Obwohl die Sammlungen von geometrischen Uebungsaufgaben in so reicher Zahl vorhanden sind, daß nicht leicht, weder im Schulunterrichte, noch bei dem Privatstudium, ein Mangel an Material sich einstellen möchte, so tritt doch bei fast allen diesen Sammlungen ein Uebelstand mehr oder weniger hervor, nämlich der lose Zusammenhang, in welchem die einzelnen Aufgaben unter einander stehen. Nur ein besonders glücklicher Takt oder auch Zufall führen in den meisten Fällen zu den Auflösungen, ein Umstand, durch welchen der angehende Mathematiker eher entmuthigt als angespornt wird. Wenn dagegen eine Reihe von Aufgaben vorliegt, welche ein ganz genau begrenztes Gebiet umfassen und in einem solchen Zusammenhange stehen, daß die Auflösung der einen auf der einer vorhergehenden beruht, so kann sich der Anfänger nicht nur weit selbstständiger bewegen und ist weit weniger dem Zufall anheim gegeben, sondern wird auch nach gelungener Lösung das befriedigende Bewußtsein haben, einen gebotenen Stoff innerhalb gewisser Schranken erschöpft zu haben. Man wende nicht ein, daß die oft große Aehnlichkeit, welche solche zusammenhängende Aufgaben in ihren Auflösungen und Beweisen darbieten, ermüdend sei; gerade der Umstand, daß durch eine gelungene Auflösung oft mittelst geringer Abänderungen die Lösung mehrerer anderer Aufgaben gefunden wird, erfreut den Anfänger, und die Betrachtung dieser geringen Unterschiede in Auflösung und Beweis weckt sein Nachdenken.

Zu den Thematen, welche die erwähnten Vorzüge darbieten, rechne ich unter andern die Berührungsaufgaben des griechischen Mathematikers **Apollonius**, welcher, aus Perga in Pamphylien gebürtig, um die Mitte des dritten Jahrhunderts vor Christi Geburt in Alexandrien von den Schülern des Euklides die Mathematik erlernte, und von dessen Schriften ein Theil noch vorhanden ist, während ein anderer Theil derselben nur aus den Sammlungen eines späteren alexandrinischen Mathematikers, des **Pappus**, bekannt ist. Zu letzteren gehören die zwei Bücher von den Berührungen, in denen Apollonius folgende Aufgabe behandelt:

> „**Wenn von Punkten, geraden Linien oder Kreisen irgend drei Stücke „der Lage nach gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, der durch „die gegebenen Punkte geht und die gegebenen Linien und Kreise „berührt.**"

Den Regeln der Combinationsrechnung nach zerfällt diese Aufgabe in zehn andere; es können nämlich gegeben sein:

1. drei Punkte;
2. drei gerade Linien;
3. zwei Punkte und eine gerade Linie;
4. zwei gerade Linien und ein Punkt;
5. zwei Punkte und ein Kreis;
6. zwei gerade Linien und ein Kreis;

7. ein Punkt, eine gerade Linie und ein Kreis;
8. ein Punkt und zwei Kreise;
9. eine gerade Linie und zwei Kreise;
10. drei Kreise;

Diese zehn Aufgaben zerfallen aber noch in eine Menge Unterabtheilungen, weil die Lage sowohl der gegebenen Stücke zu einander als zu dem gesuchten Kreise eine sehr mannigfache sein kann, wodurch die Auflösungen jederzeit einige Abänderungen erleiden. Aus dem Berichte des Pappus, der uns zwar nicht die Aufgaben selbst, wohl aber die dazu nöthigen Hülfssätze aufbewahrt hat, wissen wir, daß Apollonius in seinem Werke sechzig solcher Berührungsaufgaben aufgestellt hat. Zur Auflösung aller dieser Aufgaben ist die vollkommene Bekanntschaft mit der Kreislehre erforderlich, denn alle Lehrsätze vom Kreise finden hier in den verschiedensten Verbindungen ihre Anwendung. Deshalb eignen sie sich vorzüglich für diejenigen, welche zwar die Elemente der Geometrie begriffen haben, aber doch noch nicht vertraut genug mit ihnen sind. Dies war auch die Ursache, warum die griechischen Mathematiker diese Aufgabe ihren Schülern vorlegten, indem sie dadurch bewirken wollten, daß dieselben die ganze Kreislehre wiederholten, die Sätze derselben ihrem Gedächtnisse fester einprägten, eine Anwendung davon machen lernten, überhaupt unabhängig vom Worte des Lehrers in Erfindung und Auflösung von Aufgaben sich übten. Was aber für die Schüler der griechischen Mathematiker übend war, sollte das für unsere Schüler nicht mehr gelten?

Auch eine praktische Anwendung, die hier kurz angedeutet werden mag, gewährt dieses Problem in der Mechanik. Man kann sich nämlich unter den Punkten Triebe, unter den geraden Linien gezähnte Stangen und unter den Kreisen gezähnte Räder denken, welche in Bewegung gesetzt werden sollen, und es würde sich dann darum handeln, wenn von diesen Dingen drei der Größe und Lage nach gegeben sind, die Größe und den Befestigungspunkt eines Rades zu finden, welches die gegebenen Triebe, Stangen und Räder in Bewegung setzt.

Von den zum Problem des Apollonius gehörenden Aufgaben finden sich in den meisten Lehrbüchern der Planimetrie einige hier und da zerstreut, z. B. in dem an hiesiger Schule eingeführten Lehrbuche von Koppe sind es außer §. 140 und 142 die Uebungsaufgaben 187—192, 305 und 306. Auf den nächsten Seiten nun soll zunächst eine übersichtliche Zusammenstellung aller hierher gehörenden Aufgaben gegeben werden.

I. Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte soll ein Kreis beschrieben werden. (Aufgabe 1.)

II. Drei gerade Linien sind gegeben; es soll ein Kreis beschrieben werden, der sie berührt, und zwar:
- a) wenn die drei Linien gehörig verlängert ein Dreieck bilden (Aufg. 2); oder
- b) wenn zwei von den Linien parallel sind (Aufg. 3).

III. Zwei Punkte und eine gerade Linie sind gegeben; einen Kreis zu zeichnen, der die gegebene Linie berührt und durch die gegebenen Punkte geht.
- a) Einer von den beiden Punkten liegt in der gegebenen Linie, und die Verbindungslinie beider Punkte steht:
  1. senkrecht auf der gegebenen Linie (Aufg. 4), oder
  2. sie steht nicht senkrecht auf derselben (Aufg. 5).
- b) Beide Punkte liegen außerhalb der gegebenen Linie, und ihre Verbindungslinie ist:
  1. parallel der gegebenen Linie (Aufg. 6), oder
  2. sie ist nicht parallel mit ihr (Aufg. 7).

IV. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene gerade Linien berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. Es sind entweder:
- a) die Linien parallel und

1. der gegebene Punkt liegt in einer der gegebenen Linien (Aufg. 8), oder
2. er liegt zwischen den Linien, von beiden gleich weit entfernt (Aufg. 9), oder
3. er liegt zwischen den Linien, näher bei der einen, als bei der andern (Aufg. 10).

b) Die Linien sind nicht parallel, und
1. der gegebene Punkt liegt in einer der gegebenen Linien (Aufg. 11),
2. er liegt zwischen ihnen, von beiden gleich weit entfernt (Aufg. 12),
3. er liegt zwischen beiden Linien, der einen näher als der andern (Aufg. 13).

V. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

a) Einer der Punkte liegt in der Peripherie des gegebenen Kreises, der andere
1. außerhalb des gegebenen Kreises, und zwar
a) so, daß eine Linie vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises nach dem in der Peripherie gegebenen Punkte in ihrer Verlängerung ihn nicht trifft (Aufg. 14), oder
b) daß sie ihn trifft (Aufg. 15).
2. Der andere Punkt liegt innerhalb des Kreises, und zwar:
a) so, daß der Durchmesser durch den in der Peripherie gegebenen Punkt ihn nicht trifft (Aufg. 16), oder
b) daß er ihn trifft (Aufg. 17).

b) Beide Punkte liegen außerhalb des gegebenen Kreises, und es soll
1. der zu suchende Kreis den gegebenen auf der Seite berühren, wo die beiden Punkte liegen (Aufg. 18), oder
2. auf der den Punkten entgegengesetzten Seite (Aufg. 19).

c) Beide Punkte liegen innerhalb des gegebenen Kreises, und zwar soll
1. der zu suchende Kreis den gegebenen in dem Halbkreise berühren, in welchem die gegebenen Punkte liegen (Aufg. 20), oder
2. in dem Halbkreise, in welchem die Punkte nicht liegen (Aufgabe 21).

VI. Zwei gerade Linien und ein Kreis sind gegeben; es soll ein Kreis gezeichnet werden, der die gegebenen Stücke berührt. Hierbei finden folgende Fälle statt:

a) die gegebenen Linien sind nicht parallel und
1. der gegebene Kreis berührt keine von den gegebenen Linien, so soll entweder
a) der gegebene Kreis den zu suchenden auswendig berühren (Aufg. 22), oder
b) er soll ihn inwendig berühren (Aufg. 23),
2. der gegebene Kreis berührt eine der gegebenen Linien (Aufg. 24).

b) Die gegebenen Linien sind parallel, und
1. der gegebene Kreis berührt keine von ihnen, so soll entweder
a) der zu suchende Kreis den gegebenen auswendig berühren (Aufg. 25), oder
b) er soll ihn inwendig berühren (Aufg. 26).
2. Der gegebene Kreis berührt eine von den gegebenen Linien (Aufg. 27).

VI. Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene Linie berührt, und durch einen gegebenen Punkt geht.

a) der Punkt und die Linie liegen außerhalb des Kreises, und es soll
1. die Berührung der Kreise von außen stattfinden (Aufg. 28), oder
2. sie soll von innen stattfinden (Aufg. 29).

b) der gegebene Punkt liegt in der Peripherie des Kreises, und zwar
1. so, daß ein Loth vom Centrum auf die gegebene Linie ihn trifft (Aufg. 30), oder
2. so, daß es ihn nicht trifft (Aufg. 31).

c) Der gegebene Punkt liegt in der gegebenen Linie, so daß
1. das Loth vom Mittelpunkte auf die gegebene Linie den Punkt trifft (Aufg. 32), oder
2. daß es ihn nicht trifft (Aufg. 33).

d) Der gegebene Kreis berührt die gegebene Linie, so daß
1. ein aus dem Centrum auf diese Linie gefälltes Loth den gegebenen Punkt trifft (Aufg. 34), oder
2. so, daß es ihn nicht trifft (Aufg. 35).

VIII. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

a) Die Kreise sind ungleich und der gegebene Punkt liegt außerhalb derselben, es sollen
1. beide Kreise den zu suchenden von außen berühren (Aufg. 36),
2. beide sollen ihn von innen berühren (Aufg. 37),
3. der eine soll ihn von außen, der andere von innen berühren (Aufg. 38).

b) die Kreise sind ungleich, der gegebene Punkt liegt in der Peripherie eines derselben, und
1. die Centrallinie der Kreise geht durch den gegebenen Punkt (Aufg. 39), oder
2. sie geht nicht durch den gegebenen Punkt, es sollen
   a) die gegebenen Kreise den zu suchenden von außen berühren (Aufg. 40), oder
   b) der eine soll ihn von innen berühren (Aufg. 41).

c) die gegebenen Kreise sind gleich, und der gegebene Punkt liegt außerhalb derselben; es sollen
1. beide Kreise den zu suchenden von außen berühren (Aufg. 42),
2. beide sollen ihn von innen berühren (Aufg. 43),
3. der eine soll ihn von außen, der andere von innen berühren (Aufg. 44).

d) Die gegebenen Kreise sind gleich und der gegebene Punkt liegt in der Peripherie des einen. Diese Fälle haben dieselbe Auflösung, wie Aufgabe 39—41, sind deshalb hier nicht als besondere Aufgaben angeführt.

IX. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise und eine gegebene gerade Linie berührt. Es sind entweder

a) die Kreise gleich, und es sollen
1. beide Kreise den zu suchenden von außen berühren (Aufg. 45),
2. sie sollen ihn beide von innen berühren (Aufg. 46),
3. der eine soll ihn von außen, der andere von innen berühren (Aufg. 47).

b) die Kreise sind ungleich, und es sollen
1. beide den zu suchenden von außen berühren (Aufg. 48), oder
2. sie sollen ihn beide von innen berühren (Aufg. 49), oder
3. der größere soll ihn von innen, der kleinere von außen berühren (Aufg. 50), oder
4. der größere soll ihn von außen, der kleinere von innen berühren (Aufg. 51).

c) Einer von den gegebenen Kreisen berührt die gegebene Linie (Aufg. 52).

X. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt.

a) alle drei Kreise sind einander gleich, und sie sollen
1. den zu suchenden von außen berühren (Aufg 53), oder
2. alle drei sollen ihn von innen berühren (Aufg. 54).

b) Zwei der gegebenen Kreise sind einander gleich, und es sollen
1. alle drei Kreise den zu suchenden von außen berühren (Aufg. 55), oder
2. alle drei sollen ihn von innen berühren (Aufg. 56).

c) Alle drei gegebenen Kreise sind einander ungleich, und es sollen
1. alle drei den zu suchenden von außen berühren (Aufg. 57),

2. alle drei sollen ihn von innen berühren (Aufg. 58),
3. zwei sollen ihn von außen, einer von innen berühren (Aufg. 59),
4. zwei sollen ihn von innen, einer von außen berühren (Aufg. 60).

Die Zahl der auf den vorhergehenden Seiten angeführten Aufgaben hätte sich, namentlich in den letzten Abtheilungen, leicht noch um einige vermehren lassen; jedoch wollte ich die von Pappus angegebene Zahl von 60 Aufgaben nicht überschreiten. Wenn Auflösung und Beweis bei manchen derselben große Aehnlichkeit darbieten, so halte ich, wie ich schon oben andeutete, gerade diesen Umstand für übend, indem der Anfänger zum Nachdenken darüber veranlaßt wird, welche Veränderung in der Construction durch eine kleine Aenderung in der Lage der gegebenen Stücke zu einander oder zu dem gesuchten Kreise hervorgebracht wird. Andeutungen zu Auflösung und Beweis zu geben, erschien mir bei der Leichtigkeit der meisten dieser Aufgaben überflüssig.

Mit der rein geometrischen Auflösung der genannten Aufgaben ist aber die Reichhaltigkeit des Apollonischen Problems in Bezug auf den Unterricht noch nicht erschöpft. Denn für die analytische Geometrie gewährt die algebraische Lösung dieser Berührungsaufgaben eine eben so gute Uebung in dem Gebrauche der Lehrsätze dieses Theiles der Mathematik, als in der geschickten Handhabung der Gleichungen. Es sei gestattet, im Folgenden die algebraische Lösung von einigen der oben angeführten sechzig Aufgaben zu geben.

Aufgabe.

Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher drei gegebene gerade Linien berührt.

Auflösung.

Die Gleichungen der drei geraden Linien, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, seien:

$$(1.)\qquad y = ax + b$$
$$(2.)\qquad y = cx + d$$
$$(3.)\qquad y = ex + f$$

und die Gleichung des gesuchten Kreises

$$(4.)\qquad (x-p)^2 + (y-q)^2 = +r^2.$$

Nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie ist die Bedingung, daß die drei Linien den Kreis berühren, ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$(5.)\qquad r^2(1+a^2) = (ap+b-q)^2$$
$$(6.)\qquad r^2(1+c^2) = (cp+d-q)^2$$
$$(7.)\qquad r^2(1+e^2) = (ep+f-q)^2,$$

aus denen nun r, p und q zu finden sind.

Durch Quadratwurzelausziehung erhält man:

$$r\sqrt{1+a^2} = ap+b-q$$
$$r\sqrt{1+c^2} = cp+d-q$$
$$r\sqrt{1+e^2} = ep+f-q$$

und durch Subtraction dieser Gleichungen:

$$(8.)\qquad r\left(\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+c^2}\right) = (a-c)\,p+b-d$$
$$(9.)\qquad r\left(\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+e^2}\right) = (a-e)\,p+b-f,$$

woraus sich durch Elimination des p ergiebt:

$$(10.)\qquad r = \frac{(c-e)\,b+(e-a)\,d+(a-c)\,f}{(c-e)\sqrt{1+a^2}+(e-a)\sqrt{1+c^2}+(a-c)\sqrt{1+e}}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in Gleichung 8. finden wir nach einigen Umwandlungen

$$(11.)\qquad p = \frac{(f-d)\sqrt{1+a^2} + (b-f)\sqrt{1+c^2} + (d-b)\sqrt{1+e^2}}{(c-e)\sqrt{1+a^2} + (e-a)\sqrt{1+c^2} + (a-c)\sqrt{1+e^2}}$$

und ähnlich

$$(12.)\qquad q = \frac{\sqrt{1+a^2}\,(cf-ed) + \sqrt{1+c^2}\,(eb-af) + \sqrt{1+e^2}\,(ad-cb)}{(c-e)\sqrt{1+a^2} + (e-a)\sqrt{1+c^2} + (a-c)\sqrt{1+e^2}.}$$

Durch eine passende Lage der Coordinatenaxen kann man einfachere Ausdrücke für p, q und r erhalten. Wählt man z. B. eine der drei gegebenen Linien zur Abscissenaxe und legt die Ordinatenaxe durch den Durchschnittspunkt der beiden andern Linien, so sind die Gleichungen der drei Linien

$$y = o$$
$$y = cx + d$$
$$y = ex + d,$$

also die Bedingungsgleichungen, daß der Kreis sie berührt:

$$r^2 = q^2$$
$$r^2\,(1+c^2) = (cp + d - q)^2$$
$$r^2\,(1+e)^2 = (ep + d - q)^2,$$

aus dem man leicht

$$p = \frac{d\sqrt{1+e^2} - d\sqrt{1+c^2}}{c - e + e\sqrt{1+c^2} - c\sqrt{1+e^2}}$$

und

$$q = r = \frac{ed - cd}{c - e + e\sqrt{1+c^2} - c\sqrt{1+e^2}}$$

findet.

Ist die zweite der gegebenen Linien der ersten, die man zur Abscissenaxe wählt, parallel, so ist auch $c = o$, und die Ausdrücke für p, q, r werden folgende:

$$p = \frac{d\sqrt{1+e^2} - d}{2\,e}$$

$$q = r = \frac{d}{2},$$

so daß für diesen Fall die Gleichung des gesuchten Kreises ist:

$$\left(x - \frac{d\sqrt{1+e^2} - d}{2\,e}\right)^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Aufgabe.

Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene gerade Linie berührt.

Auflösung.

Man nehme die gegebene Linie zur Abscissenaxe und errichte die Ordinatenaxe in dem Punkte, in welchem die Verlängerung der Verbindungslinie beider gegebenen Punkte die Abscissenaxe schneidet.

Die Coordinaten der beiden Punkte seien a, b und c, d, die Gleichung des gesuchten Kreises sei $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$.

Da der Kreis durch die beiden Punkte gehen soll, so muß sein

$$(1.)\qquad (a-p)^2 + (b-q)^2 = r^2$$
$$(2.)\qquad (c-p)^2 + (d-q)^2 = r^2$$

und da er die Abscissenaxe berührt

$$(3.)\qquad q = r.$$

Durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten erhält man

(4.) $$a^2 - c^2 - 2p(a - c) + b^2 - d^2 - 2q(b - d) = 0.$$

Bezeichnet man den Winkel, den die Verbindungslinie der gegebenen Punkte mit der Abscissenaxe bildet, durch z, so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \text{tang. } z$, also

$$b = a \text{ tang. } z$$
$$d = c \text{ tang. } z.$$

Dies in Gleichung 4. substituirt, giebt

$$a^2 - c^2 - 2p(a - c) + (a^2 - c^2) \text{ tang.}^2 z - 2q(a - c) \text{ tang. } z = 0,$$

oder, wenn man durch a — c dividirt:

$$a + c - 2p + (a + c) \text{ tang.}^2 z - 2q \text{ tang. } z = 0.$$

Durch Anwendung der Formel $1 + \text{tang.}^2 z = \frac{1}{\cos.^2 z}$ erhält man

$$\frac{a + c}{\cos.^2 z} - 2p = 2q \text{ tang. } z,$$

oder durch Division mit 2 tang. z und unter Berücksichtigung, daß $2 \text{ tang. } z \cos.^2 z = 2 \sin. z \cos. z = \sin. 2z$ ist:

$$q = \frac{a + c}{\sin. 2z} - c \text{ cotg. } z.$$

Wenn man diesen Werth für q und den Werth a tang. z für b in Gleichung 1. substituirt, so nimmt diese folgende Gestalt an, da $q^2 = r^2$ sich hebt:

$$a^2 - 2ap + p^2 + a^2 \text{ tang.}^2 z - 2a \text{ tang. } z \frac{a + c}{\sin. 2z} + 2ap = 0.$$

oder da $\frac{2 \text{ tg. } z}{\sin. 2z} = \frac{2 \text{ tg. } z}{2 \sin. z \cos. z} = \frac{1}{\cos.^2 z}$ ist:

$$a^2 + p^2 + a^2 \text{ tang.}^2 z - \frac{a(a + c)}{\cos.^2 z} = 0,$$

woraus weiter, weil $1 + \text{tang.}^2 z = \frac{1}{\cos.^2 z}$ ist, folgt:

$$\frac{a^2}{\cos.^2 z} + p^2 - \frac{a(a + c)}{\cos.^2 z} = 0, \text{ oder } p = \frac{+\sqrt{ac}}{\cos. z},$$

Hieraus folgt weiter

$$q = r = \frac{a + c}{\sin. 2z} \frac{-}{+} \frac{\sqrt{ac}}{\sin. z},$$

und durch Substitution der für p, q, r gefundenen Werthe in die Gleichung des gesuchten Kreises ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe.

Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene gerade Linien berührt.

Auflösung.

Man nehme den Durchschnittspunkt der gegebenen Linien zum Anfangspunkt der Coordinaten, die Linie, welche den Winkel, den die gegebenen Linien mit einander bilden, halbirt, zur Abscissenaxe, und darauf senkrecht die Ordinatenaxe.

Der Winkel der beiden gegebenen Linien sei = 2z, die Coordinaten des gegebenen Punktes a, b, die Gleichung des gesuchten Kreises

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Die Gleichungen der beiden gegebenen Linien sind

$$y = x \text{ tang. } z \text{ und } y = -x \text{ tang. } z.$$

Da beide den Kreis berühren sollen, so muß sein

$$(1.) \qquad r^2 (1 + \text{tang.}^2 z) = (q - p \text{ tang. } z)^2$$

$$(2.) \qquad r^2 (1 + \text{tang.}^2 z) = (q + p \text{ tang. } z)^2$$

und da der Kreis durch den gegebenen Punkt gehen soll

$$(3.) \qquad (a - p)^2 + (b - q)^2 = r^2.$$

Die beiden ersten Gleichungen subtrahirt, geben

$$(q + p \text{ tang. } z)^2 - (q - p \text{ tang. } z)^2 = o \text{ oder } 4\,pq \text{ tang. } z = o,$$

d. h. p oder q müssen $= o$ sein.

Ist $q = o$, d. h. liegt der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der Abscissenaxe, so folgt aus Gleichung 1.:

$$r^2 (1 + \text{tang.}^2 z) = p^2 \text{ tang.}^2 z$$

$$\frac{r^2}{\cos.^2 z} = p^2 \text{ tang.}^2 z$$

also $p = \pm \dfrac{r}{\sin.\, z.}$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 3., so erhält man

$$\left(a \mp \frac{r}{\sin.\, z}\right)^2 + b^2 = r^2$$

$$r^2 \left(\frac{1}{\sin.^2 z} - 1\right) \mp \frac{2\,ar}{\sin.\, z} + a^2 + b^2 = o$$

$$r^2 \cot g.^2 z \mp \frac{2\,ar}{\sin.\, z} + a^2 + b^2 = o$$

$$r^2 \mp \frac{2\,ar \sin.\, z}{\cos.^2 z} + (a^2 + b^2) \text{ tang.}^2 z = o$$

$$r = \pm \frac{a \sin.\, z}{\cos.^2 z} \pm \sqrt{\frac{a^2 \sin.^2 z}{\cos.^4 z} - a^2 \text{ tang.}^2 z - b^2 \text{ tang.}^2 z}$$

oder, da $\dfrac{\sin.^2 z}{\cos.^4 z} - \text{tang.}^2 z = \text{tang.}^2 z \left(\dfrac{1 - \cos.^2 z}{\cos.^2 z}\right) = \text{tang.}^4 z$ ist,

$$r = \pm \frac{a \sin.\, z}{\cos.^2 z} \pm \text{tang } z \sqrt{a^2 \text{ tang}^2 z - b^2},$$

woraus

$$p = \pm \frac{a}{\cos.^2 z} \pm \frac{1}{\cos.\ z} \sqrt{a^2 \text{ tang.}^2 z - b^2}$$

folgt. Die Werthe für r und p werden imaginär, wenn $a \text{ tang. } z < b$ ist; in diesem Falle muß man nicht q, sondern $p = o$ setzen und hat dann eine ähnliche Rechnung. —

Vorstehende Beispiele mögen genügen, um die reichhaltige Anwendung des Apollonischen Problems auch für die analytische Geometrie darzuthun. Sollten sich Lehrer der Mathematik, denen diese Zeilen zu Gesicht kommen, dadurch veranlaßt finden, das Berührungsproblem ihren Schülern zum Privatstudium zu empfehlen, und Letztere an der Lösung desselben mit Nutzen ihre Kräfte erproben, so ist die Absicht, in der Vorstehendes geschrieben wurde, vollständig erreicht.