleichung 46 **y** ein Maximum, wenn $u = o$ (ein Minimum), d. h. die durch den Mittelpunkt **C** gehende Ordinate **BC** ist die größte.

Frage: 1) In welcher Weise kann man aus Gleichung 44 und 45 über die Krümmungsstärke der Curve in der Nähe der Punkte **O, A, B** und **D** Bestimmungen machen?

§. 35. Verschiedene Formen der Ellipsengleichung.

Man nennt die Linie **OA** (**Fig. 12**) große Achse (Hauptachse), **BD** kleine Achse (Nebenachse), **C** den Mittelpunkt der Ellipse. — Die Achsen sind zur Bestimmung der Ellipse, als Parameter statt **p** und **q** sehr geeignet. Setzt man die halben Achsen $OC = a$, $BC = b$,

47. so hat man nach Gl. 45 und 46, $a = \frac{p}{2q}$, und $b = \sqrt{\frac{p^2}{4q}}$ und die Gleichung 44 nimmt

48. nach Substitution der Werthe für p und q die Form an: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. für O als Scheitel- (Anfangspunkt) und a und b als Parameter (Scheitelgleichung der Ellipse).

Wählt man statt O den Mittelpunkt C zum Anfangspunkt, so nimmt diese Gleichung nach Anwendung von §. 23, indem man $a + x$ statt x setzt, die einfachere Gestalt an:

49. I. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, oder II. $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, oder III. $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ (Mittelpunktsgleichung).

Anmerkung. Die Gleichungen der Ellipse verwandeln sich in die des Kreises, wenn die Halbachsen a und b gleich sind. Der Kreis ist daher nur eine besondere Form der Ellipse.

Fragen: 1) Kann OA auch kleiner werden als BC? 2) Unter welcher Bedingung wird OA große oder kleine Achse, und wann wird die Ellipse ein Kreis? 3) Wann wird aus der Ellipse eine Parabel? (Antw.: Es wird $q = 0$ oder $y^2 = px$, wenn die große Achse der Ellipse $2a = \frac{p}{q} = \infty$ wird.)

§. 36. Aufgabe. Gegeben sind eine Ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$, und eine Gerade $y = mx + n$. Es sollen die Bedingungen gesucht werden, unter welchen die Linien sich schneiden, berühren, oder keinen Punkt gemein haben.

Aufl. Nach Anleitung von §. 19 und 26 hat man

50. $$x = \frac{-a^2mn \pm ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2},\quad y = \frac{b^2n \pm abm\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2}.$$

Die Betrachtung dieser Coordinatenwerthe läßt zunächst erkennen, daß der Nenner $a^2m^2 + b^2$ nicht Null sein, da sonst m imaginär sein würde. Sodann hängt die Erledigung der Frage von dem Wurzelausdruck ab. — Es ist zu unterscheiden, ob $a^2m^2 + b^2 > n^2$, oder $a^2m^2 + b^2 = n^2$, oder $a^2m^2 + b^2 < n^2$. Im ersten Fall ist die Gerade Secante, im zweiten Tangente der Ellipse, im dritten Fall haben beide Linien keinen Punkt gemeinschaftlich. — Ist in der Gleichung der Geraden $n = 0$, geht also die Linie durch den Mittelpunkt (Anfangspunkt) der Ellipse, so lehrt Gleichung 50, daß die Doppelwerthe von x und y in diesem Falle absolut gleich sind, und die Gerade (Sehne) wird mithin durch den Mittelpunkt der Ellipse halbirt. Dies giebt den Satz: Jeder Durchmesser der Ellipse, d. h. jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne wird durch diesen Punkt halbirt.

§. 37. 1) Gleichung der Tangente. Gegeben sind eine Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und ein Punkt P $(x'y')$. Man soll die Gleichung der Geraden finden, welche durch P gehend die Ellipse berührt.

Aufl. α) In gleicher Weise wie in §. 27 auszuführen.

β) Für den besondern Fall, daß Punkt P in der Ellipse liegt, wollen wir zur Abwechslung ein anderes Verfahren einschlagen. — Nach der Vorstellung, daß die Tangente eine Secante, deren beide Durchschnittspunkte mit der Curve in einen zusammenfallen, sei in der Ellipse ein zweiter Punkt R $(x''y'')$ angenommen, so ist nach Gl. 10 die durch beide Punkte gehende Secante $y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$. Hieraus müßte die Tangentengleichung entstehen, wenn man $y'' = y'$ (also $x'' = x'$) setzt. Durch diese Substitution erhält man aber den unbestimmten Factor $\frac{0}{0}$ und es hat eine andere Betrachtung einzutreten. Für jeden der Punkte P und R findet nämlich die Ellipsengleichung Statt, $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, $a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2$. Durch Subtraction beider Gleichungen entsteht $a^2(y'^2 - y''^2) + b^2(x'^2 - x''^2) = 0$, oder $y'^2 - y''^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x'^2 - x''^2)$, oder $(y' + y'')(y' - y'') = -\frac{b^2}{a^2}(x' + x'')(x' - x'')$, mithin $\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{x' + x''}{y' + y''}\right)$: demnach die Gleichung der Secante $y' - y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x' + x''}{y' + y''} \cdot (x - x')$. Wird nun $y'' = y'$ und demzufolge $x'' = x'$ gesetzt, so geht diese Gleichung

51. in die Gleichung der Tangente über, $y - y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} \cdot (x - x')$, oder $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$.

γ) Der vorige §. ergab als Coordinaten des Berührungspunkts der Geraden und der Ellipse $x^{\prime} = -\frac{a^2mn}{a^2m^2+b^2}$, $y^{\prime} = \frac{b^2n}{a^2m^2+b^2}$. Löst man diese Gleichungen nach m und n auf, so hat man durch Division $\frac{x^{\prime}}{y^{\prime}} = -\frac{a^2m}{b^2}$, oder $m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^{\prime}}{y^{\prime}}$ als Richtungs-Constante der gesuchten Geraden, oder die Gerade selbst durch $y - y^{\prime} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^{\prime}}{y^{\prime}} \cdot (x - x^{\prime})$.

2) Gleichung der Normale. Für den bestimmten Punkt $x^{\prime}y^{\prime}$ der Ellipse ist die Gleichung der Normale nach Gl. 17. $y - y^{\prime} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^{\prime}}{x^{\prime}} \cdot (x - x^{\prime})$. 52.

3) Die Linien Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale bestimmen sich auf ähnliche Weise wie beim Kreise, Parabel nach §. 21 und 28.

Es ist **Subtangente** $= \frac{a^2 - x^{\prime 2}}{x^{\prime}} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^{\prime 2}}{x^{\prime}}$ und daraus **Tangente** (Fig. 13) $= \sqrt{y^{\prime 2} - \frac{a^4y^{\prime 4}}{b^4x^{\prime 2}}} = \frac{y^{\prime}}{b^2x^{\prime}} \cdot \sqrt{a^4y^{\prime 2} + b^4x^{\prime 2}}$; **Subnorm.** $= \frac{b^2}{a^2} \cdot x^{\prime}$ und **Normale** $= \frac{1}{a^2} \cdot \sqrt{a^4y^{\prime 2} + b^4x^{\prime 2}}$. ——— Es ist bemerkenswerth, daß die Subtangente der Ellipse $\left(= \frac{a^2 - x^{\prime 2}}{x^{\prime}}\right)$ von der kleinen Achse b unabhängig ist. Denn darin liegt, wenn man sich über derselben Hauptachse **OA** (Fig. 13) die unzähligen Ellipsen mit verschiedenen Nebenachsen — den Kreis eingeschlossen — denkt, und an alle diese Ellipsen von demselben Punkte **M** der Xachse Tangenten legt, so liegen deren Berührungspunkte **H**, **H**$^{\prime}$ u. s. w. in derselben Geraden, derselben Ordinatenlinie nämlich und haben daher dieselben Abcissen $x^{\prime}$.

§. 38. Lehrsatz. Der geometrische Ort für die Mitten paralleler Sehnen einer Ellipse ist jedesmal ein Durchmesser.

Beweis. Die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ werde geschnitten von der Geraden $y = mx + n$. Dann sind nach §. 36 die Coordinaten der Durchschnittspunkte beider Linien $\left.\begin{matrix} x^{\prime} \\ x^{\prime\prime} \end{matrix}\right\} = \frac{-a^2mn \pm ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2}$, $\left.\begin{matrix} y^{\prime} \\ y^{\prime\prime} \end{matrix}\right\} = \frac{b^2n \pm abm\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2}$. Bezeichnen u und v die Coordinaten des Halbirungspunkts der Sehne $y = mx + n$, so ergiebt sich $u = \frac{x^{\prime} + x^{\prime\prime}}{2} = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2}$, $v = \frac{y^{\prime} + y^{\prime\prime}}{2} = \frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2}$. Durch Division beider Gleichungen geht hervor $\frac{v}{u} = -\frac{b^2n}{a^2mn} = -\frac{b^2}{a^2m}$. Dieser Werth für $\frac{v}{u}$ ist von n unabhängig, daher für alle mit der Linie $y = mx + n$ parallelen Geraden derselbe (constant). Die Mittelpunkte aller mit der Linie $y = mx + n$ parallelen Sehnen (wobei nur n veränderlich) liegen daher in der Geraden $y = -\frac{b^2}{a^2m} \cdot x$, und diese gerade Linie als der gesuchte geometrische Ort 53.
geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten (Mittelpunkt der Ellipse), ist also ein Durchmesser.

§. 39. Zusätze. 1) Ist $y = gx$ die Gleichung irgend eines Durchmessers der Ellipse, so ist nach vorigem §. $y = -\frac{b^2}{a^2g} \cdot x + n$ (mit veränderlichem n) die Gleichung aller parallelen 54.
Sehnen, welche jener Durchmesser halbirt. Denn aus $m = -\frac{b^2}{a^2g}$, folgt $g = -\frac{b^2}{a^2m}$, und umgekehrt.

2) Heißt der Winkel, welchen der Durchmesser $y = gx$ mit der Abcissenachse bildet, α, so ist $\tang \alpha = g = \frac{y^{\prime}}{x^{\prime}}$ (in Bezug auf den einen Durchschnittspunkt $x^{\prime}y^{\prime}$) und die Gleichung für die parallelen Sehnen formt sich um in $y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^{\prime}}{y^{\prime}} \cdot x$. Die Richtungsconstante dieser Gleichung ist aber übereinstimmend mit derjenigen der Tangente für den bestimmten Punkt $x^{\prime}y^{\prime}$. Darin liegt: jeder Durchmesser halbirt die Sehnen, welche parallel sind den, durch seine Endpunkte gelegten Tangenten.

3) Setzt man $n = o$ in Gleichung 54, so erhält man den Durchmesser $y = -\frac{b^2}{a^2 g} . x$

55. und dieser Durchmesser halbirt nach 1. alle mit der Linie $y = gx + n$, oder dem Durchmesser $y = gx$ parallelen Sehnen. — Wenn daher jeder von zwei Durchmessern der Ellipse beziehlich den Sehnen parallel ist, welche der andere halbirt, so müssen ihre Richtungs-Constanten g und $g^{\prime}$ der Bedingung genügen, daß $g^{\prime} = -\frac{b^2}{a^2 g}$ und umgekehrt, oder $gg^{\prime} = -\frac{b^2}{a^2}$ ist. Zwei Durchmesser dieser Art heißen **conjugirte** (zugeordnete) Durchmesser.

4) Sind $y = mx$ und $y = m^{\prime}x$ die Gleichungen zweier conjugirten Ellipsen-Durch-

56. messer, so ist immer $mm^{\prime} = -\frac{b^2}{a^2}$.

5) Bezeichnet ε den von beiden conjugirten Durchmessern gebildeten Winkel, so ist nach Gl. 16 $\text{tang } \varepsilon = \frac{m - m^{\prime}}{1 + mm^{\prime}}$, oder, da aus $mm^{\prime} = -\frac{b^2}{a^2}$ zu ersehen ist, daß eine der Richtungs-Constanten negativ sein, d. h. der entsprechende Durchmesser einen stumpfen Winkel mit der Xachse bilden muß, so ist bei einem negativen m, $\text{tang. } \varepsilon = -\frac{(m + m^{\prime})}{1 - mm^{\prime}} = -\frac{b^2 + a^2 m^2}{(a^2 - b^2) m} = -\frac{b^2 + a^2 m^2}{e^2 m}$. Für $m = 0$ ist $\text{tang. } \varepsilon = \infty$, oder $\varepsilon = R$, d. h. die conjugirten Durchmesser liefern dann die beiden Achsen der Ellipse; letztere sind also conjugirte Durchmesser und zwar die einzigen senkrechten.

§. 40. Lehrsätze. Es seien $a^{\prime}$ und $b^{\prime}$ die Hälften zweier conjugirten Durchmesser, ε der Winkel, welchen sie bilden, so finden folgende beide Gesetze Statt: I. $a^{\prime 2} + b^{\prime 2} = a^2 + b^2$.

57. II. $a^{\prime}, b^{\prime} \sin. \varepsilon = ab$.

Bew. I. Der Durchmesser $2a^{\prime}$ treffe die Ellipse im Punkte $x^{\prime}y^{\prime}$, so ist die Gleichung dieses Durchmessers $y = \frac{y^{\prime}}{x^{\prime}} . x \left(\frac{y^{\prime}}{x^{\prime}} = m\right)$. Dann ist die Gleichung des zweiten Durchmessers $2b^{\prime}$ nach vorigem §. $y = -\frac{b^2}{a^2} . \frac{x^{\prime}}{y^{\prime}} . x \left(m^{\prime} = -\frac{b^2}{a^2 . m} = -\frac{b^2}{a^2} . \frac{x^{\prime}}{y^{\prime}}\right)$. Durch Verbindung der letzten Gleichung mit der Gleichung der Ellipse ergeben sich die Coordinaten der Durchschnittspunkte beider Linien, nämlich $\left.\begin{matrix} u^{\prime} \\ u^{\prime\prime} \end{matrix}\right\} = \pm \frac{a}{b} y^{\prime}$, $\left.\begin{matrix} v^{\prime} \\ v^{\prime\prime} \end{matrix}\right\} = \mp \frac{b}{a} x^{\prime}$. Demzufolge hat man $a^{\prime 2} = x^{\prime 2} + y^{\prime 2}$, $b^{\prime 2} = u^{\prime 2} + v^{\prime 2} = \frac{a^2}{b^2} y^{\prime 2} + \frac{b^2}{a^2} x^{\prime 2}$. Durch Addition bekommt man: $a^{\prime 2} + b^{\prime 2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} . x^{\prime 2} + \frac{a^2 + b^2}{b^2} y^{\prime 2} = (a^2 + b^2) \left(\frac{x^{\prime 2}}{a^2} + \frac{y^{\prime 2}}{b^2}\right)$ oder $a^{\prime 2} + b^{\prime 2} = a^2 + b^2$, d. h. die Summe der Quadrate je zweier conjugirten Durchmesser ist constant und gleich der Summe der Quadrate der Achsen.

Bew. II. Multiplicirt man die Quadrate der conjugirten Halbachsen und beachtet, daß $m = \frac{y^{\prime}}{x^{\prime}}$, $m^{\prime} = \frac{v^{\prime}}{u^{\prime}}$, ferner $mm^{\prime} = -\frac{b^2}{a^2}$ und aus der Ellipsengleichung $x^{\prime 2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 m^2 + b^2}$, so folgt, da $a^{\prime 2} = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2}$, $b^{\prime 2} = \frac{a^2 b^2 (1 + m^{\prime 2})}{a^2 m^{\prime 2} + b^2}$, daß $a^{\prime 2} . b^{\prime 2} = \frac{a^4 b^4 (1 + m^2)(1 + m^{\prime 2})}{(a^2 m^2 + b^2)(a^2 m^{\prime 2} + b^2)}$

$$= \frac{a^4 b^4 (1 + m^2) \left(1 + \frac{b^4}{a^4 m^2}\right)}{(a^2 m^2 + b^2) \left(\frac{a^2 b^4}{a^4 m^2} + b^2\right)} = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)(a^4 m^2 + b^4)}{(a^2 m^2 + b^2)^2}.$$

Nun ist nach vorigem §. $\text{tang. } \varepsilon = -\frac{b^2 + a^2 m^2}{(a^2 - b^2) m}$, also $\sin. \varepsilon^2 = \frac{(b^2 + a^2 m^2)^2}{(a^2 - b^2)^2 m^2} . \cos. \varepsilon^2 = \frac{(b^2 + a^2 m^2)^2}{(a^2 - b^2)^2 m^2} . \frac{1}{1 + \text{tang. } \varepsilon^2}$ $= \frac{(b^2 + a^2 m^2)^2}{(b^4 + a^4 m^2)(1 + m^2)}$ und multiplicirt man diese Gleichung mit der vorhergehenden, so gelangt man zur Gleichung $a^{\prime 2} b^{\prime 2} \sin. \varepsilon^2 = a^2 b^2$, oder $a^{\prime} b^{\prime} \sin. \varepsilon = ab$. Darin liegt:

sowohl alle eingeschriebenen Parallelogramme (Sehnen-Parallelogramme) als auch alle umschriebenen (Tangenten-Parallelogramme) der Ellipse, welche durch die Endpunkte conjugirter Durchmesser gelegt werden können, haben gleichen Inhalt (vergl. Fig. 14).

Fragen: 1) Wie kann man nachweisen, daß jede der conjugirten Halbachsen größer als **b**, kleiner als **a** ist? (Aufl.: man setzt in die Gleichungen der conjugirten Halbachsen für **m** und **m'** die entsprechenden trigonometrischen Functionen.)

§. 41. Gleichung der Ellipse für conjugirte Durchmesser als Achsen (schiefwinklige Achsen). Die neue Xachse (ein Durchmesser) bilde mit der großen Achse den Winkel α, die neue Yachse mit derselben den Winkel β, und für einen bestimmten Punkt der Ellipse $x'y'$ seien die neuen Coordinaten $x''y''$, so bekommt man mit Anwendung von §. 23 (Gl. 31) als Gleichung der Ellipse $a^2(x''\sin.\alpha + y''\sin.\beta)^2 + b^2(x''\cos.\alpha + y''\cos.\beta)^2 = a^2b^2$, oder aufgelöst $(a^2\sin.\beta^2 + b^2\cos.\beta^2)\,y''^2 + 2(a^2\sin.\alpha.\sin.\beta + b^2\cos.\alpha.\cos.\beta)\,x''y'' + (a^2\sin.\alpha^2 + b^2\cos.\alpha^2)\,x''^2 = a^2b^2$. Sollen nun die zu neuen Achsen gewählten beliebigen Durchmesser conjugirte Durchmesser sein, so folgt nach Gleichung 56. $a^2\sin.\alpha.\sin.\beta + b^2\cos.\alpha.\cos.\beta = 0$, und die obige Gleichung formt sich um in $(a^2\sin.\beta^2 + b^2\cos.\beta^2)\,y''^2 + (a^2\sin.\alpha^2 + b^2\cos.\alpha^2)\,x''^2 = a^2b^2$. Läßt man in dieser Gleichung y'' in b' übergehen, so wird $x'' = 0$, und folglich ist $a^2\sin.\beta^2 + b^2\cos.\beta^2 = \frac{a^2b^2}{b'^2}$; ebenso wird für $x'' = a'$, $y'' = 0$ und daher $a^2\sin.\alpha^2 + b^2\cos.\alpha^2 = \frac{a^2b^2}{a'^2}$. Durch Substitution dieser Werthe geht hervor $\frac{a^2b^2}{b'^2}.y''^2 + \frac{a^2b^2}{a'^2}.x''^2 = a^2b^2$, oder $\frac{y''^2}{b'^2} + \frac{x''^2}{a'^2} = 1$; oder $a'^2y''^2 + b'^2x''^2$ 58.
$= a'^2.b'^2$, woraus durch Weglassen der Marken entsteht $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2.b'^2$. Diese Gestalt der Ellipsengleichung für conjugirte Achsen ist übereinstimmmend mit der ursprünglichen bei Haupt- und Nebenachse.

§. 42. 1. Aufgabe. Zwei Punkte **F** und **F'** (Fig. 15) sind durch ihre Entfernung von einander $= 2e$ gegeben; man soll den geometrischen Ort desjenigen Punktes suchen, für welchen die Summe der Entfernungen von den gegebenen Punkten eine constante Größe $2a$ ausmacht.

Aufl. Die Linie **FF'** sei zur Xachse, die im Halbirungspunkt derselben **C** errichtete Senkrechte **DE** zur Yachse gewählt, also **C** der Anfangspunkt, $FC = F'C = e$. Dann ist für einen beliebigen Punkt **G** der verlangten Art $FG + F'G = 2a$. Man hat daher, wenn x und y die Coordinaten des Punkts **G** sind, $FG^2 = (e+x)^2 + y^2$, $F'G^2 = (e-x)^2 + y^2$. Die Addition ergiebt: I. $FG^2 + F'G^2 = 2(e^2 + x^2 + y^2)$. Durch Subtraction folgt II. $FG^2 - F'G^2 = 4ex$, oder $FG - F'G = \frac{4ex}{2a} = \frac{2ex}{a}$, folglich $FG = a + \frac{ex}{a}$, $F'G =$ 59.
$a - \frac{ex}{a}$. Quadrirt man die letzten Ausdrücke und addirt, so entsteht III. $FG^2 + F'G^2 = 2\left(a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2}\right)$. Demnach aus I und III die Gleichung IV. $e^2 + x^2 + y^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2}$ oder $y^2 = \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, und wenn $\underline{a^2 - e^2 = b^2}$ gesetzt wird (da $a > e$), V. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}.$
$(a^2 - x^2)$, oder $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Der geometrische Ort des Punktes **G** ist also eine 60.
Ellipse mit der großen Halbachse **a** und der kleinen $\sqrt{a^2 - e^2} = b$. 61.

Anmerkung. Diese Darstellungsform kann auch als Ausgangspunkt für die Betrachtung der Ellipse dienen.

2. Erklärungen. Die beiden Punkte **F** und **F'** heißen Brennpunkte der Ellipse, die Entfernung $FC = F'C = e$ die Excentricität, die Linien **FG** und **F'G** von irgend einem Punkte **G** der Ellipse nach den Brennpunkten **F** und **F'** die Brennstrahlen, Leitstrahlen (radii vectores). Die Beziehung zwischen den Achsen und der Excentricität ist durch Gleichung 61. $a^2 - e^2 = b^2$ gegeben. Es folgt daraus, daß die Excentricität $FC = F'C = e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist. Darnach ist $DF = DF' = a$, oder man erhält die Brennpunkte, indem man vom Scheitel der kleinen Achse mit der Zirkelöffnung **a** die große Achse in **F** und **F'** schneidet.

Fragen: 1) Wie läßt sich beweisen, daß jede Gleichung von der Form $Ay^2 + Bx^2 = C^2$ für rechtwinklige Coordinaten eine Ellipse vorstellt (A und B positive Zahlen)? 2) Wie groß ist die Sehne, welche im Brennpunkt auf der Achse senkrecht steht? (Antw.: sie ist $= p$, dem Parameter; folgt aus der Mittelpunktsgleichung, wenn $x = e$ gesetzt und beachtet wird, daß $p = \frac{2b^2}{a}$ nach Gl. 47.)

3. Lehrsatz. Die Tangente für irgend einen Punkt der Ellipse $x^I y^I$ bildet mit den Brennstrahlen für denselben Punkt gleiche Winkel.

Bew.: Man denke für den Punkt G $(x^I y^I)$ Fig. 15, die Tangente, Normale und die Brennlinien. Für den Durchschnittspunkt M der Normale mit der großen Achse hat man nach Gl. 52. $x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} . x^I = \frac{e^2}{a^2} . x^I$. Deshalb die Segmente der Linie FF^I, nämlich $FM = e + \frac{e^2}{a^2} . x^I$, $F^IM = e - \frac{e^2}{a^2} x^I$; daraus die Proportion $FM : F^IM = a^2 + ex^I : a^2 - ex^I$. Nach Gl. 59 verhalten sich die Brennlinien ebenso, nämlich $FG : F^IG = a^2 + ex^I : a^2 - ex^I$. Folglich halbirt, nach planimetrischem Gesetz, die Normale GM den von beiden Brennstrahlen im Punkt G gebildeten Winkel; und daraus ist weiter einleuchtend, daß die Tangente die Nebenwinkel zu ersterem Winkel halbirt, oder gleiche Winkel mit den Brennstrahlen im Punkte G bildet.

§. 43. Inhaltsbestimmung der Ellipse.

Lehrsatz. Sind a und b die Halbachsen der Ellipse, so ist der Inhalt der umschlossenen Fläche $= ab\pi$.

Bew. Man beschreibe über der großen Achse der Ellipse (Fig. 16) einen Kreis (Hauptkreis), ziehe zu zwei beliebigen Abscissen x^I und x^{II} die entsprechenden Ordinaten der Ellipse y^I und y^{II}, so wie des Kreises v^I und v^{II}. Dann ist für A als Anfangspunkt, $y^{I2} = \frac{b^2}{a^2} (2ax^I - x^{I2})$, $v^{I2} = 2ax^I - x^{I2}$; woraus folgt $y^{I2} : v^{I2} = \frac{b^2}{a^2} : 1 = b^2 : a^2$, oder $y^I : v^I = b : a$. Dies Verhältniß besteht für alle gleichliegenden Ordinaten der Ellipse und des Kreises, also auch für y^{II} und v^{II}. Denkt man sich die Punkte F und D der Achse sehr nahe liegend, so können die Figuren BEFD und B^IE^IFD als Trapeze betrachtet werden, welche gleiche Höhe FD haben und sich daher wie ihre mittlern Längen verhalten. Die mittlern Längen $\frac{y^I + y^{II}}{2}$ und $\frac{v^I + v^{II}}{2}$ verhalten sich aber wie $b : a$, d. h. die Vierecke $B^IE^IFD : BEFD = b : a$. Da dies für alle entsprechenden Flächen-Elemente Geltung hat, so gilt es auch für ihre Summen, d. h. die halbe Ellipse verhält sich zum Halbkreise wie $b : a$, und deshalb die Ellipse zum Kreise wie $b : a$. Bezeichnet daher F den Inhalt der Ellipse, so findet die Proportion Statt:
62. $F : a^2\pi = b : a$ und hieraus ist $F = a . b . \pi$.

Anmerk. Aus Gl. 62 folgt $F = \sqrt{a^2\pi . b^2\pi}$, d. h. der Inhalt der Ellipse ist die mittlere Proportionale zu den beiden Kreisen über den Achsen.

Fragen: 1) Wie findet man den Inhalt eines Ellipsoid's, d. i. desjenigen Körpers, welcher durch Umdrehung der Ellipse um eine ihrer Achsen entsteht? (Antw.: Eine ähnliche Betrachtung wie bei der Bestimmung der elliptischen Fläche liefert zwei ganz verschiedene Körper: 1. für den durch Umdrehung um die Achse 2a entstandenen $J = \frac{4}{3} ab^2\pi$; 2. für den durch Umdrehung um die Achse 2b ist $J = \frac{4}{3} a^2 b\pi$.) 2) Wann wird aus dem Ellipsoid eine Kugel?

VII. Die Hyperbel.

63. **§. 44.** Erklärung. Die Linie (Curve), welche durch die Gleichung $y^2 = px + qx^2$ bestimmt ist, heißt Hyperbel.

Eigenschaften dieser Curve. 1) Für $x = 0$, wird auch $y = 0$, d. h. der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein Punkt der Curve.

2) Für alle positiven Werthe von x ist y reell bei positivem p und q; es wächst also y mit dem Wachsthume von x, und wird unendlich, wenn x unendlich groß geworden ist. Und da

3) aus $y = \pm \sqrt{px + qx^2}$ folgt, daß für jeden Werth von x, welcher die Wurzel reell macht, y zwei absolut gleiche aber entgegengesetzte Werthe annimmt, so liegt offenbar die Curve symmetrisch zu beiden Seiten der Abcissenachse, wird durch dieselbe in zwei congruente Theile getheilt, und erstreckt sich zunächst rechts ins Unendliche, ohne sich zu schließen.

4) Für negative Werthe von x, wird y noch einmal $= 0$, wenn $px + qx^2 = 0$, oder $x = -\frac{p}{q}$ ist.

5) Ist daher Fig. 17. O der Anfangspunkt für rechtwinklige Achsen OX und OY und $OA = -\frac{p}{q}$, so trifft die Curve die Xachse in den beiden Punkten O und A. Zwischen den Punkten O und A befindet sich aber kein Theil der Curve, denn für $x < \frac{p}{q}$ (in absoluter Hinsicht) folgt $qx < p$ oder $qx^2 < px$, d. h. y ist imaginär für jeden negativen Werth von x, der absolut kleiner als $\frac{p}{q}$. Hingegen für alle negativen Werthe von x, die absolut größer als $\frac{p}{q}$, folgt $x > \frac{p}{q}$, oder $qx^2 > px$, d. h. die entsprechenden Werthe von y sind stets reell. Die Curve setzt sich demnach von A ab links fort ins Unendliche, in gleicher Weise, wie der rechts liegende Theil, ohne sich zu schließen. Und setzt man $-\left(\frac{p}{q} + u\right)$ statt x, so entsteht $y^2 = \pm \sqrt{pu + qu^2}$, eine Gleichung, welche mit der ursprünglichen vollkommen übereinstimmt, und erkennen läßt, daß der links von A liegende Theil der Curve, dem rechts von O liegenden congruent ist. Die Hyperbel besteht demnach in ähnlicher Weise wie die Ellipse aus vier congruenten Theilen.

Frage 1. Wie kann man aus Gl. 63 die verschiedene Krümmungsstärke der Curve im Allgemeinen feststellen?

§. 45. Verschiedene Formen der Hyperbelgleichung. Man nennt die Linie OA Fig. 17 die Hauptachse der Hyperbel, die Mitte derselben C, den Mittelpunkt der Curve. Bezeichnet man die absolute Länge von $OA = \frac{p}{q}$ mit $2a$ und setzt, da die Gleichung der Hyperbel von der entsprechenden der Ellipse nur im Vorzeichen von qx^2 abweicht, nach Analogie der Ellipse $q = \frac{b^2}{a^2}$, so daß p und q durch a und b bestimmt sind, und umgekehrt, dann läßt 64.
sich die Gleichung der Hyperbel folgendermaßen umformen:

Aus $y^2 = px + qx^2$ entsteht $y^2 = q\left(\frac{p}{q}x + x^2\right) = q(2ax + x^2) = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$. 65.

Diese Gleichung (Scheitelgleichung) entspricht der Scheitelgleichung der Ellipse. Wird der Coordinaten-Anfang in den Mittelpunkt C verlegt, indem man $-a + x$ statt x setzt, so nimmt Gl. 65 folgende Formen an: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, oder $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, oder 66.
$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ (Mittelpunktsgleichung). Diese Gleichungen entsprechen offenbar denen der Ellipse; — die Gleichungen der Ellipse gehen in die der Hyperbel über, wenn $-b^2$ statt $+b^2$, oder $b\sqrt{-1}$ statt b gesetzt wird. Die Hyperbel ist also als eine Ellipse mit imaginärer Nebenachse anzusehen. Daher kann man auch die bei der Ellipse erlangten Resultate auf die Hyperbel übertragen; indem in ihnen überall $b.\sqrt{-1}$ statt b gedacht wird.

Wird $b = a$, so nennt man die Hyperbel gleichseitig.

Fragen: 1) Wie wird aus der Hyperbel eine Parabel? (Antw.: Wenn die Hauptachse $\frac{p}{q} = \infty$ wird, denn alsdann ist $q = 0$ und folglich $y^2 = px$.) 2) Wie wird aus der Hyperbel eine Ellipse? (Antw.: Wenn das positive q abnehmend durch 0 geht und negativ wird.)

§. 46. Aufgabe. Eine Hyperbel $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ und eine Gerade $y = mx + n$ sind gegeben. Es sollen die Bedingungen ermittelt werden, unter welchen die Linien sich schneiden, berühren, oder keinen Punkt gemeinschaftlich haben.

Aufl. 1) Die gegebenen Gleichungen nach x und y aufgelöst (oder in die Resultate
67. von §. 36. $b\sqrt{-1}$. statt b gesetzt) geben: $x^1 = \frac{-a^2mn \pm ab\sqrt{n^2-(a^2m^2-b^2)}}{a^2m^2-b^2}$, $y^1 = \frac{-b^2n \pm abm\sqrt{n^2-(a^2m^2-b^2)}}{a^2m^2-b^2}$. Hier kann, abweichend von der Ellipse, der Nenner auch in Null übergehen. Ist $a^2m^2 - b^2 = 0$, so folgt $m = \pm\frac{b}{a}$. Alsdann ist
68. nach den ursprünglichen Gleichungen: $x^1 = \mp a\frac{(b^2+n^2)}{2bn}$, $y^1 = \frac{n^2-b^2}{2n}$. Die Hyperbel und die Gerade $y = \pm\frac{b}{a}x + n$ haben daher einen Punkt gemein und zwar schneiden sie sich nach §. 20 in diesem einen Punkte. — Wenn $a^2m^2 - b^2$ nicht $= 0$ ist, so kommen folgende Fälle in Betracht: α) $n^2 > a^2m^2 - b^2$, β) $n^2 = a^2m^2 - b^2$, γ) $n^2 < a^2m^2 - b^2$. Im ersten Falle schneiden sich beide Linien in zwei Punkten; im zweiten berühren sie sich in dem einen gemeinschaftlichen Punkte; im dritten Fall haben sie keinen Punkt gemeinschaftlich.

2) Ist in der Gleichung der Geraden $y = mx + n$, das $n = 0$, d. h. geht sie durch
69. den Mittelpunkt C der Hyperbel, so liefern die Gl. 67. $x^1 = \mp\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}$, $y^1 = \mp\frac{abm}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}$. Nennt man nun jede durch den Mittelpunkt C gehende die H. schneidende Gerade einen Durchmesser (reellen) derselben, so lehren letztere Gleichungen, da die Doppelwerthe sowohl von x als y absolut gleich sind, daß jeder Durchmesser durch den Mittelpunkt halbirt wird.

Ferner ist nach Gleichung 67 und 69 zu unterscheiden, ob α) $b^2 > a^2m^2$ ($\pm\frac{b}{a} > m$), β) $b^2 = a^2m^2$ ($\pm\frac{b}{a} = m$), γ) $b^2 < a^2m^2$ ($\pm\frac{b}{a} < m$). Der erste Fall liefert alle Geraden, welche die Hyperbel in zwei Punkten schneiden (reelle Durchmesser), der letzte Fall alle Geraden, welche keinen Punkt mit der H. gemein haben (imaginäre Durchmesser). Zwischen beiden Durchmesser-Gruppen liegt eine Gerade, welche der zweite Fall $m = \pm\frac{b}{a}$ bestimmt. — Nach **Fig. 17** ist der Sinn dieser Erörterung leicht erkennbar. Errichtet man im Scheitel O der H. eine Senkrechte auf der Xachse und trägt von O nach beiden Seiten hin eine Strecke $= b$ ab, so daß $OD = OD^1 = b$, und beachtet ferner, daß m die Tangente des Winkels α, welchen die Gerade mit der Xachse bildet; so sind alle Geraden, welche durch C und irgend einen Punkt der Senkrechten innerhalb der Entfernung DD^1 gehen, Durchmesser der H; alle Geraden, welche durch C und irgend einen Punkt der Senkrechten außerhalb der Strecke DD^1 gehen, treffen die H. gar nicht; diejenigen Geraden endlich, welche durch C und einen der Punkte D oder D^1 gehen, erfordern noch eine besondere Betrachtung.

3) Bei ihnen ist $m = \pm\frac{b}{a}$, und daher entsteht aus Gleichung 69, $x^1 = \mp\infty$, $y^1 = \mp\infty$. Die Linien CD und CD^1 haben daher in unendlicher Entfernung einen Punkt mit der H. gemeinschaftlich; man kann sie als Tangenten für diese äußersten Punkte der H. ansehen, während sie gleichzeitig den Uebergang von den reellen zu den imaginären Durchmessern der H. machen. Man nennt diese (zwei) Geraden, die Asymptoten der H.

70. Vergleicht man die Asymptotengleichung $y = \pm\frac{b}{a}x$ (oder $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$) mit der Hyperbelgleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, so ist für jedes (gemeinschaftliche) x das zugehörige y der Geraden größer, als dasjenige der H. Die Werthe der beiden y nähern sich aber immer mehr, je größer x wird, ohne sich jedoch ganz zu erreichen. Folglich nähern sich auch die beiden Geraden den Hyperbel-Aesten immer mehr; erreichen sie erst in der Unendlichkeit. — Ein Vergleich der Asymptotengleichung mit Gleichung 68 macht einleuchtend, daß jede mit einer Asymptote parallele Gerade die H. in einem Punkte schneidet.

§. 47. Aufgabe. Tangente und Normale der H. zu bestimmen.

Aufl. In der H. $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sei ein Punkt x^1y^1 gegeben. Dann findet man, entweder nach §. 27, oder nach §. 37, oder auch, indem man in Gleichung 51 statt b jedesmal $b\sqrt{-1}$ setzt, Gleichung der H-Tangente $y - y^1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^1}{y^1}(x - x^1)$, oder $a^2yy^1 - b^2xx^1 = a^2y^{12} - b^2x^{12} = -a^2b^2$. — Demnach ist die Gleichung der Normale $y - y^1 = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^1}{x^1}(x - x^1)$. — Nach Analogie von §. 37 hat man ferner: Subtang. $= \frac{x^{12} - a^2}{x^1}$, daher Tang. $= \frac{-y^1}{b^2x^1}\sqrt{a^4y^{12} + b^4x^{12}}$; Subn. $= -\frac{b^2}{a^2} \cdot x^1$, daher Normale $= \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^{12} + b^4x^{12}}$. 71. 72.

§. 48. Lehrsätze. 1) Der geometrische Ort für die Mitten paralleler Sehnen einer Hyperbel ist ein Durchmesser der Hyperbel.

Beweis. Nach einer ähnlichen Betrachtung wie in §. 38 für die Ellipse erhält man, wenn die H. $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ und die Gerade $y = mx + n$ als Sehne gegeben sind, in der Gleichung $y = +\frac{b^2}{a^2m} \cdot x$ diejenige Gerade, welche die Sehne $y = mx + n$ und alle ihre Parallelen halbirt. Diese Gerade ist ein Durchmesser der H. Auch folgende Sätze sind nach Anleitung von §. 39 und 40 leicht zu erweisen. 73.

2) Die Linie $y = \frac{b^2}{a^2m} \cdot x$ (Durchmesser), welche alle mit der Geraden $y = mx + n$ parallelen Sehnen halbirt, hat zugleich die Eigenschaft, daß sie die, zwischen den Asymptoten liegenden Strecken aller dieser Sehnen halbirt, wie aus einer Verbindung der Gleichung für die Asymptoten mit derjenigen der Geraden erhellt.

3) Deshalb sind die beiden zwischen der H. und den Asymptoten liegenden Stücke einer beliebigen Sehne einander gleich.

4) Die Tangenten für den Scheitelpunkt eines Durchmessers sind parallel den Sehnen, welche er halbirt.

5) Jeder von zwei conjugirten Durchmessern der H. halbirt die mit dem andern parallelen Sehnen.

6) Sind $y = mx$, und $y = m^1x$ die Gleichungen zweier conjugirten Durchmesser der H., so ist $mm^1 = \frac{b^2}{a^2}$. 74.

7) Von zwei conjugirten Durchmessern der H. ist jedesmal der eine reell, der andere imaginär. Denn ist $m \lesseqgtr \frac{b}{a}$, so muß nach Nr. 6. $m^1 \gtreqless \frac{b}{a}$ sein.

8) Sind a^1 und b^1 die Hälften zweier conjugirten Durchmesser der H., welche den Winkel ε mit einander bilden, und deren Richtungs-Constanten m und m^1, so ist $a^{12} = \frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2 - a^2m^2}$, $b^{12} = \frac{a^2b^2(1+m^{12})}{b^2 - a^2m^{12}}$. 75.

9) Endlich ist I. $a^{12} - b^{12} = a^2 - b^2$. II. $a^1b^1 \sin\varepsilon = ab$. 76.

§. 49. 1) Aufgabe. Es sind **Fig. 18** zwei feste Punkte F und F^1 durch ihre Entfernung 2e von einander gegeben; man soll den geometrischen Ort desjenigen Punktes bestimmen, für welchen die Differenz der Abstände von diesen Punkten eine constante Größe $= 2a$ ist.

Aufl. Wird die Linie FF^1 zur Abcissenachse gewählt, und der Mittelpunkt C der Strecke FF^1 als Anfangspunkt, so sei G ein Punkt, welcher der Bedingung entspricht, daß $GF^1 - GF = 2a$. Es ist $CF = CF^1 = e$, da $FF^1 = 2e$. Wenn demnach x und y die Coordinaten des Punkts G bezeichnen, so bieten sich nach §. 42 folgende Gleichungen dar: $F^1G^2 = (e + x)^2 + y^2$, $FG^2 = (x - e)^2 + y^2$. Die Addition beider Gleichungen giebt I. $F^1G^2 + FG^2 = 2(e^2 + x^2 + y^2)$; die Subtraction derselben $F^1G^2 - FG^2 = 4ex$, und daraus $F^1G + FG = \frac{2ex}{a}$, da $F^1G - FG = 2a$ ist, oder $F^1G = \frac{ex}{a} + a$, $FG = \frac{ex}{a} - a$. 77.

Durch Quadriren und Addiren dieser Werthe erhält man: II. $F^1G^2 + FG^2 = 2\left(\frac{e^2x^2}{a^2} + a^2\right)$, folglich $2(e^2 + x^2 + y^2) = 2\left(\frac{e^2x^2}{a^2} + a^2\right)$, oder III. $y^2 = \frac{e^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2)$. Setzt man $e^2 - a^2 = b^2$, so ist die Gleichung des verlangten geometrischen Orts $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, 78. 79.

d. h. in Uebereinstimmung mit Gl. 66 eine Hyperbel, deren große Achse $2a$ und Nebenachse $2\sqrt{e^2 - a^2}$ ist.

Anmerkung. Diese Darstellung wird auch zur Grundlage für die Betrachtung der **H.** genommen.

2) Erklärungen. Die beiden Punkte **F** und **F'** heißen Brennpunkte der **H**; die Geraden **FG** und **F'G** von irgend einem Punkte **G** der **H.** nach den Brennpunkten derselben, Brennstrahlen, Leitstrahlen (radii vectores) jenes Punktes. Die Strecke $CF = CF' = e = \sqrt{a^2+b^2}$ wird Excentricität der **H.** genannt. Nach voriger Aufgabe ist $e^2 - a^2 = b^2$, oder $e = \sqrt{a^2+b^2}$. Die Excentricität wird demnach erhalten, indem man im Scheitelpunkt **O** eine Senkrechte auf der **X**achse errichtet und $b = OD$ (als gegeben) abträgt, **D** mit dem Mittelpunkt **C** verbindet, so ist $CD = e = \sqrt{a^2+b^2}$. Darnach bestimmen sich die Brennpunkte, wenn man vom Mittelpunkt **C** aus mit **CD** die Hauptachse in **F** und **F'** schneidet. Die Leitstrahlen für einen beliebigen Punkt **G.** der **H.** sind nach Gleichung 77 ausgedrückt durch $r = \frac{ex + a^2}{a}$, und $r' = \frac{ex - a^2}{a}$.

Fragen: 1) Wie läßt sich beweisen, daß jede Gleichung von der Form $Ax^2 - By^2 = C^2$ eine Hyperbel vorstellt? 2) Wie groß ist die Sehne, welche im Brennpunkt auf der Achse senkrecht steht? (Antw. = Parameter p.). vergl. §. 42.

3) Lehrsatz. Die Tangente für irgend einen Punkt $x'y'$ der **H** halbirt den Winkel, welchen die beiden Brennstrahlen für denselben Punkt bilden.

Bew. Zieht man **Fig. 18** die Tangente **GM** für den Punkt **G** $(x'y')$, so folgt der Beweis nach §. 42. Nr. 3.

§. 50. Aufgabe 1. Die Gleichung der **H.** für zwei conjugirte Durchmesser als Achsen zu finden.

Aufl. Nach Anleitung von §. 41 ist für beliebige Durchmesser der **H.** mit Beibehal-
80. tung der dort gewählten Bezeichnung: $(a^2 \sin \beta^2 - b^2 \cos. \beta^2)\, y''^2 + 2(a^2 \sin. \alpha . \sin \beta - b^2 \cos. \alpha \cos. \beta)\, x''y'' + (a^2 \sin. \alpha^2 - b^2 \cos. \alpha^2)\, x''^2 = - a^2 b^2$. Für conjugirte Durchmesser wandelt sich diese Gleichung um (da $tg. \alpha . tg. \beta = \frac{b^2}{a^2}$, also $a^2 \sin. \alpha . \sin. \beta - b^2 \cos \alpha . \cos. \beta = 0$) in: $(a^2 \sin. \beta^2 - b^2 \cos. \beta^2)\, y''^2 - (a^2 \sin. \alpha^2 - b^2 \cos. \alpha^2)\, x''^2 = - a^2 b^2$,
81. oder nach gehöriger Substitution in: $\frac{y''^2}{b'^2} - \frac{x''^2}{a'^2} = -1$, oder $a'^2 y''^2 - b'^2 x''^2 = - a'^2 . b'^2$. Die Form dieser Gleichung der **H.** ist also dieselbe, wie für Haupt- und Nebenachse.

Aufgabe 2. Die Gleichung der **H.** für die Asymptoten als Achsen zu finden. (Asymptotengleichung.)

Aufl. Aus der Gl. 80 der vorigen Aufgabe entsteht die Gleichung der **H.**, auf die Asymptoten als Achsen bezogen, wenn man erwägt, daß die Gleichung der Asymptoten $y = \pm \frac{b}{a} x$ ist; d. h. wenn für **CD** in **Fig. 18** die Richtungs-Constante $tg. \alpha = \frac{b}{a}$, so ist für **CD'**, $tg. \beta = - \frac{b}{a}$. Daraus folgt: $a^2 \sin. \alpha^2 - b^2 \cos. \alpha^2 = 0$; $a^2 \sin. \beta^2 - b^2 \cos. \beta^2 = 0$; oder es fallen in Gl. 80 der erste und dritte Summand fort und man hat $2(a^2 \sin. \alpha \ \sin. \beta - b^2 \cos. \alpha . \cos. \beta)\, x''y'' = - a^2 b^2$. Nimmt man nun die beiden halben Asymptoten, welche den rechts liegenden Hyperbel-Ast umschließen, als die positive Richtung der Coordinaten, so ist $\sin. \alpha = - \sin. \beta$, $\cos. \alpha = \cos. \beta$; demnach $2(a^2 \sin. \alpha^2 + b^2 \cos. \alpha^2)\, x''y'' = a^2 b^2$. Substituirt man in diese Gleichung $\sin. \alpha = \frac{b}{e}$, und $\cos. \alpha = \frac{a}{e}$ (**Fig. 18**), so kommt
82. $2\left(\frac{a^2b^2 + a^2b^2}{e^2}\right) x''y'' = a^2b^2$, oder, mit Weglassung der Marken, $xy = \frac{e^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4}$, als die verlangte Asymptotengleichung der **H.** Zieht man $ON \parallel CD$, so ist $ON = \frac{e}{2}$ und man hat $xy = ON^2$. Der Ausdruck $\frac{e^2}{4} = ON^2$ wird auch Potenz der Hyperbel genannt.

Anmerkung. Die Inhaltsbestimmung eines Flächenstücks der **H.** ist nicht einfach genug, um hier dargestellt zu werden.

VIII. Die Linien zweiten Grades im Allgemeinen.

§. 51. Die Scheitelgleichungen der im Vorigen betrachteten Curven.

Bei der vorangegangenen Betrachtung der drei Curven, Parabel, Ellipse, Hyperbel, wurde der Ausgang von den Scheitelgleichungen derselben genommen: I. $y^2 = px$; II. $y^2 = px - qx^2$; III. $y^2 = px + qx^2$. Es wurde schon angedeutet, welche Beziehung zwischen diesen Gleichungen besteht. Stellt man sich nämlich vor, daß die großen Achsen der Ellipse und Hyperbel bis ins Unendliche wachsen, mit der Maßgabe, daß p den Werth $\frac{2b^2}{a}$ und q den Werth $\frac{b^2}{a^2}$ constant behalten, so nähert sich der Werth für q immer mehr der Null, und Ellipse und Hyperbel gehen in die Parabel mit dem Parameter p über. — Man kann daher alle drei Curven durch eine Gleichung $y^2 = px + qx^2$ darstellen. Denn, je nachdem q Null, 83.
oder $\lessgtr 0$ ist, giebt sie eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel.

Anmerkung. Construirt man über einer gemeinschaftlichen Achse die drei Curven nach den Scheitelgleichungen, und vergleicht ihren Lauf, so zieht sich die Parabel zwischen den beiden andern Linien hin, und zwar mangelt der Ellipse ein Stück zur Höhe der Parabel, die Hyperbel hingegen geht über diese fort. Daher wahrscheinlich die Benennungen.

§. 52. Zurückführung der Gleichung $y^2 = px + qx^2$ auf die allgemeinste Form. In der bisherigen Darstellung haben sich Gleichungen von der verschiedensten Gestalt für dieselben Curven ergeben. Die Gleichungen der Curven, in Bezug auf conjugirte Durchmesser, erwiesen sich als von zusammengesetzter Art, bevor die Bedingung eingeführt wurde, vermöge welcher ein Glied in jeder der Gleichungen verschwand. Die Betrachtung ging von der Gleichung aus, als dem Begriff der Linie, als einer Formel, welche alle Eigenschaften der Linie in sich schließt. Es wurde daher der Schluß nahe gelegt, daß die verschiedenen Gleichungen derselben Curve ihrem Wesen nach in Uebereinstimmung und nur besondere Fälle einer allgemeinern Gleichung sind. Dieser Schluß war um so mehr gerechtfertigt, als die einfachere Gestalt der Gleichung sich als abhängig von der mehr oder minder symmetrischen Lage der Coordinatenachsen gegen die Curve zeigte (Kreis, Ellipse). Zur allgemeinsten Gestalt der Gleichungen besagter Curven wird man daher gelangen, wenn statt der Coordinatenachsen, welche der Gleichung $y^2 = px + qx^2$ zu Grunde liegen, ganz willkührliche Achsen gewählt werden. Dies geschieht durch Verlegen der Achsen (§. 23), indem man in die vorige Gleichung Ausdrücke von der Form $lx + my + n$ statt x und y setzt. Ist für x der Werth $\alpha x + \beta y + \gamma$ und für y der Werth $ax + by + c$ gesetzt, so erhält man nach Substitution und Ordnen der Gleichung: $y^2(b^2 - \beta^2 q) + x^2(a^2 - \alpha^2 q) + 2xy(ab - \alpha\beta q) + y(2bc - 2\beta\gamma q - \beta p) + x(2ac - 2\alpha\gamma q - \alpha p) + (c^2 - \gamma^2 q - \gamma p) = 0$: welche Form mit der folgenden gleichbedeutend ist: $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$. 84.

In dieser gemeinschaftlichen Grundgleichung sind demnach, als besondere Fälle, alle besondern Gleichungen enthalten, welche sich für Parabel, Ellipse und Hyperbel gefunden haben. Sie gehen daraus hervor, wenn man den Coefficienten bestimmte Werthe beilegt. — Es ist aber auch möglich, daß noch andere Linien in dieser allgemeinen Gleichung enthalten sind. Dies soll in folgendem §. bestimmt werden.

§. 53. Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, zwischen den Veränderlichen x und y. Wird die Gleichung nach y aufgelöst, so entsteht: $y = \frac{-(Bx + D) \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + (D^2 - 4AF)}}{2A}$. 85.

Statt dieser Form kann auch kürzer gesetzt werden, wenn A nicht Null ist, $y = -(Mx + N)$
86. $\pm \sqrt{Px^2 + Qx + R}$. Offenbar ist dieser zweigliedrige Ausdruck für y von den besondern Werthen der fünf Constanten und insbesondere von der Wurzelgröße abhängig.

Wir ziehen hier nicht alle möglichen Bedingungen für diese Constanten in Betracht, sondern heben nur die hauptsächlichsten hervor; nämlich die Gleichung 86 giebt:

1) weder Punkt, noch Linie, für $P = 0$, $Q = 0$, R negativ, wie unmittelbar ersichtlich.

2) einen Punkt, wenn P, Q, R negativ und $PR = \frac{Q^2}{4}$. Denn alsdann ist die Wurzel für alle reellen Werthe von x imaginär — mit der einzigen Ausnahme von $x = -\frac{Q}{2P}$. In diesem Falle verschwindet die Wurzel und die Gleichung liefert ein Paar zusammengehöriger Werthe von x und y.

3) eine Gerade, für $P = Q = R = 0$.

4) zwei parallele Gerade, für $P = Q = 0$, und R positiv.

5) eine Curve, wenn Q positiv und $P \gtreqless 0$.

Der letzte Fall bedarf einer genauern Erörterung. In dem zweigliedrigen Ausdruck für y in Gleichung 86 stellt der erste Summand eine Gerade vor (Durchmesser der Curve), an welche vermöge des zweiten Summanden zu beiden Seiten Coordinaten von gleicher Länge abzutragen sind, deren Endpunkte die krumme Linie erzeugen. Es ist gleichgültig, ob schiefwinklige oder rechtwinklige Coordinatenachsen für die gegebene Gleichung (86) zu Grunde gelegt werden, da nach IV. §. 22 leicht eine Umwandlung des einen Systems in das andere, mit oder ohne Beibehaltung der ursprünglichen Form der Gleichung ausgeführt werden kann.

Bei schiefwinkligen Achsen AX und AY mit dem Coordinatenwinkel β in Fig. 19 können z. B. für $M = \operatorname{tg.} \alpha$ und einen bestimmten Werth von x, der Gleichung 86 zwei Werthe von y entsprechen, welche etwa die Punkte F, F', oder G, G', oder H, H' bestimmen. — Das eine Glied des Ausdrucks für y (die Gerade) dient daher dazu, um die Lage der Curve, das zweite um die Gestalt derselben zu bestimmen. — Bei der Wahl rechtwinkliger Coordinaten — was hier am zweckmäßigsten dadurch geschieht, daß man die Linie $Y = Mx + N$ (ersten Summand) zur Abscissenachse wählt — und Verlegung des Anfangspunktes von A nach
87. O. geht Gleichung 86 über in $y = \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$, wobei die Constanten p, q und r sich nach den frühern in Gl. 85 und 86, so wie aus den Winkeln α und β der Art bestimmen, daß sie positive, oder negative Zahlen und Null sein können.

Für den Scheitelpunkt O der Curve als Anfangspunkt muß $r = 0$ sein, damit y mit x zugleich Null werde. Liefert daher Gl. 86 überhaupt eine Curve, so ist ihre einfachste Glei-
88. chung $y = \pm \sqrt{px^2 + qx}$. Diese Gleichung drückt, wie bekannt, eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel aus, je nachdem $p \begin{smallmatrix} = \\ < \\ > \end{smallmatrix} 0$ ist (q positiv oder negativ). Die letzte Gleichung 88 kann auch unmittelbar aus Gleichung 84 durch Umformung erhalten werden.

Bisher ist vorausgesetzt worden, daß A in Gl. 84 nicht Null sei. Für A aber = 0 können Gleichung 85 und alle daraus abgeleiteten Resultate keine Geltung haben. Da aber Gleichung 84 symmetrisch in Bezug auf y und x, so braucht man nur x zu entwickeln und den gefundenen Ausdruck in ähnlicher Weise, wie bei y, in Betracht zu ziehen.

Sollte endlich die Frage beantwortet werden, welche Bedingung die Constanten in Gl. 84 erfüllen müssen, damit diese Gleichung eine der drei gefundenen Curven darstelle, so braucht man nur die Gleichungen 85, 86, 87 vergleichend zu betrachten. Da es, wie aus dem Vorigen bekannt, wesentlich nur auf den Werth von p, oder den ihm entsprechenden P ankommt, und

$P = B^2 - 4AC$ gesetzt worden ist, so giebt Gleichung 84 eine Parabel für $B^2 = 4AC$, eine Ellipse für $B^2 < 4AC$, eine Hyperbel für $B^2 > 4AC$.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in 84 enthält demnach alle Größen, welche bisher in Betracht gekommen sind (Punkt, gerade und krumme Linien). Stellt sie aber überhaupt eine Curve vor, so liefert sie nur die Linien Parabel, Ellipse, Hyperbel, als Linien zweiten Grades oder zweiter Ordnung.

§. 54. Die Linien zweiten Grades als geometrische Oerter.

Aufgabe. Auf einer Geraden **AF** seien zwei beliebige Stücke $AO = r$, und $OF = s$ (Fig. 20) abgetragen, und in A eine Senkrechte **AB** auf **AF** errichtet; man soll den geometrischen Ort des Punktes bestimmen, dessen Entfernung vom Punkte F zu seiner Entfernung von der Linie **AB** das constante Verhältniß $s : r$ hat.

Aufl. Offenbar geht der gesuchte Ort durch den Punkt O. Wählt man daher die Gerade **AF** zur Xachse, O zum Anfangspunkt für rechtwinklige Coordinaten, so hat man für einen beliebigen Punkt Q des gesuchten Orts $FQ : BQ = s : r$, oder $\sqrt{(x-s)^2+y^2} : x + r = s : r$. Durch Auflösung dieser Gleichung findet sich $y^2 = \left(\frac{s^2-r^2}{r^2}\right) x^2 + \frac{2s}{r} (s + r)\, x$. 89.
Der gesuchte geometrische Ort ist demnach eine Linie zweiten Grades, die Gl. 89 ihre Scheitelgleichung für O als Scheitelpunkt und **OX** als Achse.

Die Gestalt der Curve ist insbesondere von dem Factor des Gliedes x^2 abhängig. Je nachdem $(s^2 - r^2) \overset{=}{\underset{<}{>}} 0$, oder, was dasselbe bedeutet, je nachdem $s \overset{=}{\underset{<}{>}} r$ ist, giebt die Gleichung eine Parabel, Hyperbel oder Ellipse. Die Linie **AB** heißt für alle die Leitlinie, Directrix. Sollen statt der Constanten s und r die bekannten Parameter der besagten Curven eingeführt werden, so hat man nur die betreffenden Bedingungen zu erfüllen.

Für die Parabel ist z. B. $s = r$ und daher verwandelt sich Gl. 89 in $y^2 = 4sx$. Wenn daher p der Parameter einer gegebenen Parabel ist, so muß $p = 4s$ sein, oder $r = s = \frac{p}{4}$. Punkt F ist daher Brennpunkt der Parabel, und die Directrix **AB** hat mit dem Brennpunkt gleiche Entfernung vom Scheitel O.

Fragen: 1) Wie findet man aus Gleichung 89 die Gleichung der Ellipse für die Halbachsen a und b als Parameter? 2) Dieselbe Aufgabe für die Hyperbel.

§. 55. Die Linien zweiten Grades als Kegelschnitte.

Lehrsatz. Die Durchschnittslinie, in welcher der Mantel eines geraden Kegels von einer nicht durch dessen Spitze gehenden Ebene geschnitten wird, ist eine Curve zweiten Grades, Kegelschnitt genannt.

Beweis. Wir unterscheiden des bessern Verständnisses wegen vier Fälle:

α) Der Kegelschnitt ist immer eine krumme Linie.

Zu dem Ende stellen wir uns zunächst die Entstehung des Kegelmantels, oder der Kegelfläche vor. Denkt man sich im Raum eine unendlich lange Gerade dergestalt bewegt, daß sie stetig alle auf einanderfolgenden Punkte eines Kreisumfangs durchläuft und gleichzeitig immer durch einen im Raum gegebenen Punkt A geht, so erzeugt dieselbe eine Kegelfläche. Die Kegelfläche ist eine doppelte, jede ist die Scheitelkegelfläche der andern. Beide sind zusammengehörig und haben nur den einen Punkt A als Scheitel- oder Mittelpunkt der Kegelfläche gemeinschaftlich. Steht die durch den Punkt A und den Mittelpunkt des Kreises gelegte unendliche Gerade, welche Achse der Kegelfläche (des Kegels) genannt wird, auf der Kreisebene senkrecht, so ist die Kegelfläche der Mantel eines geraden Kegels, welcher allein hier in Betracht kommt. — Die den Kegelschnitt erzeugende Ebene kann die eine von beiden Scheitelkegelflächen schneiden, oder beide; im letztern Falle bilden den Kegelschnitt zwei gesonderte Durchschnitte, welche aber als zusammengehörig zu betrachten sind. — Die Gerade, welche die Kegelfläche erzeugt, bildet in jeder ihrer Lagen mit der Achse gleiche Winkel, daher die durch die Achse gelegte Ebene (Achsenschnitt, Normalschnitt) ein gleichschenkliges Dreieck ist, dessen Schenkel Seiten der Kegelfläche (Kegels) und dessen Winkel (mit dem Scheitelpunkt P) Scheitelwinkel der Kegelfläche benannt sind. Wie nun jeder nicht durch den Scheitel gehende Durchschnitt eine krumme Linie sein muß, folgt daraus, daß niemals je drei in verschiedenen Seiten der Kegelfläche gewählte Punkte in einer Geraden liegen können, da dies dem Begriff der Kegelfläche widerstreiten würde, wie leicht erhellt. — Die zur Achse senkrechte Ebene giebt als Durchschnitt eine Kreislinie, deren Mittelpunkt in der Achse liegt, nach bekanntem stereometrischen Gesetz.

β) Der Kegelschnitt ist eine Parabel, wenn die Ebene parallel mit einer Seite der Kegelfläche gelegt wird.

Man denke sich auf dem Achsenschnitt ABC (Fig. 21) die mit AB parallele Ebene FHJ senkrecht, und letztere von einer dritten zur Achse senkrechten Ebene BHCJ, welche ein Kreis ist, geschnitten; die Kante der beiden ersten Ebenen ist FG, die Kante der beiden letztern HJ. Die Geraden FG und BC liegen in der Ebene ABC und HJ ist nach stereometrischem Gesetz auf beiden senkrecht. Wählt man nun für die Curve FHJ den Punkt F zum Anfangspunkt, FG zur Abscissenachse, $FG = x$, $GJ = y$, so hat man im Kreise BHC: $GJ^2 = BG \,.\, GC$, oder weil $AE : FE = FG : GC$, ist $GC = \frac{FE}{AE} \,.\, FG$ und daher $GJ^2 = \frac{BG \,.\, FE}{AE} \,.\, FG = \frac{FE^2}{AE} \,.\, FG$, $y^2 = \frac{FE^2}{AE} \,.\, x$, und $\frac{FE^2}{AE}$ als eine constante Größe $= p$ gesetzt, $y^2 = px$. Also ist die Curve eine Parabel, insofern die Gleichung für jeden Punkt derselben Statt hat.

Da die Parabel-Ebene mit der einen Kegelseite parallel, so ist der Winkel φ, welchen diese Ebene mit der zweiten Kegelseite, in welcher der Scheitelpunkt liegt, bildet, dem Scheitelwinkel der Kegelfläche α gleich. Daraus folgt: die Parabel-Ebene schneidet die Achse unter dem Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und kann den Scheitelkegel nie treffen.

γ) Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn die schneidende Ebene durch beide Seiten des Achsenschnitts geht.

Denkt man sich auf dem Achsenschnitt ABC (Fig. 21) die Ebene DUET und zugleich die Kreisfläche KUVT senkrecht, so ist ähnlich, wie vorhin, von den drei Kanten die eine UT senkrecht auf den beiden andern KV und DE und demnach $TX^2 = VX \,.\, KX.$, oder wenn $EF \parallel KV \parallel DY$, $VX : DY = EX : DE$, d. h. $VX = \frac{DY \,.\, EX}{DE}.$, und $KX : EF = DX : DE$, d. h. $KX = \frac{EF \,.\, DX}{DE}$, folglich $TX^2 = \frac{DY \,.\, EX}{DE} \,.\, \frac{EF \,.\, DX}{DE}. = \frac{DY \,.\, EF}{DE^2} \,.\, DX\,(DE - DX)$. Für D als Anfangspunkt der Coordinaten, DE als Achse $= 2a$, und die mittlere Proportionale zu DY und $EF = 2b$, geht daraus die Gleichung hervor [wenn noch $DX = x$, $TX = y$]: $y^2 = \frac{4b^2}{4a^2}(2ax - x^2) = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. Dies die bekannte Scheitelgleichung der Ellipse, deren Scheitel D und Halbachsen a und b sind. Der Durchschnitt DUET ist also eine Ellipse. Die Ebene der Ellipse bildet mit der Kegelseite, in welcher der Scheitel liegt, einen Winkel $\varphi > \alpha$ (Scheitelwinkel) und — mit der Achse einen Winkel, der größer als $\frac{\alpha}{2}$ ist, daher kann sie den Scheitelkegel nie treffen. — Die Ellipse geht in den Kreis über, wenn der Schnitt senkrecht zur Achse steht.

d) Der Durchschnitt ist eine Hyperbel, wenn die schneidende Ebene gleichzeitig durch je eine Seite der beiden Scheiteldreiecke des Achsenschnitts geht.

Auf der Ebene des Achsenschnitts ABC werden die Ebene DFG und die Kreis-Ebene LJK (Fig. 22) senkrecht gedacht, so ist HJ senkrecht auf DM und LK. Daher: $HM^2 = LM . KM$. Wird $PO \parallel ND \parallel LK$ gezogen, so finden die Proportionen Statt: $DM : MK = DO : OP$, oder $MK = \frac{DM . OP}{DO}$; $MO : LM = DO : DN$, oder $LM = \frac{MO . DN}{DO}$. Durch Substitution dieser Werthe entsteht: $HM^2 = \frac{DM . OP}{DO} . \frac{MO . DN}{DO} = \frac{OP . DN}{DO^2} . DM . MO = \frac{OP . DN}{DO^2} . DM (DO + DM)$. — Sind Punkt D Coordinatenanfang, DE Abcissenachse, $DO = 2a$ (Achse), die mittlere Proportionale zu OP und $DN = 2b$, $DM = x$, $HM = y$, so erlangt man: $y^2 = \frac{4b^2}{4a^2}(2ax + x^2) = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$. Dies ist die Scheitelgleichung einer Hyperbel, deren Scheitel D und deren Halbachsen a und b sind. Also ist der Durchschnitt eine H, und zwar gehören die beiden Schnitte DFG und OQR zusammen, der einen Gleichung entsprechend. Die Ebene der H bildet mit der Kegelseite, worin der Scheitelpunkt liegt, einen Winkel $\varphi \angle \alpha$, mit der Achse einen Winkel $\angle \frac{\alpha}{2}$; sie schneidet deshalb immer beide Scheitelkegel.

Das Ergebniß der bisherigen Betrachtung läßt sich kurz, wie folgt, zusammenfassen: Jede Ebene, welche eine (gerade) Kegelfläche schneidet, ohne durch deren Scheitel zu gehen, erzeugt eine Curve zweiten Grades, und zwar eine Hyperbel, wenn sie zwei Seiten der Kegelfläche parallel geht; eine Parabel, wenn sie einer Seite der Kegelfläche parallel; eine Ellipse, wenn sie keiner Kegelseite parallel ist. Dieses Umstandes wegen heißen die Linien zweiten Grades auch Kegelschnitte.

Fragen: 1) Wie läßt sich der Beweis zu vorstehendem Lehrsatz kürzer und zugleich allgemeiner fassen dadurch, daß man eine beliebige Ebene durch den Kegelmantel legt? 2) Zu beweisen, daß der Mantel eines schiefen Kegels mit einer schneidenden Ebene Durchschnittslinien liefert, welche ebenfalls Linien zweiten Grades sind. 3) Wie läßt sich beweisen, daß jede Ebene, welche den Mantel eines geraden Cylinders so schneidet, daß sie schief auf der Achse desselben steht, eine Ellipse als Durchschnittslinie giebt? (Cylinderschnitt.) 4) Dasselbe für den Mantel eines schiefen Cylinders. 5) Dasselbe für den Mantel eines elliptischen Kegels. 6) Wie ist zu beweisen, daß die Projection eines Kreises, dessen Ebene mit der Projections-Ebene den spitzen Winkel α bildet, eine Ellipse ist? 7) Zu beweisen, daß die Projection einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel, beziehlich eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel ist.

§. 56. Die Polargleichungen der Kegelschnitte.

Bisher wurde die Methode angewendet, die paarweis zusammengehörigen Werthe zweier abhängig veränderlichen Größen durch (geradlinige) Parallel-Coordinaten darzustellen. Statt dessen kann man dieselben auch durch sogenannte Polar-Coordinaten bestimmen, d. h. durch eine krumme Linie (Kreisbogen) und eine Gerade, den davon abhängigen Radius.

Es sei LX eine feste Gerade (Fig. 8), L ein bestimmter fester Punkt derselben; dann ist die Lage eines Punktes M bestimmt, wenn die Strecke $ML = r$, und Winkel $MLX = \varphi$ (im Bogenmaß MX) bekannt sind. Man nennt LX die Achse, Punkt L (Mittelpunkt des Kreises) den Pol, r den Radius vector (Leitstrahl), r und φ zusammen Polar-Coordinaten des Punktes M, wobei φ (unabhängig veränderlich) alle Werthe von 0^0 bis 360^0 durchlaufen kann.

Geht man von einem rechtwinkligen System YLX zu einem Polar-System über, welches die Xachse des erstern zur Achse und L zum Pol hat, so bieten sich folgende Gleichungen dar:

90. $x = r.\ \cos.\ \varphi,\ y = r.\ \sin.\ \varphi.$

α) Polargleichung der Parabel.

Wählt man den Brennpunkt F zum Pol und die Achse der Parabel zur Achse der Polar-Coordinaten (Fig. 10), so ist für einen Punkt $x^I y^I$ der Parabel nach §. 31

91. $r = x + \frac{1}{4}.p;\ x = \frac{1}{4}\ p + r\ \cos.\ \varphi$; folglich $r = \dfrac{\frac{1}{2}.p}{1 - \cos.\ \varphi}.$

β) Polargleichung der Ellipse.

Wird die große Achse der Ellipse zur Achse und Brennpunkt F (Fig. 15) zum Pol der Polar-Coordinaten gewählt, so ist nach Gl. 59 $r = \dfrac{a^2 + ex}{a}$, und $x = r\ \cos.\ \varphi - e$, folglich

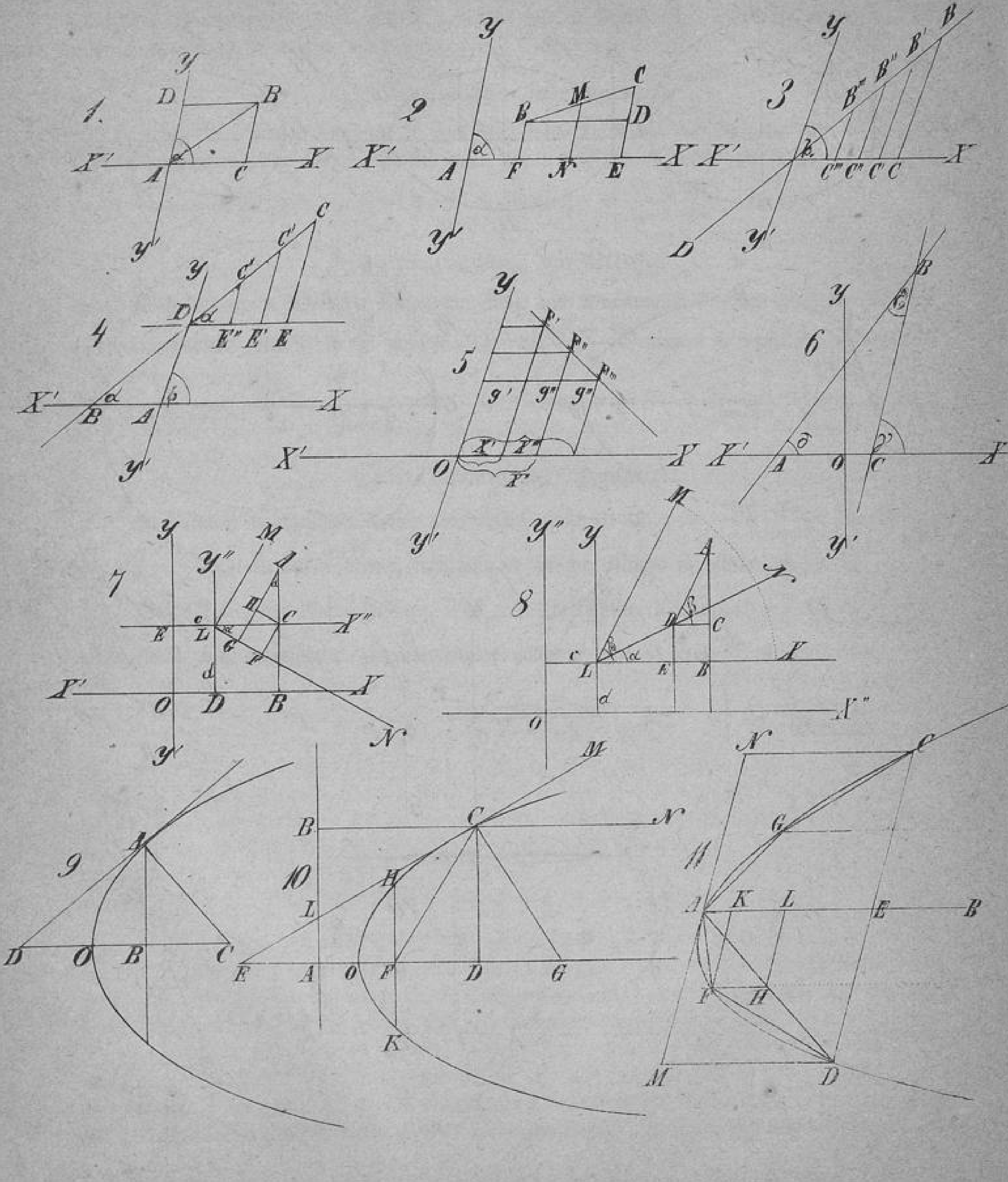
92. $r = \dfrac{b^2}{a - e\ \cos.\ \varphi} = \dfrac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a}\cos.\ \varphi}$, oder $\dfrac{e}{a} = \varepsilon$ gesetzt, $r = \dfrac{\frac{1}{2}.p}{1 - \varepsilon.\ \cos.\ \varphi}.$

γ) Polargleichung der Hyperbel.

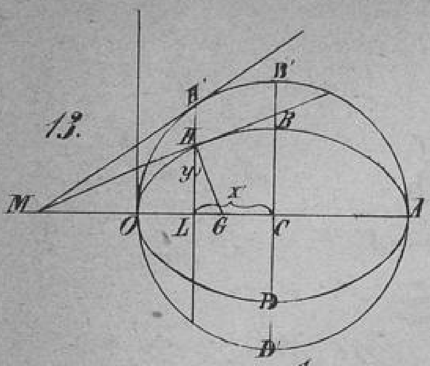
Man findet in ähnlicher Weise, wie vorher, nach §. 49 $r = \dfrac{\frac{1}{2}.p}{1 - \varepsilon\ \cos.\ \varphi}$, wobei jedoch $\varepsilon\ \left(= \frac{e}{a}\right)$ ein unechter Bruch, während es bei der Ellipse ein echter Bruch ist.

93. Die allgemeine Polargleichung aller drei Kegelschnitte ist demnach $r = \dfrac{\frac{1}{2}.p}{1 - \varepsilon.\ \cos.\ \varphi}$; dieselbe stellt jeden Kegelschnitt einzeln vor, je nachdem $\varepsilon = 1$, oder $\lessgtr 1$ ist.

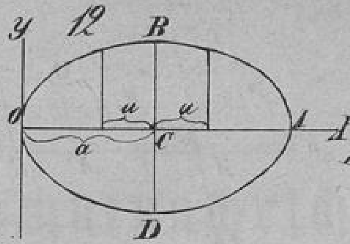
F. Staupe.



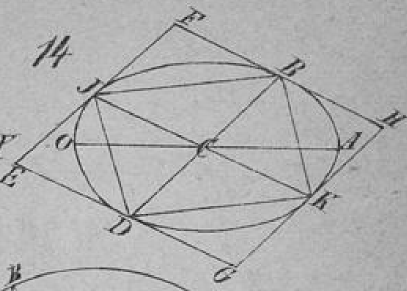
13.



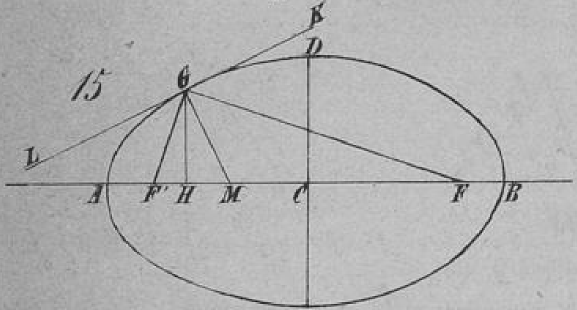
12



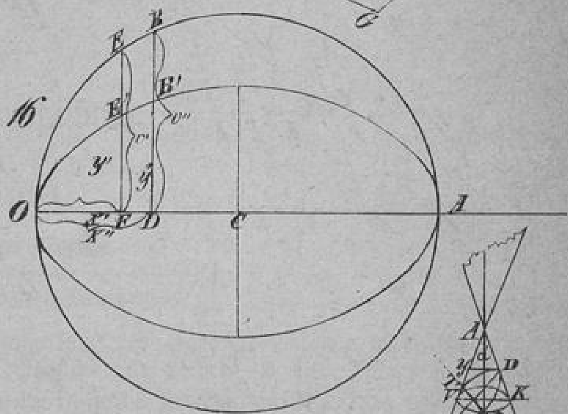
14



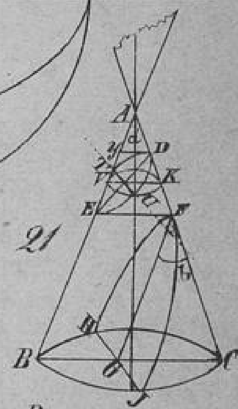
15



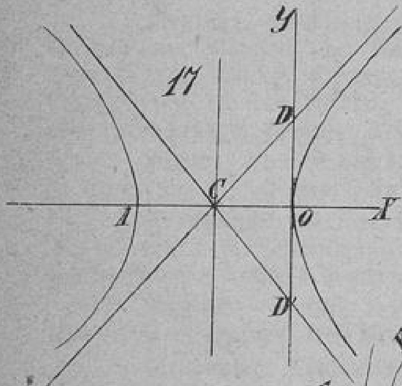
16



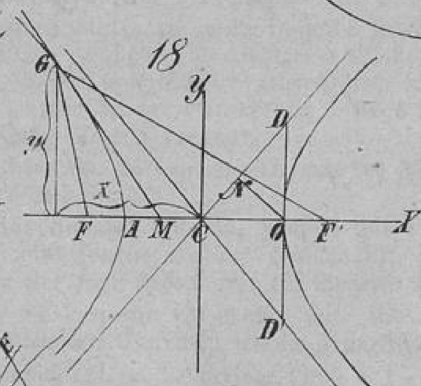
21



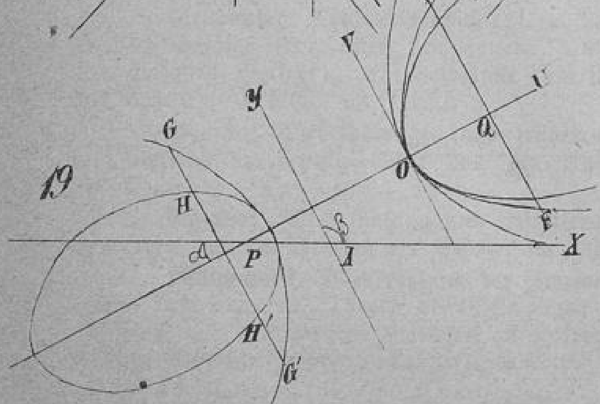
17



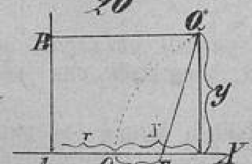
18



19



20



22