Geometrische Eigenschaften des Bildes unter Wasser gelegener Curven.

Es sei A ein Punkt unter Wasser; die von ihm ausgehenden geradlinigen Lichtstrahlen bilden ein Raumbüschel, von dessen Strahlen nur ein kleiner Theil nach der an dem Wasserniveau erfolgten Brechung in die Luft gelangt. Wie bekannt, hüllen die gebrochenen Strahlen, rückwärts in's Wasser verlängert, eine Brennfläche ein, die aus einer Ratationsfläche und der Senkrechten besteht, welche man von dem betreffenden Punkte auf's Wasserniveau herablässt. Die Ratationsfläche wird durch Drehung der Evolute einer Ellipse, deren eine Brennpunkt der Punkt A selber ist, um die von A auf's Wasserniveau herabgelassene Senkrechte erzeugt. Jeder gebrochene Lichtstrahl nun berührt die Brennfläche in zwei Punkten, nehmlich die genannte Ratationsfläche in einem Punkte, den zweiten Berührungspunkt bildet der Durchschnitspunkt dieses Strahles mit der Senkrechten AK. Ueber den Ort nun, wo ein in der Richtung dieses gebrochenen Strahles oberhalb des Wasserniveaus befindliches Auge das Bild des Punktes A versetzt, sind die Ansichten getheilt; soviel steht aber fest, dass das Bild jedenfalls zwischen den beiden Berührungspunkten liegen muss: Die Ansicht, welche wir hier zur Grundlage unser Untersuchung wählen: dass das Bild in den Durchschnitt des gebrochenen Strahles mit der vom Punkte A auf's Wasserniveau gefällten Senkrechten zu versetzen sei, hat der anderen extremen Ansicht gegenüber, dass es auf der erwähnten Ratationsfläche liege, die Thatsache für sich, dass im letzten Punkte sich nur zwei unendlich benachbarte Lichtstrahlen schneiden, während sich im andern unendlich viele konzentriren und die Intensität des gleichsam von ihm ausgehenden Lichtes dadurch verstärken.

I.

Da jeder Punkt im Wasser sein entsprechendes ihm zukommendes Bild hat, so muss einem Continuum von unter Wasser befindlichen Punkten ein Continuum als Bild entsprechen; alsdann liegt die Frage nahe: welches sind die geometrischen Eigenschaften, durch die sich das Bildcontinuum auszeichnet? Wir stellen uns das Aufsuchen derselben als Aufgabe und beginnen zunächst mit einem einzelnen Punkte:

Es sei A ein Punkt unter Wasser, ein von ihm ausgehender Lichtstrahl werde nach der Richtung PN gebrochen; ist α der Einfallswinkel und α' der Brechungswinkel, so ist:

$$\frac{PK}{AK}=\operatorname{tg}\alpha;\quad \frac{PK}{KN}=\operatorname{tg}\alpha';\quad \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}=\mu.$$

$$\operatorname{tg}\alpha'=\frac{PK}{KN}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\mu^2-\sin\alpha^2}};\ \text{und}$$

$$KN=\frac{AK.\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

Daher gilt Folgendes:

„Sämmtliche Lichtstrahlen eines unter Wasser sich befindenden Punktes A, die mit „der von ihm auf's Wasserniveau gefällten Senkrechten einen Winkel α bilden, der klei„ner ist als der Winkel, dessen $\sin = \mu$ ist, bilden nach erfolgter Brechung einen geraden „Kegel, dessen Spitze in der Senkrechten liegt und vom Wasserniveau um $\frac{AK\sqrt{\mu^2 - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$ „entfernt ist, wenn AK die Entfernung des Punktes A bedeutet.

2) Es möge sich nun das Auge in der Richtung irgend eines der gebrochenen Strahlen oberhalb des Wasserniveau's im Punkte O befinden, dann ist für die Entfernung AK eines Punktes vom Wasserniveau die Strecke $\frac{AK\sqrt{\mu^2 - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$ die Entfernung seines Bildes vom Wasserniveau, und folglich:

$$AK\left(1 - \frac{\sqrt{\mu^2 - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\right)$$

diejenige Strecke, um welche einem Auge der in der senkrechten Tiefe AK im Wasser bafindliche Punkt A in die Höhe gehoben scheint, wenn dies sich in der Richtung desjenigen gebrochenen Strahles befindet, dessen zugehöriger ungebrochener Strahl mit dem Wasserniveau einen Winkel von $(90 - \alpha)^0$ bildet.

3) Man setze $AK = \zeta$ und $NK = z$; so ist:

$$z = \zeta\sqrt{\frac{\mu^2}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha}$$

$$z = \zeta\sqrt{\mu^2 - (\mu^2 - 1)\frac{PK^2}{\zeta^2}}$$

Es ist Dreieck $PNK \sim PFO$, daher:

$$\frac{FP + PK}{PK} = \frac{OF + NK}{NK}$$

Nennt man nun die Entfernung des Auges vom Wasserniveau a und die Entfernung der Fusspunkte der beiden Lothe, welche man vom Auge und von dem Punkte A auf's Wasserniveau fällt p, setzt für NK den gefundenen Ausdruck hinein, so erhällt man:

$$\frac{p}{PK} = \frac{a + \zeta\sqrt{\mu^2 + (\mu^2 - 1)\frac{PK^2}{\zeta^2}}}{\zeta\cdot\sqrt{\mu^2 + (\mu^2 - 1)\frac{PK^2}{\zeta^2}}}$$

$$PK^4 - 2pPK^3 + \frac{\mu^2.\zeta^2 + (\mu^2 - 1)p^2 - a^2}{\mu^2 - 1}PK^2 - \frac{2\mu^2 p\zeta^2}{\mu^2 - 1} - \frac{(\mu p\zeta)^2}{\mu^2 - 1} = o$$

Weil $\mu^2 < 1$ ist, also das von PK freie Glied dieser Gleichung negativ ist, und weil dieselbe nur eine Zeichenfolge enthält, so hat sie stets und nur eine positive Wurzel; daher gilt:

„Ist die senkrechte Tiefe eines Punktes A im Wasser gleich ζ gegeben, ferner die „senkrechte Entfernung a des Auges vom Wasserniveau und der normale Abstand der von „beiden Punkten auf's Wasserniveau gefällten Lothe gleich p, so ist die senkrechte Ent„fernung z des Bildes vom Wasserniveau:

$$z = \zeta\sqrt{\mu^2 + (\mu^2 - 1)\frac{PK^2}{\zeta^2}}$$

wo PK die einzige positive Wurzel vorstehender biquadratischer Gleichung ist; und:

$$AN = \zeta\left(1 - \sqrt{\mu^2 + (\mu^2 - 1)\frac{PK^2}{\zeta^2}}\right)$$

Betrachtet man nun AN, oder die Strecke, um welche der Punkt A im Wasser in die Höhe gehoben scheint, als Funktion von ζ und PK, so gilt Folgendes:

Wird indem der Punkt A seine Lage ungeändert beibehält PK kleiner, das heisst rückt das Auge näher dem von A auf's Wasserniveau gefällten Lothe zu, so wird weil $(\mu^2-1)\frac{PK^2}{\zeta^2}$ negativ ist, der Ausdruck $\sqrt{\mu^2+(\mu^2-1)\frac{PK^2}{\zeta^2}}$ grösser, das heisst AN wird kleiner und erreicht für $PK=o$ den kleinsten Werth, nämlich $AN=\zeta\ (1-\mu)$; wird ζ grösser, das heisst rückt der Punkt auf der Senkrechten AK herunter, so wird bei konstantem PK für ein Auge, das sich in der Richtung desjenigen gebrochenen Strahles befindet, dessen zugehöriger ungebrochener den Endpunkt P von PK trifft, die Strecke AN grösser und würde für $\zeta=\infty$ selbst unendlich werden; daher:

„Die Hinaufschiebung eines Punktes A im Wasser wächst mit der Tiefe dieses Punk-„tes unter dem Wasserniveau und der Grösse des Winkels, den der gebrochene Strahl „mit dem Einfallslothe bildet. Ist dieser Winkel gleich Null, oder sieht das Auge auf „den Gegenstand senkrecht herab, so ist die Hinaufschiebung proportional der Tiefe, nämlich „$AN=\zeta\ (1-\mu)$, und zwar ist in diesem Fall die scheinbare Tiefe μmal der wahren Tiefe:

$$z=\mu\zeta.$$

Bewegt sich das Auge dem Wasserniveau zu, so wird AN immer grösser und erreicht für die Lage des Auges im Wasserniveau seinen grössten Werth, nämlich

$$AN=\zeta.$$

Wird der Strecke PK eine bestimmte Länge beigelegt, dann muss, damit der vom Punkte A kommende und den Endpunkt P treffende Strahl parallel mit der Wasseroberfläche gebrochen werde, $\zeta=\frac{\sqrt{1-\mu^2}.PK}{\mu}$ angenommen, oder der Punkt A in diese Tiefe versetzt werden; dann ist $AN=\zeta$, oder die Hinaufschiebung gleich der Tiefe. Rückt nun der Punkt A senkrecht nach unten so wächst dadurch die Differenz zwischen der wahren und der scheinbaren Tiefe, dadurch aber, dass das Auge stets in der Richtung desjenigen gebrochenen Strahles sich befindet, dessen ungebrochener den Endpunkt P der Strecke PK trifft, und sich somit dem vom Punkte A aufs Wasserniveau gefällten Lothe nähert, vermindert sich dieselbe. Unter Einwirkung beider Umstände findet dann Folgendes statt.

„Denkt man sich um den Fusspunkt des von einem unter Wasser befindlichen Punkte „aufs Wasserniveau gefällten Lothes mit der gegebenen Strecke PK eine undurchsichtige „Kreisfläche beschrieben, so wird im Bereiche desjenigen gebrochenen Strahlenkegels, des-„sen zugehöriger ungebrochener die Peripherie der genannten Kreisfläche umhüllt, falls ein „leuchtender Punkt von unten auf dem im Centrum der Kreisfläche errichteten Perpen-„dikel hinaufkommt, die Differenz zwischen der wirklichen und scheinbaren Tiefe immer „kleiner und kleiner und erreicht im Punkte $\zeta=\frac{PK}{\mu}$ den kleinsten Werth; von da ab „wächst sie wieder und erreicht die Grösse der wirklichen Tiefe im Punkte $\zeta=\frac{\sqrt{1-\mu^2}.PK}{\mu}$, „nach Ueberschreitung dieser Stelle wird der Punkt unsichtbar.

II.

Wir gehen nun zu einem Continuum von unter Wasser befindlichen Punkten über und werden das von ihm im Wasser erzeugte Bild in Bezug auf seine geometrischen Eigenschaften zu erforschen haben. Wir legen uns zu diesem Zwecke zunächst ein passendes rechtwinkliges Raumkordineten-system fest. Da das Bild eines Punktes unserer Annahme nach in dem von ihm auf's Wasserniveau gefällten Lothe zu suchen ist, so ist sofort klar, das Koordinetensystem so festzulegen, dass das Wasserniveau zur xy Ebene wird, während das vom Ange auf's Wasserniveau gefällte Perpendikel die z Achse repräsentirt; denn in diesem Falle sind nur die z Koordinaten des Punktes und seines Bildes verschieden, die der xy aber bleiben dieselben. Ueber die Lage der x und y Achse setzen wir vor der Hand Nichts bestimmtes fest, die positive Seite der z Achse sei, um die z Koordinaten positiv zu haben, in's Wasser gerichtet.

Gleichung des Bildes.

Nach Festlegung dieses Koordinatensystems sei uns nun ein Continuum von Punkten unter Wasser und das von ihm erzeugte Bild gegeben; die beiden Gleichungen des Continuums in Bezug auf dies gewählte System seien $\varphi(xyz)=0$ und $f(xyz)=0$. Wäre uns nun eine Relation zwischen der z Koordinate eines Punktes unter Wasser und der z′ Koordinate seines Bildes bekannt etwa $\psi(zz')=0$, und hieraus $z=\omega(z')$, dann würden die Gleichungen stattfinden.

$$\varphi[xy\omega(z')]=0;\ f[xy\omega(z')]=0$$

Die z′ Koordinate dieser Gleichung ist die z Koordinate des erzeugten Bildes; die xy Koordinaten des Bildes sind aber dieselben wie die des gegebenen Continuums. Daher sind, wenn $z=\omega(z')$, bekannt ist

$$\varphi[xy\omega(z')]=0;\ f[xy\omega(z')]=0$$

die beiden Gleichungen des durch das Continuum $\varphi(xyz)=0$ und $f(xyz)=0$ erzeugten Bildes.

Setzt man in der Formal: $z=\zeta\sqrt{\mu^2+(\mu^2-1)\frac{PK^2}{\zeta^2}}$: $\zeta=z$ und $z=z'$, so geht sie über in:

$$z'=z\sqrt{\mu^2+(\mu^2-1)\frac{PK^2}{z^2}}$$

Es werde nun PK durch p, a und z′ ausgedrückt.

Es ist wegen $PKN \sim POF$

$$\frac{PK}{FP}=\frac{NK}{OF}=\frac{z'}{a}$$

Ferner ist:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}=\mu;\ \frac{FP}{FO}=tg\alpha' \text{ und } \frac{PK}{AK}=tg\alpha$$

Daher

$$\frac{PK\sqrt{FO^2+FP^2}}{FP\sqrt{PK^2+AK^2}}=\mu; \text{ oder wenn } FO=a,\ FK=p\ PK=x,\ AK=z \text{ gesetzt}$$

wird:

$$\frac{z'^2(a^2+p^2-zpx+x^2)}{\alpha^2(x^2+z^2)}=\mu^2$$

Ferner

$$\frac{PK}{NK}=tg\,\alpha' \text{ und } \frac{PK}{AK}=tg\alpha$$

$$\frac{PK^2+NK^2}{PK^2+AK^2}=\mu^2, \text{ oder } \frac{x^2+z'^2}{x^2+z^2}=\mu^2$$

Hieraus folgt:

$$\frac{z'^2(a^2+p^2-zpx+x^2)}{a^2(x^2+z^2)}=\frac{x^2+z'^2}{x+z^2}$$

$$z'^2(a^2+p^2-zpx+x^2)=a^2x^2+a^2z'^2$$

$$x'=\frac{pz'}{a+z'};\ x'=-\frac{pz'}{a-z'}$$

Setzt man $x' = \frac{pz'}{a+z'}$ für PK in den obigen Ausdruck hinein, so erhält man:

$$z' = z\sqrt{\mu^2 + (\mu^2-1)\frac{p^2z'^2}{(a+z')^2.z^2}}$$

Hieraus ist

$$z = \frac{z'}{\mu}\sqrt{1-(\mu^2-1)\frac{p^2}{(a+z')^2}}$$

Also ist die gesuchte Relation

$$z = \omega(z') = \frac{z'}{\mu}\sqrt{1-(\mu^2-1)\frac{p^2}{(a+z')^2}} = \frac{z'}{\mu}\sqrt{1-(\mu^2-1)\frac{x^2+y^2}{(a+z')^2}}$$

Anmerkung. Die zweite Wurzel $x' = -\frac{pz'}{a-z'}$ ist nicht zu gebrauchen, weil sie zu unsinnigen Resultaten führen würde; legt man dem z einen bestimmten Werth bei, etwa $z = d$, so ist $z - d = o$ die Gleichung einer Ebene, die zum Wasserniveau parallel ist, folglich ist die Gleichung

$$d - \frac{z'}{\mu}\sqrt{1-(\mu^2-1)\frac{x^2+y^2}{(a+z')^2}} = o$$

die Gleichung des Bildes einer zum Wasserniveau in der Entfernung d parallelen Ebene.

Die gerade Linie.

Es ist eine unter Wasser befindliche gerade Linie gegeben, und eine ihrer Gleichungen sei.

$$x = \alpha z + l$$

Dann ist die Gleichung der Projektion des Bildes dieser Geraden auf die xz Ebene:

$$\frac{x-l}{\alpha} = \frac{z'}{\mu}\sqrt{1-(\mu^2-1)\frac{(x^2+y^2)}{(a+z')^2}}$$

Lässt man in dieser Gleichung eine der drei Variablen, etwa y, konstant, so entspricht sie einer Geraden, die zur yz Ebene senkrecht ist; wir spezialisiren also, um Schwierigkeiten bei der Diskussion vorstehender Gleichung auszubeugen, das Koordinatensystem dahin, dass die yz Ebene senkrecht zu der gegebenen Geraden liege; dann sind die beiden Gleichungen des Bildes:

$$y = p$$

$$\frac{x-l}{\alpha} = \frac{z'}{\mu}\sqrt{1-(\mu^2-1)\frac{(x^2+y^2)}{(a+z')^2}}$$

oder $\frac{1}{\alpha} = h$, $z = z'$ gesetzt und nach Potenzen von z geordnet

$$h^2\mu^2(x^2-l)^2(a+z)^2 + (x^2+p^2)(\mu^2-1)z^2 = (a+z)^2z^2$$

$$z^4 + 2az^3 - [a^2 - (x^2+p^2)(\mu^2-1) - h^2\mu^2(x-l)^2]z^2 - 2ah^2\mu^2(x-l)z - a^2h^2\mu^2(x-l)^2 = o$$

und nach Potenzen von x geordnet

$$[h^2\mu^2(a+z)^2 + (\mu^2-1)z^2]x^2 - 2lh^2\mu^2(a+z)^2x = (a+z)^2[z^2 - l^2h^2\mu^2] - p^2(\mu^2-1)z^2.$$

Bestimmung der Ordnung der Curve.

Die Gleichung einer um die z Achse rotirenden Ebene ist:

$$y = qx$$

Diese Gleichung mit den beiden Gleichungen der gegebenen Geraden zusammengestellt gibt die Koordinaten ihres Durchschnitts mit derselben:

$$x = \frac{p}{\alpha};\ y = p;\ z = \frac{p/q - 1}{\alpha}$$

Bezeichnet man den für x gefundenen Werth durch b und setzt b an die Stelle von x in die nach z geordnete Gleichung der Projektion des Bildes auf die xz Ebene, so erhält man:

$$z^4 + 2az^3 + [a^2 - (p^2+b^2)(\mu^2-1) - h^2\mu^2(b-l)^2]z^2 - 2ah^2\mu^2(b-l)^2.z - a^2h^2\mu^2(b-l)^2 = o$$

2

Dies ist eine in Bezug auf z biquadratische Gleichung, deren Wurzeln die z Koordinaten der Durchschnittspunkte der durch obige Gleichung charakterisirten Curve mit der rotirenden Ebene sind; daher:

„Das Bild einer unter Wasser befindlichen Geraden ist eine Curve vierter Ordnung.“

Anmerkung.

Selbstverständlich ist nicht die ganze Curve, welche durch obige Gleichung charakterisirt wird, als Bild der gegebenen Geraden zu betrachten, sondern nur ein Zweig derselben ist das wirkliche Bild derselben; da aber hier die ganze Curve der Discussion unterworfen wird, so wird im Folgenden dieselbe öfters der Kürze wegen mit dem Namen „Bild“ belegt werden.

Es lässt sich aus den Vorzeichen der Koeffizienten der letzten Gleichung schliessen, dass sie für alle b stets und zwar nur eine positive Wurzel hat. Denn für sämmtliche Werthe von b bietet die Gleichung nur einen Zeichenwechsel dar, kann also höchstens eine positive Wurzel haben, da aber das von z freie Glied negativ ist, so folgt, dass sie auch stets eine solche haben muss.

Das von z freie Glied obiger Gleichung ist negativ, das heisst: die Gleichung hat negative Wurzeln und zwar in ungerader Anzahl, denen Punkte der Curve über dem Wasserniveau entsprechen; die Curve verläuft also zum Theil auch in der Luft; man erhält vier Punkte derselben, wenn man die Wurzeln obiger Gleichung, die einem bestimmten b entsprechen, auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen

$$y = p$$
$$y = qx$$

mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen als Strecken aufträgt; daher gilt:

„Eine um die Achse der z rotirende Ebene hat mit der zu untersuchenden Curve „vier Durchschnittspunkte, von denen nur einer unter dem Wasserniveau liegt, von den „drei über den Wasserniveau gelegenen Punkten können zwei imaginär sein.

Bestimmung einzelner Werthe von x.

Die Constante h in der nach x oder z geordneten zweiten Gleichung der Curve kann verschiedene Werthe annehmen, jenachdem die Neigung der Geraden gegen das Wasserniveau sich ändert, für $h = o$ und $h = \infty$ wird die Diskussion dieser Gleichung unmöglich, wir wollen daher diese beiden Fälle vor der Hand von der Betrachtung ausschliessen. Unter dieser Annahme folgt dann aus genannter Gleichung, dass jedem Werthe von x vier Werthe von z, jedem Werthe von z zwei Werthe von x im Allgemeinen entsprechen, nämlich:

$$x' = \frac{lh^2\mu^2(a+z)^2 \pm z\sqrt{h^2\mu^2(a+z)^2[(a+z)^2 - p^2(\mu^2-1)] + (\mu^2-1)[(a+z)^2(z^2 - l^2h^2\mu^2) - p^2(\mu^2-1)z^2]}}{h^2\mu^2(a+z)^2 + (\mu^2-1)z^2}$$

Nur für diejenigen reellen z, die den Wurzelausdruck des Zählers zu Null machen, und für den Werth $z = o$ ergiebt sich ein einziger Werth für x, und zwar ist im letzten Falle:

$$x = l.$$

Das heisst: die xy Ebene schneidet die Curve in dem Punkte, dessen x Koordinate $= l$ ist, oder in dem Punkte, in welchem die gerade Linie selbst das Wasserniveau trifft. Die Curve wird also in diesem Punkte durch die xy Ebene in zwei Theile getheilt und zwar so, dass der eine Zweig unterhalb, der andere oberhalb der xy Ebene oder des Wasserniveaus liegt. Setzt man $x = l$ in die nach z geordnete Gleichung der Curve, so erhält man aus der resultirenden Gleichung die Punkte, in denen eine im Durchschnittspunkte des Wasserniveaus mit der gegebenen Geraden errichtete Senkrechte von der Curve geschnitten wird:

$$z^4 + 2az^3 + [a^2 - (l^2+p^2)(\mu^2-1)]z^2 = o.$$
$$z = -a \pm \sqrt{(l^2+p^2)(\mu^2-1)}$$

Da $\mu^2 < 1$ ist, so ist $\sqrt{\mu^2 - 1}$ imaginär, also auch die beiden Durchschnittspunkte imaginär.

Weil der Grad von z im Zähler des obigen Ausdrucks für x höher ist, als im Nenner, so wird dieser nur dann zu Null, wenn sein Zähler gleich Null wird, das heisst x wird gleich Null für die Werthe von z, die aus der Gleichung folgen:

$$(a+z)^2(z^2-l^2h^2\mu^2)-p^2(\mu^2-1)z^2=0.$$

Die jedesmaligen zweiten Werthe von x folgen dann aus der Gleichung

$$x=\frac{2lh^2\mu^2(a+z)^2}{h^2\mu^2(a+z)^2+(\mu^2-1)z^2}$$

für z die Werthe der letzten Gleichung gesetzt.

Dem Werthe $z=-a$ entsprechen die beiden Werthe:

$$x=\pm p\sqrt{-1}.$$

Das heisst: eine auf der Achse der z im Punkte O errichtete Senkrechte schneidet die Projektion des Bildes auf die xz Ebene gar nicht.

Für $z=a$ folgen für x die Werthe:

$$x=\frac{4lh^2\mu^2\pm\sqrt{16a^2h^2\mu^2-4h^3\mu^2(\mu^2-1)p^2+(\mu^2-1)[4(a^2-l^2h^2\mu^2)-p^2(\mu^2-1)]}}{4h^2\mu^2+(\mu^2-1)}$$

Es kann x nur unendlich werden entweder für z gleich unendlich, oder für diejenigen z, die den Nenner des Ausdrucks für x zu Null machen, also:

$$h^2\mu^2(a+z)^2+(\mu^2-1)z^2=0$$

$$z=-\frac{a^1h\mu}{h^2\mu+\sqrt{1-\mu^2}} \text{ und } z=-\frac{ah\mu}{h\mu-\sqrt{1-\mu^2}}$$

Setzt man den ersten Werth von z in den Ausdruck für x hinein, so ergiebt sich für das obere Zeichen zwar:

$$x=\frac{0}{0}$$

es ist aber in diesem Falle:

$$x=\frac{l-p^2}{2}-\frac{a^1}{2l(h\mu+\sqrt{1-\mu^2})^2}$$

$$x=\infty$$

Ebenso ergeben sich für den zweiten Werth von z die beiden Werthe von x:

$$x=\infty$$

$$x=\frac{l-p^2}{2}-\frac{a^2}{2l(h\mu-\sqrt{2-\mu^2})^2}$$

Tangente und Normalebene.

Es war

$$x=\frac{lh^2\mu^2(a+z)^2\pm\sqrt{h^2\mu^2(a+z)^2[(a+z)^2-p^2(\mu^2-1)]+(\mu^2-1)[(a+z)^2(z^2-l^2h^2\mu^2)-p^2(\mu^2-1)z^1]}}{h^2\mu^2(a+z)^2+(\mu^2-1)z^2}$$

Differenzirt man diese Gleichung nach z, so erhält man:

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{2alh^2\mu^2(\mu^2-1)(a+z)z}{[h^2\mu^2(a+z)^2+(\mu^2-1)z^2]^1}\pm\frac{\varphi(z)[h^2\mu^2(a+z)(a-z)-(\mu^2-1)z^2]+\frac{\varphi^1(z)}{2}[h^2\mu^2(a+z)^2+(\mu^2-1)z^2].z}{[h^2\mu^2(a+z)^2+(\mu^2-1)z^2]^2\sqrt{\varphi(z)}}$$

Wo $\varphi(z)$ folgender Ausdruck ist:

$$h^2\mu^2(a+z)^2[(a+z)^2-p^2(\mu^2-1)]+(\mu^2-1)[(a+z)^2(z^2-l^2h^2\mu^2)-p^2(\mu^2-1)z^2]$$

Das doppelte Vorzeichen in dem Ausdrucke für $\frac{dx}{dz}$ entspricht den beiden x Koordinaten, welche für jedes z aus der Gleichung des Bildes resultiren.

Da $\frac{dx}{dz}$ die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels ist, den die geometrische Tangente vom Treffungspunkte mit der z Achse zurückgezählt mit der positiven Richtung derselben einschliesst, so erhält man für $z=o$, $x=l$, die trigometrische Tangente des Winkels, unter dem die Projektion der Curve auf die xz Ebene bei ihrem Eintritte aus Luft in's Wasser gegen die z Achse geneigt ist, oder da die xz Ebene parallel zu der Projektionsebene der Curve auf's Wasserniveau ist, die trigonometrische Tangente des Winkels, unter dem die Curve im Punkte $x=l$, $y=p$ gegen das Wasserniveau geneigt ist.

Es folgt für $z=o$

$$\frac{dx}{dz}=\pm\cdot\frac{\sqrt{a^2-(\mu^2-1)(l^2+p^2)}}{ah\mu}.$$

Tritt die Curve so aus Wasser in die Luft, dass ihre geometrische Tangente auf die xz Ebene projicirt in dem Punkte $z=o$ die negative Richtung der Achse der z durchschneidet, dann ist klar, dass der von der Tangente und der z Achse in dem oben angegebenen Sinne gebildete Winkel stets spitz bleibt und höchstens 90° werden kann, seine trigometrische Tangente ist folglich positiv, das heisst: es ist dann $\frac{dx}{dz}$ positiv, wenn dies nicht der Fall ist, dann ist $\frac{dx}{dz}$ negativ. Mit Ausshluss einer zur xy Ebene parallelen und senkrechten Lage kann die gegebene Gerade, auf die xz Ebene projicirt, eine vierfache Lage haben; entweder schneidet sie die positiven oder negativen Theile der z und x Achse, oder den positiven der z und den negativen der x, den negativen der z und den positiven der x Achse. Fassen wir nun den Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden mit dem Wasserniveau in's Auge, so rückt der ihm im Wasser unendlich benachbarte Punkt der Geraden vermöge der Brechung dem Wasserniveau zu, ohne dasselbe zu überschreiten. Die Verbindungslinie dieses seines Bildes mit dem Durchschnittspunkte im Wasserniveau, oder die Tangente der zu untersuchenden Curve im letzten Punkte, durchschneidet also die z Achse dem Nullpunkte näher, wie die gegebene Gerade, aber durchaus auf derselben Seite des Nullpunktes. Nennen wir den von dieser Tangente und der gegebenen Geraden gebildeten Winkel k, so ist dies derjenige Winkel, unter dem uns eine in's Wasser getauchte Gerade, etwa ein Stab, an ihrer Einsenkungsstelle gebrochen erscheint. Für die vier genannten Lagen der gegebenen Geraden ist die Grösse dieses Winkels:

$$k1=\mu-\nu,\ k2=(\mu+\nu)-180;\ k3=180-(\mu+\nu);\ k4=\nu-\mu,$$

wenn μ und ν die 180° nicht übersteigenden Winkel sind, deren trigonometrische Tangenten respektive α und $\frac{dx}{dz}$ sind.

Stellen wir nun die bis jetzt gewonnenen Resultate zusammen, nämlich:
dass eine um die z Achse rotirende Ebene die Curve stets mindestens in zwei reellen Punkten schneidet, weil die bezügliche nach Potenzen von z geordnete Gleichung für alle negativen und positiven Werthe von b, oder für alle positiven und negativen x der Punkte der gegebenen Geraden stets eine positive und mindestens eine negative Wurzel für z ergab,
dass nur der Punkt der geraden

$$x=l,\ y=p$$

zwei gleiche Wurzeln, nämlich $z=o$, ergab, während die beiden andern imaginär waren,
dass die xy Ebene die Curve nur in dem einzigen Punkte $x=l$, $y=p$ schneidet,
dass sich endlich für die trigonometrische Tangente der Curve in dem nämlichen Punkte zwei einander gleiche, dem Zeichen nach aber verschiedene Werthe ergeben, so kann man Folgendes behaupten:

„Der Punkt

$$x=l,\ y=p,\ z=o$$

„der Curve, oder der Punkt, in dem die gegebene Gerade des Wasserniveau trifft, ist ein

„Doppelpunkt derselben, und von den aus diesem Punkte ausgehenden vier Zweigen der „Curve ist nur der eine unter Wasser befindliche Zweig das wirkliche Bild der gegebenen Geraden.

Aus dem für $\frac{dx}{dz}$ gefundenen Ausdrucke folgt nun ferner, dass $\frac{dx}{dz}$ nur dann unendlich wird, wenn entweder:

$$h^2\mu^2(a+z)^2+(\mu^2-1)z^2=o$$

oder:

$$\varphi(z)=o$$

wird. Der erste Fall tritt ein für die beiden Werthe:

$$z=-\frac{ah\mu}{h\mu+\sqrt{1-\mu^2}} \text{ und } z=-\frac{ah\mu}{h\mu-\sqrt{1-\mu^2}}$$

für jeden derselben wird:

$$\frac{dx}{dz}=-\infty, \text{ und } \frac{dx}{dz}=-\infty+\infty$$

Jedem dieser Werthe von z entspricht ein unendliches und ein endliches x; der erste Werth von $\frac{dx}{dz}$ gehört zu der unendlichen, der zweite unbestimmte Werth zu der endlichen x Ordinate.

Die Wurzeln der Gleichung $\varphi(z)=o$ liefern nur je einen Werth von x, und in diesem Punkte der Curve ist die Tangente senkrecht zur Achse der z, das heisst die x Ordinate ist für die reellen Wurzeln der Gleichung $\varphi(z)=o$ Tangente der Curve.

Aus den beiden nach x und z geordneten Gleichungen der Curve ergiebt sich:

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{h^2\mu^2(x-l)^2(a+z)+(x^2+z^2)(\mu^2-1)z-(a+z).^2z-(a+z).z^2}{[h^2\mu^2(a+z)^2+(\mu^2-1)z^2]x-lh^2\mu^2(a+z)^2}$$

Für $x=\infty$ und $x=-\frac{ah\mu}{h\mu\pm\sqrt{1-\mu^1}}$ folgt hieraus:

$$\frac{dx}{dz}=-\infty$$

Für $x=\frac{l-p^2}{2}-\frac{a^2}{2l(h\mu+\sqrt{1-\mu^2})^2}$ und $z=-\frac{ah\mu}{h\mu+\sqrt{1-\mu^2}}$ wird:

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\frac{a^4}{4l^2(h\mu+\sqrt{1-\mu^2})^2}+\frac{a^2p^2}{2l}-\frac{a^2(h\mu-\sqrt{1-\mu^2})}{2(h\mu+\sqrt{1-\mu^2})}+\frac{h\mu+\sqrt{1-\mu^2}}{4}[h\mu(l+p^2)^2+\sqrt{1-\mu^2}(l-p^2)^2]}{ahl\mu\sqrt{1-\mu^2}}$$

Und für $x=\frac{l-p^2}{2}-\frac{a^2}{2l(h\mu-\sqrt{1-\mu^2})^2}$ und $z=-\frac{ahm}{h\mu-\sqrt{1-\mu^2}}$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\frac{a^4}{4l^2(h\mu-\sqrt{1-\mu^2})^2}-\frac{a^2p^2}{2l}+\frac{a^2(h\mu+\sqrt{1-\mu^2})}{2(h\mu-\sqrt{1-\mu^2})}+\frac{h\mu-\sqrt{1-\pi^2}}{4}[\sqrt{1-\mu^2}(l-p^2)^2-h\mu(l+p^2)^2]}{ahl\mu}$$

Da y von z unabhängig ist, so ist $\frac{dy}{dz}=o$; daher die Gleichungen der Tangente in irgend einem Punkte der Curve:

$$x'-x=\frac{dx}{dz}(z'-z) \text{ und } y'=p$$

und die Gleichung der Normalebene in diesem Punkte:

$$z'-z+\frac{dx}{dz}(x'-x)=o$$

wo $x'y'z'$ die laufenden, xyz die Koordinaten irgend eines Punktes der Curve bezeichnen.

Die Entfernung P des das Auge repräsentirenden Punktes O von einer Normalebene ist:

$$P = \mp \frac{\frac{dx}{dz} + a + z}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}$$

wo die oberen Zeichen von $\frac{dx}{dz}$ den oberen Zeichen von x, die unteren den Unteren entsprechen, und P mit dem oberen oder unteren Zeichen genommen werden muss, je nachdem der Zähler negativ oder positiv ausfällt.

Die gegebene Gerade:

$$x = \alpha z + l,\ y = p$$

schliesst mit einer Tangente ihres Bildes einen Winkel ϑ ein, dessen cos gleich ist:

$$\cos\vartheta = \alpha \frac{dx}{dz} + 1.$$

Bezeichnet man ein Bogenelement der Curve durch ds, ein Element der gegebenen Geraden durch $d\varsigma$, so ist:

$$ds.\ \cos\vartheta = d\varsigma$$

$$ds = \frac{d\varsigma}{\frac{\alpha dx}{dz} + 1}.$$

Ist wie früher z' die Koordinate irgend eines Punktes der Curve, dagegen z die der gegebenen Geraden, so ist:

$$ds = \frac{d\varsigma}{1 + \alpha \frac{dz}{dz'}}$$

wo $\frac{dz}{dz'}$ zu berechnen ist aus:

$$z = -\frac{\alpha(\mu^2-1)lz'^2}{\mu^2(\alpha+z')^2+(\mu^2-1)\alpha^2} \pm z' \sqrt{\frac{(a+z')^2-(\mu^2-1)(l^2+p^2}{\mu^2(a+z')^2+(\mu^2-1)\alpha^2 z'^2} + \frac{\alpha^2 l^2(\mu^2-1)z'^2}{[\mu^2(a+z')^2+(\mu^2-1)\alpha^2 z'^2]^2}}$$

Asymptoten.

Die Gleichungen der Tangente waren:

$$x' = \frac{dx}{dz} z' + x - \frac{dx}{dz}.z$$

$$y' = p.$$

Wenn die Curve in's Unendliche fortgeht, so kann es geschehen, dass bei unendlich wachsenden z die Ausdrücke:

$$\frac{dx}{dz} = L$$

$$x - \frac{dx}{dz}.z = M$$

sich bestimmten Grenzen nähern; es giebt dann eine feste Grenzlage der Tangenten, der sie sich immer mehr und mehr nähern, je weiter der Punkt (xpz) fortrückt, das heisst eine sogenannte Asymptote der Curve, deren Gleichungen sind:

$$x' = Lz, + M$$

$$y' = p.$$

Nur für den Fall, dass die Asymptote parallel zur xy Ebene liegen sollte, werden diese Gleichungen unbrauchbar wegen $L = \infty$ und $M = \infty$; man hat aber dann die vorige Betrachtung nicht nöthig, weil sich eine derartige Asymptote dadurch bemerklich macht, dass einem endlichen z ein endliches x entsprechen wird.

Es ist nun für $z = \infty$

$$x = \infty$$
$$\frac{dx}{dz} = -\frac{2alh^2\mu^2(\mu^2-1}{[ah^2\mu^2+z(h^2\mu^2+\mu^2-1)]^2} \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{\varphi(z)}{a+z}}}$$

Da:

$$\left(\frac{\varphi(z)}{a+z}\right)_{z=\infty} = h^2\mu^2(a+z)^3 - p^2(\mu^2-1)h^2\mu^2(a+z) + (\mu^2-1)(a+z)(z^2-l^2h^2\mu^2) - p^2(\mu^2-1).^2z^2$$

ist, und letzterer Ausdruck für $z = \infty$ sich nicht annullirt, so ist $\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=\infty}$ stets endlich; ferner ist $\left(\frac{dx}{dz}.z\right)_{z=\infty}$ stets gleich Null, das heisst: die dem Punkte: $(xz) = \infty$, $y = p$: entsprechende Tangente der Curve verläuft ganz in der Unendlichkeit und ist somit keine Asymptote. Die Curve kann also nur solche Asymptoten haben, die der xy Ebene parallel sind. In der That findet auch der für obige Asymptotengleichung angegebene Ausnahmsfall hier Statt: es ist nämlich für $z = -\frac{ah\mu}{h\mu+\sqrt{1-\mu^2}}$:

$$x = \frac{1-p^2}{2} - \frac{a^2}{2l(h\mu+\sqrt{1-\mu^2})^2}, \infty$$

und für $z = -\frac{ah\mu}{h\mu-\sqrt{1-\mu^2}}$:

$$x = \infty, \frac{1-p^2}{2} - \frac{a^2}{2l(h\mu-\sqrt{1-\mu^2})^2}$$

Das heisst die diesen zwei Werthen von z entsprechenden x Ordinaten sind Asymptoten der xz Projektion der Curve, und der Durchschnitt der beiden Ebenen:

$$y = p$$
$$z = -\frac{ah\mu}{h\mu \pm \sqrt{1-\mu^2}}$$

ist Asymptote der Curve selbst.

Die in Rede stehenden z sind jedoch Funktionen von h, und zwar wird $z = -\frac{ah\mu}{h\mu+\sqrt{1-\mu^2}} = -\frac{a\mu}{\mu+\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{h}}$ für $h = \pm\infty$ gleich $-a$; nimmt h von $-\infty$ an ab, so wird z negativ grösser und erreicht für $h = -\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}$ den Werth $-\infty$. Nach Ueberschreitung dieses Werthes wird z positiv unendlich und nähert sich für noch weiter negativ abnehmende h der Null. Für positiv unendlich kleine h wird z negativ unendlich klein, erreicht für $h = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}$ den Werth $-\frac{a}{2}$ und für $h = \infty$ den Werth $-a$.

Der zweite Werth von z:

$$-\frac{ah\mu}{h\mu-\sqrt{1-\mu^2}} = -\frac{a\mu}{\mu-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{h}}$$

wird bei derselben Reihenfolge der Werthe von h:

$$-a,\ -\frac{a}{2},\ 0,\ +\infty,\ -\infty,\ -a.$$

Hieraus geht Folgendes hervor:

Ist die Lage der gegebenen Geraden so, dass ihre Projection auf die xz Ebene mit der Achse der x einen Winkel bildet, dessen cotg grösser ist als $\pm\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}$, so hat das Bild dieser Geraden zwei oberhalb des Wasserniveaus gelegene zu demselben parallele Asymptoten; ist die cotg dieses Winkels kleiner als $\pm\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}$, so hat das Bild ebenfalls zwei zum Wasserniveau parallele Asymptoten, von denen die eine unterhalb, die andere oberhalb desselben liegt. Ist die cotg dieses Winkels gleich $\pm\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}$, so ist nur eine oberhalb des Wasserniveaus in der Ebene $z=-\frac{a}{2}$ gelegenen Asymptote vorhanden.

Eine zum Wasserniveau senkrechte und parallele Gerade.

1) Hat die im Wasser befindliche Gerade eine zum Wasserniveau senkrechte Lage, dann ist klar dass die Bilder ihrer Punkte in ihr selbst liegen:
„Eine ins Wasser senkrecht zum Wasserniveau getauchte Gerade verändert ihre Ge-
„stalt nicht, nur erscheint jedes im Wasser befindliche Stück kürzer.

2) In Bezug auf das spezialisirte Koordinatensystem sind die zwei Gleichungen einer zum Wasserniveau parallelen Geraden

$$y-p$$
$$z-q.$$

Daher die Gleichungen ihres Bildes

$$y=p$$
$$q^2\mu^2(a+z')^2+(\mu^2-1)(x^2+p^2)z'^2=(a+z').^2z'^2$$

Letzte Gleichung nach Potenzen von z und x geordnet:

$$z'^4+2az'^3+[a-^2(\mu^2-1)(x^2+p^2)-q^2\mu^2]z'^2-2aq^2\mu^2z-a^2q^2\mu^2=o$$
$$(\mu^2-1)z'.^2x^2+q^2\mu^2(a+z')^2+p^2(\mu^2-1)z'^2-(a+z')^2z'^2=o$$

Hieraus ist:

$$x=\pm\sqrt{\frac{(a+z')^2(q^2\mu^2-z'^2)-p^2(1-\mu^2)z'^2}{(1-\mu^2)z'^2}}$$

Für $z=o$ folgt:

$$x=\pm\infty$$

das heisst die Durchschnittslinie der Ebene $x=p$ mit dem Wasserniveau ist Asymptote der Curve, deren Doppelpunkt in diesem Falle in der Unendlichkeit liegt.

Aus der Gleichung:

$$(a+z')^2(q^2\mu^2-z'^2)-p^2(1-\mu^2)z'^2=o$$

folgen die Durchschnittspunkte der Curve mit der yz Ebene; für $z=-a$ ist:

$$x=\pm pi$$

das heisst eine im Punkte O zur z Achse normale Ebene schneidet die Curve gar nicht, oder: der über dem Wasser befindliche Zweig der Curve verläuft unterhalb dieser Ebene; dasselbe gilt von den in den beiden Punkten $z=\pm q\mu$ zur z Achse normalen Ebenen; überhaupt sind für alle $z>\pm q\mu$ die Werthe von x imaginär.

Für $z=a$ ist:

$$x=\pm\sqrt{\frac{4(q^2\mu^2-a^2)}{1-\mu^2}-p^2}$$

ein Ausdruck, der nur dann reell ist, wenn

$$q>\frac{\sqrt{z^2(1-2)+4a^2}}{2\mu}$$

angenommen wird.

Differenzirt man x nach z, so ergiebt sich:

$$\frac{dx}{dz} = \mp \frac{(a+z)(aq^2\mu^2+z^2)}{z^2\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{(a^2+z^2)^2(q^2\mu^2-z^2)-p^2(1-\mu^2)z^2}}$$

Die Werthe $z=0$ und die der Wurzeln der Gleichung

$$(a+z)^2(q^2\mu^2-z^2)-p^2(1-\mu^2)z^2=0$$

liefern $\frac{dx}{dz}=\infty$, das heisst in den ensprechenden Punkten ist die geometrische Tangente der Curve zur xy Ebene parallel.

Das uneigentliche Bild einer gegebenen Geraden.

Ist ein Punkt A im Wasser gegeben, und befindet sich oberhalb des Wasserniveaus im Punkte O das Auge, so nennt man denjenigen Punkt, der von dem in's Auge gelangenden gebrochenen Lichtstrahl im Wasserniveau ausgeschnitten wird, uneigentliches Bild des Punktes A. Man sieht, dass einem unter Wasser gegebenen Continuum von Punkten, ein Continuum von Punkten auf der Wasseroberfläche entsprechen wird. Auf jedem in's Auge gelangenden gebrochenen Lichtstrahle befindet sich nun auch der das eigentliche Bild des Punktes A repräsentirende Punkt. Daher gilt Folgendes:

„Das uneigentliche Bild eines unter Wasser gegebenen Continuum's von Punkten ist „die perspektivische Projektion des eigentlichen Bildes desselbe Continuum's auf das „Wasserniveau."

In Bezug auf das schon gewählte rechtwinklige Koordinatensystem seien (o,o,—a) die Koordinaten des Auges, (xyz) die Koordinaten irgend eines Punktes des eigentlichen Bildes, dann sind die Gleichungen der diese beiden Punkte verbindenden geraden Linie

$$Y-y=\frac{y}{z+a}(Z-z);\quad X-x=\frac{x}{a+z}(Z-z)$$

Setzt man hierin $Z=0$, so ergeben sich daraus die Koordinaten XY des Durchnittspunktes dieser Linie mit dem Wasserniveau

$$Y=\frac{ay}{a+z};\quad X=\frac{ax}{a+z}$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen und den beiden Gleichungen des eigentlichen Bildes:

$$y=p$$

$$x=\frac{lh^2\mu^2(a+z)^2\pm z\sqrt{h^2\mu^2(+z)^2[(a+z)^2-p^2(\mu^2-1)]+(\mu^2-1)[(a+z)^2(z^2-l^2h^2\mu^2)-p^2(\mu^2-1)z^2]}}{h^2\mu^2(a+z)^2+(\mu^2-1)z^2}$$

die drei Grössen xyz, so folgt daraus eine Gleichung zwischen YX, die die gesuchte Gleichung des uneigentlichen Bildes ist:

$$X=\frac{lh^2\mu^2.pY\pm(p-Y)\sqrt{h^2\mu^2p^2[a^2-(\mu^2-1)Y^2]+(\mu^2-1)[a^2p^2-2a^2pY+Y^2a^2-l^2h^2\mu^2-(\mu^2-1)(p-Y)z^2]}}{h^2\mu^2p^2+(\mu^2-1)p-Y)^2}.$$

oder xy für XY gesetzt und den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen durch $\varphi(y)$ bezeichnet:

$$x=\frac{lh^2\mu^2.py\pm(p-y)\sqrt{\varphi(y)}}{h^2\mu^2p^2+(\mu^2-1)(p-y)^2}$$

Es entsprechen also auch hier jedem Werthe von y zwei Werthe von x, nur dem Werthe $y=p$ und den Werthen der vier Wurzeln der Gleichung $\varphi(y)=0$, entspricht nur ein Werth von x.

Für $y=p$ folgt:

$$x=l.$$

und für $y=0$ ergiebt sich:

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{h^2\mu^2+(\mu^2-1)}}$$

Es kann x unendlich werden entweder für $y = \infty$ oder für die y, die den Nenner des Ausdruck's für x annulliren; da nun für $y = \infty$ das x imaginär sich ergiebt, so sind nur die letzteren y zu berücksichtigen. Also:

$$h^2\mu^2p^2 + (\mu^2 - 1)(p - y)^2 = 0$$

$$y = p \pm \frac{h\mu p}{\sqrt{1 - \mu^2}}$$

Setzt man diesen Werth von y in den Ausdruck für x hinein, so ergiebt sich für das untere Zeichen

$$x = \infty$$

für das obere aber:

$$x = \frac{0}{0}$$

es ist aber in diesem Falle:

$$x = -\frac{h^2\mu^2(l^2 + p^2) + (1 - \mu^2)(p^2 - l^2) + a^2 - 2h\mu p^2\sqrt{1 - \mu^2}}{2l\sqrt{1 - \mu^2}(\mu + \sqrt{1 - \mu^2})}$$

Und für $y = p - \frac{h\mu p}{\sqrt{1 - \mu^2}}$ ist:

$$x = \infty; -\frac{h^2\mu^2(p^2 - l^2) + (1 - \mu^2)(l^2 + p^2) + a^2 - 2h\mu p^2\sqrt{1 - \mu^2}}{2l\sqrt{1 - \mu^2}(h\mu - \sqrt{1 - \mu^2})}$$

Differenzirt man x nach y, so ergiebt sich:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{lh^2\mu^2p[h^2\mu^2p^2 + lh^2\mu^2(\mu^2 - 1)(p^2 - y)]}{[h^2\mu^2p^2 + (\mu^2 - 1)(p - y)^2]^2} \pm$$

$$\frac{\varphi(y)[(\mu^2 - 1)(p - y)^2 - h^2\mu^2p^2] + \frac{\varphi'(y)}{2}[h^2\mu^2p^2 + (\mu^2 - 1)(p - y)^2](p - y)}{[h^2\mu^2p^2 + (\mu^2 - 1)(p - y)^2]^2\sqrt{\varphi(y)}}$$

Für $y = 0$, $y = p$, $y = p \pm \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{h\mu p}$ folgt hieraus.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=0} = \frac{lh^4\mu^4[1 + l(\mu^2 - 1)]}{p(h^2\mu^2 + (\mu^2 - 1)]^2} \pm \frac{a\mu^2(1 - h^2)}{p[h^2\mu^2 + (\mu^2 - 1)]\sqrt{h^2\mu^2 + (\mu^2 - 1)}}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=p} = \frac{1}{p} \mp \frac{\sqrt{a^2 + (1 - \mu^2)(l^2 + p^2)}}{h\mu p}$$

Für $y = p \pm \frac{h\mu p}{\sqrt{1 - \mu^2}}$ ist:

$$\frac{dx}{dy} = \infty$$

Da für diese beiden Werthe von y ebenfalls x unendlich ist, so folgt, dass die diesen beiden Werthen von y entsprechenden x Ordinaten Tangenten der Curve sind.

Ferner entspricht den Wurzeln der Gleichung $\varphi(y) = 0$ nur ein einziger Werth von x; für $\varphi(y) = 0$ ist aber $\frac{dx}{dy} = \infty$, das heisst die diesen vier Werthen von x entsprechenden x Ordinaten sind Tangenten der Curve.

Es war für $y = p$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{lh\mu \pm \sqrt{a^2 + (1 - \mu^2)(l^2 + p^2)}}{h\mu p}$$

Hieraus folgt, dass die Curve im Punkte $x = l$ $y = p$ zwei besondere reelle Tangenten hat; daher:

„Das uneigentliche Bild einer unter Wasser befindlichen Geraden ist eine Curve „vierter Ordnung und hat in dem Punkte, wo die gegebene Gerade des Wasserniveau

„trifft, einen Doppelpunkt; nur die eine Hälfte der zwei sich in diesem Punkte schneidenden Zweige ist das wirkliche uneigentliche Bild der gegebenen Geraden, während „die andere Hälfte und der zweite Zweig, der durch die aufgestellte Gleichung repräsentirten Curve vierter Ordnung angehören."

Asymptoten.

Durch eine ähnliche Betrachtung, wie beim eigentlichen Bilde lässt sich leicht nachweisen, dass die Curve keine zur x Achse nicht parallele Asymptoten hat, und dass nur solche existiren können, die der x Achse parallel sind. Dies tritt hier in der That ein, denn es war für $y = p \pm \frac{h\mu p}{\sqrt{1-\mu^2}}$

$$x = \infty$$

Das heisst:

„Die in den beiden Punkten: $p \pm \frac{h\mu p}{\sqrt{1-\mu^2}}$ auf der y Achse errichteten Senkrechten sind Asymptoten der Curve."

Diese beiden Asymptoten sind für jede Lage der gegebenen Geraden vorhanden, nur für $h = \pm \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}$ fällt eine von ihnen mit der x Achse zusammen; in der That rücken dann auch die beiden Durchschnittspunkte der Curve mit der x Achse in die Unendlichkeit, da für diese Werthe von h der Nenner des Ausdrucks:

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{h^2\mu^2 + (\mu^2 - 1)}}$$

zu Null wird.

Entfernung zweier Punkte der beiden Curven.

Das eigentliche und uneigentliche Bild einer Geraden unter Wasser liegen auf einer und derselben Kegelfläche, die den das Auge repräsentirenden Punkt zur Spitze hat; jeder Punkt der einen Curve hat seinen entsprechenden Punkt auf der andern Curve; die Entfernung dieser beiden Punkte ist:

$$E^2 = \frac{z^2[p^2 + x^2 + (a+z)^2]}{(a+z)^2}$$

wo zpx die Koordinaten eines Punktes des eigentlichen Bildes bedeuten.

Für $z = o$ war $x = l$; in diesem Punkte ist die Entfernung Null, das heisst die beiden Curven haben den Punkt (lpo) gemeinschaftlich. Ist z gleich unendlich, dann wird:

$$E^2 = \frac{\frac{z^2}{z^2}[p^2 + x^2 + (a+z^2)^2]}{\frac{(a+z)^2}{z^2}} = p^2 + x^2 + (a+z)^2$$

Es war:

$$Y = \frac{ap}{a+z}$$

für $z = \infty$ ist $Y = o$; das heisst:

Der dem unendlich entfernten Punkte des eigentlichen Bildes entsprechende Punkt des uneigentlichen ist der unendlich entfernte Punkt der x Achse; die Entfernung dieser beide Punkte ist:

$$E^2 = p^2 + x^2 + (a+z)^2 = \infty$$

Die Tangenten des eigentlichen Bildes, welche den Wurzeln der Gleichung $\varphi(z) = o$ entsprechen, waren dem Wasserniveau parallel. Denkt man sich nach einem dieser vier Berührungspunkte vom Auge einen Strahl gezogen und bewegt diesen Strahl zum unendlichen benachbarten Punkte der Curve, so bewegt er sich noch in der Richtung der Tangente. Diese zwei unendlich benachbarten Strahlen bestimmen nun auf dem Wasserniweau zwei unendlich benachbarte Punkte des uneigentlichen Bildes; daher gilt:

„Die Wurzeln der Gleichungen $\varphi(z)=o$ und $\varphi(y)=o$ liefern vier Paare einander „entsprechender Punkte der beiden Bilder, sämmtliche acht Tangenten, die durch diese „Punkte bestimmt sind, sind einander parallel, und zwar liegt jedes zusammengehörige „Tangentenpaar in einer und derselben Ebene."

Das uneigentliche Bild einer zum Wasserniveau parallelen Geraden.

Es ist in diesem Falle:

$$Y=\frac{a+z}{ay};\; X=\frac{a+z}{ax}$$

$$y=p;\; x=\pm\sqrt{\frac{(a+z)^2(q^2\mu^2-z^2)-p^2(1-\mu^2)z^2}{(1-\mu^2)z^2}}$$

Eliminirt man zwischen diesen vier Gleichungen xyz, so resultirt eine Gleichung zwischen YX, die die Gleichung des uneigentlichen Bildes ist: nämlich:

$$X=\pm\frac{\sqrt{q^2\mu^2.Y^2-a^2((p-Y)^2-(1-\mu^2)(p-Y^2)Y^2}}{\sqrt{1-\mu^2}.(p-Y)}$$

oder xy für XY geschrieben:

$$x=\pm\frac{\sqrt{q^2\mu^2.y^2-a^2(p-y)^2-(1-\mu^2)(p-y)^2.y^2}}{\sqrt{1-\mu^2}(p-y)}.$$

Für $y=o$ und $y=p$ folgt:

$$x=\pm\frac{ai}{\sqrt{1-\mu^2}},\; \pm\infty$$

Die Achse der x durchschneidet also die Curve garnicht, ihre zwei Zweige liegen zu beiden Seiten der Achse der x; eine im Punkte $y=p$ auf der y Achse errichtete Senkrechte ist Asymptote der Curve.

Für $y=\infty$ ist x imaginär.

Es ist:

$$\frac{dx}{dy}=\pm\frac{y[q^2\mu^2.p+(1-\mu^2)(p-y)^3]}{\sqrt{1-\mu^2}(p-y)^2\sqrt{q^2\mu^2y^2-a^2(p-y)^2-(1-\mu^2)(p-y).^2y^2}}$$

Dieser Ausdruck wird unendlich für $p=y$ und für die vier Wurzeln der Gleichung:

$$q^2\mu^2y^2-(p-y)^2-(1-\mu^2)(p-y).^2y^2=o$$

Die ihnen entsprechenden Punkte des eigentlichen Bildes sind diejenigen Punkte, für die

$$z=o,\; (a+z)^2(q^2\mu^2-z^2)-p^2(1-\mu^2)z^2=o$$

ist; die Tangenten dieser entsprechenden Punkte beider Curven sind zu einander parallel.

Bezeichnet man mit $\psi(y)$ den Ausdruck:

$$q^2\mu^2p-(1-\mu^3)(p-y)^3$$

so ist:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\pm\frac{\varphi(y)\psi(y)(p+y)+\left(\varphi(y)\psi'(y)-\frac{\psi(y).\varphi'(y)}{2}\right)(p-y).y}{\sqrt{1-\mu^2}(p-y)^3.\varphi(y)\sqrt{\varphi(y)}}$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist eine Gleichung achten Grades; die y, welche diesen Ausdruck annulliren, und denen ein reelles x der Curve entspricht, geben die Inflexionspunkte der Curve.

Das Bild einer unter Wasser befindlichen Curve beliebiger Ordnung.

Eine Curve im Raume wird als der Durchschnitt zweier Flächen betrachtet, $\varphi(xyz)$ und $f(xyz)$ seien die Gleichungen derselben. Befinden sich diese Flächen unter Wasser, so ändern alle Punkte derselben vermöge der Brechung ihre Stellen, und das so hervorgerufene Bild jeder Fläche erscheint unter einer andern Gestalt, als die wirkliche Fläche. Unter Beibehaltung des bereits gewählten Koordinatensystems bleiben die xy Koordinaten sämmtlicher Punkte der vorgelegten Flächen dieselben, nur die z Koordinaten ändern sich, und zwar ist das z der wirklichen Fläche:

$$z = \frac{z'}{\mu}\sqrt{1 - \frac{(\mu^2-1)(x^2+y^2)}{(a+z')^2}}$$

wo (xyz′) die Koordinaten des Bildes sind.

Daher ist:

$$\varphi\left(xy\frac{z'}{\mu}\sqrt{1 - \frac{(\mu^2-1)(x^2+y^2)}{(a+z')^2}}\right)$$

das Bild der Fläche $\varphi(xyz)$ und

$$f\left(xy\frac{z'}{\mu}\sqrt{1 - \frac{(\mu^2-1)(x^2+y^2)}{(a+z')^2}}\right)$$

das Bild der Fläche f(xyz). Die beiden Flächen $\varphi(xyz)$ und f(xyz) bilden einen Durchschnitt; die Punkte dieses Durchschnittes liegen sowohl auf dem Bilde von $\varphi(xyz)$ als auch auf dem Bilde von f(xyz); daher:

„Das Bild des Durchschnitts zweier Flächen ist der Durchschnitt der Bilder dieser „Flächen.“

Eliminirt man x und y aus den Gleichungen der Bilder der gegebenen Flächen, so erhält man zwei Gleichungen der Projektion ihres Durchnitts auf die yz und xz Ebene.

Das Bild eines unter Wasser befindlichen Kreises.

Die beiden Gleichungen des Kreises seien:

$$(x-a)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

$$\alpha'x+\beta'y+\gamma'z+\delta=0$$

Daher sind die beiden Gleichungen seines Bildes:

$$(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2+\left(\frac{z'}{\mu}\sqrt{1-\frac{(\mu^2-1)(x^2+y^2)}{(a+z)^2}}-\gamma\right)^2=R^2$$

$$\alpha'x+\beta'y+\frac{\gamma'z'}{\mu}\sqrt{1-\frac{(\mu^2-1)(x^2+y^2)}{(a+z)^2}}+\delta=0$$

Die erste Gleichung stellt eine Fläche achter Ordnung, die zweite eine Fläche vierter Ordnung dar.

Ist die schneidende Ebene senkrecht zum Wasserniveau, dann gehen vorstehende Gleichungen über in:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\left(\frac{z'}{\mu}\sqrt{1-\frac{(\mu^2-1)(x^2+y^2)}{(a+z'^2)}}-\gamma\right)^2=R^2$$

$$\alpha'x+\beta'y+\delta=0$$

Und wenn die yz Ebene senkrecht zu der schneidenden Ebene gewählt wird:

$$(x-\alpha)^2+\left(\frac{z}{\mu}\sqrt{1-\frac{(\mu^2-1)(x^2+p^2)}{(a+z)^2}}-\gamma\right)^2=R^2-(p-\beta)^2=r^2$$

$$\left[(x-a)^2+\gamma^2+\frac{z^2}{\mu^2}-r^2)(a+z)^2\mu^2+(\mu^2-1)(x^2+p^2)z^2\right]^2=4\gamma^2\mu^2z^2(a+z)^2\left[(a+z)^2-(\mu^2-1)(x^2+p^2)\right]$$

Das heisst:

„Das Bild eines zum Wasserniveau senkrechten und zur xz Ebene parallelen Krei„ses ist ein Theil einer Curve achter Ordnung, die durch vorstehende Gleichung charak„terisirt ist.“

Setzt man in dieser Gleichung $z=o$, so folgt:

$$x=(\alpha\pm\sqrt{r^2-\gamma^2})(\alpha\pm\sqrt{r^2-\gamma^2})$$

Das heisst:

„Die durch obige Gleichung charakterisirte Curve hat in den Punkten:

$$x=\alpha\pm\sqrt{r^2-p^2},\ y=p'\ z=o$$

„einen Doppelpunkt, das heisst in den Durchschnittspunkten des von der Ebene ausge-„schnittenen Kreises mit dem Wasserniveau."

Das Bild einer Parabel.

Ist der Scheitel der Parabel der Fusspunkt des vom Auge aufs Wasserniveau gefällten Lothes, und liegt die Parabel in der xz Ebene, so ist ihre Gleichung:

$$z^2=2px$$

Daher die Gleichung ihres Bildes:

$$\frac{z^2}{\mu^2}\left(1-\frac{(\mu^2-1)x^2}{(a+z)^2}\right)=2px$$

$$x=\frac{p\mu^2(a+z)^2\pm(a+z)\sqrt{p^2\mu^4(a+z)^2-(1-\mu^2)z^4}}{(1-\mu^2)z^2}$$

Für $z=o$ ergiebt sich hieraus

$$x=\infty,\ \frac{o}{o}$$

Letzterer Werth ist aber gleich Null.

Für $z=o$ ist x imaginär, für $z=a$ ist:

$$x=\frac{4p^2\mu^2\pm2\sqrt{4p^2\mu^4-(1-\mu^2)a^2}}{(1-\mu^2)}$$

und für $z=-a$ ist:

$$x=\pm o.\frac{i}{\sqrt{1-\mu^2}}=o$$

Das heisst: der Punkt $z=-a$ ist ein Punkt der durch obige Gleichung charakterisirten Curve. Diese Gleichung nach Potenzen von z geordnet ist:

$$z^4+2az^3+[a^2+(1-\mu^2)x^2-2p\mu x]z^2-4ap\mu^2xz-2p\mu a^2x^2=o$$

Jedem Werthe von x entsprechen im Allgemeinen vier Werthe von z, für negative x sind letztere sämmtlich negativ, für positive x dagegen ist einer stets positiv, die negativen sind in ungerader Anzahl vorhanden.

Für $x=o$ folgt:

$$z^4+2az^3+a^2z^2=o$$

Es ist $z=o$ und $z=-a$ doppelte Wurzel dieser Gleichung. Die Gleichung der Curve nach z differenzirt liefert:

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{2ap\mu^2(a+z)}{1-\mu^2)z^3}\mp\frac{2ap^2\mu^4(a+z)^2+(1-\mu^2)z^5}{(1-\mu^2)z^3\sqrt{p^2\mu^4(a+z)^2-(1-\mu^2)z^4}}$$

Für $z=o$ folgt:

$$\frac{dx}{dz}=-\infty;\ -\infty+\infty$$

Der erste Werth ist mit $x=\infty$ zu kombiniren, der zweite, welcher gleich Null ist, mit $x=o$.

Für $z=-a$ ist:

$$\frac{dx}{dz}=\mp\frac{1}{i\sqrt{1-\mu^2}}$$

Daraus folgt:

„Der Punkt $z = -a$, $x = o$ ist ein singulärer Punkt der Curve."

Die Achse der x ist also Asymptote der Curve, und im Punkte $x = o$, $z = o$ ist die Achse der z Tangente.

Ist die Gleichung der Parabel:

$$x^2 = 2pz$$

dann liegt die ganze Parabel unter Wasser und die Gleichung ihres Bildes ist:

$$x^2 = \frac{2p^2(1-\mu^2)z^2 \pm 2pz\sqrt{\mu^2(a+z)^4 + p^2(1-\mu^2)^2z^2}}{\mu^2(a+z)^2}$$

nach Potenzen von z georonet:

$$4p^2(a+z)^2z^2 + 4p^2(1-\mu^2)x.^2z^2 - \mu^2(a+z).^2x^4 = o.$$

Hiernach entsprechen jedem x vier z, und umgekehrt jedem z entsprechen vier x; aus der obigen Gleichung folgt aber:

$$x = \pm \frac{\sqrt{2pz[p(1-\mu^2)z \pm \sqrt{\mu^2(a+z)^4 + p^2(1-\mu^2)^2.z^2}}}{\mu(a+z)}$$

Hieraus ergiebt sich, dass sowohl für positive als für negative z zwei von den vier Werthen von x imaginär werden, und zwar liefert das obere Zeichen von x^2 für negative z zwei imaginäre Werthe von x, das untere dagegen für positive z. Daher:

„Es entsprechen nur zwei reelle Werthe von x jedem Werth von z der durch obige „Gleichung charakterisirten Curve; ihr unter Wasser befindlicher Theil, der sich für die „positiven z der genannten Gleichung ergiebt, ist das Bild der in Rede stehenden Parabel."

Allgemeine Methode der Herleitung der Gleichungen des Bildes aus den Gleichungen der unter Wasser befindlichen Curve.

Es befinde sich unter Wasser eine Curve von beliebiger Ordnung, deren Gleichungen $\varphi(xyz)$ und $f(xyz)$ sind. Oberhalb des Wasserniveaus befinde sich im Punkte O das Auge. Denkt man sich von O aufs Wasserniveau eine Senkrechte gefällt, dann wird eine Ebene, welche um diese Senkrechte als Achse rotirt, in jeder ihrer Lagen die unter Wasser befindliche Curve in so vielen Punkten schneiden, als ihre Ordnung anzeigt. Jeder dieser Durchschnittspunkte erzeugt eine Brennfläche als Einhüllende der von ihm ausgehenden am Wasserniveau gebrochenen Lichtstrahlen. Die Durchschnitte dieser Brennfläche mit der rotirenden Ebene sind ebensoviele Ellipsenevoluten, und auf den durch das Auge gehenden Tangenten dieser einzelnen Ellipsenevoluten liegen die Bilder der entsprechenden Durchschnittspunkte der Curve mit der rotirenden Ebene. Hat nun die Ebene eine der vorigen unendlich benachbarte Lage angenommen, so sind die nunmehrigen Durchschnittspunkte der Curve mit der Ebene den vorigen Durchschnittspunkten unendlich benachbart, und die ihnen entsprechenden Ellipsenevoluten werden also den vorigen Ellipsenevoluten ebenfalls unendlich benachbart sein. Hat die Ebene die ganze Rotation vollendet, so wird das Continuum der erzeugten Ellipsenevoluten eine Fläche erzeugen, deren Gleichung sich aus den beiden Gleichungen $\varphi(xyz)$ nnd $f(xyz)$ der vorgelegten Curve und den beiden Gleichungen der variablen Ellipsenevolute (Gleichung der entsprechenden Brennfläche und Gleichung der rotirenden Ebene) herleiten lässt, sie sei:

$$\psi(\xi\eta\varsigma) = o$$

Zieht man jetzt an diese so erzeugte Fläche sämmtliche Tangenten vom Punkte O, so bestimmen sie eine Kegelfläche, deren Gleichung auf bekannte Weise aus der Gleichung $\psi(\xi\eta\zeta)$ hervorgeht und sei:

$$\Phi(xyz) = o.$$

Auf dieser Kegelfläche liegen die Bilder der Punkte der gegebenen Curve. Denkt man sich endlich von jedem Punkte der gegebenen Curve aufs Wasserniveau eine Senkrechte gefällt, so bildet die stetige Folge dieser Senkrechten eine Cylinderfläche, deren Gleichung aus den beiden Gleichungen der Curve leicht abzuleiten ist, sie sei:

$$F(xyz) = o$$

Nach der gemachten Annahme liegen die Bilder der Punkte der gegebenen Curve auch auf dieser Cylinderfläche, folglich ist das Bild der gegebenen Curve der Durchschnitt der Kegelfläche und der Cylinderfläche, und seine beiden Gleichungen sind:

$$\Phi(xyz) = o \text{ und } F(xyz) = o.$$