Altes und Neues zur Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks.

Der Wunsch, als Schulprogramm eine Arbeit zu liefern, die der Schule einigermassen zu dienen vermöchte, lenkte meinen Blick auf die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Mit diesen Punkten muss sich jeder Lehrer auseinandersetzen, verdankt man ihnen doch Gruppen von Aufgaben, die besonders geeignet sind, das Interesse der Lernenden zu fesseln und Freude an geometrischen Untersuchungen zu erwecken. Man kann sich daher nicht wundern, dass diesen Eigenschaften des Dreiecks beständig mit grossem Eifer weiter nachgespürt wird. Dabei aber tritt ein ärgerlicher Umstand zu Tage. Es existiert kein Mittel, sich über das bereits Vorhandene rasch Aufschluss zu verschaffen, und da ausserdem viele Verfasser älterer und neuerer Aufsätze leider gänzlich versäumten, die Quellen, aus denen sie schöpften, namhaft zu machen, so ist das etwas weiter Zurückliegende mehr und mehr dem Vergessenwerden ausgesetzt, und sehr häufig werden Sätze als neu veröffentlicht, die dies durchaus nicht sind. Ohne Schwierigkeit könnte ich Beispiele anführen, dass ein und derselbe Satz drei- und mehrmal als etwas Neues hingestellt wurde.

Aus diesen Gründen scheint es mir dringend geboten, dass den Sätzen über merkwürdige Punkte des Dreiecks historisch nachgegangen werde, damit einerseits durch eine geordnete Zusammenstellung die Übersicht über das Vorhandene erleichtert, andererseits für die schöneren Sätze die Prioritätsfrage entschieden werde.

Der nachfolgende erste Teil versucht eine derartige Zusammenstellung — soweit es mir möglich war, die einschlägige Litteratur zu erlangen — für einen der interessantesten merkwürdigen Punkte.

In einem 2. Teile schliesse ich dann einige weitere Darlegungen an, zu denen ich durch den ersten Teil angeregt ward. Ich hoffe, dass ich dabei, was die Art der Herleitung anlangt, nicht ebenfalls Pfade gehe, die bereits betreten sind.—

I. Teil.

Gesammeltes über den Punkt der kleinsten Entfernung von den Ecken.

Das naheliegende Problem: „Denjenigen Punkt M des Dreiecks zu suchen, für den die Summe der Entfernungen von den 3 Ecken ein Minimum ist," ward wiederholt behandelt, darunter offenbar häufig ganz unabhängig von den mannigfachen Vorgängern.

Nach einer Angabe von Lindman* löste das Problem bereits Thomas Simpson in: the doctrine and application of Fluxions (London 1750) und gab zugleich die geschickteste Konstruktion für Punkt M an. Alsdann berührte dasselbe bei Gelegenheit einer noch allgemeineren Aufgabe Nik. Fuss in den: Nova acta academ. Petropol. XI, 1798 und löste es durch statische Betrachtungen. Wenige Jahre später (1810—11) lenkten die Annales de Gergonne et Lavernède (Bd. I pag. 196) auf dies und auf das allgemeinere Problem von n Punkten die Aufmerksamkeit, indem sie die Aufgabe stellten: Für drei (n) Städte, die nicht in einer Geraden liegen, drei (n) Verbindungswege abzustecken, die die kürzeste Verbindung ergeben. Als Lösungen erschienen noch in demselben Bande dieser Zeitschrift drei längere Artikel: a) eine ausführliche analytische Behandlung des allgemeinen, sowie des speziellen Falles von Tédenat (I pag. 285—91) b) ein kurzes Referat der Herausgeber über eine von Lhuilier eingesendete ebenfalls zumeist analytische Lösung (I pag. 297 f.), endlich c) eine rein geometrische Behandlung dieses und einer Reihe verwandter Probleme von einem Ungenannten, unter dem, nach dem Vergleich mit dem obenerwähnten Excerpt zu schliessen, vielleicht abermals Lhuilier zu verstehen ist (I p. 375—384). Weitere analytische Lösungen wurden späterhin veröffentlicht von Grüson: Abhandlungen der Akademie der Wissensch. zu Berlin 1816—17 mathem. Klasse; von Bertrand: Liouville Journal 8, 155—60 (1843) (besonders zu dem Zwecke geschrieben, eine Ungenauigkeit Lhuilier's für den Fall, dass der Punkt M nicht mehr in dem Dreieck liegt, zu beseitigen); ferner von Lehmus: Crelle Journal 50, 266 f. (1854); von Lindman: Grunert Arch. 27, 295—300 (1856); von Grunert: Archiv 48, 63 ff (1867); auch ist die analytische Behandlung dieses Problems bereits in Aufgabensammlungen und Lehrbücher, wie Sohnke: Aufgaben aus der Differentialrechnung Cap. 8 und Schlömilch: Compend. d. höh. Anal. I, 159, übergegangen.

Klügels Wörterbuch kommt auf den Punkt dreimal zu sprechen: a) Bd. V pag. 791 wird — wie vorher schon Crelle: Sammlung mathemat. Aufsätze und Bemerkungen Berlin 1822, II, 295 ff gethan hatte — der Punkt M mit dem Punkte der mittleren Entfernung in Beziehung gebracht,

* Grunert Archiv 27 pag. 295.

(vergl. auch Hofmann-Natani unter „Punkt mittl. Entf."); b) Suppl. I, 723 wird eine analytische und c) Bd. II, 656 N. 11 eine kurze geometrische Lösung gegeben. Auch Steiner hat dem Problem Beachtung geschenkt und dasselbe mehrfach verallgemeinert, z. B. im 13. Bd. des Crelle'schen Journals die Bedingungen für die Aufgabe angegeben, dass die x^{ten} Potenzen der Entfernungen eines Punktes von den 3 Ecken des Dreiecks ein Minimum sein sollen (vergl. gesammelte Werke II 16; II, 97; II, 730 und Anmerkungen zu Bd. II p. 729 N. 11), Erweiterungen, die dann durch Dippe: Crelle's Jour. 16,74, ferner in den beiden Abhandlungen von Wetzig: a) Ueber das Minimum oder Maximum der Potenzsumme der Abstände eines Punktes von gegebenen Punkten, Geraden oder Ebenen; Crelle Jour. 62, 346—396, b) Ueber das Minimum oder Maximum der Summe der positiven und negativen Quadrate der Abstände eines Punktes von 3 Geraden einer Ebene; Zeitschrift f. Math. XII, 281—301 und neuerdings von Sturm: Ueber den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten: Crelle Journ. 97, 49—61, weitere Behandlung erfuhren. Unter Zugrundelegung trimetrischer Coordinaten hat Hain: Grun. Arch. 59, 415 ff. einige Sätze über diesen Punkt aufgestellt. Endlich hätte ich noch zwei Abhandlungen zu erwähnen, die ich leider nicht zur Durchsicht erhalten konnte, nämlich Heinen: Ueber Systeme von Kräften, Cleve 1834, und Lindelöf: sur les Maxima et Minima d'une fonction des rayons vecteurs menés d'un point mobile à plusieurs centres fixes, Acta Societ. Scient. Fennicae 1866 p. 191.

Trotz so häufiger Behandlung scheint dieser Punkt nicht gar zu bekannt zu sein, wird ja doch seine Ermittelung noch im 55. Bd. von Grunerts Archiv p. 355 (Jahrgang 1873) als Aufgabe hingestellt* und Sachse in Coblenz, der 1875 eine kleine Schrift: „Der 5^{te} merkwürdige Punkt im Dreieck" erscheinen liess, hielt diesen seinen 5^{ten} merkwürdigen Punkt, der nichts anderes ist, als jener Minimumpunkt, für neu erfunden. Aber auch Heis', dem die Sachse'sche Schrift gewidmet ist, scheint jene Uebereinstimmung nicht aufgefallen zu sein. Sachse gelangte übrigens auf diesen Punkt durch genau dieselben Betrachtungen, die schon Crelle in seinem netten Schriftchen: „über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks, Berlin 1816 pag. 26 ff." angestellt hatte, nämlich denjenigen Punkt zu suchen, um den herum die Eckentransversalen 6 gleiche Winkel mit einander bilden. —

Wir wenden uns nunmehr einer Zusammenstellung der interessantesten Eigenschaften dieses Punktes zu.

1) Die analytische Verfolgung der vorliegenden Minimumaufgabe für 3 oder für beliebig viele Eckpunkte führt, wie bereits Tédenat und Lhuilier erkannten, zu der Bedingungsgleichung:

$$\sum_{n} \cos \varphi = 0^{**}$$

unter φ den Winkel verstanden, den der von M nach einem beliebigen Eckpunkte laufende Radiusvektor gegen eine beliebige Axe bildet. Schon Tédenat zieht daraus die Folgerung, dass a) die Verbindungslinien MA, MB, ... bezüglich parallel sind den Seiten eines $n$seitigen gleichseitigen Polygons und dass b) die Winkel um Punkt M herum bezüglich gleich sind den Aussenwinkeln dieses Polygons. Für den Spezialfall von 3 Eckpunkten ergiebt sich darnach, dass um M herum 3 gleiche Winkel von je 120°, oder, wenn man die Linien AM, BM . . . über M hinaus verlängert denkt, 6

* Vergl. auch die Aufgabe Hoffm. Zeit. XIII, 364 N. 250 und deren Lösungen XIV, 263 f.

** Man beachte die kurze Verificierung dieser Formel mittels einer einfachen Grenzbetrachtung von Lhuilier in Gerg. Ann. I, 301.

gleiche Winkel von je 60° liegen. Diese Eigenschaft des Punktes M ist als Fundamentaleigenschaft anzusehen und diente, wie bereits bemerkt, Crelle und Sachse zum Ausgangspunkt. Sie würde verstatten, den Punkt M auch wohl als denjenigen Punkt zu definieren, von dem aus betrachtet die 3 Dreiecksseiten gleich gross erscheinen.

2) Eine etwas andere Ausdeutung der umstehenden Bedingungsgleichung gab Schärtlin: Zeitschr. f. Mathem. 26, 70, nämlich, dass sich für den Punkt M n gleiche Kräfte, die in den Richtungen MA, MB .... wirken, das Gleichgewicht halten müssen. Auf diese Beziehung zu mechanischen Problemen hatte aber — wie nachher näher angegeben werden soll — bereits Fuss aufmerksam gemacht.

3) Von rein geometrischen Beweisen der vorliegenden Minimumaufgabe für den Fall von 3 Punkten sind mir nur 3 verschiedene vorgekommen:

a) Einen solchen gab Kunze in seiner Schrift: Ueber einige teils bekannte teils neue Sätze vom Dreieck und Viereck, 2. Aufl.* Halle 1848 pag. 14; wiederholt in dessen Geometrie (3. Auflage Jena 1873) pag. 63 als Beweis № 1.

b) Eleganter ist der ebendort gegebene 2te Beweis. Derselbe stammt aber, wie aus den Noten zu Steiners Werken II, 729 hervorgeht, von Steiner. Es wird dabei der Satz benutzt, dass die von einem Punkte im Innern eines gleichseitigen Dreiecks auf die Seiten gefällten Lote eine konstante Summe ergeben.

c) Nicht minder elegant ist aber auch der Beweis, den Lhuilier und der Ungenannte in Gerg. Annal. geben. Dieselben legen folgenden Satz zu Grunde: Der Punkt einer Kreisperipherie, welcher von 2 äusseren Punkten die kleinste Entfernungssumme hat, ist derjenige, der mit dem bezüglichen Kreisradius gleiche Winkel bildet. Dieser Beweis ist gekürzt in Klügels Wörterbuch II, 656 N. 11 aufgenommen worden.**

4) Mit der unter N. 1 genannten Fundamentaleigenschaft hängt eine zweite zusammen, auf die Schlömilch, Hoffm. Zeit. XIV, 357, durch folgende Aufgabe aufmerksam machte: Es soll der Punkt M im Innern des Dreiecks so bestimmt werden, dass die Ecke A gleich weit entfernt ist von den Transversalen BM und CM, ebenso B von CM und AM, endlich C von AM und BM. (vergl. auch Hoffm. Zeit XIV, 120.)

5) Was die Konstruktion des Punktes M betrifft, so könnte man, unmittelbar der Fundamentaleigenschaft folgend, über die 3 Dreiecksseiten Bögen spannen, deren Peripheriewinkel 120° betragen; so Tédenat, Lhuilier, Klügel Suppl. I und Andere. Geschickter aber ist es, nach aussen hin auf das Dreieck 3 gleichseitige Dreiecke aufzusetzen und deren Spitzen X, Y, Z bezüglich mit den Gegenecken A, B, C zu verbinden. Diese schöne Konstruktion soll nach Lindelöf's Angabe*** bereits von Simpson gefunden worden sein, ist aber nachher augenscheinlich wiederholt neu erdacht worden. — Aus dieser doppelten Konstruktionsweise ergiebt sich zugleich, dass Punkt M gemeinsamer Durchschnitt derjenigen 3 Kreise ist, die diesen 3 gleichseitigen Dreiecken umgeschrieben werden können.

---

* Die 1. Aufl. erschien als Programm des Gymn. zu Weimar.

** Gerg. Annal. I, 375 wird noch darauf hingewiesen, dass mit dieser Minimumaufgabe zugleich folgende Aufgaben gelöst sind: Gesucht der Punkt dessen Entfernung von a) 2 Punkten und einer Geraden, b) von 2 Punkten und einer Kreisperipherie, c) von 1 Punkt, 1 Geraden und 1 Kreisperipherie, d) von 1 Punkt und 2 Peripherien, e) von 1 Geraden und 2 Kreisen, f) von 3 Kreisen, ein Minimum sei.

*** vergl. Sturm a. a. O. pag. 55.

6) Vorstehende Konstruktion setzt den, auch für sich allein betrachtet interessanten, geometrischen Satz voraus, dass sich die so konstruierten Transversalen AX, BY, CZ in einem Punkte M durchschneiden.* Schlömilch schreibt in einer Anmerkung Hoffm. Zeit. IX, 125 diesen Satz Kunze zu, (vergl. dessen obenerwähntes Programm II. Aufl. pag. 12). Daselbst bemerkt Kunze ausdrücklich, dass er diesen Satz für neu halte und auf ihn geführt worden sei durch eine Schrift von J. J. J. Hoffmann über Beweise zum pythagoräischen Lehrsatz (Mainz 1821), worin der analoge Satz für den Spezialfall des rechtwinkligen Dreiecks umständlich dargethan werde. Gleichwohl ist der Satz schon vor Kunze's Programm bekannt gewesen. Er findet sich in der trefflichen Schrift: de triangulorum rectilineorum probrietatibus quibusdam nondum satis cognitis von Car. Friedr. Andr. Jakobi, Programm von Pforta 1825 vergl. § 92 und § 39, an letzterer Stelle sogar in noch allgemeinerer Gestalt bewiesen, als hier benötigt wird.**

7) Die Aufsetzung gleichseitiger Dreiecke ergiebt eine neue — dritte — Methode, den Punkt M zu definieren. Diesen Ausgangspunkt nahm Kunze a. a. O., ferner Grunert in einer Abhandlung im Archiv 48, 37 ff. und ebenso Féaux: Progr. Arnsberg 1873. Hierdurch aber bekommt der ganze Fall eine doppelte Erweiterung:

a) Nur solange existiert ein innerhalb des Dreiecks gelegener Minimumpunkt M, als kein Dreieckswinkel die Grenze von 120° erreicht oder überschreitet. Geschieht dies, so rückt der Minimumpunkt in den Scheitel des grössten Winkels***, kann aber niemals über das Dreieck hinausfallen. (vergl. Klügel Wörterb. V, 794; Bertrand a. a. O. pag. 158; Lindmann a. a. O. pag. 299.) Die Aufsetzung gleichseitiger Dreiecke ist dagegen bei jedem Dreiecke statthaft. Wird aber ein Winkel des Dreiecks grösser als 120°, so fällt der Durchschnittspunkt der Transversalen AX, BY, CZ über das Dreieck hinaus und trennt† sich damit von demjenigen Punkte ab, der das Minimum der Entfernungssumme abgiebt.

b) Das Aufsetzen von gleichseitigen Dreiecken ist nicht blos nach aussen, sondern ebenso nach innen hin möglich. Hierdurch wird ein neuer merkwürdiger Punkt M′ gewonnen, den Jakobi § 92 nur vorübergehend erwähnte, den aber dann Grunert Arch. 48, 37 ff. und Féaux näher in Betracht zogen.

8) Die Lage der Punkte M und M′ hat Grunert a. a. O. mit den Mitteln der analytischen Geometrie erörtert. Jene Betrachtungen sind aber ziemlich weitschichtig und entbehren der Uebersichtlichkeit. Sie mögen daher durch folgende Darlegungen ersetzt werden.

Die Lage des Punktes M verursacht keine Schwierigkeit, ist vielmehr bereits durch das Voranstehende genügend klargelegt. Kommt Punkt M ausserhalb des Dreiecks zu liegen, so erscheint von ihm aus die grösste Seite unter 120°, die beiden andern je unter 60°.

Von Punkt M′ dagegen ist zunächst zu erkennen, dass er niemals innerhalb des Dreiecks

* Dieser Satz bleibt noch gültig, wenn ein Dreieckswinkel, etwa α, den Grenzwert von 180° erreicht. Man gewinnt dann einen Sondersatz, der etwa folgendermassen ausgesprochen werden könnte: Nimmt man innerhalb einer Strecke BC irgend einen Punkt A an, beschreibt auf der einen Seite der Strecke über BC auf der anderen über den Teilen CA und AB gleichseitige Dreiecke BCX, CAY, ABZ, so schneiden sich die 3 Verbindungslinien AX, BY, CZ jederzeit in einem und demselben Punkte.

** vergl. pag. 11.

*** Dem Falle, dass bei n gegebenen Punkten der Minimumpunkt mit einem der gegebenen Punkte, selbst zusammenfällt, hat Sturm a. a. O. pag. 52 besondere Beachtung geschenkt.

† Um der möglichen Abzweigung willen, seien die so definierten Punkte im Weiteren mit M und M′ bezeichnet.

liegen kann; denn: Wie die Analogie mit den Eigenschaften des Punktes M ergiebt, ist auch M' als gemeinsamer Schnittpunkt von 3 Kreisen definierbar, welche um die 3 nach innen aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke beschrieben werden können. Denkt man sich nun dasjenige dieser gleichseitigen Dreiecke gezeichnet, das der grössten Dreiecksseite a* zugehört und für dieses den umgeschriebenen Kreis konstruiert, so wird das gegebene Dreieck jederzeit völlig innerhalb dieses Kreises liegen. Irgendwo auf jener Peripherie liegt aber Punkt M', also muss M' immer ausserhalb des Dreiecks liegen, es sei denn, dass er in einen der Endpunkte der grössten Seite hinein fiele. Dieser Grenzfall tritt aber ein, sobald der Winkel mittlerer Grösse (also β) 60^0 beträgt.

Weil aber Punkt M' auch auf der Geraden liegen muss, die den Punkt A mit dem Eckpunkt X' des gleichseitigen Dreiecks BCX' verbindet, so lässt sich die Lage von M' noch genauer dahin angeben:

a) Solange der mittelgrosse Winkel β kleiner als 60^0 ist, liegt M' auf demjenigen Sechstel der Peripherie des um BCX' geschlagenen Kreises, das sich von B aus der grössten Seite gegenüber hinerstreckt; es erscheint dann von M' aus die grösste Seite unter 120^0, die anderen Seiten unter 60^0.
b) Ist $\beta = 60^0$, so rückt M' in Punkt B hinein.
c) Ist dagegen $\beta > 60^0$, so liegt M' auf demjenigen Sechstel-Umfang, der sich von B aus der kleinsten Seite gegenüber hinerstreckt, und es erscheint dann die kleinste Seite unter 120^0, die anderen unter 60^0.
d) Für das gleichseitige Dreieck ist die Lage des Punktes M' völlig unbestimmt.

9) Durch einen leichten Kongruenzbeweis ist darzuthun, dass für die den Punkt M erzeugenden Transversalen AX, BY, CZ gilt:

$$AX = BY = CZ = k^{**}$$

und analog für die Transversalen des zweiten Punktes:

$$AX' = BY' = CZ' = k'$$

10) Besonders interessant wird der vorstehende Befund durch die weitere Bemerkung, dass jene konstante Länge k für den Fall, dass *M* Minimumpunkt ist, dem Werte dieses Minimums selbst gleicht, dass also gilt:

$$k = AM + BM + CM$$

Dieses schöne Ergebnis ist wohl Allen aufgefallen, die sich mit Punkt *M* genauer beschäftigt haben, so Heinen,*** Kunze, Lehmus, Lindelöf,† Sturm u. s. w. und erweist sich leicht unter Anwendung des Ptolemäischen Satzes auf eines der Kreisvierecke, wie *M*BCX u. dgl.

---

* Es sei für alles Weitere vorausgesetzt, dass betreffs der 3 Dreiecksseiten gelte:

$$a \geqq b \geqq c$$

** Drückt man die 3 Strecken AX, BY, CZ aus den Dreiecken AXB, BYC, CZA durch Cosinussatz aus, so lehrt obige Gleichung, dass identisch gleich sein muss:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60) \equiv b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60) \equiv c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta + 60)$$

Diese, verglichen mit dem gewöhnlichen Cosinussatz, überraschende Relation, ward von Unferdinger in Grun. Arch. 42. pag. 227 als Schüleraufgabe empfohlen. Nach Sturms Angaben (pag. 97) soll sie aber schon in der Schrift von Heinen zu finden sein. — Durch Vermittelung des zweiten Punktes gewinnt man daneben die analoge Relation:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma - 60) \equiv b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha - 60) \equiv c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta - 60)$$

*** Nach Sturm's Angabe a. a. O. pag. 55.

† Nach Sturms Angabe a. a. O. pag. 55, vergl. auch Grunert: Arch. 48,72.

Für den allgemein gefassten Punkt M lehren die in Nr 8 angestellten Betrachtungen, dass entsprechend gelten muss:

$$k = \pm AM + BM + CM$$

wobei das $|\pm|$ Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $|\alpha \lesseqgtr 120^0|$ ist; und für Punkt M' würde gelten:

$$k' = -AM' \pm BM' + CM'$$

wobei das $|\pm|$ Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $|\beta \lesseqgtr 60^0|$.

Vergleiche mit Vorstehendem die Angaben Grunerts a. a. O. pag. 49 f.

11) Da k eine konstante Grösse ist, muss sich für dieselbe ein in a, b, c symmetrischer Ausdruck gewinnen lassen. Kunze stellte a. a. O. pag. 17 die Relation auf:

$$k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\Delta\sqrt{3}}$$

wo Δ die Dreiecksfläche bedeutet. Dieselbe Relation ward aber bereits von Grunert in Klügels Wörterbuch Suppl. I, 724 angegeben und zwar augenscheinlich entlehnt aus Fuss' obengenannter Abhandlung (Seite 238). Wenn Féaux (a. a. O. pag. 3) in dieser Formel für Δ seinen Wert ausgedrückt in den Seiten einsetzt und die Wurzel in die Summe zweier Wurzeln zerlegt, so wird damit ein Ausdruck erzielt, der durchaus nicht übersichtlicher zu nennen ist. Dagegen gab wohl Féaux zum ersten Mal die Parallelformel an:

$$k' = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2\Delta\sqrt{3}}$$

und machte dabei zugleich auf die durch Einfachheit ausgezeichnete Relation:

$$k^2 + k'^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

aufmerksam. Dieselben Ausdrücke für k und k' hat neuerdings Fuhrmann in Hoffm. Zeit. XIII, 364 aufgestellt mit der Veränderung, dass $2\,\Delta$ ersetzt wird durch $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \operatorname{tang} \vartheta$, wobei ϑ den für die Segmentärpunkte wichtigen Winkel bedeutet.*

Als symmetrische Funktion der Winkel findet sich bei Grunert pag. 41 der Ausdruck:

$$k = 2r\sqrt{1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sqrt{3}}$$

wobei r den Radius des umgeschriebenen Kreises bedeutet. Analog hierzu gilt:

$$k' = 2r\sqrt{1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sqrt{3}}$$

12) Auch die Entfernungen des Punktes M (resp. M') von den Ecken A, B, C des Dreiecks sind wiederholt als Funktionen der Dreiecksseiten dargestellt worden, zuerst wohl von Fuss a. a. O. pag. 238.** Das bezügliche Gleichungssystem, bei dessen Lösung die in N. 10 enthaltene Bedingung zu beachten ist, ist leicht aufzustellen. Seine Lösung ergiebt:

$$MA = \frac{k^2 + b^2 + c^2 - 2a^2}{3k}$$

und entsprechend für MB und MC. Analoge Formeln würden für M' aufstellbar sein. Für wirkliche Berechnung sind dagegen wohl folgende Gestalten geeigneter:

$$MA = \frac{bc}{k}\,\frac{\sin(60 + \alpha)}{\sin 60} = \frac{2bc}{k\sqrt{3}}\sin(60 + \alpha) \quad \text{u. s. f.}$$

---

* vergl. auch die Lösungen zu dieser Aufgabe: Hoffm. Zeit. XIV, 263 ff.

** vergl. Klügel Suppl. I, 725 und Féaux a. a. O. pag. 4.

sowie: $$M'A = \frac{bc}{k'} \frac{\sin(60-\alpha)}{\sin 60} = \frac{2bc}{k'\sqrt{3}} \sin(60-\alpha) \quad \text{u. s. f.}$$

die durch zweimalige Ausdrückung ein und derselben Fläche und Gleichsetzung der Werte leicht zu gewinnen sind. Aehnliche Formeln gab übrigens bereits Lindman an*, während die von Grunert** durch analytische Geometrie entwickelten Formen zu ausgedehnt sind.

13) Wenn Hain (Grun. Arch. 59, 416) den Satz hervorhebt: „Verbindet man den Minimumpunkt eines Dreiecks mit den Ecken desselben, so verhalten sich die Umkreisradien der 3 so entstandenen Dreiecke wie die Seiten des Urdreiecks; die dreifache Summe der Quadrate dieser Radien ist gleich der Summe der Quadrate über den Seiten des Urdreiecks," so ergiebt sich dies einfach aus der Thatsache, dass jene 3 Kreise zugleich die 3 gleichseitigen Dreiecke umhüllen, deren Seiten bezüglich a, b, c sind. Interessanter dagegen ist der ebendort aufgestellte Satz: „Die Punkte M und M' haben parallele Harmonikalen. Für den Beweis dazu muss auf jene Entwickelungen Hains hingewiesen werden.***

14) Eine neue Gruppe interessanter Sätze erhält man, wenn man die Centren U, V, W (resp. U', V', W') der drei Kreise in Betracht zieht, die den 3 gleichseitigen Dreiecken umgeschrieben sind. Es gilt dann:

a) Diese Centren U, V, W (resp. U', V', W') sind Eckpunkte eines neuen gleichseitigen Dreiecks. Diesen Satz hat — ausser Zusammenhang mit dem Uebrigen — W. Fischer im Jahre 1863† synthetisch und trigonometrisch bewiesen, ebenso findet er sich bei Sachse a. a. O. pag. 20, dann inmitten einer längeren Abhandlung: „Über den einem Dreieck umschriebenen Kegelschnitt kleinsten Inhalts" von Greiner (Schlöm. Zeit. 28, 288) und anderwärts. Zuerst möchte aber wohl Kunze: Sätze vom Dreieck pag. 14, auf ihn aufmerksam gemacht haben. Dort findet sich auch der sehr einfache synthetische Beweis, aus dem zugleich hervorgeht, dass die Seiten dieses neuen gleichseitigen Dreiecks die Linien AM, BM, CM normal halbieren. Analoges gilt natürlich für M'.

b) Für die Seite des ersten dieser neuen gleichseitigen Dreiecke giebt schon Kunze den Wert $\frac{k}{\sqrt{3}}$ an. Der Radius des umgeschriebenen Kreises desselben beträgt daher $\frac{k}{3}$. Die analogen Grössen beim zweiten Dreieck betragen $\frac{k'}{\sqrt{3}}$ und $\frac{k'}{3}$, sodass

c) für die Flächen dieser gleichseitigen Dreiecke das überraschende Ergebnis entsteht:
$$\Delta_k - \Delta_{k'} = \Delta$$
Diesen Satz fand Féaux (a. a. O. pag. 4) und stellte demselben noch die Bemerkung zur Seite, dass die Summe dieser beiden gleichseitigen Dreiecke dem arithmetischen Mittel aus den 3 über den Seiten des Hauptdreiecks beschriebenen gleichseitigen Dreiecken gleicht.

d) Erst Greiner aber erkannte, dass diese beiden gleichseitigen Dreiecke ein und denselben Mittelpunkt haben und dass dieser Mittelpunkt zusammenfällt mit dem Schwerpunkt des Urdreiecks ABC. Greiner bewies dies a. a. O. pag. 289 analytisch, indem er für die Entfernung des Schwer-

* Grun. Arch. 27, 298.
** Grun. Arch. 48, 47.
*** Ein weiterer dort angegebener Satz (pag. 417 oben) kommt nicht bloss Punkt M zu, sondern gilt allgemein.
† Grun. Arch. 40, 460—462.

punktes von den Ecken der Dreiecke einfache konstante Werte (entsprechend dem in b) Gesagten) erzielte. Für einige weitere Sätze Greiners, die zu dem umgeschriebenen kleinsten Kegelschnitt in Beziehung stehen, muss auf die Abhandlung selbst verwiesen werden.

e) Auf Grund eines nachher zu erwähnenden allgemeinen Satzes (siehe pag. 11) ergiebt sich übrigens noch, dass die Geraden AU, BV, CW (und analog AU' u. s. f.) abermals eine Trias von Transversalen darstellen, die durch einen und denselben Punkt hindurchgehen.

15) Wie die Seiten der obengeschilderten gleichseitigen Dreiecke auf den bezüglichen Transversalen AM, BM, CM senkrecht stehen, so müssen auch irgend welche andere 3 Linien, die auf den Transversalen normal stehen, ein gleichseitiges Dreieck umschliessen. Insbesondere könnte diese Konstruktion in den Eckpunkten A, B, C des Urdreiecks vorgenommen werden. Man erhält dann abermals ein ausgezeichnetes Dreieck, nämlich das „grösste" gleichseitige Dreieck, das dem Dreieck ABC umgeschrieben werden kann.

Das Problem, dem Dreieck das grösste gleichseitige (oder beliebige) Dreieck um- und einzubeschreiben, stellten Gergonne und Lavernède in ihren Annales Bd. I pag. 384 als Aufgabe hin. Sie entlehnten dieselbe aber, wie sie später bemerkten, dem — mir nicht zugänglich gewesenen — Buche Lhuiliers: Eléments d'analise géométrique et d'analise algébrique, in dem sich bereits Lösungen vorfinden sollen. Die bei der Redaktion eingegangenen Lösungen teilen die Herausgeber Bd. II, 89—94 in zusammengefasster Weise mit. Die Beziehungen dieser Aufgabe zu dem Punkte M sind darnach bereits von Vecten bemerkt worden. — Weit später — nämlich 1846 — hat Fasbender Crelle Journal 30, 230—231 denselben Zusammenhang aufgefunden. Sein Beweis für dies Maximum verläuft folgendermassen: Fasbender berechnet die Seite und den Inhalt eines beliebigen umgeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, sodann eines zweiten gleichseitigen Dreiecks, dessen Seiten auf den erst benutzten bezüglich normal stehen. Werden beide Flächeninhalte addiert, so ergiebt sich ein konstanter Ausdruck; also muss das erste gleichseitige Dreieck seinen Maximalwert erreichen, wenn das zweite zu Null wird. Dann aber werden jene Normalen gegen einander Winkel von 120° bilden, also durch den Punkt M hindurchgehen. — Nachher hat Schlömilch in Hoffm. Zeit. 8, 501 die Auffindung dieses Maximaldreiecks als Aufgabe gestellt, woraufhin Lühmann eine schöne synthetische Herleitung gab. Es ist dies im wesentlichen derselbe Weg, der schon Gerg. Annal. II, 89 ff. von Rochat, Vecten und Fauquier eingeschlagen ward.*

Die Dimensionen dieses gleichseitigen Maximaldreiecks können leicht aus seiner Höhe berechnet werden, welche gleich k sein muss, da die Strecken AM, BM, CM für das Dreieck als Seitenlote von M aus erscheinen. Wie 14^a erkennen lässt, besitzt es übrigens doppelte Dimensionen gegenüber Dreieck UVW.

16) Was die Aufgabe betrifft, dem Dreieck das kleinste gleichseitige Dreieck einzubeschreiben, so gaben die Annales an der genannten Stelle zwar eine für jedes beliebige eingeschriebene Dreieck gültige Lösung, liessen aber den Spezialfall des gleichseitigen Dreiecks unbeachtet. Es ist daher auch der Zusammenhang dieser Aufgabe mit Punkt M erst später aufgedeckt worden, wie scheint zuerst von Schlömilch, vergl. dessen Konstruktion zu seiner Aufgabe Hoffm. Zeit. 9, 125. Die schöne synthetische Lösung dagegen, die am gleichen Orte Lühmann gab, lässt jenen Zusammenhang mit Punkt M ebenfalls nicht ohne weiteres erkennen, enthält aber die besonders bemerkenswerte Notiz, dass allen einem Dreieck einschreibbaren gleichseitigen Dreiecken ein gewisser

* Näheres darüber siehe Teil II, § 14.

charakteristischer Punkt L gemein ist. Zieht man durch L irgend drei Gerade unter gleichen Neigungswinkeln gegen die Seiten des Dreiecks, so sind deren Schnittpunkte mit den Seiten stets die Ecken eines eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Die Ecken des „minimalen" gleichseitigen Dreiecks sind die Fusspunkte der von L auf die Dreiecksseiten gefällten Lote.

17) Der Zusammenhang jenes Lühmann'schen Punktes L mit dem Minimumpunkte M ist erst neuerdings durch Fuhrmann aufgedeckt worden, vergl. Hoffm. Zeit. 15, 359 Aufgabe № 409.* Punkt L ist nämlich der Winkelgegenpunkt zu M. Auf einem etwas anderen Wege gelangte Stoll zu diesem Winkelgegenpunkte, indem er den Satz aufstellte: Beschreibt man um A, B, C Kreise welche bezüglich BM und CM, CM und AM, AM und BM berühren, so schneiden sich die je zweiten gemeinsamen inneren Tangenten dieser Kreise in dem Winkelgegenpunkte von M. Hoffm. Zeit. XV, 125, und Lösungen dazu XV, 435.**

18) Von 3 weiteren Sätzen über Punkt M, die Emmerich Hoffm. Zeit. 15, 524 aufstellte, gehören die beiden ersten nicht dem Punkte M allein zu, gelten vielmehr für beliebige Dreieckstransversalen und sind, wie Kunze in seiner Geometrie (pag. 172) angiebt, in Gemeinschaft mit einem noch allgemeineren Satze bereits von Euler hergeleitet worden. Die dritte Formel dagegen, nämlich:

$$\frac{1}{A'M} + \frac{1}{B'M} + \frac{1}{C'M} = 2\left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM} + \frac{1}{CM}\right)$$

wobei A', B', C' die Schnittpunkte der Transversalen mit den Gegenseiten, ist neu und möchte ihrer leichten Herleitung wegen*** als Schüleraufgabe anzuempfehlen sein.

19) Schliesslich sei noch eines speziellen Falles gedacht, dem Sachse in seiner Schrift besondere Beachtung schenkte.

Für den Fall, dass die Winkel des Urdreiecks seien: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, ergeben sich die leicht herleitbaren Beziehungen:

a) $\overline{AM}^2 = BM.CM$, b) $AM : BM : CM = 1 : 2 : 4$, c) Fläche $AMB : CMA : BMC = 1 : 2 : 4$.
Siehe hierzu Sachse a. a. O. pag. 25 ff.

Da die Antragung von gleichseitigen Dreiecken zu so vielen bemerkenswerten Sätzen Anlass gab, lag wohl der Gedanke nahe, analoge allgemeinere Konstruktionen vorzunehmen.

In neuerer Zeit scheint Hain den ersten Versuch der Art gemacht zu haben, indem er Grun. Arch. 55, 333 (Jahrgang 1873) den Satz bewies: Werden über den Seiten eines Dreiecks als Grundlinien ähnliche gleichschenklige Dreiecke (nach innen oder aussen) konstruiert, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der Scheitel dieser gleichschenkligen Dreiecke mit den Gegenecken des Urdreiecks in einem Punkte.† — Sodann (1875) versuchte Heis, dem die Sachse'sche Schrift gewidmet war, eine derartige Verallgemeinerung. Er benutzt „ähnliche" Dreiecke und setzt dieselben so an,

---

* Lösungen dazu siehe Hoffm. Zeit. 16, 19.

** vergl. auch die Aufgabe Fuhrmanns Hoffm. Zeit. 15, 39, gelöst 15, 352.

*** vergl. Hoffm. Zeit. 16, 200.

† vergl. auch den späteren Zusatz Hain's über die trimetrischen Coordinaten des Schnittpunktes Grun. Arch. 59, 418.

dass an jede Ecke ein Winkel der ähnlichen Dreiecke zu liegen kommt. Über diese Figur bemerkt er dann:

a) Die durch die Ecken der ähnlichen Dreiecke beschriebenen Kreise schneiden sich in einem Punkte.
b) Die Strahlen OA, OB, OC bilden um O herum 6 Winkel, die bezüglich den Winkeln der Aufsatzdreiecke gleich sind.
c) Die Strahlen OA, OB, OC gehen verlängert durch die Spitzen X, Y, Z der Aufsatzdreiecke.
d) Die Verbindungslinien AX, BY, CZ verhalten sich zu einander umgekehrt wie die Seiten der Aufsatzdreiecke, direkt also wie deren Höhen.

Merkwürdigerweise hat kurze Zeit später Engelbrecht in Grun. Arch. 60, 447 (Jahrg. 1877) dieselben Sätze aufgestellt und nach Ohrtmann Jahrb. 6, 336 hat Townsend in Educ. Times XX, 68—69 trigonometrisch bewiesen, dass sich für aufgesetzte ähnliche Dreiecke die Transversalen AX, BY, CZ in einem Punkte schneiden.

Weit früher als alle Diese — nämlich 1825 — hatte aber Jakobi in Pforta in seiner mehrfach citierten schönen Schrift: de triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis (pag. 26) den viel allgemeineren Satz bewiesen: Trägt man bei A, bei B, bei C je zwei gleiche, sonst aber ganz beliebige, Winkel an und zieht von den Ecken A, B, C aus nach den so gewonnenen Eckpunkten der Ansatzdreiecke die Verbindungslinien, so schneiden sich diese stets in einem und demselben Punkte. — Der Beweis Jakobi's stützt sich auf die Umkehrung des Ceva'schen Satzes.

Die grössere Allgemeinheit dieses Satzes gegenüber dem von Heis aufgestellten liegt darin begründet, dass hier die Summe der 3 verschiedenen Ansatzwinkel eine ganz beliebige sein kann, während dort jene Winkel — als Dreieckswinkel — der Beschränkung unterliegen, dass ihre Summe 180° betragen muss. — Der Fall, den Fuhrmann neuerdings Hoffm. Zeit. 13, 365 bekannt machte: „auf das Dreieck 3 gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke aufzusetzen, sodass die Dreiecksseiten die Hypotenusen sind," würde daher durch Jakobi's Satz mit umschlossen sein. (Vergleiche übrigens die verschiedenartigen Beweise zu diesem und dem auf beliebige gleichschenklige Dreiecke ausgedehnten Falle, sowie einige daran angeschlossene Lehrsätze Hoffm. Zeit. 14, 265 ff.)

Wenn aber auch dem Jakobischen Satze die grössere Allgemeinheit zukommt, so scheint doch der von Heis berührte Fall von besonderer Fruchtbarkeit zu sein. An ihn schliessen sich die folgenden Darlegungen an.

II. Teil.

§ 1. Grundlegendes.

Auf die Seiten eines Dreiecks A, B, C seien 3 ähnliche Dreiecke BCX, CAY, ABZ mit den Winkeln ξ, η, ζ in der Weise nach aussen hin aufgesetzt, dass an der Ecke A beiderseits ξ, bei B beiderseits η, bei C beiderseits ζ angebracht ist. Schlägt man dann um BCX und ACY je die umgeschriebenen Kreise, die sich — ausser in C — noch in O schneiden, so ist Peripheriewinkel $B\hat{O}C = 180^0 - \xi$ und $C\hat{O}A = 180^0 - \eta$, so dass für den über der Seite c ausgespannten Winkel $A\hat{O}C$ der Wert $180^0 - \zeta$ verbleibt. Es ist daher auch AOBZ ein Kreisviereck, d. h. O ist gemeinsamer Schnittpunkt der den ähnlichen Ansatzdreiecken zugehörigen umgeschriebenen Kreise. — Aus denselben Kreisvierecken ergiebt sich ferner, dass $B\hat{O}X = B\hat{C}X = \zeta$, $C\hat{O}X = C\hat{B}X = \eta$, $Z\hat{O}B = Z\hat{A}B = \xi$ ist, u. s. w, womit einerseits erwiesen ist, dass die Verbindungslinien AX, BY, CZ durch O hindurchgehen, sich also in einem und demselben Punkte schneiden, andrerseits dargethan wird, dass sich die Ansatzwinkel ξ, η, ζ um Punkt O herum nochmals vorfinden. —

Der auf solche Weise erzielte Punkt O ist kein fester Punkt im Dreieck, verändert vielmehr seine Lage je nach der Wahl der Ansatzwinkel ξ, η, ζ, wird aber durch dieselben (im allgemeinen) in eindeutiger Weise bestimmt.

Man wird daher die Winkel ξ, η, ζ als homogene Coordinaten ansehen können, geeignet, um irgend einen Punkt der Dreiecksebene zu bestimmen.

Selbstredend sind von diesen 3 Coordinaten nur zwei willkürlich wählbar, während die dritte durch die Fundamentalgleichung:

$$\xi + \eta + \zeta = 180^0 \qquad |1.$$

an die anderen gekettet ist.

§ 2. Über die Lage des Punktes O bei gegebenen Coordinaten ξ, η, ζ.

Der Schnittpunkt O liegt, wie leicht zu erkennen ist, solange in dem vollständig begrenzten Gebiet des Dreiecks ABC, als kein Dreieckswinkel, vermehrt um seinen Ansatzwinkel, 180° übersteigt. Geschieht dies, wäre z. B. $\alpha + \xi > 180^0$, so würden die Punkte Y und Z in das Scheitelwinkelfeld von α hineinrücken. Da nun Punkt O der Schnittpunkt der Verbindungslinien CZ und BY ist, so wird dann auch O in das Scheitelwinkelfeld von α zu liegen kommen. Es zeigt sich somit, dass man durch „Aufsatzdreiecke" nur solche Punkte O definieren kann, die im umschlossenen Dreiecksfelde und in den 3 Winkelfeldern liegen. — Damit hierfür eine einheitliche Auffassung gewonnen werde, seien diese 4 Gebiete zusammen das „Innere" des Dreiecks genannt, während die 3 Seitenfelder als „Aussengebiet" angesehen werden mögen.

Um nun auch Punkte des Aussenraums zu erzielen, steht augenscheinlich die „Einwärtsntragung" zur Verfügung. — In der That. Denkt man sich auf die Seite BC nach einwärts irgend welches Ansatzdreieck BCX aufgesetzt und beachtet man, dass Punkt O auch wohl als der Schnittpunkt zwischen dem Kreise um BCX und der Geraden AX definiert werden kann, so wird ersichtlich, dass O jederzeit in eines der Seitenfelder zu liegen kommt.

Fasst man nun das Einwärtsantragen als das Negative zum Auswärtsantragen auf, so wird der Satz aufzustellen sein:

Sind die Winkelkoordinaten positiv, so liegt der Punkt O im Innern des Dreiecks;
„ „ „ „ negativ, „ „ „ „ „ „ Aussengebiet des Dreiecks.

§ 3. Bestimmung der Coordinaten ξ, η, ζ für einen gegebenen Punkt O.

Das Vorzeichen der Coordinaten, welches über die Aus- oder Einwärtsantragung entscheidet, ist durch den vorigen § genügend gekennzeichnet. Es handelt sich also hier nur noch um Bestimmung der absoluten Werte der Coordinaten. Hierfür wird aber folgende Merkregel aufzustellen sein.

Man verbinde den gegebenen Punkt O mit den 3 Ecken A, B, C des Fundamentaldreiecks und verlängere diese Linien rückwärts, so dass bei O sechs Winkel entstehen, dann ist:

ξ der Winkel, dessen Schenkel direkt oder rückwärts verlängert durch B und C gehen,
η „ „ „ „ „ „ „ „ „ C „ A „
ζ „ „ „ „ „ „ „ „ „ A „ B „

dabei beachtet, dass $\xi + \eta + \zeta = 180^0$ sein muss.

Anmerkung. Für den Spezialfall, dass Punkt O auf einer der Seiten des Urdreiecks liegt, sind beide Auffassungen zulässig; es ist aber dann stets ein Coordinatenwinkel gleich 0^0, zwei der Aufsatzdreiecke degenerieren deshalb zu einer geraden Linie, während das dritte Dreieck zu einem unendlich langen Streifen abartet.

§ 4. Die „Basis“ des Punktes O.

Weil OBXC ein Kreisviereck ist, gilt nach dem Satze des Ptolemäus:

$$BC \,.\, OX = OB \,.\, CX + OC \,.\, BX$$

nun verhält sich aber: $BC : XC : BX = \sin\xi : \sin\eta : \sin\zeta$

also ist auch: $OX \sin\xi = OB \sin\eta + OC \sin\zeta$

hier beiderseits $OA \sin\xi$ addiert, giebt:

$$AX \sin\xi = OA \sin\xi + OB \sin\eta + OC \sin\zeta$$

analog wäre: $BY \sin\eta =$ „

„ „ : $CZ \sin\zeta =$ „

Die drei links stehenden Produkte haben also einen konstanten Wert. Derselbe stellt eine gewisse Strecke dar, deren Länge nach der Form $AX \sin\xi$ leicht durch Konstruktion ermittelt werden kann. Diese Strecke ist aber eine dem Punkt O zugehörige und durch dessen Lage eindeutig bestimmte Grösse und sei deshalb fernerhin die „Basis des Punktes O“ genannt und mit q bezeichnet. Unmittelbar hat man dann für q die zwei Formeln:

$$q = OA\sin\xi + OB\sin\eta + OC\sin\zeta \qquad |2.$$

$$q = AX\sin\xi = BY\sin\eta = CZ\sin\zeta \qquad |3.$$

Ganz entsprechende Betrachtungen können bei Einwärtsantragung der Dreiecke angestellt werden. Wird q, als Strecke, beständig als eine „positive“ Grösse gedacht, so wird bei № 3 das

Vorzeichen keine Rolle spielen, wohl aber ist das bei № 2 der Fall, da hier eine Summe auftritt. Versteht man daher unter ξ, η, ζ nur die absoluten Werte der Coordinaten, so würde man hier zunächst zu schreiben haben:

$$q_o = - OA \sin\xi - OB \sin\eta - OC \sin\zeta \qquad |2^b$$

Weiteres hierzu siehe in der Anmerkung zu § 6.

Anmerkung. Für Punkte auf den Dreiecksseiten hat (wie aus № 3 zu ersehen ist) die Basis den Wert O.

§ 5. Die Teile der Dreieckswinkel.

Die Transversalen AO, BO, CO zerschneiden die Dreieckswinkel. Diese Teilwinkel seien bezüglich (siehe Fig. 1) mit α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 bezeichnet. Der bei O liegende Winkel ξ ist dann Aussenwinkel für das Dreieck BOC, sodass gilt $\xi = \gamma_1 + \beta_2$. Analog sind η und ζ zu bestimmen. Es ergeben sich also die Werte:

$$\xi = \gamma_1 + \beta_2, \qquad \eta = \alpha_1 + \gamma_2, \qquad \zeta = \beta_1 + \alpha_2 \qquad |4.$$

Wegen der vorhandenen Kreisvierecke finden sich aber diese Teilwinkel entsprechend verteilt nochmals an den Ecken X, Y, Z vor. Daher gilt z. B. im Dreieck BCY:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\sin(\gamma+\zeta)}{BY} \cdot BC = \frac{\sin(\gamma+\zeta)\sin\eta}{q} \cdot a$$

analog für die übrigen Teilwinkel. Es ergeben sich also die Formeln:

$$\begin{cases} \sin\alpha_1 = \frac{a}{q}\sin(\gamma+\zeta)\sin\eta \\ \sin\beta_1 = \frac{b}{q}\sin(\alpha+\xi)\sin\zeta \\ \sin\gamma_1 = \frac{c}{q}\sin(\beta+\eta)\sin\xi \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\alpha_2 = \frac{a}{q}\sin(\beta+\eta)\sin\zeta \\ \sin\beta_2 = \frac{b}{q}\sin(\gamma+\zeta)\sin\xi \\ \sin\gamma_2 = \frac{c}{q}\sin(\alpha+\xi)\sin\eta \end{cases} \qquad |5.$$

Für Einwärtsantragung würden in diesen Formeln ξ, η, ζ mit $-\xi, -\eta, -\zeta$ zu vertauschen sein, sodass z. B. wäre: $\sin\alpha_1 = \pm\frac{a}{q}\sin(\gamma-\zeta)\sin\eta$, wobei, damit α_1 stets unter 180^0 betrage, das $\pm$ Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $\gamma \gtrless \zeta$ ist.

Anmerkung. Multipliciert man, einerlei für welchen Punkt O man das System № 5 aufgestellt habe, diese Werte je mit einander, so erhält man: $\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 = \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2$ womit beiläufig die 2. Form des Ceva'schen Satzes hergeleitet ist.

§ 6. Die oberen Transversalenabschnitte OA, OB, OC.

Aus dem Dreieck ABO ergiebt sich: $AO = \frac{AB \sin\beta_1}{\sin\zeta} = \frac{bc\,\sin(\alpha+\xi)}{q}$ und analog, so dass ist

$$OA = \frac{abc}{q}\,\frac{\sin(\alpha+\xi)}{a}, \qquad OB = \frac{abc}{q}\,\frac{\sin(\beta+\eta)}{b}, \qquad OC = \frac{abc}{q}\,\frac{\sin(\gamma+\zeta)}{c} \qquad |6.$$

Bei Einwärtsantragung würden hier Ausdrücke wie: $OA = \frac{abc}{q}\,\frac{\sin(\alpha-\xi)}{a}$ u. s. w. erzielt werden.

Anmerkung. Diese Grössen OA, OB, OC werden bei Einwärtsantragung negativ, sobald der bezügliche Ansatzwinkel grösser ist als der zugehörige Dreieckswinkel. Es wird z. B. OA negativ, wenn $\xi > \alpha$ u. s. w. Die oben angegebene Gleichung № 2^b kann daher geschrieben werden:

$$q_0 = \mp OA \sin\xi \mp OB \sin\eta \mp OC \sin\zeta \qquad |2^c.$$

dabei beachtet, dass beim ersten Gliede das $|\mp|$ Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $|\xi \lesseqgtr \alpha|$ und entsprechend bei den beiden anderen Gliedern.*

§ 7. Die unteren Transversalenabschnitte OA_0, OB_0, OC_0.

Für die doppelte Fläche BOC ergeben sich die 2 Ausdrücke:

einerseits: $OB . OC . \sin\xi$, andererseits: $OA_0 . OB \sin\zeta + OA_0 . OC \sin\eta$.

Dies gleichgesetzt und geordnet, giebt:

$$\frac{\sin\xi}{OA_0} = \frac{\sin\eta}{OB} + \frac{\sin\zeta}{OC} \qquad |7.$$

und analog für OB_0 und OC_0. Werden diese 3 Gleichungen dann addiert, so erhält man:

$$\frac{\sin\xi}{OA_0} + \frac{\sin\eta}{OB_0} + \frac{\sin\zeta}{OC_0} = 2\left(\frac{\sin\xi}{OA} + \frac{\sin\eta}{OB} + \frac{\sin\zeta}{OC}\right) \qquad |8.$$

Offenbar ist dies die allgemeine Gestalt für den Teil I, № 18 erwähnten Satz Emmerich's.

§ 8. Die Lote l_1, l_2, l_3 von O auf die Seiten.

Für das Lot l_1 ergiebt sich:

$$l_1 = OB . \sin\beta_2 = \frac{abc}{q} \frac{\sin(\beta + \eta)}{b} \frac{\sin(\gamma + \zeta)\sin\xi . b}{q}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{abc}{q^2} \sin(\alpha + \xi) \sin(\beta + \eta) \sin(\gamma + \zeta) = Q \qquad |9.$$

so erhält man für die Lote die Ausdrücke:

$$l_1 = Q \frac{\sin\xi}{\sin(\alpha + \xi)}, \quad l_2 = Q \frac{\sin\eta}{\sin(\beta + \eta)}, \quad l_3 = Q \frac{\sin\zeta}{\sin(\gamma + \zeta)} \qquad |10.$$

Die „trimetrischen" Coordinaten des Punktes O betragen daher:

$$\frac{\sin\xi}{\sin(\alpha + \xi)}, \quad \frac{\sin\eta}{\sin(\beta + \eta)}, \quad \frac{\sin\zeta}{\sin(\gamma + \zeta)} \qquad |11.$$

Anmerkung. Von den Ansatzwinkeln ξ, η, ζ kann einer, oder höchstens zwei, grösser sein als die bezüglichen Dreieckswinkel. Beachtet man dies und denkt in allen diesen Formeln ξ, η, ζ durch $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ ersetzt, so erkennt man, dass jederzeit zwei Lote positiv sind und nur eines einen negativen Wert bekommt. Hierin liegt eine Bestätigung der Angabe, dass für negative Winkelkoordinaten nur Punkte in den Seitenfeldern erzielt werden können.

§ 9. Neue Ausdrücke für die Basis q.

Setzt man die in № 6 gefundenen Werte in № 2 ein, so erhält man:

$$q^2 = bc \sin\xi \sin(\alpha + \xi) + ca \sin\eta \sin(\beta + \eta) + ab \sin\zeta \sin(\gamma + \zeta) \qquad |12.$$

Dies transformiert sich aber noch weiter folgendermassen:

$$q^2 = \sum bc \sin\xi \sin(\alpha + \xi) = \sum bc \sin\alpha \sin\xi \cos\xi + \sum \sin^2\xi\, bc \cos\alpha$$

$$= \Delta \sum 2 \sin\xi \cos\xi + \sum \sin^2\xi \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - a^2\right)$$

$$= \Delta \sum \sin 2\xi + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \sum \sin^2\xi - \sum a^2 \sin^2\xi$$

---

* Dass die Teil 1, Nr. 10 für die Grösse k' gegebene Regel von dieser allgemeineren Regel umschlossen wird, ist leicht ersichtlich.

Nun ist aber: $\sum \sin^2\xi = 2(1+\cos\xi\cos\eta\cos\zeta)$ und $\sum \sin 2\xi = 4\sin\xi\sin\eta\sin\zeta$; es ergiebt sich daher:

$$q^2 = (a^2+b^2+c^2)(1+\cos\xi\cos\eta\cos\zeta) - (a^2\sin^2\xi + b^2\sin^2\eta + c^2\sin^2\zeta) + 4\Delta\sin\xi\sin\eta\sin\zeta \quad |13.$$

Bei einwärts aufgesetzten Dreiecken mit den entsprechend angetragenen Winkeln bleiben die beiden ersten Glieder ganz ungeändert und nur das letzte wechselt das Vorzeichen, sodass man erhält:

$$q_a^2 = (a^2+b^2+c^2)(1+\cos\xi\cos\eta\cos\zeta) - (a^2\sin^2\xi + b^2\sin^2\eta + c^2\sin^2\zeta) - 4\Delta\sin\xi\sin\eta\sin\zeta \quad |13^b.$$

Setzt man daher bei A die Winkel „ξ", bei B „η", bei C „ζ" einmal nach aussen, das andere mal nach innen an, so erhält man zwei verschiedene Punkte, für deren Basen q_a und q_i die Beziehung existiert:

$$q_a^2 - q_e^2 = 8\Delta\sin\xi\sin\eta\sin\zeta. \quad |14.$$

§ 10. Das Dreieck der Centren der drei umgeschriebenen Kreise.

Bezeichnet man diese Centren bezüglich mit U, V, W, so liegen U und V auf der Normalhalbierenden von OC, u. s. f., das heisst: Die Seiten dieses Centralendreiecks stehen bezüglich senkrecht auf den Transversalen AO, BO, CO. Das Centralendreieck UVW ist daher jederzeit dem Dreieck der Coordinatenwinkel ξ, η, ζ, ähnlich.

Würde man nun den Radius des umgeschriebenen Kreises für dieses Dreieck mit λ bezeichnen, so betrüge die Fläche UVW einerseits: Fläche $UVW = 2\lambda^2\sin\xi\sin\eta\sin\zeta$, andrerseits berechnet sie sich aus der Summe der 3 Teildreiecke UVO, VWO, WUO durch:

$$\text{Fläche } UVW = \frac{u}{2}\frac{AO}{2} + \frac{v}{2}\frac{BO}{2} + \frac{w}{2}\frac{CO}{2}$$

wo u, v, w die 3 Seiten des Centrendreiecks sind. Für diese Seiten gilt aber:

$$u = 2\lambda\sin\xi, \quad v = 2\lambda\sin\eta, \quad w = 2\lambda\sin\zeta$$

mithin ist: $\quad \text{Fläche } UVW = \frac{\lambda}{2}(AO\sin\xi + BO\sin\eta + CO\sin\zeta) = \frac{\lambda}{2}q.$

Man gewinnt sonach für den Radius λ den Wert:

$$\lambda = \frac{q}{4\sin\xi\sin\eta\sin\zeta} \quad |15.$$

und für die Dreiecksfläche: $\quad \text{Fläche } UVW = \frac{q^2}{8\sin\xi\sin\eta\sin\zeta} \quad |16.$

Würde die Ansetzung einwärts vorgenommen, so würde der Nenner dieses Ausdrucks ungeändert bleiben, während für den Zähler der veränderte Wert q_i^2 einträte. — Nimmt man daher beide Ansetzungen mit denselben Winkeln ξ, η, ζ gleichzeitig vor, so erhält man zufolge № 14:

$$(\text{Fläche } UVW)_a - (\text{Fläche } UVW)_e = \Delta \quad |17.$$

Der Teil I, 14^c erwähnte Satz von Féaux gilt also ganz allgemein.

§ 11. Die Radien R_1, R_2, R_3 der den Ansatzdreiecken umgeschriebenen Kreise.

Da im Dreieck BCX die Seite a und der gegenüberliegende Winkel ξ vorkommen,

gilt für R_1: $\quad 2R_1 = \frac{a}{\sin\xi} = \frac{2r\sin\alpha}{\sin\xi}$, $\quad$ sodass sich ergiebt:

$$R_1 = r\frac{\sin\alpha}{\sin\xi}, \quad R_2 = r\frac{\sin\beta}{\sin\eta}, \quad R_3 = r\frac{\sin\gamma}{\sin\zeta} \quad |18.$$

wo r den Radius des dem Urdreieck umgeschriebenen Kreises bedeutet.

§ 12. Der Winkelgegenpunkt O'.

(Alle auf diesen Punkt bezüglichen Grössen seien durch entsprechende accentuierte Buchstaben bezeichnet.)

a) Der Winkelgegenpunkt O' erzeugt dieselben Teilwinkel wie O, nur in umgekehrter Umlaufsrichtung, daher ist hier (vergl. № 4):

$$\xi' = \gamma_2 + \beta_1, \quad \eta' = \alpha_2 + \gamma_1, \quad \zeta' = \beta_2 + \alpha_1 \qquad |19.$$

Weil aber $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$ und $\beta_1 = \beta - \beta_2$, so kann auch geschrieben werden:

$\xi' = \gamma + \beta - (\gamma_1 + \beta_2) = 180^0 - \alpha - \xi$, und analog. Es gilt also:

$$\xi' = 180^0 - (\alpha + \xi), \quad \eta' = 180^0 - (\beta + \eta), \quad \zeta' = 180^0 - (\gamma + \zeta) \qquad |20.$$

Da hiernach $\alpha + \xi + \xi' = 180^0$ ist, u. s. f., so ergiebt sich folgende einfache Konstruktion für den Winkelgegenpunkt O' eines innen gelegenen Punktes O:

Man verlängere die Seiten der zur Konstruktion von O dienenden Aufsatzdreiecke je rückwärts über die Punkte A, B, C hinaus; die so erhaltenen neuen Aufsatzdreiecke mit den freien Ecken X', Y', Z' bestimmen dann den Winkelgegenpunkt.

Liegen die Winkelgegenpunkte ausserhalb des Dreiecks, so erleidet diese Konstruktion nur unwesentliche Veränderungen. Weil aber bei einwärts gezeichneten Dreiecken die verschiedenen Linien stark durcheinandergehen, würde die Lage der Ecken X', Y', Z' dann wohl vorteilhafter aus folgender allgemein gültigen Merkregel entnommen werden:

X' liegt auf dem Schnittpunkt von BZ und CY,
Y' „ „ „ „ „ CX „ AZ,
Z' „ „ „ „ „ AY „ BX.

b) Während für die Basis q des Punktes O nach № 12 gilt: $q^2 = \sum bc \sin\xi \sin(\alpha + \xi)$ würde für die Basis q' des Winkelgegenpunktes gelten: $q'^2 = \sum bc \sin\xi' \sin(\alpha + \xi')$.
Auf Grund der Werte № 20 ergiebt sich aber hierfür: $q'^2 = \sum bc \sin(\alpha + \xi) \sin\xi$
sodass ist:

$$q' = q \qquad |21.$$

Dies giebt den Satz: Winkelgegenpunkte besitzen gleiche Basen.

Setzt man für q und q' ihre ursprünglichen Werte nach № 2 ein, so erhält man № 21 in der ausführlicheren Gestalt:

$$OA \sin\xi + OB \sin\eta + OC \sin\zeta = O'A \sin\xi' + O'B \sin\eta' + O'C \sin\zeta' \qquad |21^b.$$

c) Nunmehr ergeben sich — entsprechend den §§ 6 und 11 — folgende weitere auf den Winkelgegenpunkt bezügliche Werte:

$$AO' = \frac{abc}{q}\frac{\sin\xi}{a}, \quad BO' = \frac{abc}{q}\frac{\sin\eta}{b}, \quad CO' = \frac{abc}{q}\frac{\sin\zeta}{c} \qquad |22.$$

und:

$$R'_1 = r\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \xi)}, \quad R'_2 = r\frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \eta)}, \quad R'_3 = r\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + \zeta)} \qquad |23.$$

Werte, aus denen die weitere Gleichung folgt:

$$R_1 . AO' = R_2 . BO' = R_3 . CO' = \frac{abc}{2q} = R'_1 . AO = R'_2 . BO = R'_3 . CO \qquad |24.$$

d) Entsprechend § 8 erhält man ferner:

$$l'_1 = Q'\frac{\sin(\alpha + \xi)}{\sin\xi}, \quad l'_2 = Q'\frac{\sin(\beta + \eta)}{\sin\eta}, \quad l'_3 = Q'\frac{\sin(\gamma + \zeta)}{\sin\zeta} \qquad |25.$$

wobei:

$$Q' = \frac{abc}{q^2}\sin\xi \sin\eta \sin\zeta \qquad |26.$$

Die trimetrischen Coordinaten des Punktes O′ betragen daher:

$$\frac{\sin(\alpha+\xi)}{\sin\xi},\quad \frac{\sin(\beta+\eta)}{\sin\eta},\quad \frac{\sin(\gamma+\zeta)}{\sin\zeta} \qquad |\,27$$

Aus № 27 verglichen mit № 11 — oder № 25 verglichen mit № 10 — ergiebt sich, dass die trimetrischen Coordinaten von Winkelgegenpunkten reciprok sind, ein Satz, der sich, auf die Seitenlote bezüglich, bereits bei Jakobi: Entfernungsörter geradliniger Dreiecke, Naumburg 1851 pag. 12 vorfindet. Winkelgegenpunkte werden daher von Neueren* geradezu reciproke Punkte genannt.

§ 13. Uebergang von Auswärtsansetzung zur Einwärtsansetzung und umgekehrt.

Die Coordinaten ξ, η, ζ sind ein- für allemal als Dreieckswinkel gedacht, vertragen also weder negative Werte, noch eine Summe, die nicht der Fundamentalgleichung № 1 genügte. — Wird daher im Verlaufe einer Aufgabe die Ansetzung eines Winkels verlangt, der diese Beschränkungen nicht einhält, so muss eine Umdeutung des ungeeigneten Winkels in einen geeigneten stattfinden. In dieser Weise ist bereits von der Regel Gebrauch gemacht worden, dass ein nach aussen negativ zu rechnender Winkel umzusetzen ist in einen positiven Winkel, der einwärts anzutragen ist, und umgekehrt. Neben dieser ersten Uebergangsart sind aber noch folgende zwei andere hervorzuheben.

Ein nach aussen hin positiver Winkel $+\mu$ liefert dieselbe Gerade, wie ein nach innen positiver Winkel $180^0 - \mu$ und umgekehrt, und:

Ein nach aussen hin negativer Winkel $-\mu$ wäre zunächst umzusetzen in einen einwärts gerechneten Winkel $+\mu$, dieser aber wieder in einen nach auswärts getragenen Winkel $180^0 - \mu$.

Man erhält mithin folgende 3 Arten von Übergängen:

1) Von einer Seite auf die andere:	einerseits	$-\mu$	gleicht	andererseits	$+\mu$
2) „ „ „ „ „ „ :	„	$+\mu$	„	„	$180^0 - \mu$
3) „ „ „ „ dieselbe Seite:	„	$-\mu$	„	ebenda	$180^0 - \mu$

Von diesen Darlegungen würde z. B. Gebrauch zu machen sein, wenn die Coordinaten des Winkelgegenpunktes für einen auswärts gelegenen Punkt O bestimmt werden sollen. Es sei hier unterlassen, dies näher auszuführen, da sich später Gelegenheit finden wird, ähnliche Übergänge vorzunehmen.

§ 14. Das beliebige und das grösste umgeschriebene Dreieck von der Gestalt $\xi\eta\zeta$.

a) Soll um das Grunddreieck ABC ein Dreieck mit den Winkeln ξ, η, ζ in der Weise umgeschrieben werden, dass ξ jenseits der Seite BC, η jenseits CA, ζ jenseits AB liegt, so müssen die Eckpunkte N_1, N_2, N_3 desselben (Fig. 2) jedenfalls irgendwo auf den Peripherien der obengenannten umgeschriebenen Kreise von den Radien R_1, R_2, R_3 liegen. Das grösste derartige Dreieck — es heisse $M_1\ M_2\ M_3$ — wird aber erzielt, wenn z. B. die durch A gehende Seite $N_2\ N_3$ ihren Maximalwert erreicht. Nun ist aber diese Seite eine Doppelsehne zweier Kreise, sie erreicht daher ihr Maximum, wenn sie parallel läuft der Centralen dieser Kreise, d. h. parallel der Linie VW. Es ergiebt sich sonach:** Die Seiten des Maximaldreiecks $M_1\ M_2\ M_3$ sind parallel den Seiten des Cen-

---

* Siehe z. B. Hain: Grun. Arch. 60, 92; 68, 443, oder Greiner: Grun. Arch. 61, 262 und neue Folge I, 131 ff.

** Vorstehendes gleicht im wesentlichen dem synthetischen Beweis von Rochat, Vecten u. Fauquier siehe Gerg. Annal. II, 89; vergl. auch Lühmanns Beweis für den Teil I behandelten Spezialfall Hoffm. Zeit. 9, 123 f.

tralendreiecks UVW, stehen also, wie diese, senkrecht auf den Linien AO, BO, CO. Die Dimensionen von $M_1M_2M_3$ müssen die doppelten von denen des Dreiecks UVW sein, weil VW die Strecke OA halbiert u. s. f. Für den Radius μ des dem Dreieck $M_1M_2M_3$ umgeschriebenen Kreises erhält man daher aus № 15:

$$\mu = \frac{q}{2 \sin \xi \sin \eta \sin \zeta} \qquad |28.$$

woraus sich dann für die Fläche M des Dreiecks ergiebt:

$$M = \frac{q^2}{2 \sin \xi \sin \eta \sin \zeta} \qquad |29.$$

b) Diese Werte ermöglichen nun die Lösung der weiteren Maximalaufgabe: Das wahre Maximaldreieck von der Gestalt $\xi\eta\zeta$ umzubeschreiben, wobei darüber selbst erst Entscheidung getroffen werden soll, ob dem Winkel A der grösste, oder der mittlere, oder der kleinste Ansatzwinkel gegenüber zu legen ist.* — Offenbar wären 6 Fälle denkbar nach folgendem Schema:

Es könnte gegenüberliegen:	1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall	5. Fall	6. Fall.
Dem Winkel A der Winkel:	ξ	ξ	η	η	ζ	ζ
und gleichzeitig dem Winkel B der Winkel:	η	ζ	ξ	ζ	ξ	η
„ „ „ „ C „ „ :	ζ	η	ζ	ξ	η	ξ

Unter den hiernach zu bildenden 6 umgeschriebenen Maximaldreiecken von der Gestalt $\xi\eta\zeta$ ist aber dasjenige das grösste, für welches № 29 den grössten Wert giebt. Man hat daher die Verteilung der Winkel so zu treffen, dass q zu einem Maximum werde. Nun ist aber in der Form № 13 nur das negative Glied von der verschiedenen Verteilung der Winkel beeinflusst, und dies Glied: $a^2 \sin^2 \xi + b^2 \sin^2 \eta + c^2 \sin^2 \zeta$ bekommt den kleinsten Wert, wenn:

$$\xi < \eta < \zeta \qquad |30.$$

ist. Es ergiebt sich sonach die Regel:

Soll einem Dreieck das wahre Maximaldreieck von gegebener Gestalt umgeschrieben werden, so muss dem grössten Winkel des gegebenen der kleinste, dem mittleren der mittlere, dem kleinsten der grösste des umzubeschreibenden Dreiecks gegenüberliegen; demzufolge muss bei der Konstruktion der Ansatzdreiecke an der Ecke A der kleinste, bei B der mittlere und bei C der grösste Ansatzwinkel angebracht werden.

c) Betrachten wir nun ein beliebiges umgeschriebenes Dreieck $N_1N_2N_3$ von der Gestalt $\xi\eta\zeta$. Da auch dessen Ecken auf den in O sich schneidenden 3 Kreisen liegen, ist leicht zu erkennen, dass jede Seite des beliebigen Dreiecks gegen die entsprechende Seite des Maximaldreiecks $M_1M_2M_3$ um einen gleich grossen Winkel φ gedreht ist. Weil nun aber die Seiten des Maximaldreiecks gegen die Transversalen AO, BO, CO gleiche (nämlich 90°) Winkel bilden, so müssen auch die Seiten des Dreiecks $N_1N_2N_3$ gegen diese 3 Transversalen gleiche Winkel ψ bilden.

Sieht man für den Augenblick ξ, η, ζ nicht als gegebene, sondern als veränderliche Grössen an, so lässt sich demnach der Satz aufstellen:

Zieht man von irgend einem Punkte O nach den Ecken eines Dreiecks die 3 Transversalen AO, BO, CO und legt unter demselben Winkel ψ gegen dieselben durch die Ecken A, B, C drei neue Linien, so hat das von diesen Linien gebildete Dreieck eine konstante Gestalt, einerlei welchen Wert ψ haben möge. Das grösstmögliche derartige Dreieck erhält man für $\psi = 90°$.

* Nach einer Notiz in Gerg. Annal. a. a. O. scheint diese weitere Aufgabe von **Rochat** zwar versucht, aber nicht durchgeführt worden zu sein.

d) Auch die Grösse des beliebigen umgeschriebenen Dreiecks $N_1 N_2 N_3$ lässt sich mit Hülfe des Winkels ψ leicht bestimmen. Während nämlich die Seiten des umgeschriebenen Maximaldreiecks bezüglich doppelt so gross sind, als die Centrallinien VW, WU, UV, bestimmen sich die entsprechenden Seiten des um den Winkel φ gedrehten ähnlichen Dreiecks durch $2\,VW \cos\varphi$ u. s. f. oder, da $\varphi + \psi = 90^0$ ist, durch $2\,VW \sin\psi$ u. s. f. Für die Fläche des Maximaldreiecks M und des beliebigen Dreiecks N gilt daher die Proportion:

$$N : M = \sin^2\psi : 1 \tag{31.}$$

e) Verbindet man die Ecken $M_1\ M_2\ M_3$ mit O, so erhält man bei O 3 Winkel, deren Werte sich folgendermassen darstellen lassen. Es ist z. B.:

$$M_2OM_3 = 180^0 - (OM_3M_2 + OM_2M_3) = 180^0 - (\beta_1 + \gamma_2) = 180^0 - \xi' = \alpha + \xi$$

sodass also gilt:

$$M_2OM_3 = \alpha + \xi\,,\quad M_3OM_1 = \beta + \eta\,,\quad M_1OM_2 = \gamma + \zeta \tag{32.}$$

Mit gleicher Leichtigkeit ergiebt sich aber, dass auch bei dem beliebigen Dreieck $N_1N_2N_3$ die entsprechenden Winkel genau dieselben Werte haben, d. h. es ist auch:

$$N_2ON_3 = \alpha + \xi\,,\quad N_3ON_1 = \beta + \eta\,,\quad N_1ON_2 = \gamma + \zeta \tag{32b.}$$

f) Die Entfernungen der Punkte M_1, M_2, M_3 von O sind Durchmesser der Kreise mit den Radien R_1, R_2, R_3, und berechnen sich daher nach № 18 zu:

$$OM_1 = 2r\frac{\sin\alpha}{\sin\xi},\quad OM_2 = 2r\frac{\sin\beta}{\sin\eta},\quad OM_3 = 2r\frac{\sin\gamma}{\sin\zeta}, \tag{33.}$$

§ 15. Das beliebige und das kleinste eingeschriebene Dreieck von der Gestalt $\xi\eta\zeta$.

a) Sei* $G_1'\ G_2'\ G_3'$ irgend ein dem Dreieck ABC eingeschriebenes Dreieck (Fig. 3) mit den Winkeln $G_1' = \xi$, $G_2' = \eta$, $G_3' = \zeta$. Beschreibt man dann um $AG_2'G_3'$ und um $BG_3'G_1'$ die umgeschriebenen Kreise, die sich in einem Punkte O' schneiden, so ist $G_2'O'G_3' = 180^0 - \alpha$, $G_3'O'G_1' = 180^0 - \beta$, also muss auch $G_1'O'G_2' = 180^0 - \gamma$ sein, d. h. auch um $CG_2'O'G_1'$ lässt sich ein Kreis beschreiben. Dabei ist aber:

$$AO'B = AO'G_3' + G_3'O'B = AG_2'G_3' + G_3'G_1'B = \gamma + \zeta = 180^0 - \xi'$$

(siehe N. 20). Verlängert man also die Linien AO', BO', CO' über den Punkt O' hinaus, so erhält man um O' herum 6 Winkel, die bezüglich die Werte: ξ', η', ζ' besitzen d. h. der hier erzielte Schnittpunkt O' ist jederzeit der Winkelgegenpunkt zu O.

b) Sind $\xi\eta\zeta$ gegeben, so ist dieser Punkt O' vollständig bestimmt. Durch seine Vermittelung erhält man ein beliebiges eingeschriebenes Dreieck von der Gestalt $\xi\eta\zeta$ dadurch, dass man von O' nach den Seiten irgend eine Trias von Linien $O'G_1'$, $O'G_2'$, $O'G_3'$ unter gleichen Neigungswinkeln ψ' gegen die Seiten zieht.

c) Da die 3 Teildreiecke von $G_1'G_2'G_3'$ konstante Gestalt besitzen — denn z. B. $O'G_2'G_3'$ besitzt stets die Winkel $G_2'O'G_3' = 180^0 - \alpha$, $G_3'G_2'O' = G_3'AO' = \beta_2$ — so werden diese Teildreiecke, und damit auch das Gesamtdreieck, am kleinsten, wenn $O'G_1'$, $O'G_2'$, $O'G_3'$ am kleinsten sind, d. h. wenn der benutzte Neigungswinkel ψ' 90^0 beträgt.

d) Sieht man für den Augenblick $\xi\eta\zeta$ nicht als gegeben, sondern als variabel an, so bedeutet O' irgend einen Punkt. Es ergiebt sich daher der allgemeine Satz:

Zieht man von irgend einem Punkte eines Dreiecks aus eine Trias von Transversalen nach den Seiten unter gleichen Neigungswinkeln ψ' gegen die Seiten, so hat das Dreieck der Schnitt-

* Wir folgen hier dem Gange, den, für den Spezialfall des I. Teils, Lühmann a. a. O. eingeschlagen hatte.

punkte eine konstante Gestalt, welchen Neigungswinkel ψ' man auch wählen möge. Das kleinste derartige Dreieck ist das dem benutzten Punkte zugehörige Fusspunktendreieck.

e) Die Ecken dieses Minimaldreiecks (Fusspunktendreiecks) seien mit F_1', F_2', F_3' bezeichnet. Weil nun $AO'F_2'F_3'$ ein Kreisviereck und AO' darin Durchmesser ist, so gilt:

$$F_2'F_3' = AO' \sin\alpha = \frac{abc \sin\xi}{q} \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{2\Delta \sin\xi}{q}$$

Für die Seiten des Minimaldreiecks erhält man also die Werte:

$$F_2'F_3' = \frac{2\Delta}{q} \sin\xi, \quad F_3'F_1' = \frac{2\Delta}{q} \sin\eta, \quad F_1'F_2' = \frac{2\Delta}{q} \sin\zeta \qquad |34.$$

und der Radius R' des dem Fusspunktendreieck umbeschriebenen Kreises beträgt mithin:

$$R' = \frac{\Delta}{q} \qquad |35.$$

Diese einfache Formel liefert den Satz:

Für jeden beliebigen Punkt des Dreiecks gilt: das Produkt aus dem Radius des dem Fusspunktdreieck umgeschriebenen Kreises und der „Basis" des Punktes ist gleich der Dreiecksfläche.

Die bekannte Formel: $\Delta = \varrho s$ ist hiervon nur ein Spezialfall.*

Hierdurch wird übrigens ein Mittel gewonnen, um — unabhängig von den Aufsatzdreiecken — die Basis eines Punktes konstruktiv darzustellen.

f) Die Formeln No. 34 und 35 verstatten nun abermals die Entscheidung über die strenger genommene Minimumaufgabe, nach welcher die Verteilung der Winkel $\xi\,\eta\,\zeta$ erst dargethan werden soll. Jene Formeln nehmen Minimalwerte an, wenn q zu einem Maximum wird. Wir bekommen also für diese Minimumaufgabe genau dieselbe Anweisung betreffs der Verteilung der Winkel, die oben (No. 30) für die analoge Maximumaufgabe hergeleitet wurde.

g) Die Grösse des Minimaldreiecks F' beträgt aber:

$$F' = 2\,\frac{\Delta^2}{q^2} \sin\xi \sin\eta \sin\zeta \qquad |36.$$

h) Auch die Grösse G' eines beliebigen eingeschriebenen Dreiecks $G_1'G_2'G_3'$ lässt sich leicht ermitteln. Weil nämlich, wie bereits bemerkt, die Teildreiecke einander bezüglich ähnlich sind, z. B. $G_1'G_2'O' \sim F_1'F_2'O'$, so verhalten sich die Dimensionen der Teildreiecke, und ebenso die der ganzen Dreiecke, wie zwei entsprechende Längen z. B. die Längen $F_1'O'$ und $G_1'O'$. Dieselben gehören aber einem rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel ψ' zu, also gilt: $F_1'O' = G_1'O' \sin\psi'$, sodass für die Flächen G' und F' die Proportion entsteht:

$$F' : G' = \sin^2\psi' : 1 \qquad |37.$$

Noch sei bemerkt, dass, wie aus den obengenannten ähnlichen Dreiecken leicht zu entnehmen ist, das Komplement von ψ' demjenigen Winkel φ' gleicht, um den die Seiten des beliebigen Dreiecks G' gegen die Seiten des Minimaldreiecks F' gedreht sind.

i) Die hier behandelte Aufgabe: einem Dreieck das kleinste Dreieck von gegebener Gestalt einzubeschreiben, ward** von Rochat, Vecten und Fauquier auf die Aufgabe der Umschreibung eines Maximaldreiecks zurückgeführt, indem ein Hülfssatz vorausgeschickt ward, der in unserer Ausdrucksweise so lauten würde: „Ist $M_1 M_2 M_3$ das dem Dreieck ABC umgeschriebene Maximaldreieck von der Gestalt $\xi\eta\zeta$, so ist ABC das dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ eingeschriebene Minimaldreieck von der Gestalt $\alpha\beta\gamma$."

* siehe § 20.
** cf. Gerg. Annal. II, 89.

Die Genannten geben hierfür nur einen apagogischen Beweis, derselbe lässt sich aber durch folgende direkte Schlussweise ersetzen:

Soll für das Dreieck $M_1 M_2 M_3$ das eingeschriebene Minimaldreieck von der Gestalt $\alpha\beta\gamma$ konstruiert werden, so muss zunächst für Dreieck $M_1 M_2 M_3$ der characteristische Hülfspunkt gesucht werden. Man würde dazu auf Dreieck $M_1 M_2 M_3$ gewisse Aufsatzdreiecke aufsetzen müssen. Da nun das Dreieck $M_1 M_2 M_3$ die Winkel $\xi\eta\zeta$ und das gewünschte Dreieck die Winkel $\alpha\beta\gamma$ hat und jener Punkt ein gewisser Winkelgegenpunkt ist, so würden die Winkel der Aufsatzdreiecke nach No. 20 zu bestimmen sein durch:

$$\xi' = 180^0 - (\xi + \alpha), \quad \eta' = 180^0 - (\eta + \beta), \quad \zeta' = 180^0 - (\zeta + \gamma)$$

Verbindet man also jenen Punkt mit $M_1 M_2 M_3$, so würden um ihn herum 3 Winkel von der Grösse $\xi + \alpha$, $\eta + \beta$, $\zeta + \gamma$ liegen. Nach No. 32 erfüllt dies aber der Punkt O. Und da ausserdem die Ecken A, B, C als Fusspunkte von O mit Bezug auf Dreieck $M_1 M_2 M_3$ erscheinen, so ist ABC in der That das gesuchte Minimaldreieck von der Gestalt $\alpha\beta\gamma$.

Analog würde der Parallelsatz bewiesen werden können: „Ist $F_1' F_2' F_3'$ das dem Dreieck ABC einbeschriebene Minimaldreieck von der Gestalt $\xi\eta\zeta$, so ist ABC das dem Dreieck $F_1' F_2' F_3'$ umgeschriebene Maximaldreieck von der Gestalt $\alpha\beta\gamma$."

§ 16. **Beziehungen zwischen dem umgeschriebenen und eingeschriebenen Dreieck von der Gestalt $\xi\eta\zeta$.**

a) Gesetzt die Transversale BO schneide die Seite $F_1' F_3'$ in B_0' (Fig. 4), so ist Dreieck $BB_0' F_3' \sim BF_1' O'$ — denn wegen des Kreisvierecks $BF_3' O' F_1'$ ist $B\widehat{F_3'} B_0' = B\widehat{O'} F_1'$ und ausserdem ist $B_0' \widehat{B} F_3' = F_1' \widehat{B} O'$ — es ist daher auch $F_3' \widehat{B_0'} B = O' \widehat{F_1'} B = 90^0$. Da Analoges aus den Dreiecken $BB_0 F_1 \sim BF_3 O$ bewiesen werden kann, folgt der Satz: Konstruiert man für 2 Winkelgegenpunkte die Fusspunktendreiecke, so stehen deren Seiten bezüglich normal auf den Transversalen des anderen Winkelgegenpunktes.* — Es stehen somit die Seiten des eingeschriebenen Minimaldreiecks $F_1' F_2' F_3'$ normal auf den Transversalen AO, BO, CO, sodass der Satz entsteht:

Das umgeschriebene Maximaldreieck und das eingeschriebene Minimaldreieck von gleicher Gestalt haben stets parallele Seiten.

b) Der Vergleich der Werte 29 und 36 giebt ferner das einfache Resultat:

$$\Delta = \sqrt{M.F'} \qquad 38.$$

d. h. Beschreibt man um ein Dreieck das Maximaldreieck von beliebiger gegebener Gestalt und in das Dreieck das entsprechende Minimaldreieck, so ist die Dreiecksfläche stets das geometrische Mittel zwischen jenen beiden Flächen.

c) Noch etwas allgemeiner, als der eben angegebene, ist ein Satz, der sich in Gerg. Annal. II, 93 ohne nähere Beweisangabe findet und den Rochat aus allgemeinen Formeln Pilattes über ein- und umgeschriebene Dreiecke herleitete. Darnach gilt eine Relation, wie No. 38, für irgend ein

* Dieser Satz ist nicht neu. Für das specielle Punktpaar: Schwerpunkt und Grebe's Punkt, bewies ihn bereits Wetzig: Ueber das Maxim. und Minim. der positiv. oder negativ. Quadrate der Abstände etc. Schlöm. Zeit. 1867 pag. 297; allgemeiner durch Analysis Hain: Grun. Arch. 60, 98 (vergl. 68, 443) und neuerdings synthetisch (wie oben) Greiner: Gr. Arch. neue Folge I, 131. Vergl. auch die noch allgemeinere Aufgabe Steiner's Crelle Jour. II, 287; Stein. Werke I, 157.

Paar ein- und umgeschriebene Dreiecke von derselben Gestalt, falls nur deren Seiten parallel zu einander sind.*

Der Beweis dieses allgemeinen Satzes macht aber nunmehr keine Schwierigkeit. Sind N und G' irgend zwei um- und eingeschriebne Dreiecke von der Gestalt $\xi\eta\zeta$ und wird angenommen, dass sie parallele Seiten haben, so sind auch die im Früheren mit φ und φ' bezeichneten Drehungswinkel einander gleich, da ja das Maximal- und Minimaldreieck stets parallele Seiten besitzen. Weil aber gilt $\psi = 90^0 - \varphi$ und $\psi' = 90^0 - \varphi'$, so sind dann auch ψ und ψ' einander gleich, sodass aus den Formeln No. 31 und 37 folgt: $N.G' = M F'$

also auch:

$$\Delta = \sqrt{N.G'} \qquad |39.$$

Rochat bildet hieraus übrigens folgenden eleganten Satz:

Beschreibt man um ein beliebiges Dreieck Δ_1 irgend ein zweites Δ_2, um dies ein drittes Δ_3 u. s. f., nur so, dass die Dreiecke Δ_1, Δ_3, Δ_5 .... einerseits, und die Dreiecke Δ_2, Δ_4, Δ_6 .... andrerseits je parallele Seiten besitzen, so steigen die Flächen aller dieser Dreiecke in einer geometrischen Progression an. —

Anmerkung. Noch sei bemerkt, dass alle in den §§ 14—16 angestellten Betrachtungen gültig sind, einerlei ob Punkt O innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks gelegen sei. Liegt er aber ausserhalb, so werden die umgeschriebenen Dreiecke $M_1 M_2 M_3$ und $N_1 N_2 N_3$ nicht mehr mit ihren Seiten, sondern erst mit deren Verlängerungen durch die Eckpunkte des Dreiecks hindurchgehen. Dieser Lagenunterschied betreffs der umgeschriebenen Dreiecke ist daher in Zusammenhang zu setzen mit dem der Einwärtsantragung zu Grunde liegenden Wechsel im Vorzeichen der Coordinaten. — Wollte man dagegen auf diesen Lagenunterschied kein Gewicht legen und dementsprechend auch die Coordinaten nur nach ihrem absoluten Werte in Betracht ziehen, so existieren „zwei" umgeschriebene Maximaldreiecke von der Gestalt $\xi\eta\zeta$, eins, M_a, dem innen gelegenen, und eins, M_e, dem aussen gelegenen Punkte $\xi\eta\zeta$ entsprechend. Von diesen beiden ist aber das erstere stets das grössere, da, wie aus No. 17 rasch zu entnehmen ist, stets gelten muss:

$$M_a - M_e = 4\Delta \qquad |40.$$

§ 17. Einiges Weitere über Winkelgegenpunkte.

a) Wie O der „Punkt $\xi\eta\zeta$" genannt werden kann, so ist sein Winkelgegenpunkt der „Punkt $180^0 - (\alpha + \xi)$ u. s. w." zu nennen. Da nun das Fusspunktendreieck von O' das Minimaldreieck von der Gestalt $\xi\eta\zeta$ ist, so ist das Fusspunktendreieck von O selbst das Minimaldreieck von der Gestalt $180^0 - (\alpha + \xi)$ u. s. f. Besonders hervorgehoben sei hieraus nur der Satz: Das Fusspunktendreieck eines Punktes $\xi\eta\zeta$ hat die Winkel $180^0 - (\alpha + \xi)$, $180^0 - (\beta + \eta)$, $180^0 - (\gamma + \zeta)$.

Die Seiten desselben betragen daher (vgl. No. 34):

$$F_2 F_3 = \frac{2\Delta}{q} \sin(\alpha + \xi), \quad F_3 F_1 = \frac{2\Delta}{q} \sin(\beta + \eta), \quad F_1 F_2 = \frac{2\Delta}{q} \sin(\gamma + \zeta) \qquad |41.$$

Analoges gilt für das umgeschriebene Dreieck dessen Seiten auf den Transversalen AO', BO', CO' normal stehen

b) Weil die rechtwinkligen Dreiecke $B_0{}'BF_3{}'$, und $B_0 B F_1$ einander ähnlich, sind in ihnen die Winkel bei $F_3{}'$ und bei F_1 einander gleich, woraus der Satz folgt: Die Seiten der Fusspunktdreiecke von Winkelgegenpunkten haben je antiparallele Lage gegen die Seiten des Grunddreiecks.

---

* Zu diesem Satze vergl. auch Gandtner-Junghans: Sammlung II pg. 27 No. 72.

c) Da einerseits $q = AX \sin\xi$, andrerseits $q = AX' \sin(\alpha + \xi)$, so gilt:

$$\frac{\sin\xi}{\sin(\alpha+\xi)} = \frac{AX'}{AX}$$

Ebenso ist aber auch: $\dfrac{\sin\xi}{\sin(\alpha+\xi)} = \dfrac{AO'}{AO}$ und analog, es können daher die Proportionen aufgestellt werden:

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{AX'}{AX}, \quad \frac{BO'}{BO} = \frac{BY'}{BY}, \quad \frac{CO'}{CO} = \frac{CZ'}{CZ} \qquad |42.$$

aus denen zu ersehen ist, dass folgende 4 Strecken parallel sind:

$$OO' \parallel XX' \parallel YY' \parallel ZZ' \qquad |43.$$

d) Zufolge einer bekannten Eigenschaft der Kegelschnitttangenten erweisen sich Winkelgegenpunkte als Brennpunkte eines die Dreiecksseiten berührenden Kegelschnitts. Die Fusspunkte $F_1 F_2 F_3\; F_1' F_2' F_3'$ sind dann die Fusspunkte der Lote von den Brennpunkten auf die Kegelschnitttangenten. Daher liegen diese 6 Punkte in einem Kreise,* dessen Radius die grosse Halbaxe a_0 des Kegelschnitts ist. Für diese Halbaxe ergiebt sich sonach:

$$a_0 = \frac{\Delta}{q} \qquad |44.$$

Die andere Halbaxe b_0, welche bekanntlich gleich $\sqrt{l_1 l_1'} = \sqrt{l_2 l_2'} = \sqrt{l_3 l_3'}$, beträgt dagegen:

$$b_0 = \sqrt{QQ'} \qquad |45.$$

Diese Formeln No. 44 u. 45 verstatten dann auch, die Entfernung der Winkelgegenpunkte von einander zu berechnen.

Die im Bisherigen hergeleiteten allgemeinen Sätze seien in den folgenden Paragraphen auf einige der bekannten Spezialfälle angewendet. Dabei ist aber nicht eine möglichst vollständige Darlegung der Eigenschaften dieser vielbehandelten Punkte ins Auge gefasst, vielmehr soll nur gezeigt werden, wie sich einige der bekannten – und auch wohl einige neue — Sätze aus unseren allgemeinen Formeln leicht herleiten lassen.

§ 18. Der Minimumpunkt M.

Die Uebereinstimmung der in Teil 1 angeführten Sätze mit den Entwickelungen des 2. Teiles ist so augenfällig, dass hier längere Ausführungen unnötig sind. So sei nur Folgendes bemerkt:

Da die Coordinaten hier betragen: $\xi = \eta = \zeta = 60^0$, Werte, die stets positiv sind, so liegt Punkt M jederzeit in dem Innenraum des Dreiecks, kann also immer durch Aufsatzdreiecke erzielt werden. Die Basis q ist nicht völlig identisch mit der im 1. Teil benutzten Konstanten k, vielmehr gilt:

$$q = AX \sin\xi = k \sin 60 = \frac{k}{2}\sqrt{3}$$

sodass ist:

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\Delta\sqrt{3}}$$

---

* Dergleichen Kreise hat Schönborn (Progr. Krotoschin 1881) passend: „Sechs-Punkt-Kreise“ genannt. Der Feuerbach'sche Kreis ist ein ausgezeichneter Spezialfall davon.

Für die trimetrischen Coordinaten von M ergiebt No. 11 die Werte: cosec $(\alpha + 60^0)$, cosec $(\beta + 60^0)$, cosec $(\gamma + 60^0)$.* Die in § 14 erwähnten 6 Möglichkeiten schrumpfen hier zu einer einzigen zusammen, sodass die Normalen auf AM, BM, CM stets das wahre gleichseitige Maximaldreieck ergeben. Die Grösse desselben beträgt nach No. 29: $M = \frac{k\,2}{2 \sin 60} = \frac{k^2}{\sqrt{3}}$; für das eingeschriebene gleichseitige Minimaldreieck ergiebt dagegen No. 36 den Wert: $F' = \frac{\Delta^2 \sqrt{3}}{k^2}$, woraus zu erkennen ist, dass dessen Seiten die einfachen Werte $\frac{2\Delta}{k}$ besitzen.

§ 19. Lühmann's Punkt L.

Da derselbe der Winkelgegenpunkt von M ist, besitzt er die gleiche Basis q. Für seine Coordinaten erhält man nach No. 20:

$$\xi = 120^0 - \alpha, \quad \eta = 120^0 - \beta, \quad \zeta = 120^0 - \gamma.$$

Diese Coordinaten sind positiv, solange der grösste Winkel 120° nicht übersteigt. Geschieht dies aber, so würde ξ negativ. Es muss dann zur Einwärtsantragung geschritten werden, wobei nach den § 13 No. 1 und 2 gegebenen Regeln die Dreieckswinkel $\alpha - 120^0$, $60^0 + \beta$, $60^0 + \gamma$ auftreten würden. Setzt man nun die so veränderten Werte in der Formel Nr. 13^b ein, so erhält man genau denselben Wert, als ob man die unveränderten Coordinaten und No. 13 benutzt hätte. Formel No. 13 und die oben angegebenen Coordinatenwerte sind daher stets brauchbar, einerlei ob der grösste Dreieckswinkel 120° überschreite oder nicht.

Für die trimetrischen Coordinaten von L erhält man nach No. 11: $\sin(60^0 + \alpha)$, $\sin(60^0 + \beta)$, $\sin(60^0 + \gamma)$ und für die Entfernung des Punktes L von den Ecken ergiebt No. 22:

$$AL = \frac{abc \sin 60^0}{q\;\;\;\;a} = \frac{abc}{k}\,\frac{1}{a} \qquad \text{u. s. f.}$$

sodass sich die (Hoffm. Zeit. XV, 352 aufgestellte) Proportion ergiebt:

$$AL : BL : CL = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = h_1 : h_2 : h_3$$

wo h_1, h_2, h_3 die 3 Höhen des Dreiecks sind.

Weil endlich die Coordinaten $\xi \eta \zeta$ hier der Bedingung No. 30 genügen, ist das den Linien AL, BL, CL zugehörige Maximaldreieck das „wahre" Maximaldreieck von der Gestalt $120^0 - \alpha$, $120^0 - \beta$, $120^0 - \gamma$.

§ 20. Das Centrum E des eingeschriebenen Kreises.

Dieser Punkt liegt jederzeit innerhalb des Dreiecks, er wird also stets durch Antragung nach aussen erzielt. Seine Coordinaten haben die Werte:

$$\xi = 90^0 - \frac{\alpha}{2}, \quad \eta = 90^0 - \frac{\beta}{2}, \quad \zeta = 90^0 - \frac{\gamma}{2}.$$

Die Punkte X, Y, Z rücken in die Centren E_1, E_2, E_3 der drei angeschriebenen Kreise und für die Grösse q erhält man nach No. 3:

---

* vergl. Hain: Grun. Arch. 59, 416.

$$q = AE_1 \sin\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = AE_1 \cos\frac{\alpha}{2} = s$$

wo s die halbe Seitensumme bedeutet.*

Auch hier genügen die Coordinaten der Bedingung $\xi < \eta < \zeta$, das Dreieck der Centren der 3 angeschriebenen Kreise erweist sich daher als das grösste umgeschriebene Dreieck von der Gestalt $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $90^0 - \frac{\beta}{2}$, $90^0 - \frac{\gamma}{2}$.

Weil aber ferner Punkt E sein eigener Winkelgegenpunkt ist, so ist sein Fusspunktendreieck das kleinste eingeschriebene Dreieck von gleicher Gestalt und zugleich wird erkannt, dass dessen Seiten den Centralen E_1E_2, E_2E_3, E_3E_1 bezüglich parallel sind. Für die Flächen dieser 2 Dreiecke ergeben die Formeln No. 29 und No. 36 die Werte:

$$M = \frac{s^2}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}, \quad F' = \frac{2\Delta^2}{s^2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2\varrho^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Beachtet man hier noch, dass $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{4r}$,** so erhält man einerseits $M = 2rs$, eine Gestalt, die wohl zuerst Crelle: Sammlung mathem. Aufsätze 1821 pag. 171 herleitete, andererseits $F' = \frac{\varrho\Delta}{2r}$, eine von Feuerbach: das geradlinige Dreieck, Nürnberg 1822 abgeleitete Formel. Dass aber für den hier vorliegenden (sowie für den nachher zu erwähnenden) Spezialfall die Formel $\Delta = \sqrt{MF'}$ gültig sei, erwies schon Nagel: Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise, Leipzig 1836 § 117.

Von dem in § 10 eingeführten Centralendreiecke UVW würde leicht noch dies angegeben werden können: a) Da seine Dimensionen halb so gross sind, als die des Dreiecks $E_1E_2E_3$, müssen die Ecken UVW in den Mitten der Linien EE_1, EE_2, EE_3 liegen und b) da Winkel $B\widehat{E_1}C = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, muss der über gleichem Bogen stehende Centriwinkel $B\widehat{U}C = 180^0 - \alpha$ sein, d. h. Punkt U (und ebenso V und W) liegen auf der Peripherie des dem Urdreieck umgeschriebenen Kreises. Es erledigen sich so leicht die Nagel'schen Sätze cf. § 23 ff. Endlich sei noch erwähnt, dass No. 33 für die Entfernungen der Punkte E_1, E_2, E_3 von E die Werte ergiebt: $EE_1 = 4r\sin\frac{\alpha}{2}$ u. s. f. (siehe Swinden-Jakobi Geom. pag 338 No. 831.)

§ 21. **Die Centren der angeschriebenen Kreise** (z. B. Centrum E_1).

Da diese Punkte in den Seitenfeldern liegen, hat die Antragung der Ansatzdreiecke hier einwärts zu geschehen. Die Verbindungslinien AE_1, BE_1, CE_1, bilden aber an der Stelle E_1 die 3 Winkel $90^0 + \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ mit einander, daher lauten die Coordinaten des Punktes E_1

$$\xi = -\left(90^0 + \frac{\alpha}{2}\right), \quad \eta = -\frac{\beta}{2}, \quad \zeta = -\frac{\gamma}{2}.$$

---

* Da man q auch wohl aus No. 12 berechnen könnte, ergiebt sich beiläufig die Transformationsformel:

$$s^2 = bc\cos^2\frac{\alpha}{2} + ca\cos^2\frac{\beta}{2} + ab\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Eine ähnliche Verwendung von No. 13 würde minder einfache Ausdrücke liefern.

** cf. Möllmann: Grun. Arch. 17, 401.

Punkt X fällt alsdann in das Centrum E des eingeschriebenen Kreises, während Punkt Y nach E_3 und Punkt Z nach E_2 rückt. Da nun gilt:

$$q = AX \sin \xi = AE \sin\left(90^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = AE \cos\frac{\alpha}{2} = s - a$$

und analog, so lässt sich in Verbindung mit dem im vorigen § Gefundenen der Satz aussprechen: Die Centren der 4 Berührungskreise haben bezüglich die Basen s, s — a, s — b, s — c.

Weil aber auch E_1 sein eigener Winkelgegenpunkt ist, (vergl. seine Coordinaten und No. 20) so sind die Punkte F_1', F_2', F_3' nichts anderes als die Berührungspunkte des Kreises vom Radius ϱ_1 und No. 35 liefert die bekannte Formel:

$$\Delta = \varrho_1 \, (s - a)$$

Ferner, da $E_2 E_3 \perp AE_1$, $EE_2 \perp BE_1$, $EE_3 \perp CE_1$, so ist $EE_2 E_3$ das dem Dreieck ABC umgeschriebene Maximaldreieck von der Gestalt $-\left(90^0 + \frac{\alpha}{2}\right), -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}$, indessen liegt hier nur ein relatives, kein absolutes, Maximum vor, da die absoluten Werte der Coordinaten die Bedingung No. 30 nicht erfüllen. Für die Fläche dieses Dreiecks ergäbe No. 29:

$$M = \frac{(s-a)^2}{2\cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2}},$$

nun ist aber $\cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{s-a}{4r}$, sodass entsteht $M = 2r\,(s-a)$, in Übereinstimmung mit dem Satze Nagel's a. a. O. § 121 f. Das Dreieck der Berührungspunkte des Kreises ϱ_1 muss, als entsprechendes Minimumdreieck, diesem Dreieck M ähnlich und parallel gelegen sein, und für seine Grösse erhält man aus No. 36 leicht den Wert $\frac{\Delta\varrho_1}{2r}$ cf. Nagel § 123 ff. Aus No. 33 ergeben sich aber für die Entfernungen der übrigen Centren von E_1 die Ausdrücke: $EE_1 = 4r\sin\frac{\alpha}{2}$, $E_2E_1 = 4r\cos\frac{\beta}{2}$, $E_3E_1 = 4r\cos\frac{\gamma}{2}$ vergl. Jakobi-Swinden p. 338 No. 836.

§ 22. Das Centrum U des umgeschriebenen Kreises.

Für ein spitzwinkliges Dreieck lassen die um U herum gelegenen 6 Winkel sofort folgende Coordinatenwerte erkennen:

$$\xi = 180^0 - 2\alpha, \quad \eta = 180^0 - 2\beta, \quad \zeta = 180^0 - 2\gamma.$$

Ist das Dreieck dagegen stumpfwinklig, so würde Coordinate ξ negativ. Es macht sich dann Einwärtsantragung nötig mit den Winkelwerten $2\alpha - 180^0$, 2β, 2γ. Diese Änderung lässt aber auch hier die Basis q ganz unberührt. Dieselbe berechnet sich jederzeit durch:

$$q^2 = \sum bc \sin 2\alpha \sin\alpha = 2\Delta \sum \sin 2\alpha = 8\Delta \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{4\Delta^2}{r^2}$$

sodass ist: $$q = \frac{2\Delta}{r}$$

ein Resultat, das noch rascher aus No. 35 zu erhalten gewesen wäre, wenn man beachtet, dass der dort erwähnte Radius im vorliegenden Falle der des Feuerbach'schen Kreises ist, also $\frac{r}{2}$ beträgt. Weil aber hier bei spitzwinkligen Dreiecken die Bedingung No. 30 erfüllt ist und die Linien AX, BY, CZ durch das Centrum U hindurchgehen, so sind die darauf normal stehenden Linien Tangenten des Kreises U. Es ergiebt sich also der Satz: Das Tangentendreieck ist das grösste Dreieck von der Gestalt $180^0 - 2\alpha$, $180^0 - 2\beta$, $180^0 - 2\gamma$, das einem spitzwinkligen Dreieck ABC umbeschrieben werden kann. Seine Grösse beträgt nach No. 29: $M = \frac{4\Delta^2}{2r^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma}$

oder in bekannterer Fassung: $M = r^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\gamma$.

Für das eingeschriebene Minimaldreieck von der gleichen Gestalt, das nichts anderes ist als das Höhenfusspunktendreieck, erhält man dagegen:

$$F' = 2\frac{\Delta^2 r^2}{4\Delta^2} \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma = 2\Delta \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

in Übereinstimmung mit den Werten Feuerbach's a. a. O. pag. 17.

Anmerkung. Leicht ist zu ersehen, dass „jeder“ Punkt der Peripherie des umgeschriebenen Kreises die Coordinaten besitzt: $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Während daher die Coordinaten ξ, η, ζ im allgemeinen einen Punkt eindeutig bestimmen, geht für die speziellen Werte: $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ diese Eindeutigkeit verloren. Der Grund für diese sonderbare Erscheinung liegt darin, dass für jene Werte die Punkte X, Y, Z bezüglich in die Ecken A, B, C des Dreiecks zu liegen kommen, sodass die Linien AX, BY, CZ aufhören, bestimmte Richtungen anzugeben.

§ 23. Der Höhenpunkt H.

Da hier gilt: $\xi = \gamma_1 + \beta_2 = 90^0 - \beta + 90^0 - \gamma = \alpha$ und analog, so lauten die Coordinaten: $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$.

Dieselben sind jederzeit positiv. Punkt H liegt daher stets im Innenraum. Weil aber hier die Ansatzdreiecke dem Urdreiecke „kongruent“ sind, besitzen sie auch einen gleich grossen umgeschriebenen Kreis. Es ergiebt sich daher unmittelbar der Carnot'sche Satz:* Schlägt man um die 3 Dreiecksseiten mit dem Radius des umgeschriebenen Kreises 3 Kreise, so schneiden sich dieselben im Höhenpunkte. — Weiter lässt ein Vergleich der Coordinaten von H und von U nach No. 20 erkennen, dass diese Punkte ein Winkelgegenpunktpaar darstellen. H hat daher auch dieselbe Basis wie U nämlich:

$$q = \frac{2\Delta}{r}$$

ein Wert, der übrigens aus den Formeln No 12 auch direkt hergeleitet werden könnte. Benutzt man die ausführliche Form No. 21^b, so erzielt man für das Punktpaar H und U folgende Gleichung:

$$AU \sin 2\alpha + BU \sin 2\beta + CU \sin 2\gamma = AH \sin\alpha + BH \sin\beta + CH \sin\gamma.$$

Das umgeschriebene Dreieck mit den Winkeln $\alpha\beta\gamma$ ist hier nur ein relatives Maximaldreieck, da der Bedingung $\xi < \eta \lesseqgtr \zeta$ nicht entsprochen wird. Sein Flächeninhalt beträgt aber:

$$M = \frac{4\Delta^2}{2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = 4\Delta$$

in Übereinstimmung mit einem bekannten elementaren Satze. Ebensowenig ist das entsprechende eingeschriebene Dreieck, das Fusspunktendreieck von U, ein absolutes Minimum; für seine Grösse ergiebt aber No. 36: $F' = \frac{\Delta}{4}$, ein ebenfalls bekanntes Ergebnis. Vergl. auch die Sätze Jakobi-Swinden pag. 240 No. 554—556 und No. 560.

* Carnot: Geom. de posit. Paris 1803 pag. 164.

§ 24. Die beiden Segmentärpunkte* des Dreiecks.

a) Für den ersten Segmentärpunkt S_1 sind folgende Teilwinkel einander gleich:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1, \quad (= \vartheta)$$

daraus ergiebt sich, dass ist:

$$B\widehat{S_1}C = 180^0 - \beta, \quad C\widehat{S_1}A = 180^0 - \gamma, \quad A\widehat{S_1}B = 180^0 - \alpha$$

d. h. die um Punkt S_1 herumliegenden 6 Winkel haben bezüglich die Werte:

$$\xi_1 = \beta, \quad \eta_1 = \gamma, \quad \zeta_1 = \alpha.$$

Analog ist für den zweiten Punkt S_2:

$$\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2,$$

woraus in gleicher Weise herzuleiten ist:

$$\xi_2 = \gamma, \quad \eta_2 = \alpha, \quad \zeta_2 = \beta.$$

Aus diesen Coordinatenwerten ist zu ersehen, dass die Segmentärpunkte durch Aufsatzdreiecke zu erhalten sind, welche bezüglich die Winkel α, β, γ besitzen. Setzt man an jeder Ecke den je rechts folgenden Dreieckswinkel an, so erhält man den einen, setzt man den je links folgenden Winkel an, so erhält man den anderen Segmentärpunkt. — Diese in der Ausführung sehr einfache Konstruktion,** möchte vor den anderwärts gegebenen*** vielleicht einige Vorzüge besitzen.

b) Durch diese Konstruktion tritt die enge Beziehung zwischen den Segmentärpunkten und dem Höhenpunkte deutlich hervor.

Lässt man verschiedene Verteilung der Coordinatenwerte zu, so existieren im Ganzen 6 Punkte, welche die Coordinaten $\alpha \beta \gamma$ besitzen. Die Punkte H, S_1 und S_2 repräsentieren aus dem im § 14 gegebenen Schema die Fälle No. 1, 4 und 5. Was die übrigen drei Punkte betrifft, so sind leicht zwei geometrische Örter anzugeben, auf denen dieselben liegen müssen. Z. B. Punkt 2, dessen Coordinaten $\xi = \alpha$, $\eta = \gamma$, $\zeta = \beta$ sind, liegt 1) auf der Linie AX. Diese Linie ist aber hier Diagonale eines Parallelogrammes ABXC, also hat AX die Richtung der Schwerenlinie t_1 des Dreiecks; ferner aber 2) ist Winkel $B\widehat{O}C = \beta + \gamma$. Da nun beim Höhenpunkt der gleiche Winkel $B\widehat{H}C$

* Der Name „Segmentärpunkte" wird nach den zahlreichen Aufgaben, welche die neuesten Bände der Hoffm. Zeit. darüber gebracht haben, wohl als eingebürgert gelten können. Derselbe stammt von Brocard. (cf. Hoffm. Zeit. 11, 274). Dabei darf aber nicht vergessen werden, dass die Fundamente dieser Untersuchungen weit älter sind. Brocard weist an der genannten Stelle ohne nähere Angabe auf Clarke hin. Den einen Segmentärpunkt, die schönen symmetrischen Bedingungen für den Teilwinkel ϑ, wie: $\operatorname{cotang} \vartheta = \Sigma \operatorname{cotang} \alpha$, oder $\operatorname{cosec}^2 \vartheta = \Sigma \operatorname{cosec}^2 \alpha$, oder $\operatorname{cotang} \vartheta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$, sowie eine ganze Reihe interessanter Sätze über diesen Punkt fand aber Crelle auf. Crelle räumt diesen Sätzen, an denen er offenbar selbst grosse Freude hatte, in seinem schönen Schriftchen: über einige Eigenschaften des ebenen gradlinigen Dreiecks .... Berlin 1816, die erste Stelle ein. Dagegen war es Crelle nicht gelungen, eine einfache Konstruktion für diesen Punkt aufzufinden. Dieselbe gab aber bald darauf Jakobi in der mehrfach citierten Schrift: de triangulor. rectil. § 20. Es ist dies dieselbe Konstruktion mit Hülfe gewisser einseitig berührender Kreise, die neuerdings Brocard und Capelle wieder aufstellten. (Hoffm. Zeit. 12, 108.) Weitere Untersuchungen Jakobi's über diesen Punkt und deren Kreise siehe in den §§ 50—72, vgl. auch Jakobi's Anhänge zur Geometrie Swindens pag. 239 No. 545—553 und pag. 339 No. 848—850. Sodann benutzt diese Punkte die Abhandlung H. Hoffmann's: In ein gegebenes Dreieck ein ähnliches einzuzeichnen .... Grun. Arch. 9, 280 ff. Endlich aber sind die 3 kleinen Abhandlungen: Wiegand: ein mathematisches Thema aus der Schule; G. Emsmann: über einen merkw. Punkt im Dreieck; Hellwig: Die durchgeschriebenen Kreise und die Kreisternionspunkte im Dreieck, (unter dem Titel: mathematische Studien für die Zwecke der Schule Heft 1—3 in Halle 1854—55 erschienen) lediglich den Segmentärpunkten gewidmet.

** beachte dabei noch, dass z. B. für S_1 ist: $BX_1 \parallel AC$ u. s. f.

*** cf. Jakobi a. a. O. § 20; Stoll: Hoffm. Zeit. 12, 108.

denselben Wert besitzt, so liegt Punkt O auf dem durch BC und H bestimmten Kreise. Einige Sätze über diese 3 Punkte* hat Böklen (Hoffm. Zeit. 15, 39 f.) aufgestellt Dass aber diese 3 Punkte mindere Bedeutung haben, als die Punkte S_1, S_2 und H geht schon daraus hervor, dass ihre Entstehungsweise eine unsymmetrische ist, da ja für sie an einer Ecke der gleiche, an den beiden anderen aber vertauschte Ansatzwinkel angebracht werden müssen. Nur der 6. Fall, mit den Coordinaten: $\xi = \gamma$, $\eta = \beta$, $\zeta = \alpha$, ist um deswillen auszuzeichnen, weil er der Bedingung $\xi < \eta < \zeta$ genügt. Auf seinen Transversaien stehen also die Seiten des grössten Dreiecks von der Gestalt $\alpha\beta\gamma$ senkrecht, das dem gegebenen Dreieck umgeschrieben werden kann. Da sich nun seine Basis q berechnet durch: $q = BY \sin\eta = BY \sin\beta$ und BY hier, weil ABCY ein Parallelogramm ist, die doppelte Länge der Schwerenlinie t_2 besitzt, so gilt: $q = 2t_2 \sin\beta$. Die Maximalfläche selbst erhält daher den Wert:

$$M = \frac{4t_2^2 \sin^2\beta}{2\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = \frac{t_2^2\, b^2}{\Delta}\;{}^{**}$$

Für das eingeschriebene Minimaldreieck von der Gestalt $\alpha\beta\gamma$ erhielte man dagegen:

$$F' = \frac{2\Delta^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{4t_2^2 \sin^2\beta} = \frac{\Delta^3}{t_2^2\, b^2}$$

Es ist dies das Fusspunktendreieck des Winkelgegenpunktes von Punkt γ, β, α, also eines Punktes dessen Coordinaten sind: $\xi = \beta$, $\eta = 180^0 - 2\beta$, $\zeta = \beta$.

c) Durch die oben angegebene Konstruktion wird der Nachweis leicht, dass die Segmentärpunkte jederzeit in das Dreieck hineinfallen. Denn da hier die Winkelsummen $\alpha + \xi$, $\beta + \eta$, $\gamma + \zeta$ stets unter 180^0 betragen müssen, so liegen die Hülfspunkte X, Y, Z immer in den Seitenfeldern und daher die Punkte S_1 und S_2 jederzeit in dem völlig umschlossenen Gebiete ABC.***

d) Da die Coordinaten des zweiten Segmentärpunktes verglichen mit denen des ersten die Bedingung No. 20 erfüllen, so werden diese Punkte als Winkelgegenpunkte charakterisiert. Beide Fälle erzeugen daher einen und denselben Teilwinkel ϑ.

e) Für die Basis q beider Punkte ergiebt sich der Wert:

$$q^2 = \sum bc \sin\beta \sin\gamma = 4r^2 \sum \sin^2\beta \sin^2\gamma$$

sodass ist

$$q = 2r \sqrt{\sin^2\beta \sin^2\gamma + \sin^2\gamma \sin^2\alpha + \sin^2\alpha \sin^2\beta}$$

oder durch die Seiten dargestellt:

$$q = \frac{1}{2r} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

f) Hiernach erhält man für den Teilwinkel ϑ laut No. 5 die Formel:

$$\sin\vartheta = \frac{a \cdot \sin(\gamma + \alpha) \sin\gamma}{q} = \frac{2r}{q} \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{2\Delta}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}$$

ein Ausdruck, den bereits Emsmann a. a. O. pag 15 angab. Hierdurch bekommt man aber für die Basis die geschicktere Gestalt:

$$q = \frac{\Delta}{r \sin\vartheta}$$

aus der auf Grund der Relation No. 35 ersehen wird, dass der Radius des den beiden Segmentärpunkten zugehörigen Sechspunktkreises beträgt: $R = r \sin\vartheta$.

* Dort mit A''', B''', C''' bezeichnet.

** Würde man die entsprechenden umgeschriebenen Dreiecke für die beiden anderen unsymmetrischen Fälle berechnen, so erhielte man ganz analoge Formeln, aus denen man beiläufig das Ergebnis entnehmen kann, dass unter den 3 Produkten $t_1 a$, $t_2 b$, $t_3 c$ das mittlere stets das grösste ist.

*** Wesentlich anders führte denselben Nachweis Emsmann a. a. O. § 12.

Noch könnte aus der ausführlichen Formel No. 21[b] folgende Beziehung zwischen den beiden Segmentärpunkten entnommen werden:

$$AS_1 \sin\beta + BS_1 \sin\gamma + CS_1 \sin\alpha = AS_2 \sin\gamma + BS_2 \sin\alpha + CS_2 \sin\beta.$$

g) Errichtet man auf den Transversalen AS_1, BS_1, CS_1 in den Eckpunkten A, B, C die Normalen, so erhält man zwar kein absolutes, wohl aber ein bedingtes Maximaldreieck von der Gestalt $\alpha\,\beta\,\gamma$. Ein Gleiches gilt von dem analog gebildeten Dreiecke zu Punkt S_2. Weil aber die Segmentärpunkte nicht blos gleiche Basis, sondern auch gleiche — nur vertauschte — Coordinatenwerte besitzen, so ergiebt die Formel No. 29 in beiden Fällen genau Gleiches. Es entsteht daher der Satz: Errichtet man in den Ecken des Dreiecks einerseits auf den Transversalen AS_1, BS_1, CS_1, andererseits auf AS_2, BS_2, CS_2 Lote, so erhält man zwei Dreiecke, die dem Urdreieck ähnlich, unter einander aber kongruent sind. Ihre Grösse beträgt:

$$M_1 = M_2 = \frac{\Delta}{\sin^2\vartheta}$$

Die Seiten dieser Dreiecke besitzen daher bezüglich die Längen $\frac{a}{\sin\vartheta}$, $\frac{b}{\sin\vartheta}$, $\frac{c}{\sin\vartheta}$. Verbindet man die Ecken eines dieser Dreiecke mit seinem Segmentärpunkte, so erhält man, wie aus den entstehenden Kreisvierecken sofort zu ersehen ist, abermals 3 gleiche Teilwinkel ϑ. Es stellt daher S_1 für das eine und S_2 für das andere umgeschriebene Dreieck den einen Segmentärpunkt dar. Dieselbe Eigenschaft kommt übrigens, wie ebenso leicht zu erkennen ist, dem betreffenden Segmentärpunkt mit Bezug auf die ganze Schar von umgeschriebenen ähnlichen Dreiecken der Art $N_1 N_2 N_3$ zu. Auf diese Schar wurde bereits Crelle aufmerksam cf. pag. 52 ff. Einige weitere dort gegebene Sätze, über die auch Jakobi-Swinden pag. 240 No. 551—53 verglichen werden kann, erledigen sich durch Formel No. 31 und obige Werte für M_1 und M_2 sehr leicht.

h) Da auch No. 36 für beide Segmentärpunkte denselben Wert besitzt, ist weiter zu sagen: Die Fusspunktendreiecke der beiden Segmentärpunkte sind dem Urdreiecke ähnlich unter einander aber kongruent. Ihre Grösse beträgt: $F_1' = F_2' = \Delta \sin^2\vartheta$.

Die Seiten dieser Dreiecke haben daher bezüglich die Längen $a\sin\vartheta$, $b\sin\vartheta$, $c\sin\vartheta$. Auch hier ist der betreffende Punkt zugleich Segmentärpunkt für das Fusspunktdreieck selbst, sowie für die ganze Schar von eingeschriebenen Dreiecken von der Gestalt $\alpha\,\beta\,\gamma$, die man unter Antragung gleicher Winkel φ' erzielen kann. Den vorher erwähnten Crelle'schen Spezialsätzen würden hier leicht Analoga zur Seite gestellt werden können.

i) Über die Centralendreiecke $U_1 V_1 W_1$ und $U_2 V_2 W_2$, die jederzeit halbe Dimensionen gegen die bezüglichen umgeschriebenen Dreiecke besitzen, ergiebt sich nunmehr: Die Centralendreiecke der durchgeschriebenen Kreise für beide Segmentärpunkte bilden zwei dem Urdreiecke ähnliche, unter einander aber kongruente, Dreiecke. Die Entfernungen der Centren von einander betragen bebezüglich $\frac{a}{2\sin\vartheta}$, $\frac{b}{2\sin\vartheta}$, $\frac{c}{2\sin\vartheta}$, die Flächen also: $U_1 V_1 W_1 = U_2 V_2 W_2 = \frac{\Delta}{4\sin^2\vartheta}$.

Jeder Segmentärpunkt spielt dieselbe Rolle für das zugehörige Centralendreieck. Diese und einige weitere Sätze über diese Dreiecke fand bereits Hellwig auf, vergl. damit Hoffm. Zeit. 15, 33; 15, 287.

k) Noch sind die Segmentärpunkte dadurch ausgezeichnet, dass für sie auch die Grössen Q und Q' einerlei Wert besitzen und zwar ist:

$$Q = Q' = \frac{abc \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{q^2} = 2r\sin^2\vartheta$$

es ist daher $\sqrt{QQ'} = 2r\sin^2\vartheta$, sodass sich für die Halbaxen der dem Dreieck eingeschriebenen Ellipse, deren Brennpunkte S_1 und S_2 sind, sogleich die Werte ergeben:

$$a_0 = r\sin\vartheta, \quad b_0 = 2r\sin^2\vartheta,$$

die Brocard und Neuberg Hoffm. Zeit. 13, 206 (vergl. 14, 96) aufstellten. Weil aber jederzeit $a_0 \geqq b_0$ ist, so würde aus diesen Werten zu entnehmen sein, dass stets $\sin\vartheta \leqq \frac{1}{2}$ d. h. dass der Teilwinkel ϑ bei keinem Dreieck 30° übersteigen kann.*

l) Das Fundament der zahlreichen Untersuchungen, die über Segmentärpunkte und den Brocard'schen Kreis in den neuesten Bänden der Hoffm. Zeit. angestellt wurden, bildet der folgende von Brocard (11, 274 No. 120) aufgestellte Satz: „Die Linien, welche von den Ecken eines Dreiecks ausgehen und sich in Segmentärpunkten O und O'** schneiden, treffen sich noch in 3 anderen Punkten (BO und CO' in A', CO und AO' in B', AO und BO' in C'), welche auf einem Kreise liegen, der durch die Segmentärpunkte geht. Auch ist Dreieck A'B'C' $\sim$ ABC."

Dieser Satz lässt sich verallgemeinern.

Die 6 Punkte, die man durch dieselben Ansatzwinkel $\xi\eta\zeta$ erzielen kann, lassen sich auf 15 verschiedene Weisen zu Paaren zusammenstellen. Der grösste Teil derselben würde aber eine Unsymmetrie aufweisen, indem z. B. das Punktpaar $\xi\eta\zeta$ und $\xi\zeta\eta$ gleiches ξ aber veränderte 2. und 3. Coordinaten besitzt. Scheidet man diese unsymmetrischen Fälle aus, so bleiben noch folgende 6 Paare übrig:

$$\left\{\begin{matrix}\xi\eta\zeta\\ \eta\zeta\xi\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}\eta\zeta\xi\\ \zeta\xi\eta\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}\zeta\xi\eta\\ \xi\eta\zeta\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}\xi\zeta\eta\\ \zeta\eta\xi\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}\zeta\eta\xi\\ \eta\xi\zeta\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}\eta\xi\zeta\\ \xi\zeta\eta\end{matrix}\right.$$

Für jedes dieser Punktpaare existiert aber ein ganz in der Art von Brocard definierter Fünfpunktkreis und das entsprechende Schnittpunktendreieck A'B'C' ist jederzeit den benutzten Ansatzdreiecken $\xi\eta\zeta$ ähnlich, denn: Betrachten wir z. B. das erste Punktenpaar $\xi\eta\zeta$ und $\eta\zeta\xi$. Der erstere Punkt sei mit O', der andere mit O bezeichnet. Die Winkel $\xi\eta\zeta$ liegen um diese Punkte verteilt nach Art der Fig. 5.*** Dann aber erweist sich O'C'OB' um deswillen als ein Kreisviereck, weil die Winkel bei O' und bei O supplementär sind. Ferner aber ist $B'\widehat{O'}A' = A'\widehat{O}B' = \eta$ d. h. auch der Punkt A' liegt auf demselben Kreise. Es liegen also die 5 Punkte O, O', A', B', C' auf einem Kreise. — Weil aber $C'\widehat{O'}B' = \zeta$, d. h. über der Sehne C'B' der Winkel ζ ausgespannt ist, so muss auch $C'\widehat{A'}B' = \zeta$ sein. Analoges erweist sich von den übrigen Winkeln des Dreiecks A'B'C' d. h. das Dreieck enthält die Winkel $\xi\eta\zeta$, ist also den Ansatzdreiecken ähnlich. — Da in obigen 6 Paaren jeder Punkt zweimal vorkommt, existieren für jeden Dreieckspunkt „zwei" derartige Fünfpunktkreise. —

Ich unterlasse es, nach weiteren derartigen Verallgemeinerungen zu suchen.

§ 25. Jeder im umschlossenen Gebiet gelegene Punkt O ein Minimumpunkt.

Wie die Aufsetzung von gleichseitigen Dreiecken die einfachste Konstruktion für die Auf-

* vergl. Hoffmann Grun. Arch. 9, 292.

** Zur Erleichterung der Übersicht sei hier die Brocard'sche Bezeichnung beibehalten.

*** In der Fig. 5 ist der rechts oben gelegene Punkt mit O' — statt O — zu bezeichnen.

gabe ist, den Punkt M zu suchen, für welchen AM + BM + CM zu einem Minimum werde, so erledigt die Antragung von ähnlichen Dreiecken mit den Winkeln $\xi \eta \zeta$ am besten die allgemeinere Aufgabe: Denjenigen Punkt O zu finden, für den:

$$\sin \xi . AO + \sin \eta . BO + \sin \zeta . CO$$

zu einem Minimum werde. — Gewöhnlich denkt man in dieser Funktion alle Glieder mit einem konstanten Faktor, etwa mit 2λ, multipliziert und $2\lambda \sin \xi = x$, $2\lambda \sin \eta = y$, $2\lambda \sin \zeta = z$ gesetzt. Es bedeuten dann $x y z$ die Seiten eines Dreiecks mit den Winkeln $\xi \eta \zeta$.

Diese allgemeinere Minimumaufgabe behandelte wohl zuerst Fuss: Nova Acta Petrop. XI, 220—245, indem er das statische Prinzip aufstellte: Beliebig viele Kräfte x, y, z ... die an einem Punkte O angreifen und in den Richtungen AO, BO, CO ..... wirken, werden dann im Gleichgewicht sein, wenn der Ausdruck $xAO + yBO + zCO + \ldots$ ein Minimum ist.* — In der That führt die analytische Verfolgung dieser Minimumaufgabe zu denselben Bedingungsgleichungen, die in der Mechanik für das Gleichgewicht von n an einem Punkte angreifenden Kräften aufgestellt werden.** — Eine rein analytische Lösung dieses Problems gab Grüson Abh. d. Berl. Akad. 1816—17, auch findet sich eine solche in Schlömilch's Übungsbuch der höh. Analysis 2. Aufl. pag. 199. Eine synthetische Behandlung giebt Kunze Geometrie pag. 211. Der dort aufgestellte Beweis ist leicht als eine Erweiterung der oben (I, 3^b) erwähnten Steiner'schen Begründung zu erkennen. Zugleich siehe bei Kunze den Nachweis dafür, dass ein solcher Minimumpunkt nicht über die Dreiecksfläche hinausrücken kann. —

Von Fuss und allen Späteren wird nun zur Ermittelung von Punkt O folgende Konstruktion anempfohlen. Man konstruiere aus den Grössen $x y z$ ein Hülfsdreieck und spanne dann dessen Aussenwinkel als Peripheriewinkel über die 3 Seiten des gegebenen Dreiecks aus.

Offenbar wird das gleiche durch Benutzung der 3 Aufsatzdreiecke mit den Winkeln $\xi \eta \zeta$ erreicht.

Weil aber der Ausdruck $\sin \xi . AO + \sin \eta . BO + \sin \zeta . CO$ durch den Punkt $\xi \eta \zeta$ zu einem Minimum wird, so ist es leicht, aus den bekannten Coordinaten $\xi \eta \zeta$ eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punktes die Funktion anzugeben, die in ihm ihr Minimum findet. Für die in den §§ 18—24 behandelten Punkte ergeben sich folgende Sätze:

a) Der Lühmann'sche Punkt erfüllt, solange er im Dreieck liegt, die Bedingung:
$$\sin(120^\circ - \alpha) . AO + \sin(120^\circ - \beta) . BO + \sin(120^\circ - \gamma) . CO = \text{Min.}$$

b) Das Centrum E genügt der Anforderung:
$$\cos \frac{\alpha}{2} . AO + \cos \frac{\beta}{2} . BO + \cos \frac{\gamma}{2} . CO = \text{Min.}$$

c) Das Centrum U dagegen:
$$\sin 2\alpha . AO + \sin 2\beta . BO + \sin 2\gamma . CO = \text{Min.}$$

d) Der Höhenpunkt H:
$$\sin \alpha . AO + \sin \beta . BO + \sin \gamma . CO = \text{Min.}$$

---

* Zur Erledigung des allgemeinen Problems: den Punkt im Innern eines beliebigen nseitigen Polygons ABC .... zu finden, für welchen $x . AO + y . BO + \ldots$ ein Minimum werde, giebt daher Fuss folgendes mechanisches Verfahren an: Es mögen n Fäden mit ihrem einen Ende zusammengeknüpft, an den anderen Enden aber bezüglich mit den Gewichten x, y, z .... belastet werden. Hierauf lasse man die einzelnen Fäden — durch Stifte am Abgleiten gehindert — über die Ecken des vertikal gestellten Polygons herabhängen. Nachdem Gleichgewicht eingetreten ist wird der Knotenpunkt die Stelle des Minimumpunktes O angeben.

** Vergl. auch die Aufgaben Lühmann's Hoffm. Zeit. 16, 498 ff.

e) Die beiden Segmentärpunkte endlich:

1) $\sin\beta \,.\, AO + \sin\gamma \,.\, BO + \sin\alpha \,.\, CO = \mathrm{Min.}$

2) $\sin\gamma \,.\, AO + \sin\alpha \,.\, BO + \sin\beta \,.\, CO = \mathrm{Min.}$

In jedem Falle ist der Wert des Minimums gleich der, oben „Basis" genannten, Grösse q. Der in § 12 aufgestellte Satz kann daher auch in die Fassung gekleidet werden: Winkelgegenpunkte besitzen gleiche Minimalwerte. —

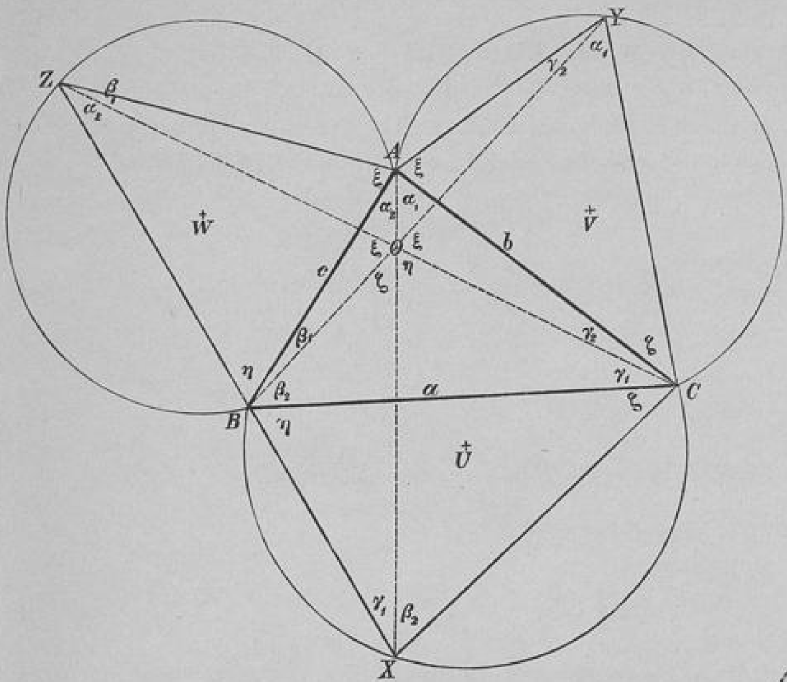

Fig. I.

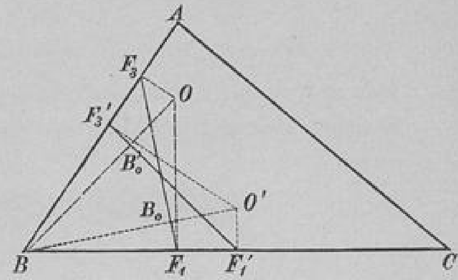

Fig. IV.

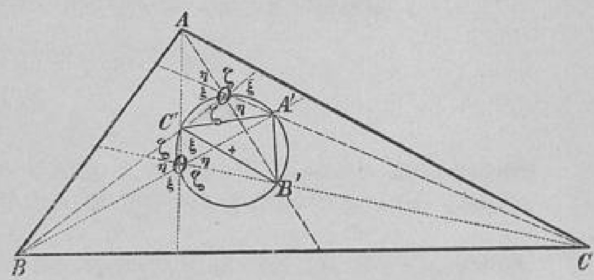

Fig. V.

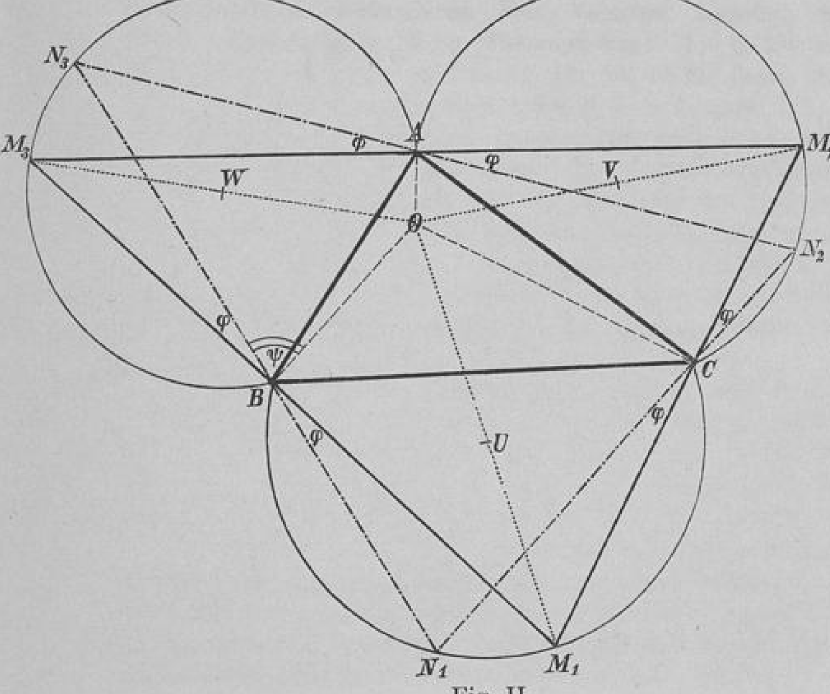

Fig. II.

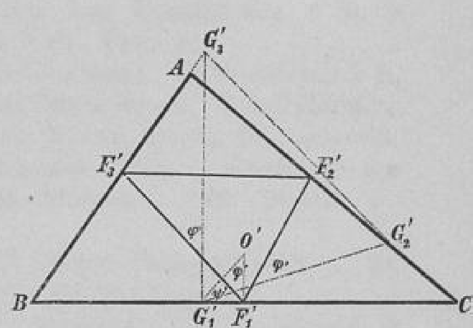

Fig. III.