Zur Didaktik des mathematischen Unterrichts in den Mittelklassen des Gymnasiums.

Von Professor Dr. G. Riehm.

Reformvorschläge auf dem Gebiete des Schulwesens sind heutzutage billig wie Brombeeren. Berufene und Unberufene fordern, daß die Schule anders werden müsse, besonders das Gymnasium. Der eine will die klassischen Sprachen überhaupt aus der Schule verbannen, der andere findet wenigstens ihren derzeitigen Betrieb unpraktisch, der dritte urteilt, die Mathematik sei eine höchst überflüssige Liebhaberei, der vierte glaubt, daß die Geschichte den Schülern nicht interessant genug gemacht werde, wieder ein anderer wünscht den Religionsunterricht beseitigt zu wissen, und auch die Ansicht findet ihren Vertreter, daß der Deutschunterricht eigentlich nur dazu diene, einem die Klassiker zu verekeln. Wenn diese Meinungen alle richtig wären, so müßte das Gymnasium der Inbegriff alles Unflats und aller Torheit sein, und man müßte nur darüber staunen, daß trotz dieser Zustände die Tadler noch ganz brauchbare Menschen geworden seien; denn das letztere pflegt man nicht zu bezweifeln. Ganz dieselben Leute pflegen aber bei anderer Gelegenheit und in anderem Zusammenhange sich viel dankbarer über ihre Schule zu äußern. Da findet doch mancher, daß er diesem oder jenem Lehrer viel verdanke, auch daran denkt dann mancher, wie er so oft auf die Intentionen der Lehrer nicht eingegangen ist, daß er oft unerlaubte Mittel angewendet oder daß sein Interesse anderen Dingen gehört habe. Meist ergibt es sich, daß die unangenehmsten Erinnerungen da liegen, wo die Schule ihre höchste Aufgabe löste, nämlich den Schüler an treue Pflichterfüllung zu gewöhnen, an treue Erfüllung auch der Pflichten, die dem natürlichen Menschen unbequem sind. Solche Gewöhnung gehört aber zur Erziehung; denn in welchem späteren Berufe fehlt es an unbequemen Pflichten! Diese Erziehung des Willens pflegt unangenehme Erinnerungen zu hinterlassen, und daraus erklärt sich schon manches abfällige Urteil über die Schule.

Aber ein anderes kommt hinzu, was oft außer acht gelassen wird: Das Interesse des Erwachsenen ist ein ganz anderes als das des Kindes. Ich erwähne ein Beispiel aus meinem naturkundlichen Unterricht. Als ich noch junger Lehrer war und frisch von der Universität kam, da sagte ich mir: „Die Systematik der Pflanzen und Tiere ist doch unglaublich langweilig! Wie anders, wenn du jetzt deinen Schülern den anatomischen Bau der Lebewesen und das Zusammenwirken der Organe erklären, über das Leben der Zellen, über Vermehrung und Wachstum sprechen wirst; da werden sie Interesse haben, da werden sie lernen!“ Anfangs schien das auch so, so lange ich nämlich — was manchem jungen Lehrer so geht — das eigene Interesse, die eigene Freude an den Dingen mit dem Interesse der Schüler und deren Freude verwechselte. Angestellte Repetitionen brachten dann die erschreckende Gewißheit, daß alle diese Dinge kaum eine flüchtige Neugier wachgerufen hatten, daß diese Fragen dem Geiste eines Tertianers noch nicht liegen. Mit welchem Entzücken hatte ich einst in einem Algenknäuel eine Anzahl Fäden entdeckt, deren Zellen Fortsätze ausgestülpt hatten! Von den Zellen des benachbarten Fadens waren ihnen gleiche Fortsätze entgegengewachsen, weiter hin berührten sich die Fortsätze, noch weiter hin war die Zwischenwand schon aufgelöst, und endlich hatten sich die Protoplasmainhalte vereint und waren zur Bildung einer Zygospore in eine der Zellhäute hineingekrochen. Was ich bisher nur in Abbildungen gesehen hatte, hier hatte ich es leibhaftig vor mir, und in einer Schönheit der Ausbildung, daß keine Zeichnung deutlicher hätte sein können! Das mußten meine Jungens sehen! Das gab wundervollen Anlaß zu einer fruchtbaren Erörterung über die Entstehung und prinzipielle Bedeutung der geschlechtlichen Fortpflanzung! — Der Erfolg war niederschmetternd. Gesehen hatten alle, was sie sehen sollten; sie konnten es auch anzeichnen, aber von dem erwarteten entzückten Erstaunen war nichts zu bemerken, viel weniger als damals, als ich ein Haar von Müller und ein Haar von Schulze unters Mikroskop gelegt hatte, an denen wirklich nichts weiter zu sehen war, als daß das eine ein bißchen dicker war. Wie die Kuh eine schöne Blume mit abgrast, so hatten sie das schöne Objekt mit dem übrigen Pensum erledigt! — Dagegen Fragen wie: Wie heißt diese Pflanze? wo findet man sie? wann blüht sie? zu welcher Familie gehört sie? kann man sie essen?, Fragen, die mir der Beantwortung kaum wert schienen, sie interessieren die Jugend besonders. Sie will Namen lernen, Zahlen behalten; dergleichen schätzt sie als Bereicherung ihres Wissens.

Aber die abfälligen Urteile der Laien[1]) würden auf die Schule wenig Einfluß ausüben, wenn nicht unter den Lehrern eine ganze Anzahl fortwährend auf der Suche nach Neuem, Besserem wäre. Dieses Bestreben ist natürlich durchaus anzuerkennen. Wehe dem Lehrer, der davon nichts hätte, der nicht immer aufs neue prüfte, ob Inhalt oder Methode seines Unterrichts nicht reformbedürftig ist! Diesem Bestreben allein ist es zu danken, wenn in manchen Disziplinen heute bessere Erfolge erzielt werden als früher. Indessen ist das überall der Fall? und läuft bei diesen Erfolgen nicht auch manches Blendwerk mit unter? — Die Reformlustigen sind meist treffliche Lehrer, die durch jugendliche Lebhaftigkeit im Unterricht ihre Schüler mit fortreißen und deren Verehrung und Liebe erringen und verdienen. Ein gerechtfertigtes Bewußtsein von den Erfolgen ihres Unterrichts erfüllt sie und macht sie leicht unachtsam gegenüber den Vorzügen des Althergebrachten, und läßt sie ihrer neuen Idee gutschreiben, was doch nur ihrer Persönlichkeit zu danken ist. Ist es nicht auch sonst im Leben oft so, daß man von dem, was man hat, nur die Schattenseiten sieht, von dem aber, was man noch nicht hat, nur das Licht? Tritt nun ein solcher Reformer mit seinem Urteil

[1]) Auch Universitätsprofessoren, und hätten sie die wissenschaftliche Bedeutung eines Ostwald, rechnen in Schulsachen unter die Laien, sofern sie nicht früher im Schulamt tätig waren; das wird zuweilen übersehen.

hervor, daß dieses oder jenes von dem auf der Schule Bestehenden wertlos sei, so zollt ihm natürlich gleich der ganze Chor jener Laien Beifall, die alles an der Schule für mangelhaft halten, die nicht wissen, mit wie viel Sorgfalt und Weisheit frühere Generationen von tüchtigen Pädagogen Gegenstand und Methode des Schulunterrichts durchdacht und abgewogen haben, und nun wird dieses Laienurteil gefährlich. Denn jene, die im großen ganzen mit dem Bestehenden zufrieden sind und damit auf dem richtigen Wege zu sein meinen, sind meist wenig geneigt, diese ihre Meinung zum Ausdruck zu bringen; es ist auch keine dankbare Aufgabe; man wird leicht für rückständig erklärt. „Das weiß ja jeder", „das kann ja jeder andere ebensogut sagen", mit solchen Argumenten begründen sie ihr Schweigen; und dann kommts eben zur Neuerung, denn alle Stimmen sind ja dafür, auch die der berufenen Beurteiler. Qui tacet, consentit! Ist dann die Neuerung keine Besserung, — und das ist doch an sich nicht undenkbar — so ist doch ein Zurückgehen auf den früheren Zustand schwer und erfolgt sehr selten; und den Schaden hat die Jugend.

In den letzten Jahren bemüht sich bekanntlich eine Gruppe von Mathematikern, die sich um die Fahne von F. Klein scharen, eine durchgreifende Neuerung auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts durchzusetzen, die doch nicht n u r Vorzüge hat. Ihre Vorschläge enthielten in ihrer Formulierung manches, was dem, der die Verhandlungen selbst nicht verfolgt hatte, unbestimmt und verschiedener Deutung fähig zu sein schien. Seit einigen Monaten aber liegt die „Didaktik des mathematischen Unterrichts" von A. Höfler vor, der erste Band der bei Teubner erscheinenden „Didaktischen Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen", und dieser ermöglicht es nun jedem, sich über die Absichten der Neuerer klar zu werden und Stellung dazu zu nehmen.

Man wird in diesem Buche von vornherein eine gerechte Würdigung des bisher geübten Unterrichts vermissen. Denn wenn z. B. S. 89 ff. vorausgesetzt wird, daß der Geometrieunterricht mit dem Auswendiglernen jener Definitionen beginne, die man gemeinhin am Anfang eines Geometrie-Lehrbuchs findet, wenn für nötig gehalten wird auf die Schwierigkeiten hinzuweisen, die das Wort „Körper" für den Schüler enthält, weil er zuerst dabei an seinen eigenen Körper denke — als ob die selbstverständliche Behebung dieses Irrtums im Lehrbuche Ausdruck finden müsse! — wenn das Betrachten eines Würfels in der Hand des Lehrers als ein „Anstarren" gebrandmarkt wird, während der Verfasser an anderer Stelle darüber entzückt ist, wie auf Rafaels Schule von Athen die vier Schüler Euklids „zuschauen — schauen", wie ihr Meister mit dem Zirkel an der Figur hantiert, so wird man sagen müssen, daß das Bestehende grau in Grau gemalt ist, damit die Neuerung sich um so vorteilhafter abhebe.

Worin besteht nun diese „zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen"? Vor allem in der Pflege der räumlichen Anschauung durch Verbindung von Stereometrischem mit dem Planimetrischen schon auf der Unterstufe und in der Pflege des funktionalen Denkens z. B. durch Ansetzung der Geometrie und Trigonometrie n a c h der Stereometrie, die auf die Mittelstufe verwiesen wird, aber auch durch Einführung der Infinitesimalrechnung, wenn auch in beschränktem Umfange, auf der Oberstufe, der auch Rückblicke und Ausblicke nach philosophischen Gesichtspunkten zugewiesen werden. Ferner wird angestrebt, sämtlichen höheren Schulen einen einheitlichen mathematischen Lehrplan zu geben und der verschiedenen Stundenzahl, die den einzelnen Anstalten zur Verfügung steht, nur dadurch Rechnung zu tragen, daß z. B. die Gymnasien bei gleicher Einsicht nur eine geringere Fertigkeit zu erzielen verpflichtet würden. Die Bewältigung des wiederum vergrößerten Stoffumfangs soll ermöglicht werden durch reichliche Ersetzung des Euklidschen Beweisverfahrens durch Konstruktion, Messung und Anschauung [1]).

Es will fraglich erscheinen, ob jeder Lehrer, und ob er mit der Mehrzahl der Schüler diese Forderungen zu erfüllen imstande ist. Nimmt man das Tempo zum Maßstabe, welches in den ausgeführten Musterlektionen angeschlagen wird, so würde die doppelte Zahl der Stunden, die dem Gymnasium zur Verfügung stehen, kaum ausreichen. Man muß auch bedenken, daß mangelhafte Fertigkeit ihrerseits die Einsicht wieder erschwert und die Arbeitslust verringert, so daß man nicht ohne weiteres auf ein gewisses Maß von Fertigkeit verzichten kann. Vor allem: Anschaulichmachen von Gesetzmäßigkeiten durch Nachmessen an der Figur, durch An- und Aufeinanderlegen hat von jeher als gutes didaktisches Hilfsmittel gegolten, aber doch nur, wenn es als Hebel benutzt wird, um im Schüler den Wunsch und das Bedürfnis zu erzeugen, seine Anschauung durch nachfolgende logische Begründung als notwendig zu erweisen oder zu berichtigen.

Zweifellos muß man, ehe man von der bewährten Euklidischen Methode abweicht, die Stellung der Mathematik im ganzen gymnasialen Lehrplan berücksichtigen. Sie bildet mit der Religion zusammen den Rahmen für das Erziehungsgemälde [2]), indem sie, völlig einseitig, die autoritätslose Logik des Verstandes pflegt, während Religion, nach der anderen Seite hin einseitig, lediglich auf Autorität sich gründet und die sittlich religiöse Seite des Gemüts in Pflege nimmt. Erst innerhalb dieses Rahmens erhalten die Hauptdisziplinen: klassische Sprachen, Deutsch, Geschichte ihre gesicherte Stellung, indem sie vermittelnd aus dem Reiche der Notwendigkeit mit seiner Kausalität und dem Reiche der Freiheit mit seiner Finalität die Summe ziehen. Soweit also Mathematik auf diese strenge Logik des Verstandes verzichtet, soweit verzichtet sie auf das Recht, an der Erziehung des Gymnasiasten mitzuwirken; denn für Fachunterricht ist am Gymnasium kein Raum [3]). — Was schließlich die Einführung der Infinitesimalrechnung anlangt, so scheint sie mehr aus dem Wunsche heraus vorgeschlagen zu sein, die Mathematik auf der Schule bis zu einem natürlichen Abschluß zu bringen, als im

[1]) Den Anpreisungen neuer Methoden bringt man jetzt mit Recht ziemliches Mißtrauen entgegen. Es ist leicht, auf Grund einer neuen Methode goldene Berge zu versprechen, um dadurch seine Wünsche zu erreichen. Aber unsere Schüler haben den Schaden, wenn die Versprechungen sich nachher nicht bewahrheiten.

[2]) Fr. Meyer, Mitteilungen aus dem mathematischen Lehrplan des Stadtgymnasiums zu Halle a. S., Programm 1891, eine Arbeit, die wegen ihrer vortrefflichen Begründung des gesamten gymnasialen Unterrichtsplanes gerade in unsern Tagen die allgemeinste Beachtung verdient.

[3]) In dieser Überzeugung macht uns auch die Absicht Höflers (S. 31), später „die strengste dem Schüler überhaupt noch zugängliche Wissenschaftlichkeit immer noch rechtzeitig folgen zu lassen", nicht irre. Im Gegenteil: Ein Schüler, der erst die Methode der Anschauung für streng beweisend angesehen hat und nachträglich aus all seinen Himmeln gestürzt worden ist, wird nicht immer den Zweifel los werden, ob denn nun die neue Beweismethode zwingend sei. In jedem Falle muß er das Bedürfnis empfinden, alle früheren Lehrsätze mittels des neuen Beweisverfahrens zu kontrollieren, und das würde viel Zeit kosten.

Interesse des Schülers. Wohl ist es richtig, daß Differentialrechnung und selbst Integralrechnung verkappt schon bisher in der Physik (beschleunigte Bewegung) und in der Stereometrie (Cavalierisches Prinzip) und in der analytischen Geometrie (Tangente, Flächenformeln) hat helfen müssen; aber schon da vermochten nur die besseren Schüler wirklich zu folgen Das ist ohne Belang, solange Differentialrechnung nur gelegentliches Hilfsmittel ist, es wird verhängnisvoll, sobald sie einen wesentlichen Teil des Lehrstoffs darstellt. Und es ist doch wirklich sehr fraglich, ob viele Gymnasialabiturienten bisher die Infinitesimalrechnung vermißt haben. Es kommt nun einmal auf der Schule nicht auf die Wissenschaft als solche an, sondern lediglich auf deren Erziehungswirkung gegenüber dem Schüler, und diese übt die Mathematik infolge ihrer Eigenart aus, die jeder beliebige Ausschnitt ebensogut besitzt wie ein natürlicher Abschnitt. „Denn diese Wissenschaft ist unter sämtlichen Schuldisziplinen die einzige autoritätslose; in dem Gefühle, seine Kenntnisse gewissermaßen aus sich selbst geschöpft zu haben, gewinnt der Schüler eine Befriedigung, die ihm gleichzeitig Vertrauen zur eigenen geistigen Kraft einflößt und den Trieb zur Produktion anstachelt, was mehr wert ist wie umfangreiches Wissen. Dazu kommt, daß eine saure, aber zielbewußte Arbeit den Willen stählt und eine geistige Kraftvermehrung hinterläßt, welche auch anderen Wissensgebieten zugute kommt“ [1]).

Nachdem ich so meine Stellung zu den neuesten Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts gekennzeichnet habe, wende ich mich zu einigen Erfahrungen, die ich seit nunmehr 28 Jahren im mathematischen Unterricht der Mittelklassen des Stadtgymnasiums gesammelt habe. Es wird sich dabei fortgesetzt Gelegenheit finden, deren Übereinstimmung mit vielen vortrefflichen Einzelvorschlägen der Höflerschen Didaktik hervorzuheben.

Was den Geometrieunterricht anlangt, so legt man mit Recht größeres Gewicht als früher auf die saubere Anfertigung der Figuren, auf reichliche Übung im Gebrauch von Zirkel und Lineal. Es wird dadurch nicht nur die Handfertigkeit geübt, es kommt dadurch auch die Anschauung mehr zu ihrem Rechte, und — was nicht gering anzuschlagen ist — auch das Gefühl für Sauberkeit und Schönheit wird geweckt und gepflegt. Es ist gewiß ein beachtenswerter Vorschlag von Höfler, die Herstellung des sechsstrahligen Lanzettsternes nahe an den Anfang alles Planimetrieunterrichts zu stellen; denn diese Figur interessiert offenbar jeden Schüler, er zeichnet sie auch ohne Anregung durch den Lehrer. Warum soll man nicht die Sehnen und Radien ziehen lassen und einige mathematische Beobachtungen an dieser Figur anstellen lassen? Später kehrt sie dann bei Besprechung des regulären Streckenzuges wieder, und ihre Flächenberechnung ist eine der dankbarsten Aufgaben für die Benutzung von π.

Das Ziehen der Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten bietet übrigens Schwierigkeiten, wegen des Spielraums, den auch ein wohlgeschärfter Bleistift erfordert. Man erleichtert dem Schüler seine Aufgabe, wenn man ihn daran gewöhnt, erst den Stift auf einen der Punkte zu setzen und dann das Lineal an den Stift anzulegen. Anfangs wird man dann den Stift noch einmal wegnehmen lassen, um die Distanz zwischen Lineal und Punkt zu beobachten, und dann nach erneutem Einsetzen des Stiftes das Lineal mit der ge-

[1]) Fr. Meyer, Progr. Nr. 230, S. 5.

merkten Distanz von dem anderen Punkte anlegen und die Verbindungslinie ziehen lassen. Auch das Ausschneiden und Aneinanderlegen geradliniger Figuren ist auf der Unterstufe (IV) ein vortreffliches Mittel, um die Handfertigkeit zu üben und in den Dienst anschauenden Geometrieunterrichts zu stellen. Als Beispiel erwähne ich das Ausschneiden dreier kongruenter Dreiecke aus drei übereinandergelegten Papierstücken und Aneinanderlegen dieser Dreiecke mit ihren drei verschiedenen Winkeln, um als deren Summe den Gestreckten erkennen zu lassen. Auch die Fundamentalkonstruktionen wie Strecke und Winkel halbieren, Winkel antragen, Lote fällen und errichten sowie die Konstruktion von Dreiecken aus Seiten und Winkeln mag hier schon praktisch erledigt werden und dabei das Bestimmtsein eines Dreiecks durch drei beliebige dieser sechs Stücke (Ausnahme!) und die Eindeutigkeit dieser Bestimmung (Ausnahme!) beobachtet werden. Einen Ersatz für die Kongruenzsätze können diese Übungen aber nicht bilden; denn wie sollte der Quartaner zu der Einsicht kommen, daß die Dreiecke, die er aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel konstruiert hat, gleich sind, anders, als daß er sie gegen das Licht hält und zur Deckung bringt. Beobachtet hat er bei der Konstruktion doch nur dies, daß er für die Gleichheit einiger Stücke nicht sorgen kann. Dagegen würde ich das Zerschneiden von Äpfeln durch Schüler, wie es Höfler zur Veranschaulichung von Eigenschaften der Kugel vorschlägt, nicht empfehlen, weil ein Apfel auch nicht annähernd kugelförmig ist, und der Sagittalschnitt mit seinen Einbuchtungen an Stiel und Blüte wirklich nur dem einen Kreis bedeuten kann, der schon über ein reichliches Maß von Abstraktionsfähigkeit verfügt[1]. Auch das Ausschneiden von Würfeln aus Äpfeln und Kartoffeln dürfte mehr spaßig als lehrreich sein.

In jedem Falle muß man nach höchstens einem Vierteljahr solchen Vorunterrichts zum eigentlichen Mathematikunterricht übergehen, bei welchem immer wieder zu betonen ist, daß die Autorität des Lehrers in diesem Fache nichts gilt, daß er mit Ausnahme einiger weniger allgemein zugestandener Axiome alles beweisen muß, was er behauptet, daß aber auch das Wahrscheinlichhalten von seiten des Schülers zwar die Richtung angeben mag, in der die Wahrheit zu suchen ist, daß die Wahrheit aber erst nachgewiesen werden muß, ehe sie als solche gelten darf. Und da soll man uns die „schwere logische Rüstung" von Voraussetzung (d. i. Konstruktion), Behauptung und Beweis nicht lächerlich machen, wie es die Neuerer tun. Nur dem über der Sache Stehenden erscheint sie komisch, aber der Schüler hat seine Freude daran, und vor allem gibt sie ausschließlich ihm lange Zeit hindurch das Gefühl der Sicherheit, daß da nichts erschlichen ist, daß der ganz wundervolle Bau der Mathematik in jeder Etage bis in die höchsten ihm erreichbaren Höhen hinauf logisch fest verankert ist.

Diese Beweise machen übrigens den Schülern erfahrungsgemäß viel Freude, mit Ausnahme höchstens der Kongruenzsätze, hinsichtlich derer man vielleicht zufrieden sein kann, wenn die Besseren den Beweis auch in korrekter Form wiedergeben können. Dagegen die Anwendung der Kongruenzsätze, schon bei der Begründung der Fundamentalkonstruktionen und der Sätze vom gleichschenkligen Dreieck, ebenso nachher bei der Lehre von den Vierecken, gewährt allen eine solche Befriedigung, daß sie einen in der Klasse gefundenen Beweis zu Hause mit einem gewissen Genusse sauber ausarbeiten und damit die Wahrheit der Be-

[1]) Vgl. Höfler, Didaktik, S. 98. Aufg. 4, Fig. 16!

hauptung erhärten: Dem Schüler macht alles Freude, was er kann, worin er eine Fertigkeit erlangt hat.

Hier auf der Unterstufe wie auch später sollte man immer die Figuren in derselben Weise benennen, ausgenommen natürlich den Fall, daß man einmal einen Auswendiglerner überführen will. Die Punkte werden ihrer Entstehung nach in alphabetischer Reihenfolge bezeichnet, so daß man aus dem Namen eines Punktes auf seine Entstehung schließen kann. Das erleichtert dem Schüler z. B. bei Verwandlungs- und Teilungsaufgaben das Zurechtfinden in der Figur, von Anfang an aber erkennt er, daß auch der Lehrer sich der Ordnung unterwirft und nicht willkürlich verfährt. Diese ordnungsmäßige Benennung erleichtert auch eine Übung, die sich als sehr nützlich erweist, nämlich die Wiederholung einer Konstruktion oder eines Beweises, ja auch die Erarbeitung eines solchen an einer nur vorgestellten, vom Lehrer in die Luft gezeichneten Figur. Der Vorstellungskraft wird da auch einmal etwas zugemutet und die Aufmerksamkeit stärker angespannt, als wenn die Figur zu sehen ist. Daß man diese Übungen um der Schwachen willen nicht übertreiben darf, ist selbstverständlich.

Als ein kleines Mittel zur Erleichterung des Unterrichts erweist sich oft auch der Gebrauch von karierten Heften. Ungeschickte Schüler entwerfen nicht selten unsinnig große oder winzig kleine Figuren. Dem kann man abhelfen dadurch, daß man die Längen in Zentimetern angibt, aber viel leichter, wenn man die Anzahl der Karolängen vorschreibt, und zudem lassen sich auch Winkel ganz gut mit Hilfe der Karierung bestimmen, und das Zeichnen aus freier Hand wird ebenfalls dadurch erleichtert.

Die Behandlung der Vierecke in Untertertia pflegt keinerlei Schwierigkeiten darzubieten. Die Schüler gewinnen dabei die nötige Fertigkeit im Anwenden der Kongruenzsätze, und die große Menge von Übungsmaterial in unserm Spieker bietet willkommenen Stoff. Gerade dieser inhaltlich einfache Lehrstoff aber bezeichnet die Stelle, wo man durchaus eine korrekte Handhabung der Sprache im mündlichen wie im schriftlichen Gebrauche erzwingen muß. Die Sprache sei anschaulich; also nicht: Ich trage auf AB von A aus a bis C ab, sondern: Ich trage a (es wird in den Zirkel genommen) von A aus (der Zirkel wird in A eingesetzt) auf AB (die andre Zirkelspitze senkt sich nach dieser Geraden) ab (die Marke wird gemacht, der Zirkel weggelegt) bis C (die Feder wird ergriffen und der Buchstaben an die Marke gesetzt). Oder: Ich schlage um M (der Zirkel wird in M eingesetzt) mit MA (der Zirkel wird bis A gespannt) über AB den Kreisbogen (der Kreisbogen wird geschlagen und beim Durchgange durch AB aufgehört). Die Bezeichnungen dürfen nicht ungenau sein. Beim Teilen einer Strecke nicht: „Ich trage in A an AB einen beliebigen Winkel an“ — kein Mensch trägt dabei einen Winkel an — sondern: „Ich ziehe durch A einen beliebigen Strahl“. Die Punkte auf diesem Strahl heißen Abtragepunkte, nicht Teilpunkte. Der Halbierungspunkt einer Strecke ist ihre Mitte, nicht ihr Mittelpunkt, wie jedermann die Mitte eines Kreisbogens von seinem Mittelpunkt unterscheidet. Lote werden von einem Punkte gefällt, aber in einem Punkte errichtet usw. Ganz schlimm ist es, wenn man Ausdrücke erlaubt wie: „Ich fälle h_a“, als ob h_a eine Abkürzung wäre für „die Höhe von A“. Die Folge davon ist, daß der Schüler später, wenn er beweisen will, daß AD Höhe ist, schreibt: Es ist zu beweisen, daß $AD = h_a$ ist; eine heillose Verwirrung! h_a ist eine gegebene Strecke, nie etwas anderes.

Es ist nicht Pedanterie, sondern das beste Mittel zur Einprägung der Lehrsätze, wenn man verlangt, daß die Begründung einer Gleichung in Form eines wörtlich zitierten Lehrsatzes erfolge. Dieser wird unter Anwendung einer Konjunktion (denn, also, demnach, folglich) mit vollen Zeilen über oder unter die wortfreie Gleichung geschrieben. In keinem mathematischen Handbuche — die billigen Schulbücher ausgenommen — fährt innerhalb einer Rechnung der Text unmittelbar hinter der Gleichung fort, weil durch das Isoliertstehen der Gleichungen die Rechnung an Übersichtlichkeit gewinnt. Begründungen sollte man auch nicht in Klammern setzen; solche Klammern sind mindestens überflüssig; Begründungen sind gerade in der Mathematik nichts Nebensächliches. Noch weniger begnüge man sich mit einzelnen, hinter die Gleichung gestellten Worten wie „Wechselwinkel" statt des Satzes: „Wechselwinkel bei Parallelen sind gleich"; denn der Schüler soll den Satz kennen, nicht der Lehrer. Am bedenklichsten freilich sind die oft beliebten Ausdrücke wie, $MA = MB$ „als Radien" oder „als homologe Stücke". Das ist eine sprachliche Ungeheuerlichkeit! Eine Gleichung ist ein Satz und kann nur als solcher gelesen werden. MA ist gleich MB als Radien! Worauf soll sich denn der Plural „Radien" beziehen? Ebensogut könnte man sagen: „Ich bin Dir gut als Freunde"!! Eine Gleichung ist ein Satz, demgemäß sind Gleichungen zu interpungieren. Die linke Seite ist das Subjekt, die rechte das Prädikat. Wenn man also in die Gleichung,

$$AD = AC + CD,$$

für CD die gleiche Strecke BC zu substituieren gedenkt, so muß die begründende Gleichung,

$$CD = BC,$$

und nicht,

$$BC = CD,$$

heißen; denn die zweite Gleichung soll etwas über die Größe von CD aussagen, nicht über die von BC.

Daß endlich bei allen schriftlichen Arbeiten, auch bei Extemporalien, zwar nicht Schönschrift, aber doch ordentliche, lesbare Schrift gefordert werden muß, ist selbstverständlich. So viel Ehrerbietung ist der Schüler dem Lehrer schuldig, und der Anstand verlangt es. Und doch, wie oft bekommt man Extemporalien in die Hand, deren Schrift sich der Schüler in einem Briefe an seine Verwandten niemals gestatten würde! Dergleichen Ungezogenheiten darf ein Erzieher nicht dulden.

Es folgt nun die Kreislehre. Sie ist namentlich in ihrem zweiten Teile bemerkenswert durch die Menge der indirekten Beweise, und mancher fürchtet sich daher vor diesem Pensum. Mit Unrecht. Denn gerade wenn diese Beweisform häufig und nicht als etwas Ungewöhnliches auftritt, so gehen die Schüler gar nicht ungern darauf ein. Allerdings empfiehlt es sich, um der Klarheit und Durchsichtigkeit eines solchen Beweises willen, am Schlusse immer die ganze anfangs aufgestellte Annahme in ihrer vollen Formulierung wiederholen zu lassen, z. B.: also ist unsre Annahme, AB hätte mit dem Kreise M noch einen zweiten Punkt gemeinsam, falsch, und es bleibt nur übrig: AB hat mit dem Kreise nur A gemeinsam. Ich habe wiederholt Schülergenerationen gehabt, die nachher eine besondere Vorliebe für den indirekten Beweis bekundeten.

Bei der Behandlung des Satzes von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen versäumt man natürlich nicht, die Figur beweglich vorstellen zu lassen. Der

Scheitelpunkt gleitet auf dem Bogen entlang, während die Schenkel durch dessen Endpunkte gehen. Als Anschauungsmittel kann eine Schnur dienen, die in dem einen Endpunkte des Bogens mit einem Nägelchen befestigt ist und am andern durch eine eingeschraubte Öse läuft. Besser aber ist ein Winkel aus zwei Holzstäben, die man an zwei eingeschlagenen Nägelchen nur anlegt und an ihnen hinschiebt, weil dann der Satz vom Winkel der Sehne mit der Tangente sofort als Spezialfall jenes Satzes in die Augen springt. Auch kann man durch Vergrößern des Winkels dann leicht die Höhe des Kreisbogens als Funktion der Winkelgröße ersichtlich machen, wenn man mit dem Scheitelpunkt des Winkels zugleich die Kreide herumführt. Selbstverständlich ist dieser Satz nicht der erste, dessen Figur Beweglichkeit bekommen muß; kein Lehrer wird schon beim gleichschenkligen Dreieck, beim Parallelogramm, Rhombus, Rechteck, Trapez auf solche Beweglichkeit der Figur verzichten wollen oder gar beim Satze vom umbeschriebenen Kreise eines Dreiecks zu zeigen versäumen, wie der Mittelpunkt bei Vergrößerung irgend eines Dreieckswinkels auf dem Mittellot der Gegenseite aus der Fläche des Dreiecks hinausrückt. Eher ist vor einem zu reichlichen Gebrauche von Modellen zu warnen; er ist zwar modern, aber der Junge wird dadurch nicht klüger, daß man ihn für zu dumm hält. — Bei der Anwendung des genannten Peripheriewinkelsatzes — es empfiehlt sich z. B., mit seiner Hilfe gleich den Satz vom Sehnenviereck zu beweisen, indem man die Diagonalen zieht — fällt es manchmal einem Schüler schwer, den Kreisbogen anzugeben, auf welchem ein Peripheriewinkel steht. Da hilft man sich mit einem Scherz: Ein Winkel hat Schenkel, an die Schenkel gehören Füße — man läßt sie zeichnen — wo die Schenkel zusammenstoßen, da malt man den Bauch hin, Hals, Kopf und Arme werden angefügt, und lachend schaukelt sich die Figur auf ihrem Kreisbogen, wie ein Schaukelpferd auf seinen Kufen. Dergleichen erregt Heiterkeit, erspart eine langatmige Erklärung und — hilft.

Die Obertertia bringt zunächst die Lehre von den regulären Polygonen. Sie sind nur zu behandeln, wenn man sie als Spezialfälle des regulären Streckenzuges betrachtet. O. Apel hat bereits in einem sehr beachtenswerten Programm[1]) gezeigt, wie außerordentlich dankbar dieses Kapitel ist. Die schöne Regelmäßigkeit macht diese Figuren dem Schüler besonders interessant. Der reguläre Streckenzug schließt sich manchmal gar nicht, manchmal beim ersten, manchmal beim zweiten, dritten, n-ten Umlauf. Der Schüler bemerkt, wie das vom Zentriwinkel abhängt. Nun teilt man einen Kreis mit dem Transporteur in 9 gleiche Teile. Was für eine Figur entsteht, wenn man die Teilpunkte nacheinander verbindet? ferner, wenn man 1, 2, 3 Teilpunkte überspringt? Was für eine Figur entsteht aber, wenn man 4, 5 oder 6 Teilpunkte überspringt? Wievielerlei reguläre Figuren entstehen also überhaupt aus 9 solcher Teilpunkte? Wie viele aus 10, 13, n Teilpunkten? Wie groß sind die Zentriwinkel? Wie groß also die Streckenzugswinkel? z. B. beim Heptagramm? Wie viele Seiten hat es? Kurz, dieses Gebiet ist so mannigfaltig, daß man sich nur hüten muß, nicht zu viel Zeit darauf zu verwenden. Denn wichtiger ist das folgende Thema: Flächengleichheit.

An Lehrsätzen enthält dieser Abschnitt eigentlich nur drei: Der erste ist der von der Gleichheit zweier Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und Höhe. In seinem etwas

[1]) O. Apel, Über die Behandlung einiger mathematischer Kapitel im Unterricht. Programm d. Städt. Oberrealschule, Halle, 1903.

langweiligen Beweise spielen zwei kongruente Trapeze eine Rolle, die man mit verschiedenfarbiger Kreide hervorzuheben pflegt und zur Erheiterung mit ein paar Strichen zu zwei lustigen Schweinchen ergänzen mag. Aber nun kommen die schönen Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, die von den Schülern meist gern ausgeführt werden, wenn man die Schwierigkeit nicht übertreibt. Da tritt als Helferin immer wieder dieselbe Ortslinie auf, wenn sie auch erst in der folgenden Klasse diesen Namen bekommt, und die Fläche des Dreiecks wird, noch ehe sie berechnet ist, als Funktion von Grundlinie und Höhe erkannt. Soll die Grundlinie kleiner werden, so muß die Höhe wachsen, und umgekehrt, das macht sich der Schüler vor Lösung der Verwandlungsaufgabe klar. Man erleichtert ihm die Auffindung der Konstruktion, wenn man ihn darauf aufmerksam macht, daß für ein angesetztes Dreieck ein gleich großes wieder abgeschnitten werden muß und umgekehrt, und es ihm nun nahelegt, die gesuchte Linie erst einmal nach dem Augenmaße zu ziehen. Mit Leichtigkeit findet er dann die Parallele, die für die Gleichheit des angesetzten und abgeschnittenen Stückes sorgt.

Auf einen formellen Beweis für diese Konstruktionen wird man, abgesehen von den einfachsten Fällen, wohl verzichten. Um aber bei zusammengesetzten Aufgaben ein planloses Ziehen von allerlei Verbindungslinien und Parallelen zu vermeiden, empfiehlt sich die Konstruktion mit Planangabe. Wie sie aussieht, zeigt ein Beispiel: Es sei ein Fünfeck in ein Rechteck zu verwandeln. Die Konstruktion lautet: ABCDE sei das gegebene Fünfeck. Um ABCDE in ein Viereck zu verwandeln, ziehe ich EC und durch D die Parallele dazu, welche BC in F treffe[1]); verbinde ich nun E mit F, so ist

$$ABFE = ABCDE.$$

Um ABFE in ein Dreieck zu verwandeln, ...; ziehe ich EG, so ist

$$EAG = ABFE.$$

Um EAG in ein Rechteck zu verwandeln, ..., dann ist AGHI das verlangte Rechteck.

Diese Form läßt den Plan der Konstruktion auch äußerlich scharf hervortreten. Sehr nützlich erweist sich bei derartigen Aufgaben die alphabetische Benennung der nacheinander auftretenden Punkte. Es ist ein leichtes, an einer so benannten Figur die Richtigkeit der Konstruktion zu prüfen, so daß man bei Extemporalien auf deren Beschreibung zuweilen verzichten kann; auch erleichtert sie dem Schüler das Wiederzurechtfinden in einer in der Schule angefertigten Figur.

Schöne Aufgaben ergeben sich, wenn man die regulären Polygone zu Teilungs- und Verwandlungsaufgaben mit heranzieht. Die Benutzung der besonderen Eigenschaften dieser Figuren führen zu mannigfaltigen und manchmal überraschend einfachen Lösungen, an denen die Schüler ihre Freude haben, z. B. ein reguläres Sechseck in ein Rechteck zu verwandeln.

Der Satz von den Ergänzungsparallelogrammen erleichtert die Aufgabe, ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln mit vorgeschriebener Grundlinie oder Höhe. Bei der Ausführung dieser Aufgabe (2 Arten) erlaube man dem Schüler, die Figur des genannten Satzes freihändig vorher irgendwo abseits ins Heft zu zeichnen und sich darin das gegebene

---

[1]) Der Konjunktiv ist nicht nur berechtigt, er ist notwendig. Man muß sagen: „in einem Punkte trifft", aber „in F treffe", weil der Konjunktiv den Wunsch ausdrücken muß, den Treffpunkt mit F und nicht mit P oder X zu bezeichnen.

und das gesuchte Parallelogramm zu schraffieren. Gibt man diese Erlaubnis nicht, so zeichnet der Schüler auf die Bank oder aufs Löschblatt, und da ist doch nicht der geeignete Ort dazu.

Nun aber kommt der Pythagoreische Lehrsatz! Da wird man natürlich, um das Interesse des Schülers wachzurufen, es nicht unterlassen, die Sagen zu berichten, die sich an dessen Auffindung knüpfen (vgl. auch Eurekapfeil!). Auf dem Gymnasium wird man aber auch die Namen Kathete und Hypotenuse etymologisch erklären. Ich pflege meinen Schülern eine Mauer anzuzeichnen, auf der der Maurer steht und an der Schnur das Bleilot herabläßt (κατά und ἵημι), und dabei gleichzeitig auf den Zusammenhang der Wörter löten und loten hinzuweisen. Jetzt erst wird der Ausdruck: „Ein Lot fällen“ verständlich. Das Wort Hypotenuse ist eine Aktivform[1]), es bedeutet die unten Spannende. Man braucht dabei nun nicht an die Töchterschule zu denken, vielmehr bezeichnet der Ausdruck offenbar die Sehne eines Bogens, die den Bogen unten, d. h. an seinen beiden Enden spannt, in diesem Spezialfalle die Sehne des Halbkreises, der zur Konstruktion des rechten Winkels gedient hat. Damit stimmt es überein, wenn bei den Griechen das Wort nicht nur von der Gegenseite eines Rechten gebraucht wird, es bedeutet eben schlechthin Sehne.

Was den Beweis des Lehrsatzes anlangt, so kann man sich wohl mit dem Euklidischen begnügen und mehrere andere, z. B. den sehr hübschen „Rahmenbeweis“ von Höfler nur als gelegentliche Zugabe benutzen. Man wird auf die besondere Wichtigkeit des Lotes hinweisen, welches das Hypotenusenquadrat in eben die Teile zerschneidet, welche einzeln den Kathetenquadraten gleich sind, aber man versäume doch auch nicht, im Beweise die Voraussetzung, daß das Dreieck rechtwinklig ist, ausdrücklich anzuwenden.

Die Wichtigkeit des Satzes besteht vor allem darin, daß er uns mit Flächen zu rechnen gestattet; denn die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat ist zwar als Abschluß der Verwandlungsaufgaben von großer Bedeutung, für sie bedarf man aber des Pythagoreischen Satzes selbst nicht. Wie der Schüler früher an Strecken und Winkeln die vier Rechnungsarten ausgeübt hat, so lernt er jetzt Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Flächen. Am interessantesten gestaltet sich die Multiplikation. Natürlich kommt es dabei auch darauf an, sie möglichst einfach auszuführen und die Regelmäßigkeit des gegebenen Multiplikandus auszunutzen. Der Schüler multipliziert mit 2 und findet das Quadrat über der Diagonale als Lösung[2]). Er multipliziert mit 3, indem er die Diagonale auf der Quadratgrundlinie abträgt, den Abtragepunkt mit der über dem Ausgangspunkt liegenden Quadratecke verbindet und über der Verbindungsstrecke das Quadrat errichtet. Er multipliziert mit 4, und ein findiger Kopf entdeckt, daß er zu dem Ende einfach über der verdoppelten Grundlinie das Quadrat zu errichten braucht. Es folgt natürlich die Frage: Welche Multiplikationen lassen sich ebenso einfach ausführen? Und nun macht es den Schülern viel Spaß, irgendeinen Multiplikator passend zusammenzusetzen. Es entsteht ein lustiger Wettstreit, wer die

[1]) Daher ist die Erklärung von M. C. P. Schmidt in der Naturw. Wochenschrift IV Nr. 14 (1905), die Höfler anführt, offensichtlich falsch, wenn sie an eine Harfensaite erinnert, die von unten herauf gespannt wird.

[2]) Auf dem karierten Papier sieht er es zusammengesetzt aus vier solcher Dreiecke, wie ihrer zwei das gegebene Quadrat bilden.

kürzeste Lösung findet, z. B. $33 = 2 \cdot 16 + 1$ oder $25 + 2 \cdot 4$. Dabei erweist sich das karierte Heft wieder als überaus nützlich, wenn man eins der Karos als Multiplikandus betrachtet. Der Multiplikator $19 = 16 + 3$ ist etwas unbequem. Man macht nun die Schüler darauf aufmerksam, daß man eine Zahl doch auch als Differenz darstellen könne, und rasch wird gefunden, $19 = 100 - 81$, und damit eine bequeme Konstruktion des verlangten Quadrats, deswegen bequem, weil man den Mittelpunkt des Halbkreises nicht erst zu suchen braucht. Die Frage, welche Multiplikation sich in derselben Weise ausführen lasse, führt auf $17 = 81 - 64$, auf $15 = 64 - 49$, $13 = 49 - 36$, und bald strecken sich viele Hände in die Höhe, die Schüler haben gefunden, daß die Differenzen der aufeinander folgenden Quadratzahlen die Reihe der ungeraden Zahlen bilden. Der Hinweis darauf, daß auf dem karierten Papier das Hinzufügen eines Hakens von 3 Karos erforderlich ist zur Bildung des Quadrats über der doppelten Karolänge, daß ein Haken von 5 Karos dieses wieder zum nächstgrößeren Quadrat vervollständigt u. s. f., gibt dieser Erkenntnis die wünschenswerte Anschaulichkeit.

Die Berechnung von Flächen wird oft[1]) fälschlich als Ausmessung von Flächen bezeichnet. Demgegenüber wird man darauf aufmerksam machen müssen, daß man jede Größe nur mit einer ihr gleichartigen messen kann. Selbst wo scheinbare Ausnahmen stattfinden, wenn wir z. B. die Zeit mit Winkeln der Uhrzeiger messen, ist dies der Fall; denn wir messen sie in Wahrheit mit der Zeit, die der Zeiger braucht, um einen gewissen Winkel zu durchlaufen. Flächen könnte man also nur mit einem Quadratmeter oder Quadratzentimeter aus Pappe oder anderem Material wirklich messen. Für die Berechnung des Rechteckinhaltes lautet der Satz: Man findet die Maßzahl für den Inhalt eines Rechtecks, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multipliziert; Benennung ist das Quadrat über dem benutzten Längenmaße. Der Satz: „Rechteck gleich Grundlinie mal Höhe“, ist nur eine Abkürzung, die man in der Folge statt des langatmigen Lehrsatzes gestatten mag, aber erst, wenn seine Unsinnigkeit erkannt ist. Auch Höfler hebt in seiner Didaktik[2]) ganz mit Recht hervor, daß man Längen, also benannte Zahlen, nicht miteinander multiplizieren könne. Der Beweis des Lehrsatzes wird zunächst für ganze Zahlen geliefert und ist der bekannte Zählbeweis. Dann folgt ein Beispiel (etwa die Heftseite), in welchem die Längenmaße in der Form von einstelligen Zentimeterdezimalbrüchen gegeben sind, weil in diesem Falle die Zurückführung auf ganze Maßzahlen die Worte „Millimeter“ und „Quadratmillimeter“ gestattet, dann ein Beispiel, in welchem gewöhnliche Zahlenbrüche vorkommen, und endlich der allgemeine Fall, in welchem die Maßzahlen $\frac{x}{y}$ und $\frac{x}{u}$ heißen. Man erhält als Resultat zunächst

$$ABCD = xu \cdot zy \text{ Quadraten über } \frac{1}{yu}\,m.$$

Dies Ergebnis muß nun reduziert werden auf Quadrate über m, und zu dem Ende ist die Reduktionszahl festzustellen. Das kleinere Maß $\frac{1}{yu}$ m ist in der Grundlinie eines über m gezeichneten Quadrats yu mal enthalten, ebenso in der Höhe yu mal. Das Quadrat über m ent-

[1]) Auch in unserm Spieker.
[2]) Höfler, Didaktik S. 151.

hält also yu · yu Quadrate über $\frac{1}{yu}$ m; daher ist yu · yu die Reduktionszahl. Reduziert man obiges Resultat, so ergibt sich

$$ABCD = \frac{xu \cdot zy}{yu \cdot yu} \text{ Quadraten über m,}$$

$$= \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{u} \text{ Quadraten über m.}$$

Der Fall der Inkommensurabilität der beiden Längen bleibt für die Oberklassen vorbehalten.

Die Berechnung der übrigen geradlinig begrenzten Figuren hat nun keine Schwierigkeit; die regulären Drei-, Vier-, Sechs- und Achtecke geben schönes Übungsmaterial. Beim Dreieck, Parallelogramm und Trapez vergesse man die Beweglichkeit der Figuren nicht, es ist hier wieder eine treffliche Gelegenheit für die Einübung des Funktionsbegriffs.

Jetzt erst hat man die Möglichkeit, dem Schüler zu erklären, warum man die zweite Potenz von a als a-Quadrat bezeichnet, jetzt erst darf die Behauptung des Pythagoreischen Lehrsatzes geschrieben werden in der Form $a^2 = b^2 + c^2$ [1]. Jetzt erst ist die Konstruktion des Quadrats über der Summe und Differenz zweier Strecken und der Differenz zweier Quadrate am Platze, weil ihr Vergleich mit den bekannten algebraischen Formeln möglich ist.

Das geometrische Pensum der Untersekunda enthält die Proportionalität der Strecken, die Ähnlichkeitslehre, Proportionen am Kreise, Rektifikation und Quadratur des Kreises und Dreieckskonstruktionen. Der Proportionalsatz mit seinen schönen Erweiterungen auf unbegrenzte Schenkel, auf viele Schenkel und auf viele Parallelen macht den Anfang. Auch hier bleibt die Inkommensurabilität der Strecken außer Betracht. Es muß aber auf die Notwendigkeit hingewiesen werden, daß man den ganzen Abschnitt mit der Definition beginnt: Unter dem Verhältnis zweier Strecken versteht man das Verhältnis ihrer Maßzahlen. Mancher Schüler hat schon erklärt, AB : BD = am : bm = a : b, ergäbe sich durch Kürzen, als ob 3 Meter : 4 Meter durch Kürzen mit „Meter“ 3 : 4 ergäbe! — Nach Erledigung der Sätze von der Winkelhalbierenden eines Dreiecks und der des Außenwinkels wäre es eine Unterlassungssünde, wollte man die Verallgemeinerung, nämlich den Satz des Apollonius hier unterdrücken. Sein Beweis ist nicht nur die schönste Gelegenheit zur Anwendung der eben durchgenommenen Lehrsätze, er selbst bietet auch eine Möglichkeit, die Proportionalität der Strecken mit den Dreieckskonstruktionen in engeren Zusammenhang zu bringen. Dem gleichen Zwecke wird natürlich auch der Schwerliniensatz dienstbar gemacht und seine drei Umkehrungen entdeckt und bewiesen.

In der Ähnlichkeitslehre lernt der Schüler, daß es formgleiche Figuren gibt, die nicht kongruent sind, wie er früher flächengleiche Figuren kennen gelernt hat, die nicht kongruent waren; er bemerkt die Zusammengesetztheit des Kongruenzzeichens. Wohl hat er auch schon vorher den Begriff der Ähnlichkeit benutzt: Menschen sind einander ähnlich, ein Bild ist seinem Originale ähnlich, die meisten Rechtecke sind einander ähnlich, manche mehr, manche weniger, manche Rhomben sind einander sehr ähnlich — da kommt die Mathematik und

[1]) Spieker gestattet sich in § 146 ff. eine Prolepsis; vgl. auch Übungen VIII Nr. 9, 10 u. 11.

säubert den unklaren Ähnlichkeitsbegriff[1]) durch Definition. Sie duldet kein mehr oder weniger ähnlich, kein sehr ähnlich, sie kennt nur ähnlich und unähnlich. Die Ähnlichkeit zweier n-Ecke ist schlechthin nichts anderes als der Inbegriff von 2n Gleichungen, nämlich n Proportionen und n Winkelgleichungen. Daß es in diesem Sinne ähnliche Figuren überhaupt gibt, lehrt erst der „Fundamentalsatz der Ähnlichkeitslehre". Auf ihn stützen sich die vier Ähnlichkeitssätze. Sie sagen aus, daß die sechs durch das Ähnlichsein zweier Dreiecke behaupteten Gleichungen nicht unabhängig von einander sind, daß vielmehr zwei beliebige von ihnen die andern zu Folge haben. Diese Erkenntnis kann natürlich nur erreicht werden, wenn man alle möglichen Kombinationen zu je zwei Gleichungen untersucht und dabei findet, daß sich nur vier verschiedene Fälle ergeben, eben jene, die den Kongruenzsätzen entsprechen. Es ist daher ein Unding, sich mit zwei oder mit einem Ähnlichkeitssatze „begnügen" zu wollen, weil die andern kaum gebraucht würden. Überdies sind die Beweise bei gleicher Hilfskonstruktion (Abtragen einer Seite und Ziehen der Parallele) einander so ähnlich, daß nach Erledigung des ersten die andern sofort abgefragt werden können.

Der Satz, daß in ähnlichen Dreiecken homolog gezogene Strecken proportional sind zweien homologen Seiten, ist der Inbegriff von unzählig vielen Sätzen und darf nicht nur auf homologe Höhen, Winkelhalbierende, Radien, Schwerlinien der um-, ein- und anbeschriebenen Kreise beschränkt werden. Im Gegenteil! Man teile auch einmal die Grundlinien im Verhältnis 3 : 4 und ein anderes Paar homologer Seiten im Verhältnis 5 : 6, und weise den Satz für die Verbindungsstrecken der Teilpunkte nach, oder man beweise ihn für die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der ein- und umbeschriebenen Kreise. So erst kommt seine Universalität einigermaßen zum Bewußtsein, und der fruchtbare Begriff des Proportionalitätsfaktors gewinnt Anschaulichkeit. Wenn die „Ähnlichkeit in perspektivischer Lage" der Polygone erledigt ist, wird man gut tun, noch einmal Polygone ohne solche Lage zeichnen zu lassen unter Benutzung bestimmt gegebener Proportionalitätsfaktoren (3, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$), auch lasse man ein an die Wandtafel gezeichnetes Polygon mit Hilfe des Faktors $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{12}$ von den Schülern ins Heft zeichnen. Manchem Schüler geht dabei erst ein Licht darüber auf, daß „proportional" nichts weiter ist als „gleich nach Multiplikation mit dem Proportionalitätsfaktor". Am Schlusse jeder dieser Konstruktionen bleiben immer drei Gleichungen übrig, die nicht erfüllt werden können, deren selbstentstandene Richtigkeit also nachgewiesen werden muß.

Die Betrachtung der Flächen ähnlicher Polygone bietet wieder eine schöne Gelegenheit zur Übung des Funktionsbegriffs. Während homolog gezogene Strecken proportional einer wachsenden Seite zunehmen, wachsen homologe Flächen schneller, nämlich proportional dem Quadrate dieser Seite. Nichts hindert, dieses verschiedene Wachstum auf dem karierten Papier graphisch darstellen zu lassen, verstanden wird aber diese Darstellung nur von den besseren Schülern; der Gedanke, die Größe einer Fläche durch die Länge einer Strecke wiederzugeben, hat gerade in diesem Zusammenhange etwas Verwirrendes. Dagegen ist der verallgemeinerte Pythagoreische Lehrsatz eine Sache, an der alle Schüler ihre Freude haben, weil nun der Satz von der Quadratsumme aus seiner Isoliertheit herausrückt. Höfler[2]) gibt

[1]) Auf diesen unklaren Ähnlichkeitsbegriff stützt sich Höfler sehr mit Unrecht auf der Unterstufe, S. 147.

[2]) Höfler, Didaktik, S. 365.

einen reizenden Beweis B. Bolzanos für diesen Satz wieder, den ich zu Nutz und Frommen meiner Schüler hier wiederhole: Fällt man im rechtwinkligen Dreieck die Höhe, so sind bekanntlich die Teildreiecke unter sich und dem ganzen Dreieck ähnlich, und zwar sind die Seiten des ganzen Dreiecks die Hypotenusen der drei Dreiecke, also homolog. Die Summe der Teildreiecke bildet aber geradezu das ganze Dreieck. Der Beweis ist fertig. Natürlich kann man daraus nun die Summengleichung für die Quadrate arithmetisch folgern und hat damit einen sehr eleganten Beweis für den speziellen Pythagoreischen Lehrsatz.

Das Aufgabenmaterial für das Gebiet der Ähnlichkeitslehre ist bekanntlich sehr reichhaltig. Man muß sich aber auf dieser Stufe beschränken. Indessen ein Quadrat durch ein konzentrisches Quadrat oder ein reguläres Sechseck durch ein konzentrisches, überhaupt ein Polygon durch ein ihm ähnliches in perspektivischer Lage zu halbieren, wird man sich nicht gern entgehen lassen.

Unmittelbar an die Ähnlichkeitslehre schließt sich die Rektifikation des Kreises. Reguläre Polygone von gleicher Seitenzahl sind ähnlich; ihre Umfänge verhalten sich daher wie die Radien der umbeschriebenen Kreise, also auch wie deren Durchmesser. Da die Peripherie eines Kreises betrachtet werden kann als ein reguläres Polygon von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, so verhalten sich die Peripherien zweier Kreise wie deren Durchmesser, daher

$$P : P' = d : d',$$
$$\text{oder} \quad P : d = P' : d'.$$

Das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser ist also in allen Kreisen dasselbe. Man bezeichnet es mit π (Anfangsbuchstabe von περιφέρεια). Es ist demnach

$$\pi = \frac{P}{d} = \frac{P}{2r}, \text{ mithin } P = 2\pi r.$$

Um den Ziffernwert für π zu berechnen [1]) kann man einen Kreis mit dem Radius 1 m wählen, da das Verhältnis $\pi = \frac{P}{d}$ in allen Kreisen dasselbe ist. Zeichnet man i n diesen Kreis ein reguläres n-Eck, durch Verbinden der Halbierungspunkte der Bogen mit den benachbarten Ecken ein reguläres 2n-Eck usw., so sieht man, daß die Umfänge der regulären Polygone mit der Anzahl der Seiten wachsen, aber nicht ins Unendliche, sondern sie bleiben immer noch kleiner als die Peripherie des Kreises. Bei fortgesetzter Vermehrung der Seiten des Polygons strebt also der Umfang der einbeschriebenen Polygone einer Grenze zu, diese Grenze ist der Kreis.

Beschreibt man andererseits u m diesen Kreis ein reguläres n-Eck, so ist der Umfang dieses n-Ecks größer als die Peripherie [2]). Konstruiert man um denselben Kreis das reguläre 2n-Eck dadurch, daß man mit Hilfe der Tangenten durch die Mitten der Bögen die Ecken des n-Ecks abschneidet, so sieht man leicht, daß der Umfang des 2n-Ecks kleiner ist

---

[1]) Daß π zwischen 3 und 4 liegt, zeigt man an einem Kreise mit einbeschriebenem reg. Sechseck und umbeschriebenem Quadrat.

[2]) Dieser Satz ist nicht so evident wie der vorige, kann aber bewiesen werden, indem man den Kreis als umbeschriebenes reguläres Unendlicheck auffaßt. Will man das nicht, so muß man zuerst die Kreisfläche berechnen, aus der man natürlich ebensogut π gewinnen kann.

als der des n-Ecks. Vermehrt man auf diese Weise die Eckenzahl des regulären umbeschriebenen Polygons immer weiter, so werden die Umfänge der Polygone immer kleiner, aber nicht beliebig klein, sondern sie nähern sich wiederum einer Grenze, dem Kreise. Somit liegt die Länge der Kreisperipherie zwischen den Umfangslängen des einbeschriebenen und umbeschriebenen Polygons. Wählt man die Eckenzahl beider recht hoch, so stimmen die Maßzahlen für beide Umfänge bald auf einige Dezimalen überein. Da die Maßzahl für die Länge der Kreisperipherie zwischen beiden Umfangslängen liegt, so müssen die den beiden letzteren gemeinsamen Dezimalen auch der Maßzahl für die Länge der Kreisperipherie angehören.

Nachdem gezeigt ist, daß die Seite des regulären 2n-Ecks sich aus der des n-Ecks berechnen läßt nach der Formel $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$, berechnet man aus der Seite 1 des regulären Sechsecks die Seite $s_{192} = \sqrt{(2 - \sqrt{[2 + \sqrt{(2 + \sqrt{[2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}]})}]})}$ und nach einer gründlichen Repetition des Quadratwurzelziehens erhält man $U_{192} = 2 \cdot 3{,}141\,4176\ldots$

Nachdem weiter gezeigt ist, daß die Seite des umbeschriebenen regulären Polygons aus der Seite des demselben Kreise einbeschriebenen regulären Polygons von gleicher Eckenzahl berechnet werden kann nach der Formel $s_u = \frac{2sr}{\sqrt{4r^2 - s^2}}$, oder für den Radius 1

$$s_u = \frac{2s}{\sqrt{4 - s^2}},$$

folgt $\qquad U'_{192} = 2 \cdot 3{,}141\,8381\ldots,$

daher ist $\qquad \pi = 3{,}141\ldots$

Nun wird π auf 7 Stellen angegeben, aber auch die Näherungswerte $3\frac{22}{7}$ und $\frac{355}{113}$, von denen der letzte bis auf 6 Dezimalen genau ist.

Die Proportionen am Kreise werden rasch erledigt. Der goldene Schnitt gibt zu historischen und ästhetischen Bemerkungen Anlaß[1]). Er ermöglicht auch die Konstruktion des regulären Zehnecks, die man zwar auf analytischem Wege finden, nachher aber als Konstruktion mit angehängtem Beweise ausführen läßt. Nachdem die Gleichschenkligkeit der beiden Teildreiecke des gleichschenkligen Dreiecks mit Hilfe der konstruierten Proportion erwiesen ist, liefert die Anwendung der Lehrsätze von den Basiswinkeln und vom Außenwinkel an der Spitze die Gleichung $5AOB = 180^0$, und selten ist eine Schülergeneration so stumpf, daß sie nicht mit einer Art freudigen Erstaunens den bestimmten Ziffernwert 36^0 für den Zentriwinkel resultieren sähe.

Weitaus der wichtigste Teil des geometrischen Pensums der Untersekunda sind die Dreieckskonstruktionen mit ihrer Verwendung der geometrischen Örter. Wir beschränken uns zunächst auf fünf Ortslinien: 1) der Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat, ist der Kreis, der mit dem gegebenen Abstande um den gegebenen Punkt geschlagen werden kann; 2) der Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen

[1]) Die „blauen Türme" unserer Marktkirche, die ursprünglich der Gertraudenkirche angehörten, besaßen ehedem einen Kranz kleiner Türmchen, die die Seitenlinie der langen Turmhelme nach dem goldnen Schnitt teilten.

Punkten gleichen Abstand hat, ist das Mittellot der Verbindungsstrecke der gegebenen Punkte; 3) der Ort eines Punktes, der von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat, ist das Parallelenpaar, welches in dem gegebenen Abstande zu der gegebenen Geraden gezogen werden kann; 4) der Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Geraden gleichen Abstand hat, ist das Halbierendenpaar des Winkels der beiden gegebenen Geraden; 5) der Ort eines Punktes, von dem aus eine gegebene Strecke unter einem gegebenen Winkel erscheint, ist das kongruente Kreisbogenpaar, welches die Endpunkte der Strecke zu Endpunkten hat und den gegebenen Winkel faßt. In allen Fällen ist nachzuweisen, daß jeder Punkt der Ortslinie die verlangte Eigenschaft hat, und daß kein Punkt außerhalb der Ortslinie diese Eigenschaft besitzt.

Die Lösung einer Konstruktionsaufgabe erfolgt in vier Teilen: Analysis, Determination, Konstruktion und Beweis.

In der Analysis wird α) ein beliebiges Dreieck als das gesuchte angenommen und die drei gegebenen Stücke darin aufgezeigt, β) etwa gegebene Summen und Differenzen dargestellt γ) die Fundamentalstrecke gewählt und δ) für die gesuchten Ecken, eventuell für notwendige Hilfspunkte, je zwei Ortslinien mit gehöriger Begründung angegeben.

In der Determination [1]) werden die Grenzen für die gegebenen Stücke angegeben, innerhalb deren die Konstruktion des Dreiecks möglich ist, d. h. die Bedingungen, unter welchen die Ortslinien sich schneiden und rechnerisch ermittelte Strecken einen reellen Wert besitzen. Auch wird in ihr untersucht, welche Beziehungen der einzelnen Stücke zu einander dem Dreieck besonders auffallende Gestalt geben, und ob sich etwa verschiedene brauchbare Lösungen ergeben.

In der Konstruktion werden die in der Analysis angegebenen Ortslinien wirklich und vollständig gezeichnet und im Beweise gezeigt, daß das gefundene Dreieck die gegebenen Stücke nach Größe und Lage enthält. Um planlosem Beweisen vorzubeugen, läßt man mit Nutzen den Beweis für die Richtigkeit einer Konstruktion auch schon früher immer mit den Worten beginnen: Es ist zu beweisen, daß ...

Die Ausführung, wenn sie verlangt wird, muß formvollendet sein. Sie wird aber nicht immer gefordert werden. Man kann sich mit sehr kurzen Andeutungen begnügen, wenn es sich darum handelt, in einer Stunde eine große Zahl von Aufgaben nacheinander zu lösen. Es kann z. B. die Aufgabe: $\triangle$ aus $b - c = d$, h_b, $\beta - \gamma = \delta$ gelöst werden in der kurzen Form: $EC = d \left(BD \perp EC \text{ und } BD = h_b;\ E\widehat{B}C = \dfrac{\delta}{2}\right) B\ (CE;\ AB = AC)\, A$. Recht zweckmäßig hat es sich erwiesen, wenn sich die Schüler aus einer Visitenkarte eine Dreiecksschablone anfertigen: Ein Dreieck mit den Winkeln 80^0, 60^0 und 40^0 wird herausgeschnitten und die Ecktransversalen in der Nähe jeder Seite durch einen Nadelstich bezeichnet, der in ihrer Verlängerung liegt und die Bleistiftspitze durchläßt. Der Schüler bekommt durch Benutzung dieser Schablone, deren Rand noch als Lineal dient, schnell eine brauchbare Figur.

[1]) Sie bleibt in Untersekunda meist noch fort.

Leider ist seit Einfügung der analytischen Geometrie in den Lehrplan des Gymnasiums die Zeit für diese Dreieckskonstruktionen und besonders für die Determination in den Oberklassen stark verkürzt. Das ist sehr zu beklagen. Denn sie gerade gaben Gelegenheit, das ganze planimetrische Pensum anzuwenden und zu wiederholen. Durch häufige Anwendung seiner Kenntnisse sieht aber der Schüler sein Wissen sich zum Können erweitern, er bekommt Lust zum Lernen und damit ist er für unsere Disziplin gewonnen. Die moderne Geringschätzung dieser Aufgaben gründet sich auf die Erinnerung an früher gelegentlich vorgekommene Ausartungen, bei denen es auf die „Entdeckung eines Kniffs" ankam; sie vergißt, daß kein Teil der Planimetrie so geflissentlich mit der Beweglichkeit der Figur arbeitet wie die Determination einer Dreiecksaufgabe. Durch anderweitige Beschränkung des planimetrischen Lehrstoffes dafür Zeit zu schaffen, ist aber nicht angängig, denn dadurch würde man die bildende Kraft der Schulmathematik auf das empfindlichste schädigen. „Das Wesen der elementaren Planimetrie ist dadurch gekennzeichnet, daß die Gerade, die mit ihrer Hilfe herstellbaren Polygone, der Kreis und die mannigfaltigen Beziehungen dieser Gebilde gegeneinander untersucht werden; das muß aber notwendig mit einer gewissen Vollständigkeit geschehen, wenn Übersicht, bewußtes Vorgehen im einzelnen Fall und ein nachhaltiger Bildungseinfluß über die Schulzeit hinaus erreicht werden soll [1]).

Der arithmetische Unterricht wird in den Unterklassen durch das Rechnen vorbereitet. Wenn der Schüler nun nach Untertertia kommt, so erwartet er mit Recht, daß etwas ganz Neues hinzukommt, etwas, was das Rechnen zur Mathematik macht; und dieses Neue ist der allgemeingültige Beweis für die Richtigkeit aller Rechnungsoperationen, welche früher nur die einzige Begründung hatten: „Der Lehrer hat's gesagt, und wenn Du's anders machst, wird's falsch". Damit soll nicht gesagt sein, daß im Rechenunterricht die Rechenoperationen überhaupt nicht erklärt werden sollen; aber jedenfalls ist darauf nicht so viel Zeit zu verwenden, daß das eigentlich mechanische Rechnen und seine Anwendung dabei zu kurz kommt. Das gilt namentlich von der Bruch- und Dezimalbruchrechnung. Die Bruchrechnung soll so sicher sitzen, daß der Schüler auch vor der Bewältigung größerer Bruchkomplexe nicht zurückschreckt. Nicht auf die Größe der einzelnen Zahlen kommt es dabei an, aber auf absolute Sicherheit der Operationen. Es ist darum gar nicht übel, wenn ein Schüler in einem Wiederholungsbeispiel alle Bruchregeln nach einander anzuwenden genötigt wird. Ein einfaches Resultat muß ihm aber auch die freudige Gewißheit der Richtigkeit seiner Rechnung geben. Eine Anzahl solcher Beispiele setze ich zu gelegentlichem Gebrauche hierher, selbst auf die Gefahr hin, daß die Modernen nach dem Kinderschutz rufen. Ich weiß aus Erfahrung, daß die Schüler sich bald nicht mehr vor solchen Aufgaben fürchten, sondern sie sogar gern rechnen, weil sie eine deutliche Empfindung vom Wachstum ihres Könnens dabei haben.

1. $\frac{4}{9} + \frac{2}{21} + \frac{5}{18} + \frac{4}{63} + \frac{5}{42}$, (1). 2. $19\frac{3}{4} + \frac{8}{9} + 118\frac{5}{12} + 10\frac{11}{18} + 25\frac{1}{3}$, (175).

3. $1\frac{5}{18} + 2\frac{7}{12} + 3\frac{2}{3} + 4\frac{5}{9} + 5\frac{13}{15} + 6\frac{1}{20}$, (24). 4. $1\frac{5}{6} + 131\frac{2}{7} + 5\frac{8}{21} + 232\frac{7}{10} + 3\frac{4}{5}$, (375).

---

[1]) Meyer, Programm, S. 20. Vgl. auch die nachfolgenden Ausführungen gegen höhere Mathematik auf dem Gymnasium, welche noch heute zutreffen! Sie rühren von einem Manne her, der wegen seiner besonderen didaktischen Einsicht zum Ehrendoktor unsrer Universität ernannt worden ist.

5. $3\frac{1}{13} \cdot 1\frac{14}{15} + 2\frac{11}{14} \cdot 1\frac{13}{15}$, (10).

6. $7\frac{1}{2} \cdot 74\frac{4}{5} - 25\frac{2}{3} \cdot 4\frac{4}{11}$, (449).

7. $(1\frac{10}{11} \cdot 3\frac{13}{14} - 2\frac{5}{8} \cdot 1\frac{5}{7})\,(5\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} - 4)$, $(3\frac{3}{4})$.

8. $(3\frac{3}{4} \cdot 6\frac{14}{25} - 10\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{3})\,(17\frac{1}{2} \cdot 15\frac{6}{7} - 72\frac{3}{4} \cdot 3\frac{17}{21})$, $(\frac{1}{3})$.

9. $\dfrac{(\frac{3}{7} + \frac{5}{12} + \frac{3}{28} + \frac{1}{21}) : \frac{3}{4}}{3\frac{1}{3} : \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cdot 13\frac{1}{3}}$, $(\frac{1}{4})$.

10. $\dfrac{(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{7}{9} + \frac{5}{8} + \frac{7}{12}) : (\frac{5}{6} - \frac{5}{8})}{(\frac{8}{9} : \frac{2}{3} - \frac{7}{9} : \frac{14}{15}) \cdot 4\frac{2}{3}}$, (7).

11. $\dfrac{(3\frac{3}{4} \cdot 6\frac{2}{5} - 9\frac{1}{3}) : 28}{3\frac{1}{3} : 8\frac{3}{4} + \frac{1}{6} : (2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{9} - 2\frac{1}{4})}$, $(\frac{1}{2})$.

12. $\dfrac{7\frac{1}{2} \cdot 74\frac{4}{5} - 25\frac{2}{3} \cdot 4\frac{4}{11}}{14 : \frac{3}{16} + 6\frac{2}{3} : \frac{4}{45}}$, (3).

13. $\dfrac{(1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2}) - 8\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{21}}{(9\frac{1}{3} + 7\frac{1}{12} + 16\frac{3}{4}) . 3\frac{3}{5} - 69\frac{2}{5}}$, $(\frac{5}{50} = \frac{1}{10})$.

14. $\dfrac{(7\frac{3}{14} + 2\frac{6}{7}) \cdot (216 - 207\frac{3}{5})}{(32\frac{3}{10} - 31\frac{31}{60}) : \frac{5}{9}}$, (60).

15. $\dfrac{(79\frac{1}{6} \cdot \frac{9}{20} + 64\frac{3}{8}) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8})}{(31\frac{7}{8} : 8\frac{1}{2} - 9\frac{4}{9} : 3\frac{1}{3}) : 1\frac{5}{6}}$, (275).

16. $\dfrac{(15\frac{3}{4} \cdot 4\frac{4}{9} - 32\frac{7}{8}) : 6 - 6}{(1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4}) : 17\frac{7}{9}}$, (1).

17. $\dfrac{(1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{5} + 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{3}) : 1\frac{5}{7} - 3\frac{2}{5}}{(100 - 88\frac{3}{4}) \cdot (100 - 91\frac{1}{9}) - 1047\frac{1}{5} : 11}$, $(\frac{1}{6})$,

18. $\dfrac{2\frac{2}{5} \cdot 10\frac{5}{8} + 5\frac{1}{4} : 1\frac{3}{4}}{(2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} : 2\frac{1}{2}) \cdot 2 + 11\frac{1}{3}}$, $(1\frac{1}{2})$.

19. $\dfrac{7\frac{1}{2} : 3\frac{3}{8} - 4\frac{2}{5} : 6\frac{3}{5}}{(18\frac{1}{2} - 16\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}) : (3\frac{1}{2} \cdot 6)}$, $(2\frac{1}{3})$.

20. $\dfrac{(7\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}) : 1\frac{1}{2} - \frac{2}{7}}{(6\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2}) : 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}}$, (6).

21. $\dfrac{17\frac{1}{3} \cdot 6\frac{4}{13} - 13\frac{1}{8} \cdot 6\frac{14}{15}}{12\frac{2}{3} : 4\frac{3}{4} + 15\frac{3}{5} : 1\frac{3}{10}}$, $(1\frac{1}{4})$.

22. $\dfrac{(738\frac{3}{25} + 14\frac{4}{15} + 223\frac{3}{10}) - 971\frac{1}{50}}{(199\frac{1}{2} - 186\frac{5}{6}) \cdot \frac{7}{19}}$, (1).

23. $\dfrac{332\frac{5}{24} - 75\frac{5}{6}}{7\frac{1}{2} + 9\frac{5}{6} + 7\frac{3}{4} + 5\frac{3}{10} + 2\frac{3}{5} + 8\frac{5}{8} + 9\frac{2}{3}}$, (5).

24. $\dfrac{\frac{5}{6} + 84\frac{8}{15} + 7\frac{3}{4} + 8\frac{5}{12} + 18\frac{4}{5}}{8\frac{3}{4} \cdot 25 - 21\frac{5}{12} : \frac{1}{6}}$, $(120\frac{1}{3} : 90\frac{1}{4} = 1\frac{1}{3})$.

25. $\dfrac{(1\frac{1}{2} \cdot 3 + 1\frac{1}{2} : 3) - 3 : 1\frac{1}{2}}{(1\frac{1}{2} \cdot 3 + 1\frac{1}{2}) : (3 - 3 : 1\frac{1}{2})}$, $(3 : 6 = \frac{1}{2})$.

26. $\dfrac{(23\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3} + 25\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{7}) : 26\frac{3}{5} - 6\frac{1}{2} : 13}{35\frac{1}{3} : 12\frac{3}{13} - 2\frac{7}{9} : 3\frac{1}{8}}$, $(4\frac{1}{2} : 2 = 2\frac{1}{4})$.

27. $\dfrac{(8\frac{2}{5} \cdot 1\frac{7}{8} - 5\frac{1}{4} \cdot 2) : (23\frac{3}{14} - 9\frac{2}{7} : 1\frac{5}{8})}{(12 - 6\frac{3}{8} \cdot 1\frac{5}{7}) : (7\frac{1}{2} : 7)}$, $(\frac{3}{10} : 1 = \frac{3}{10})$.

28. $\dfrac{25\frac{2}{3} : 8\frac{1}{4} + \frac{8}{15} \cdot 7\frac{11}{12}}{(5\frac{3}{5} + 5\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + \frac{9}{10}) : 3\frac{3}{4}}$, $(7\frac{1}{3} : \frac{11}{3} = 2)$.

29. $\dfrac{(3\frac{2}{3} - \frac{3}{4}) : (8\frac{1}{6} - 4\frac{2}{3}) + 9\frac{3}{8} : 11\frac{1}{4} + 53\frac{2}{5} : 8\frac{9}{10}}{(\frac{5}{6} : 1\frac{7}{8} + \frac{14}{15} : 2\frac{1}{10}) \cdot 5\frac{2}{5} - (4\frac{1}{12} - 3\frac{8}{9}) \cdot 1\frac{1}{35}}$, $(7\frac{2}{3} : \frac{23}{5} = 1\frac{2}{3})$.

30. $\dfrac{(7\frac{1}{2} - 2\frac{5}{8} : \frac{7}{12}) \cdot (5\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} - 4)}{(4\frac{7}{8} \cdot \frac{12}{91} - \frac{2}{7}) \cdot (9\frac{1}{3} - 3\frac{3}{4} : \frac{9}{14})}$, $(\frac{15}{4} : \frac{5}{4} = 3)$.

Um zu zeigen, wie die Ausrechnung eines solchen Exempels verläuft, wie sie zu Ordnung und Sauberkeit erzieht, füge ich eine Ausrechnung hinzu:

$$\frac{(8\tfrac{1}{2} + 5\tfrac{2}{3}) : (8\tfrac{1}{2} - 5\tfrac{2}{3}) - (7\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{5}{8} \cdot 1\tfrac{5}{7}) \cdot (5\tfrac{5}{6} : 1\tfrac{1}{9} - 4)}{(1738 + 50\tfrac{2}{5} : 1\tfrac{7}{20} - 8\tfrac{39}{50} \cdot 4\tfrac{1}{6}) : 5 - 347}$$

$$= \frac{14\tfrac{1}{6} : 2\tfrac{5}{6} - \left(7\tfrac{1}{2} - \frac{21 \cdot 12}{8 \cdot 7}\right)\left(\frac{35 \cdot 9}{6 \cdot 10} - 4\right)}{\left(1738 + \frac{252 \cdot 20}{5 \cdot 27} - \frac{439 \cdot 25}{50 \cdot 6}\right) : 5 - 347} = \frac{\frac{85 \cdot 6}{6 \cdot 17} - (7\tfrac{1}{2} - 4\tfrac{1}{2}) \cdot (5\tfrac{1}{4} - 4)}{\left(1738 + \frac{28 \cdot 4}{3} - \frac{439}{12}\right) : 5 - 347}$$

$$= \frac{5 - 3 \cdot 1\tfrac{1}{4}}{(1738 + \tfrac{112}{3} - 36\tfrac{7}{12}) : 5 - 347} = \frac{5 - 3\tfrac{3}{4}}{(1738 + 37\tfrac{1}{3} - 36\tfrac{7}{12}) : 5 - 347)} = \frac{1\tfrac{1}{4}}{(1775\tfrac{1}{3} - 36\tfrac{7}{12}) : 5 - 347}$$

$$= \frac{\tfrac{5}{4}}{1738\tfrac{3}{4} : 5 - 347} = \frac{\tfrac{5}{4}}{347\tfrac{3}{4} - 347} = \frac{\tfrac{5}{4}}{\tfrac{3}{4}} = \frac{5}{3} = 1\tfrac{2}{3}.$$

Außer den üblichen Bruchregeln ist einzuprägen: „Addiert und subtrahiert wird mit gemischten Zahlen, multipliziert und dividiert mit unechten Brüchen!" — eine Ausnahme bildet die Multiplikation und Division gemischter Zahlen mit ganzen Zahlen. Ferner: „Es wird gekürzt, ehe man ausmultipliziert!" Ferner: „Beim Kürzen niemals durchstreichen, sondern neu schreiben!" Zu warnen ist vor überflüssigen Algorithmen z. B. für Addition und Subtraktion von Brüchen, auch der Hauptnenner wird einfach durch Zerlegung der Nenner in Primfaktoren ermittelt, falls er nicht durch die Frage zu finden ist: Welche Faktoren fehlen dem größten Nenner noch, damit alle andern in ihm aufgehen?

Die Dezimalbruchrechnung pflegt bei der Durchnahme wenig Schwierigkeiten zu machen, wenn sie der Lehrer nicht macht; um so leichter werden ihre Regeln vergessen. In folgenden sechs Zeilen ist eigentlich alles enthalten:

Addiern und Subtrahieren geht,
Wenn Komma unter Komma steht.
Multiplizier' mit ganzen Zahlen,
Streich ab die Faktordezimalen.
Wenn doch beim Dividieren der
Divisor ohne Komma wär'.

Die Musen haben offenbar nicht an der Wiege des Dichters gestanden; die Worte sind auch nur dem verständlich, der die wirklichen Regeln verstanden hat; aber für das Gedächtnis sind sie eine erprobte Hilfe. Zur Wiederholung setze ich auch für die Dezimalbruchrechnung einige Beispiele hierher:

1. $\frac{84 - 5{,}25}{220{,}5 : 12 - 1{,}05 : 0{,}1}$, (10).

2. $\frac{180{,}2 : 530 - 0{,}09 : 1{,}5}{1{,}26 : 0{,}7 - 20 \cdot 0{,}08}$, (1,4).

3. $\frac{14{,}7 - (33{,}5 - 16) : (3{,}7 - 0{,}12 : 0{,}1)}{14{,}175 : 20{,}25}$, (11).

4. $\dfrac{13{,}7 \cdot 0{,}02 + 13{,}337 \cdot 0{,}4}{2{,}628 : 0{,}72 + 1101{,}6 : 81 - 0{,}47 \cdot 27}$, (1,23).

5. $\dfrac{339{,}13819 : 194 + 0{,}473065}{0{,}13320888 : 0{,}074 - 0{,}002 \cdot 0{,}06}$, (1,234).

6. $\dfrac{16 : 10{,}24 - 1{,}6 : 10{,}24 + 0{,}00175}{10{,}24 : 4 + 10{,}24 : 0{,}4}$, (0,05).

7. $\dfrac{(3{,}789 - 2{,}559) \cdot (0{,}974 - 0{,}574) - (1{,}25 - 1{,}2) : 0{,}5}{(3{,}6 + 0{,}18) : 1{,}8 + (75{,}36 + 30{,}62) : 37{,}85}$, (0,08).

8. $\dfrac{(21{,}3 - 2{,}55) : 0{,}25 + (2{,}37 - 2{,}0843) \cdot 16}{(6{,}9 + 0{,}39) \cdot 2{,}6 - (23{,}83 + 22{,}21782) : 2{,}6}$, (64).

9. $\dfrac{(6 - 5{,}28) \cdot 0{,}5 + (1{,}23 - 0{,}4852) : 0{,}98 + (0{,}67 - 0{,}27) \cdot 0{,}7}{(1{,}23 \cdot 4{,}5 + 0{,}67 \cdot 8{,}9) : 2 + (1{,}23 - 1{,}091) \cdot 9}$, (0,2).

10. $\dfrac{(3{,}078 + 0{,}7244 + 7{,}04 + 0{,}08) : 3{,}6}{(3{,}078 - 2{,}358) \cdot 34{,}5 - (75 - 0{,}541) : 7{,}7}$, (0,2).

In der Untertertia beginnt nun aber das Rechnen als Mathematik. Jetzt muß also der Lehrer so gut wie der Schüler alle seine Behauptungen beweisen, und der Schüler sieht leicht ein, daß für diesen Zweck statt der bestimmten Zahlen Buchstabenzahlen verwendet werden müssen[1]). Denkt Euch einmal jeder eine Zahl! — so pflege ich den Arithmetikunterricht zu beginnen — zählt 7 dazu! — 7 davon ab! — da bleibt die gedachte Zahl! — Allgemeine Heiterkeit. — L.: Ihr denkt, das ist kein Kunststück! Das wollte ich aber auch gar nicht machen. Warum ist das kein Kunststück? Sch.: Wenn man zu irgendeiner Zahl 7 zuzählt und dann wieder 7 abzieht, kommt doch immer die Zahl wieder heraus. L.: Das können wir nun kürzer ausdrücken, wenn wir festsetzen: Für „irgendeine Zahl" sagen wir a. Sage Deinen Satz von vorhin mit dieser Abänderung noch einmal! Sch.: Wenn man zu a eine 7 zuzählt und dann wieder 7 abzieht, dann kommt a heraus. L.: Das war gut! Noch kürzer könnte man sagen: $a + 7 - 7 = a$. Du hast aber stillschweigend angenommen, daß wir uns unter a das zweite Mal nicht wieder eine beliebige Zahl denken würden, sondern welche? Sch.: Dieselbe, die wir uns zuerst gedacht hatten. L.: Das wollen wir aber lieber ausdrücklich fordern; wir vervollständigen also unsere Definition von vorhin und setzen fest: a bedeutet irgend eine beliebige Zahl, aber innerhalb derselben Rechnung immer dieselbe. Wiederholt alle zusammen diese Definition! — Es geschieht. L.: Muß ich denn nun zum Addieren und Subtrahieren immer gerade die 7 verwenden? Sch.: Ich kann auch 6 nehmen. L.: Wie würde dann unser Satz lauten? Sch.: Wenn man zu einer beliebigen Zahl . . . L.: Halt! Statt „einer beliebigen Zahl" wollten wir doch a sagen! Sch.: Wenn man zu a eine 6 addiert und dann wieder 6 subtrahiert, so kommt a heraus. L.: Wer sagt's kürzer? Sch.: $a + 6 - 6 = a$. L.: Wer nennt noch ein Beispiel? Sch.: $a + 5 - 5 = a$. L.: Ja, und $a + 100 - 100 = a$. Welche Zahlen kann ich also an zweiter Stelle verwenden? Sch.: Jede beliebige Zahl. L.: Was kann man aber für „beliebige Zahl" sagen? Sch.: a. L.:

[1]) Die Einführung der Buchstabenzahlen verdanken wir Viëta († 1603).

Gut, aber unter a sollen wir doch in demselben Exempel immer dieselbe Zahl denken. Zum Addieren und Subtrahieren können wir aber auch jede beliebige andere Zahl nehmen. Wie werden wir nun eine beliebige andere Zahl ausdrücken? Sch.: Dafür sagen wir b. L.: Gut, mein Jungchen! b oder c oder p oder x! Du wählst aber mit Recht b, denn unnötig wollen wir nicht im Alphabet herummanschen. Wie heißt nun unser Satz, wenn Du die Zahlen a und b nimmst? Sch.: $a + b - b = a$. L.: Und das heißt in Worten: Wenn man zu einer beliebigen Zahl eine andere beliebige Zahl addiert und dann die zweite beliebige Zahl wieder subtrahiert, so kommt die erste beliebige Zahl wieder heraus. Diesen langen Satz können wir jetzt ganz kurz ausdrücken. Wie? sag's noch einmal. Sch.: $a + b - b = a$.

Nun denkt einmal an die Bruchrechnung zurück! Wieviel ist $\frac{2}{3} \cdot 5$? Sch.: $\frac{10}{3}$. L: Ja, $\frac{2 . 5}{3}$. Wie multipliziert man nämlich einen Bruch mit einer Zahl? Sch: Man multipliziert den Zähler. Der Satz gilt nun nicht nur für $\frac{2}{3}$, sondern für jeden beliebigen Bruch; Zähler und Nenner können beliebige Zahlen sein; wenn Ihr an unsere neuen Buchstabenzahlen denkt, wie könnt Ihr dann einen beliebigen Bruch ausdrücken? Sch.: $\frac{a}{b}$. L.: Der Multiplikator kann nun auch eine beliebige andere Zahl sein; wie willst Du ihn nennen? Sch.: c. L.: Wie können wir nun unsere Bruchregel ganz kurz wiedergeben? Sch. (mit einiger Einhilfe): $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a . c}{b}$. L.: Warum ist nun aber diese Bruchregel richtig? Sch. schweigt. L.: Nun, weil's der Lehrer gesagt hat. Wenn Du's anders machtest, wie ging es Dir da? Sch.: Dann wurde es falsch. L.: Dann strich Dir der Lehrer einen Fehler an. Jetzt aber haben wir Mathematik! Was muß da auch der Lehrer mit jedem Lehrsatze machen, wenn er gelten soll? Sch.: Er muß ihn beweisen. L.: Wenn ich Euch nun bewiesen hätte, daß $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$ ist, was hätte ich dann bewiesen? Sag's mit ausführlichen Worten! Sch.: Wenn man einen Bruch mit einer Zahl multiplizieren will, so muß man den Zähler multiplizieren. L.: Und das Resultat mit dem Nenner dividieren. Hätte ich nur bewiesen, daß $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$ ist, so könnte jeder fragen: Wie ist es aber, wenn ich $\frac{3}{4}$ mit 7 multiplizieren soll? Will man den Lehrsatz für jeden beliebigen Bruch und für jede beliebige Zahl beweisen, was für Zahlen muß man dann anwenden? Sch.: Buchstabenzahlen muß man dann anwenden. L.: Seht, deswegen müssen wir nun das ganze Rechnen wieder von vorn anfangen, damit wir jede Rechenregel — wir sagen jetzt: jeden Lehrsatz — zuvor beweisen, ehe wir sie anwenden. Mit welcher Rechenoperation haben wir angefangen? usw.

Man sieht, ich erlasse weder mir noch meinen Schülern die Beweise für die arithmetischen Lehrsätze [1]). Man wendet dagegen ein, sie seien langweilig und für die Schüler zu schwer. Beides ist falsch; denn all diese Beweise sind nichts anderes als ganz kleine Rechenaufgaben — man denke an die Probe, mit der alle Lehrsätze der vier inversen Rechnungs-

---

[1]) Axiome sind:

I. das Axiom der Identität: Jede Zahl ist sich selbst gleich, $a = a$.

II. das Axiom der Vergleichung: Zwei Zahlen sind entweder gleich oder zeigen einen angebbaren Unterschied.

III. das Axiom der Vertauschung: Die Seiten einer Gleichung darf man vertauschen; ist $a = b$, so ist auch $b = a$.

IV. das Axiom der Substitution: Gleiche Zahlen oder Zahlenverbindungen darf man in allen Aussagen füreinander setzen.

arten bewiesen werden — die man eben so gut rechnen lassen kann wie jede andere, und die doch dem Schüler das Bewußtsein geben, daß er jetzt Mathematik treibt.

Wir rechnen auch einige Wochen mit Summen und Differenzen unter Anwendung der Lehrsätze; das ist mühselig, aber niemals bekommt man wieder so gute Resultate in den Extemporalien, wie gerade in dieser Zeit, und die Schüler werden vertraut mit Namen und Wesen des Minuendus und Subtrahendus, der Posten, des Addierens und Subtrahierens. Erst nachdem wir entdeckt haben, daß mit Hilfe dieser Begriffe acht und nur acht Lehrsätze gebildet werden können, und nachdem wir diese erledigt haben, fassen wir sie zusammen in die *Rechenregel* vom Auflösen und Setzen von Klammern und von der Verstellbarkeit der Glieder mit ihren Rechnungszeichen. Und erst nachdem wir erkannt haben, daß jedes Polynom durch Klammern vom Anfang an sich in ein Binom verwandeln läßt, und wir das auch wiederholt getan und dann mit den Binomen gerechnet haben, dehnen wir die Rechenregel auf Polynome aus. Diese Rechnung mit Polynomen macht dann aber auch gar keine Schwierigkeit mehr.

Will man den Schüler davor bewahren, daß er jemals ratlos vor einem Exempel steht: „Ich weiß nicht, was ich machen soll!"[1]), so weise man ihn von Anfang an darauf hin: Jedes *Rechnungszeichen ist ein Imperativ!* Sind mehrere Rechnungszeichen da, so kann man auf einmal doch nur einem gehorchen. Das Polynom verlangt nun ein Befolgen ihrer Befehle der Reihe nach von links nach rechts. Der Ausdruck $a + b - c + d$ heißt: Zu a soll b addiert werden, von dem Ergebnis soll c subtrahiert und zu dem nunmehrigen Ergebnis d addiert werden. Mit Hilfe von Klammern kann das deutlicher gemacht werden:

$$a + b - c + d = [(a + b) - c] + d.$$

In der Tat, läßt man zwei Schüler gleichzeitig, den einen die linke, den andern die rechte Seite dieser Gleichung deuten, so offenbart sich dem Ohre unmittelbar deren Identität. Kommen später Multiplikations- und Divisionszeichen hinzu, so muß man dem Schüler sagen: „*Um jedes Produkt hat man sich eine Klammer zu denken*"; denn unter $18 - 5 \cdot 3$ versteht man $18 - (5 + 5 + 5)$. Diese Klammer um das *Produkt* darf man schreiben oder fortlassen; denn denken muß man sie in jedem Falle. *Sie muß aber geschrieben* (oder aufgelöst) *werden, sobald das Produkt aufhört ein Produkt zu sein.* Anfangs schreiben wir daher:

$$a - (b + c)x = a - [(b + c) \cdot x] = a - [bx + cx] = a - bx - cx.$$

Läßt man den Schüler einfach schreiben: $a - (b + c)x = a - bx - cx$, so wähnt er, die Änderung des Zeichens vor cx käme daher, daß die runde Klammer nach einem Minuszeichen fortgefallen wäre. So kann man denn denselben Grund sogar angeführt hören bei der Aufgabe $a - x(b + c) = a - bx - cx$, obgleich da die runde Klammer gar nicht nach einem Minuszeichen steht. Ebenso ersetzt die Länge des Bruchstrichs immer eine Klammer, oft deren drei; denn $x - \frac{a + b}{a - b}$ bedeutet $x - [(a + b) : (a - b)]$. Kommt später Potenzierung, Radizierung und Logarithmierung hinzu, so verallgemeinert sich die Festsetzung

[1]) Höfler spricht in diesem Sinne von Transformationsaufgaben, wo nur der Findige merkt, nach welcher Richtung hin es etwa einen Ausweg aus dem Formelgestrüpp gibt. (Didaktik S. 180.)

und lautet: Die beiden Rechnungsarten zweiter Ordnung haben den Vorrang vor den beiden Rechnungsarten erster Ordnung, und die drei Rechnungsarten dritter Ordnung haben den Vorrang vor den beiden Rechnungsarten zweiter Ordnung. Ist diese Festsetzung in Fleisch und Blut übergegangen, so sagen die Rechnungszeichen bei jeder Transformationsaufgabe, was man zu tun hat. Greifen wir eine komplizierte Aufgabe heraus; sie heiße $\frac{[x^{3a} \cdot x^{4b}]^{4a-5b}}{[(x^{3a})^{a} : (x^{5})^{b}]^{4}}$. Der Schüler fragt sich, wie bei jeder Aufgabe: Was befehlen die Zeichen? Zwei Potenzen zu dividieren. Das kann man nur, wenn sie gleiche Basen oder gleiche Exponenten haben. Beides ist nicht der Fall, also kann man nur Zähler und Nenner einzeln berechnen. Was befehlen die Zeichen im Zähler? Ein Produkt zu potenzieren. Das geschieht, indem man jeden Faktor potenziert. Jeder Faktor ist eine Potenz; die wird potenziert, indem man den Exponenten multipliziert. So ergibt der Zähler $x^{12aa-15ab} \cdot x^{16ab-20bb}$. Im Nenner ist ein Bruch (Quotient) zu potenzieren; das geschieht, indem man Zähler und Nenner potenziert. Zähler wie Nenner sind Potenzen, man erhält daher durch Anwendung der obigen Potenzregel den Nenner $(x^{3a})^{4a} : (x^{5b})^{4b}$. Der Schüler fragt wieder: Was befehlen die Zeichen nun im Zähler? Potenzen mit gleichen Basen zu multiplizieren. Das geschieht, indem man die Exponenten addiert usw., kurz man erhält

$$\frac{x^{12aa+ab-20bb}}{x^{12aa-20bb}} = x^{ab}.$$

Nie kann ein Schüler darüber im unklaren sein, was er zu tun hat, solange er daran festhält: Die Rechnungszeichen sind Imperative. Daß man auch anders rechnen kann, ist für die in Rede stehende Frage belanglos.

Kehren wir wieder zu unsern Untertertianern zurück! War die Subtraktion aus der Addition durch Umkehrung entstanden, so entsteht aus derselben Addition durch Wiederholung die Multiplikation. Die Begriffe: Multiplizieren, Multiplikandus, Multiplikator und Produkt werden erläutert und dann die Frage aufgeworfen: Welche Aufgaben ergeben sich aus der neuen Rechnungsart? Es sind acht Aufgaben, die sich aber auf fünf reduzieren, wenn man den Satz von der Vertauschbarkeit von Multiplikandus und Multiplikator, die nun den gemeinden Namen „Faktoren" erhalten, vorausschickt. Die drei Gleichungen, welche mit ihren Umkehrungen diese fünf Aufgaben lösen, werden rasch bewiesen, indem man die Produkte in Summen zurückverwandelt; es sind einfach drei leichte Exempel, die also an die Fassungskraft der Schüler wirklich keine hohen Anforderungen stellen. Dann wird eine Zeitlang wieder mit Binomen und Produkten mit Hilfe der Lehrsätze gearbeitet und dann erst zum mechanischen Rechnen übergegangen. Die absolute Sicherheit in Kenntnis und Gebrauch der Fundamentalformeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ist natürlich zu fordern. Ihre Anwendung auf Zifferzahlen pflegt Spaß zu machen. Um die Formeln selbst einzuprägen, lasse ich mich oft einige Wochen lang beim Betreten des Zimmers von der Klasse mit diesen Formeln begrüßen.

Aus der Multiplikation entsteht durch Umkehrung die Division. Die Begriffe Dividieren, Dividendus, Divisor, Quotient werden erläutert und an Zahlenbeispielen geläufig gemacht, auch die Probe als Beweismittel aus dem Begriff des Dividierens abgeleitet.

Die beiden Gleichungen:

Dividendus : Divisor = Quotient,

und Quotient · Divisor = Dividendus,

müssen als identisch erkannt werden. Sofort taucht wieder die Frage auf: Welche Aufgaben ergeben sich aus der Division? Die Aufgaben werden aufgestellt; ehe man sie aber beantwortet, führt man die Bruchzahlen ein, um sicher zu sein, daß a : b immer einen Sinn hat. Man weist also nach, daß $a : b = \frac{a}{b}$ ist. Man wird aber nun — im Unterschiede zum Rechnen — auf völliges Verständnis des Bruchbegriffs dringen. Die Frage, was für ein Unterschied ist zwischen 2 Äpfeln und $\frac{8}{4}$ Äpfeln? pflegt zuerst einem allgemeinen Schütteln des Kopfes zu begegnen. Indessen $\frac{8}{4}$ Äpfel sind 8 Stücke, die man z. B. nicht wochenlang aufheben kann, wie man es mit 2 Äpfeln tun kann. Der Zähler zählt die Stücke, der Nenner benennt sie. Nur die Quantität von $\frac{8}{4}$ Äpfeln ist gleich der von 2 Äpfeln. Da es aber beim Rechnen nur auf die Quantität ankommt, kann man in der Tat statt des Doppelpunktes den Bruchstrich und statt der Quotientenrechnung die Bruchrechnung setzen. Die Aufgaben der Division werden nun als Bruchaufgaben formuliert und mittels Probe bewiesen. Multiplikation mit einem Bruche ist an sich sinnlos und muß definiert werden. Einige Wiederholungsbeispiele sind:

1. $2a - \left(\frac{a}{b^3} - \frac{a}{b^2} + \frac{a}{b}\right)(b^4 + b^3)$, $(a - ab^3)$.

2. $\frac{x(3a + 4b) - (2a + 3b)x - x(a - b)}{2abx}$, $\left(\frac{1}{a}\right)$. 3. $\frac{5x^2 - 10xy - 6xz + 12yz}{15x^2 - 20xy - 18xz + 24yz}$, $\left(\frac{x - 2y}{3x - 4y}\right)$.

4. $\frac{10ax + 25bx - 14ay - 35by}{20ax + 25bx - 28ay - 35by}$, $\left(\frac{2a + 5b}{4a + 5b}\right)$. 5. $\dfrac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$, (2).

6. $\dfrac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}$, $\left(\frac{x + y}{x - y}\right)$. 7. $\dfrac{\frac{x \cdot y}{x - y} - \frac{x \cdot y}{x + y}}{\frac{2xy}{x^2 - y^2}}$, (y).

8. $\frac{x^2 + y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + xy}$, (1). 9. $\frac{a}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a+b}$, $\left(\frac{1}{a-b}\right)$.

10. $\frac{a}{a + b} + \frac{a}{a - b} - \frac{2a^2 - a + b}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a^2 + ab}$, $\left(\frac{1}{a}\right)$.

11. $\frac{1}{a^2 + 2ab + b^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{a^4 - a^2b^2}$, $\left(\frac{1}{a^2 + 2ab + b^2}\right)$.

12. $\frac{3a}{2a - 3b} - \frac{2a}{10a - 15b} - \frac{17a + b}{8a - 12b} + \frac{5a}{4a - 6b} - \frac{7a}{24a - 36b} - \frac{a}{20a - 30b}$, $\left(\frac{1}{12}\right)$.

13. $\frac{3}{16a + 16b} + \frac{2}{9a + 9b} + \frac{1}{36a + 36b} - \frac{1}{48a + 48b} + \frac{3}{8a + 8b} + \frac{5}{24a + 24b}$, $\left(\frac{1}{a+b}\right)$.

14. $\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^3-ab^2}-\frac{b^2+b}{a^4-a^2b^2}+\frac{b}{a^4-a^3b}$, $\left(\frac{1}{a^2}\right)$.

15. $\frac{b}{a^2+ab}+\frac{a}{b^2+ab}+\frac{3}{a+b}-\frac{a+b}{ab}$, $\left(\frac{1}{a+b}\right)$.

16. $\frac{b}{a^2+ab}+\frac{a}{b^2+ab}+\frac{2}{a+b}-\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\left(\frac{a+b}{ab}\right)$.

17. $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{b}{a^3-ab^2}-\frac{b}{a^3-a^2b}$, $\left(\frac{1}{a^3}\right)$.

18. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^2+3b^2}{a^2-b^2}$, (1). 19. $\frac{x+3}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}$, (0).

20. $\frac{a+1}{a^2-a}-\frac{a-1}{a^2+a}+\frac{1}{a}-\frac{4}{a^2-1}$, $\left(\frac{1}{a}\right)$.

21. $\frac{a}{2a^2-2}-\frac{1}{2a^4-2a^2}-\frac{1}{4a+4}-\frac{1}{2a^3+2a^2}+\frac{1}{2a^3-2a}$, $\left(\frac{1}{4a-4}\right)$.

22. $\frac{5}{a-b}-\frac{5}{a+b}\left(\frac{a^2-b^2}{10a}-\frac{a+b}{5}+\frac{a+b}{a-b}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2a}\right)$.

23. $2-\frac{a-b}{x-y}-\frac{x+y}{x}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x-y}{x}-\frac{x(a-b)}{x^2-y^2}\right)$, $\left(\frac{y^2}{x^2}\right)$.

24. $\left[3\tfrac{8}{9}\frac{x^2}{y^2}-4\tfrac{2}{3}+5\frac{y^2}{x^2}-46\tfrac{2}{3}\frac{y^3}{x^4}\right]:5\tfrac{5}{6}\frac{y^3}{x^4}$, $\left(\tfrac{2}{3}\frac{x^6}{y^5}-\tfrac{4}{5}\frac{x^4}{y^3}+\tfrac{6}{7}\frac{x^2}{y}-8\right)$.

25. $\frac{15a^2(a+b)}{14b^2}:\frac{3(a^2-b^2)}{10a^2b}\cdot\frac{7(a-b)}{15ab}:\frac{5a^2}{9b^3}$, (3ab).

Die schönste Repetition des ganzen Pensums bilden die Gleichungen ersten Grades. Dabei bedeutet die Benutzung der negativen Zahlen [1]) für Lehrer und Schüler eine große Bequemlichkeit und ist seit einer Reihe von Jahren Vorschrift. Trotzdem ist es mir immer schwer geworden, mich dieser Vorschrift zu fügen. Ich kann nicht die Überzeugung gewinnen, daß der Untertertianer diesen künstlichen Zahlen das nötige Verständnis entgegenbringt. Er rechnet wohl damit, aber das Verständnis reicht nicht weiter als der Vergleich mit Schulden, Kältegraden und Pegelständen. Eine ehrliche Durcharbeitung des § 26 im Heis erfordert selbst in Obertertia viel Zeit, aber sie ist von größtem Wert. Hat man daher die Zeit dazu in Untertertia nicht gehabt, so muß man in Obertertia unbedingt darauf zurückkommen. Namentlich die Fragen: Für welche Werte von x werden folgende Ausdrücke zu Null? (§ 26 Nr. 10) oder negativ? (§ 26 Nr. 35) dürfen nicht umgangen werden. Sie bieten dem Schüler Gelegenheit, die Wirkung der Wertänderung einer Variablen kennen zu lernen, und befestigen den Begriff einer negativen Zahl als einer solchen, die kleiner ist als Null. Zahlreiche graphische Darstellungen unter Benutzung der Heftkarierung sind hierbei

[1]) Die Rechnung mit Null und negativen Zahlen wird erst allgemein in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts durch Cartesius und Girard.

unerläßlich. Liegt z. B. das Produkt vor $(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$, so läßt man x etwa von 10 ab immer kleiner werden und beobachtet dabei, was für Werte jeder Faktor annimmt. Hat erst der Schüler einigermaßen sicher erkannt, daß jeder kleinere Faktor von selbst negativ wird, wenn ein größerer negativ gemacht wird, so kommt er selber darauf, die Werte für x, welche die einzelnen Faktoren negativ werden lassen, der Größe nach zu ordnen:

$$x < 3$$
$$x < 2$$
$$x < -1$$
$$x < -4.$$

Man läßt nun beobachten, wie das Produkt positiv ist, solange x größer bleibt als 3, wie es negativ wird in dem Zahlenraume von 3 bis 2, wieder positiv zwischen 2 und -1, dagegen negativ zwischen -1 und -4, um wieder positiv zu werden, wenn x unter -4 herabsinkt. Die Werte, bei denen der Umschlag eintritt, geben dem Produkte immer den Wert Null; denn ein Produkt wird Null, wenn ein Faktor zu Null wird, und das ist bei den Werten 3, 2, -1 und -4 der Fall. Das Produkt wird aber negativ, wenn eine ungerade Anzahl von Faktoren negativ wird. Daher lautet die Antwort: Das obige Produkt wird negativ für $x < 3$, aber > 2 und für $x < -1$, aber > -4. Im übrigen bemerke ich über den Gegenstand nur noch, daß man in der ersten Zeit streng zwischen Vorzeichen und Rechnungszeichen unterscheiden muß. Der Gedanke, daß ein Polynom jederzeit als Summe algebraischer Zahlen aufgefaßt werden kann, wird vom Durchschnittsschüler ziemlich langsam verdaut.

Die Division von Polynomien gibt zu Bemerkungen weiter keinen Anlaß, nur daß man es nicht versäumen darf, bei dieser Gelegenheit den Algorithmus des Dividierens mit mehrstelligen Zahlen zu erklären, wie schon in der Untertertia den Algorithmus des Multiplizierens. Beim Sextaner- und Quintanerrechnen derartiges zu versuchen und z. B. nach dem Stellenwert dieser und jener Ziffer der Teilprodukte zu fragen, halte ich für eine Vergeudung der Zeit, die man zur Einübung besser verwenden könnte.

Reichliches Lösen von Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten — für letztere genügt die Substitutionsmethode und die der gleichen Koëffizienten — befestigen die Sicherheit in den vier ersten Rechenoperationen. Von Wortgleichungen dürften Bewegungsaufgaben und solche, welche die Eigenschaften einer dekadischen Zahl benutzen, die geeignetsten sein. Für die Bewegungsaufgaben sollte der Schulort und seine benachbarten Dörfer und Städte mit ihren bekannten Entfernungen das Material liefern.

Nach diesem Abschluß schreitet der Unterricht zur nächsten Rechenstufe weiter. Die Potenzierung entsteht aus der Multiplikation wiederum durch Wiederholung. Der wiederkehrende Faktor wird als Basis, die Anzahl der wiederkehrenden Faktoren als Exponent geschrieben. Welche Aufgaben entstehen durch die neue Rechnungsart? Addition und Subtraktion von Potenzen erfordern gleiche Basis und gleichen Exponenten, Multiplikation und Division gleiche Basis oder gleichen Exponenten, Summen und Differenzen können einstweilen nur mit bestimmten Zahlen potenziert werden, Produkte, Brüche und Potenzen mit beliebigen (ganzen, positiven) Zahlen; Potenzierung mit einer Summe, mit einer Differenz, mit einem Produkt ergeben sich als Umkehrungen, Potenzierung mit einem Bruche hat keinen Sinn. Die

Beweise für alle Lehrsätze der Potenzierung werden erledigt durch Zurückführung auf Multiplikation und sind nichts mehr und nichts weniger als kleine Multiplikations- und Divisionsexempel. Bei der wirklichen Ausführung von Zahlenbeispielen wird es dem Schüler deutlich, daß die Potenzierung jene Zahlenungetüme liefert, für deren Benennung nicht einmal die Billion ausreicht; er bemerkt, daß die Zahlen 2, 3, 4, die er aus den Namen Billion, Trillion, Quadrillion heraushört, nichts anderes sind als die Exponenten von Million. Er muß daher $2^{64} = 2^{10 \cdot 6 + 4}$ einmal berechnen und wird dann belohnt mit der Erzählung vom Brahmanen Sissa [1]).

Das Ziehen der Quadratwurzel aus mehrziffrigen Zahlen wird zuweilen so gelehrt, daß man den Algorithmus angibt und ausführen läßt, und ihn höchstens durch Quadrieren des Resultats auf seine Richtigkeit prüft. Dabei bleibt aber der Algorithmus unverstanden. Wir schlagen folgendes Verfahren ein: Da die kleinste 3 stellige Zahl (100) zur Quadratwurzel die kleinste 2 stellige Zahl hat, die kleinste 5 stellige Zahl (10 000) aber bereits eine 3 stellige (100), so folgt: Die Quadratwurzel aus einer 3- bis 4 stelligen Zahl hat 2 Stellen. Ebenso folgt aus $\sqrt{10\,000} = 100$, und $\sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$, daß die Quadratwurzel aus einer 5- bis 6 stelligen Zahl 3 Stellen hat usw. Nun sagt der Schüler bereits $\sqrt{1\,911} = 4\cdot$, wobei der Punkt an Stelle einer Ziffer steht. Ebenso $\sqrt{379\,265} = 6\cdot\cdot$ und $\sqrt{1\,234\,567} = 1\cdot\cdot\cdot$, er kann also bereits die erste Ziffer und die Anzahl der Ziffern angeben. Nun berechnet er nach der bekannten Fundamentalformel

$$a^2 = a^2$$
$$[a + b] = a^2 + 2ab + b^2$$
$$[(a + b) + c]^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + 2(a + b)c + c^2$$
$$[(a + b + c) + d]^2 = \text{Voriges Resultat} + 2(a + b + c)d + d^2.$$

Bezeichnet er in der gesuchten Quadratwurzel die Einer mit E, die Zehner mit Z, usw., so findet er für eine dreistellige Quadratwurzel

$$(H + Z + E)^2 = H^2 + 2HZ + Z^2 + 2(H + Z)E + E^2$$

und für eine vierstellige

$$(T + H + Z + E)^2 = T^2 + 2TH + H^2 + 2(T + H)Z + Z^2 + 2(T + H + Z)E + E^2.$$

Es sei nun aus 294 849 die Quadratwurzel zu ziehen. Der Schüler gibt an

$$\sqrt{294\,849} = H + Z + E,$$

und zwar ist $(H + Z + E)^2 = 294\,849$,

oder I. $H^2 + 2HZ + Z^2 + 2(H + Z)E + E^2 = 294\,849.$

---

[1]) Der Brahmane Sissa hatte das Schachspiel (Schah = König) erfunden und dem Schah von Persien gezeigt. In seinem Entzücken über das schöne Spiel versprach der Schah dem Erfinder eine Belohnung, die jener fordern würde. Der schlaue Brahmane verlangte auf das erste Feld des Schachbretts 1 Weizenkorn, auf das zweite 2, auf das dritte 4, auf das vierte wieder doppelt so viel usw. Der Schah befahl seinem Schatzmeister, die bescheidene Bitte zu erfüllen, staunte aber sehr, als dieser ihm sagte, so viel Weizen gäbe es auf der ganzen Erde nicht. In der Tat verlangt das letzte Feld 2^{63} Körner, das ganze Brett $2^{64} - 1$ Körner, das sind über 18 Trillionen. Rechnet man die gesamte Erdoberfläche zu 500 Millionen Quadratkilometer = 500 Billionen Quadratmeter = 5 Trillionen Quadratzentimeter, so kämen auf jedes Quadratzentimeter 3 bis 4 Körner.

Er weiß auch schon, die gesuchte Quadratwurzel ist gleich 5 · ·, also H = 500. Damit ist das erste Glied des Polynoms gegeben, denn

$$H^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 250\,000.$$

Es bleibt also nach Subtraktion dieser Gleichung von I

$$\text{II.} \qquad 2\,HZ + Z^2 + 2\,(H + Z)\,E + E^2 = \;44\,849.$$

Das erste Glied dieses Polynoms ist das größte. Nehmen wir an, es sei das einzige, d. h. dieses allein sei gleich der Restsumme, so können wir aus dieser Gleichung zwar eine zu große Zahl für Z finden, nie aber eine zu kleine; und ein zu großer Wert für Z würde sich bei den folgenden Subtraktionen alsbald bemerkbar machen. Wäre

$$2\,HZ = 44\,849,$$

so folgte

$$Z = \frac{44\,849}{2\,H} = \frac{44\,849}{1000} = 40.$$

Damit haben wir aber den Wert für die beiden ersten Glieder in II, nämlich

$$2\,HZ = 40\,000,$$

und

$$Z^2 = \;1\,600.$$

Subtrahieren wir diese Gleichungen von II, so erhalten wir

$$\text{III.} \qquad 2\,(H + Z)\,E + E^2 = 3249.$$

Von diesem Restbetrag nimmt offenbar wieder das erste Glied den Löwenanteil in Anspruch. Nehmen wir an, es sei das einzige, so können wir im schlimmsten Falle einen zu großen Wert für E finden, ein Fehler, der uns bei den folgenden Subtraktionen nicht entgehen könnte; sei also

$$2\,(H + Z)\,E = 3249,$$

so wäre

$$E = \frac{3249}{2\,(H + Z)} = \frac{3249}{1080} = 3.$$

Daraus ergibt sich nun der Wert für die letzten Glieder des Polynoms, nämlich

$$2\,(H + Z)\,E = 3240,$$

und

$$E^2 = \quad 9,$$

und die Subtraktion von III liefert beiderseits Null. Die Quadratwurzel ist also 543. Unter Weglassung des Textes schreibt der Schüler

$$\sqrt{294\,849} = H + Z + E,$$

also

$$(H + Z + E)^2 = 294\,849,$$

oder

$$\begin{array}{rl|l}
H^2 + 2\,HZ + Z^2 + 2\,(H + Z)\,E + E^2 & = 294\,849 & H = 500. \\
H^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & = 250\,000 & \\
\hline
2\,HZ + Z^2 + 2\,(H + Z)\,E + E^2 & = \;\;44\,849 & 2\,H = 1000,\ Z = 40. \\
2\,HZ \qquad\qquad\qquad\qquad & = \;\;40\,000 & \\
\hline
Z^2 + 2\,(H + Z)\,E + E^2 & = \;\;\;\;4\,849 & \\
Z^2 \qquad\qquad\qquad & = \;\;\;\;1\,600 & \\
\hline
2\,(H + Z)\,E + E^2 & = \;\;\;\;3\,249 & 2\,(H + Z) = 1080,\ E = 3. \\
2\,(H + Z)\,E \qquad & = \;\;\;\;3\,240 & \\
\hline
E^2 & = \qquad\;\; 9 & \\
E^2 & = \qquad\;\; 9 &
\end{array}$$

Resultat: 543.

In kürzerer Form schreibt er:

$$\sqrt{294\,849} = H + Z + E = 500 + 40 + 3 = 543.$$

$$\begin{array}{rl}
H^2 = & \underline{250\,000} \\
 & 44\,849 : 1000\,[2\,H] \\
2\,HZ = & \underline{40\,000} \\
 & 4\,849 \\
Z^2 = & \underline{1\,600} \\
 & 3\,249 : 1080\,[2\,(H + Z)] \\
2\,(H + Z)\,E = & \underline{3\,240} \\
 & 9 \\
E^2 = & \underline{9}
\end{array}$$

Läßt man alle Erklärungen, die Nullen und sonstigen augenblicklich nicht gebrauchten Ziffern weg und subtrahiert die doppelten Produkte zugleich mit den neugefundenen Quadraten, so ergibt sich die Schreibweise des bekannten Algorithmus.

Recht zusammenhangslos folgt nun zur Entlastung der folgenden Klasse noch die Proportionslehre. Man beschränkt sich auf das Notwendigste; denn die Proportionslehre ist doch nur Bruchlehre in neuen Formen und Benennungen. Der Satz vom Produkt der äußeren und inneren Glieder mit seiner Umkehrung, der Satz von der Vertauschbarkeit der Glieder, der Satz von der korrespondierenden Addition und Subtraktion, reichliche Übungen im Gebrauche des Proportionalitätsfaktors, Berechnungen der vierten, dritten und mittleren Proportionalen und Erläuterung der umgekehrten Proportionalität, sowie der fortlaufenden Proportion dürfte genügen. Eine fortlaufende Proportion ist zu definieren als abgekürzte Schreibweise für mehrere angrenzende Proportionen. Umgekehrt proportional heißt: Proportional den umgekehrten (reziproken) Werten. Versucht man die letztere Definition anders zu geben, so kommt man in Verlegenheit mit der Anwendung der fortlaufenden Proportion, z. B. beim Höhensatze: $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$. Auch bezüglich der Anwendungen der Proportionslehre auf eingekleidete Gleichungen beschränke man sich; die meisten derartigen Aufgaben werden besser mit dem Regeldetriansatze gelöst.

Das arithmetische Pensum der Untersekunda beginnt mit einer kurzen Wiederholung der Potenzlehre. Dabei betont man, daß die Division von Potenzen mit gleicher Basis in verschiedener Weise ausgeführt werden muß, je nachdem der Exponent des Divisors kleiner oder größer ist als der des Dividendus. Eine Potenz mit negativem Exponenten ist nämlich sinnlos. Erst nachdem diese Sinnlosigkeit völlig klar geworden ist, hat man das Recht, dem an sich sinnlosen Zeichen durch Definition einen Sinn zu g e b e n. Setzt man fest: Eine Potenz mit negativem Exponenten soll bedeuten den reziproken Wert derselben Potenz mit positivem Exponenten, so läßt sich zeigen, daß man die Lehrsätze der Potenzrechnung auch auf die neuen Gebilde anwenden darf, ohne ein falsches Resultat fürchten zu müssen. Dieser Nachweis muß aber auch geführt werden. Durch die Einführung der Potenzen mit negativem Exponenten entgeht man der Duplizität obiger Potenzregel.

Umkehrung der Potenzierung liefert die Radizierung und Logarithmierung. Ist der Potenzwert und der Exponent bekannt und die Basis gesucht, so heißt die gesuchte Basis „Wurzel“, ist dagegen Potenzwert und Basis bekannt und der Exponent gesucht, so heißt der Exponent „Logarithmus“ [1]). Wieder werden die sich ergebenden neuen Aufgaben aufgesucht, durch Lehrsätze gelöst und deren Richtigkeit mit Hilfe der Probe bewiesen:

$$\text{Resultat}^{\text{Wurzelexponent}} = \text{Radikandus},$$

und

$$_{x}\text{Basis}^{\text{Resultat}} = \text{Numerus}.$$

Bei dem Satze: $\sqrt[x]{a^y} = a^{y:x}$, ist der Zusatz notwendig: Wenn die Division aufgeht. Denn eine Potenz mit gebrochenem Exponenten ist sinnlos; man kann a nicht $\frac{3}{4}$mal als Faktor hinschreiben. Der Zusatz läßt sich aber nachträglich wieder beseitigen durch Einführung der Potenzen mit gebrochenem Exponenten, die genau in derselben Weise geschehen muß wie die der negativen Exponenten. Das mag Zeit kosten, der Schüler muß aber sicher sein, daß auch hier nichts erschlichen wird.

Der Begriff eines Logarithmus als eines Exponenten kann dem Schüler kaum besser klargemacht werden als durch gründliche Durcharbeitung des § 56 im Heis, des trefflichsten Paragraphen in dieser bewährten Aufgabensammlung. Nach rascher Erledigung der logarithmischen Lehrsätze kommt man zur praktischen Anwendung der Logarithmen. Ehe aber der Schüler die gedruckten Tafeln zur Hand nimmt, muß ihm an einigen Beispielen gezeigt werden, wie solche Tafeln berechnet werden können. Zu dem Ende potenzieren wir 10 mit $\frac{1}{2}$ und erhalten $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}16\,228$. Durch Wiederholung des Wurzelziehens erhalten wir $10^{0{,}25} = 10^{\frac{1}{4}} = 1{,}77\,828$ usw. Man muß also 10 mit 0,5 potenzieren, um 3,16 228 zu erhalten, und mit 0,25, um 1,77 828 zu erhalten. Mithin ist log 3,16 228 = 0,5 und log 1,77 828 = 0,25. Durch fortgesetztes Quadratwurzelziehen ergibt sich folgende Tafel:

Num	Log	Num	Log
3,16 228	0,50 000	1,00 225	0,00 098
1,77 828	0,25 000	1,00 112	0,00 049
1,33 352	0,12 500	1,00 056	0,00 024
1,15 478	0,06 250	1,00 028	0,00 012
1,07 461	0,03 125	1,00 014	0,00 006
1,03 663	0,01 562	1,00 007	0,00 003
1,01 815	0,00 781	1,00 004	0,00 002
1,00 904	0,00 391	1,00 002	0,00 001
1,00 451	0,00 196	1,00 001	0,00 000

Wir kennen nun schon eine ganze Anzahl von Logarithmen zur Basis 10. Mit ihrer Hilfe finden wir aber den Logarithmus jeder beliebigen Zahl. Wir brauchen zu dem Ende

[1]) λόγου ἀριθμός = Maßzahl einer Zahl. Daß die Zahlen λόγοι heißen, rührt daher, daß sie als Verhältnisse einer Anzahl zur Einheit gedacht sind, z. B. 7 = 7:1.

diese Zahl nur in ein Produkt obiger Potenzen von 10 zu verwandeln. Es sei z. B. log 1911 zu ermitteln. Durch Division findet man nacheinander folgende Gleichungen:

$$1911 = 1000 \cdot 1{,}911,$$
$$1{,}911 = 1{,}77\,828 \cdot 1{,}07\,463,$$
$$1{,}07\,463 = 1{,}07\,461 \cdot 1{,}00\,002.$$

Subst. $1911 = 1000 \cdot 1{,}77\,828 \cdot 1{,}07\,461 \cdot 1{,}00\,012,$
$$= 10^3 \cdot 10^{0,25} \cdot 10^{0,03\,125}\, 10^{0,00\,001} = 10^{3 + 0,25 + 0,03\,125 + 0,00\,001} = 10^{3,28\,126}.$$

Daher ist log 1911 = 3,28 126, ein Wert, den die Tabellen bestätigen.

Zuweilen hat man freilich auch mehr Divisionen auszuführen. Indessen da $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$ ist, so sind nur die Logarithmen der Primzahlen unmittelbar zu ermitteln; für den Schüler vollends kommt es nur darauf an zu wissen, wie die Logarithmentafeln berechnet werden können, nicht darauf, sie tatsächlich zu berechnen.

Übungen im Gebrauch der Tabellen müssen reichlich angestellt werden. Dazu sind beliebige „künstliche Ungetüme" von Beispielen[1]) gerade gut genug. Im Turnen machen wir auch „künstliche" Übungen; wir wollen unsern Körper dadurch gewandt und kräftig machen, damit er in den einfacheren Aufgaben, die das Leben stellt, nicht versage. Zudem erfordern die natürlichen Beispiele eine Menge Zeit zu ihrer Erläuterung und lenken die Aufmerksamkeit des Schülers von dem ab, was geübt werden soll. Die künstlichen Beispiele können auch hinsichtlich der Schwierigkeit besser abgestimmt werden. Also nur nicht zimperlich! Dem Jungen macht alles Freude, was er wirklich kann; und hier ist grüne Weide auch für die Schwächsten.

Die Gleichungen zweiten Grades sind ein dankbares Kapitel. Die Zurückführung einer Aufgabe auf eine leichtere, schon erledigte, ist einer der wichtigsten Hebel, die die Mathematik ihren Jüngern in die Hand gibt. Wie die Teilung einer Strecke auf die leichtere Aufgabe, eine Strecke wiederholt abzutragen, zurückgeführt wurde, wie Gleichungen mit mehreren Unbekannten in eine Gleichung mit einer Unbekannten umgewandelt wurden, so führen wir jetzt die reine Gleichung zweiten Grades auf zwei Gleichungen ersten Grades zurück und später die allgemeine Gleichung auf die reine Gleichung. Die reine Gleichung:

$$x^2 = a,$$

bringen wir auf Null,
$$x^2 - a = o,$$

zerlegen die linke Seite mit Hilfe der Fundamentalformel und erhalten

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = o.$$

Das Produkt soll zu Null gemacht werden (denn in einer Bestimmungsgleichung ist das Gleichheitszeichen ein Imperativ!). Das tut man, indem man dafür sorgt, daß entweder

$$x - \sqrt{a} = o$$

oder
$$x + \sqrt{a} = o$$

ist. Diese beiden linearen Gleichungen ergeben die Werte

$$x_1 = + \sqrt{a}, \text{ und } x_2 = - \sqrt{a}.$$

Hat man die Zerlegung mehrere Male ausgeführt, so hindert natürlich nichts, sich das Resultat zu merken: Die Wurzeln einer reinen Gleichung zweiten Grades findet man, in-

[1]) Dagegen Höfler S. 240.

dem man die Quadratwurzel aus dem Absolutglied zieht und ihr doppeltes Vorzeichen gibt. — Meiner Ansicht nach muß $\sqrt{a}$ eindeutig sein um des Identitätsaxioms willen[1]). Das erkennen alle Mathematiker an, welche die Lösung obiger Gleichung mit uns in der Form schreiben $x = \pm \sqrt{a}$. Denn wer $\sqrt{a}$ bereits für doppeldeutig ansieht, hat kein Recht und keinen Anlaß, das doppelte Vorzeichen zu setzen. Ich will aber den bekannten Streit hier nicht wieder anregen. Indessen darauf muß ich hinweisen, daß durch Quadrieren der Seiten einer Gleichung immer eine Wurzel eingeschmuggelt wird. Die einfache Gleichung,

$$x = a,$$

hat offenbar nur eine richtige Lösung, eben $+a$. Quadriert man aber ihre Seiten, so folgt

$$x^2 = a^2,$$

und diese Gleichung hat nun die beiden Lösungen,

$$x_1 = +a \text{ und } x_2 = -a,$$

von denen die zweite offensichtlich falsch ist. Daher sind die Lösungen der Gleichungen, bei deren Entwicklung quadriert werden muß, nachträglich auf ihre Richtigkeit hin zu untersuchen. Die bekannte Gleichung im Heis § 69 Nr. 119,

$$\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-4x} = 4\sqrt{x},$$

hat nur die Lösung $x = 0$, nicht auch die angegebene $x_2 = \frac{1}{5}$. Substituiert man die letztere, so folgt

$$\sqrt{\tfrac{9}{5}} - \sqrt{\tfrac{1}{5}} = 4\sqrt{\tfrac{1}{5}},$$

und das ist falsch. Da kann man sich auch nicht mit der Ausflucht helfen, man müsse dem Werte für die Wurzel im zweiten Grade ein negatives Zeichen geben; denn warum gibt man dann derselben Wurzel auf der rechten Seite nicht auch ein Minuszeichen?

Die allgemeine Lösbarkeit der Gleichungen zweiten Grades wird erst ermöglicht durch die Einführung der Irrationszahlen und der imaginären Zahlen[2]). Es würde verfrüht sein, wollte man schon in der Untersekunda auf die Theorie der Irrationalzahlen näher eingehen. Es genügt darauf hinzuweisen, daß Irrationalzahlen (ratio = Verhältnis = Bruch) als unendliche Dezimalbrüche dargestellt werden können, die sich nicht in Form eines gemeinen Bruches wiedergeben lassen. Dabei wird gezeigt, daß jeder gemeine Bruch bei der Umwandlung in einen Dezimalbruch entweder eine endliche Anzahl von Dezimalen geben, also „aufgehen" muß, oder eine Periode, deren erste Wiederholung spätestens mit der n-ten Stelle beginnt wenn n der Nenner des Bruches ist. Dabei wird der Grund für das Auftreten der Periode deutlich, und es leuchtet ein, daß dieser Grund bei der Berechnung von $\sqrt{2}$ nicht eintreten kann, wegen des fortdauernd sich ändernden Divisors. Auch aufgehen kann diese Rechnung nicht, weil außer der nicht in Betracht kommenden Null keine Ziffer bei der Quadrierung an letzter Stelle eine Null ergibt. Nun geht man auf die Darstellung der Zahlen in der Zahlenlinie zurück, setzt die positiven und negativen ganzen Zahlen ein, setzt Brüche ein und stellt Vergleiche an über die unendliche Menge der ganzen Zahlen und die der Brüche und läßt dann entdecken, daß trotz dieser unendlichen Anzahl der Brüche die Zahlenlinie nicht kontinuierlich erfüllt ist. Mit dem Zirkel kann man $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$ auf der Zahlenlinie markieren und

---

[1]) Sonst wäre ja die Gleichung $\sqrt{a} = \sqrt{a}$ nur manchmal richtig!

[2]) Den Irrationszahlen verschafft Stifel 1544 Bürgerrecht, die imaginären Zahlen finden dagegen erst in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts Anerkennung.

trifft dabei auf Punkte, die nicht von Brüchen bereits besetzt sind. Die Irrationalzahlen liegen also zwischen den Brüchen und füllen die Zahlenlinie nun kontinuierlich aus. — Hat man eine gute Generation, so wird man auch den schönen geometrischen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ und die Auffindung rationeller Näherungswerte für diese Wurzel nicht unterdrücken.

Aber für die Lösung der Aufgabe $x^2 = -4$ genügt keine Zahl der Zahlenlinie; es müssen wiederum neue Zahlen erfunden werden; ihre Einheit heißt i, die Zahlen selbst imaginäre. Wir stellen sie dar auf einer Senkrechten, die durch den Nullpunkt der ursprünglichen (sie heißt jetzt die reelle) Zahlenlinie gehen muß, damit $0 \cdot i = 0$ sei. Da i jeden beliebigen, positiven und negativen, rationalen und irrationalen Koeffizienten haben kann, so wird diese zweite Zahlenlinie alsbald eine kontinuierlich erfüllte. Das Rechnen mit imaginären Zahlen wird, nachdem die Potenzen von i berechnet sind, an einigen Beispielen gezeigt. Schließlich wird auch die Notwendigkeit der komplexen (complexus = zusammenfassend) Zahlen aufgezeigt und nachgewiesen, wie sie nur in der Ebene der beiden Zahlenlinien ihren Platz finden können, aber die Zahlen dieser beiden Axen mit umfassen. So bildet die Erläuterung der Gaußschen Zahlenebene einen schönen Abschluß der Arithmetik auf der Mittelstufe.

Man sieht, wie überaus reichhaltig das Pensum ist, welches in der kurzen Zeit von drei Jahren erledigt werden muß. Je länger man diesen Stoff unterrichtet, um so klarer erkennt man, daß die Zeit auch bei starker Beschränkung in bezug auf Übungsmaterial sehr knapp ist; zu eingehender Wiederholung in der Klasse ist selten Zeit. Gerade darin aber sehe ich den Grund für die Mißerfolge vieler Schüler in unsrer Disziplin, daß es ihnen zu rasch geht. Der Lehrer muß weitergehen, ehe noch das Vorausgegangene allen Schülern zu völlig sicherem Besitz geworden ist. Aus dem Mißerfolg aber entsteht Unlust — der Schüler fühlt die Unsolidität seines Wissensgebäudes — und die weitere Folge ist die mit einer Art von Haß gepaarte Nichtachtung der Mathematik in weiten Kreisen der Schüler und der Eltern. Was uns helfen kann, ist also nicht eine noch weitere Ausdehnung des mathematischen Lehrpensums auf dem Gymnasium auf Kosten der gründlichen Durcharbeitung, sondern vielmehr eine Herabsetzung seines Umfanges. Man muß das Gebäude der Mathematik auf dem Gymnasium — über Realanstalten urteile ich nicht — niedriger planen und die dadurch freiwerdende Zeit dazu verwenden, die einzelnen Stockwerke so solide zu bauen, daß alle, die am Baue mitarbeiten, Schüler und Lehrer, das frohe Bewußtsein absoluter Festigkeit haben. Solche Freude erzieht! Schützen wir vor allem unsre Gymnasiasten vor den Reformgelüsten jener Neuerer! Warum sollten wir Dinge, die bisher der Universität vorbehalten waren, unsern Schülern auch noch zumuten? Mit den Realanstalten können die Gymnasien auf dem Gebiete der Mathematik doch nicht Schritt halten. Mögen doch diejenigen Gymnasialabiturienten, welche Mathematik studieren oder der Technik sich zuwenden, später ein Kolleg mehr hören! Das erscheint dem nicht als ein Unglück, der vergleicht, wie auf der Schule schon seit lange mit jeder Stunde gegeizt werden und die Arbeitskraft aufs höchste angespannt werden muß, während sich die Herren Studierenden ihre Arbeit weit vorsichtiger bemessen können.

trifft dabei auf Punkte, d sind. Die Irrationalzahlen
liegen also zwischen den kontinuierlich aus. — Hat
man eine gute Generation, metrischen Beweis für die
Irrationalität von $\sqrt{2}$ und rte für diese Wurzel nicht
unterdrücken.

Aber für die Lösu ne Zahl der Zahlenlinie; es
müssen wiederum neue Za heißt i, die Zahlen selbst
imaginäre. Wir stellen sie en Nullpunkt der ursprüng-
lichen (sie heißt jetzt die re i = 0 sei. Da i jeden be-
liebigen, positiven und negat ienten haben kann, so wird
diese zweite Zahlenlinie als s Rechnen mit imaginären
Zahlen wird, nachdem die einigen Beispielen gezeigt.
Schließlich wird auch die N = zusammenfassend) Zahlen
aufgezeigt und nachgewiese en Zahlenlinien ihren Platz
finden können, aber die Zah So bildet die Erläuterung
der Gaußschen Zahlenebene auf der Mittelstufe.

Man sieht, wie übe es in der kurzen Zeit von
drei Jahren erledigt werden errichtet, um so klarer er-
kennt man, daß die Zeit a g auf Übungsmaterial sehr
knapp ist; zu eingehender Zeit. Gerade darin aber
sehe ich den Grund für unsrer Disziplin, daß
es ihnen zu rasch geht. D das Vorausgegangene allen
Schülern zu völlig sicherem lg aber entsteht Unlust —
der Schüler fühlt die Unsoli die weitere Folge ist die
mit einer Art von Haß gepaar en Kreisen der Schüler und
der Eltern. Was uns helfen k ehnung des mathematischen
Lehrpensums auf dem Gymna rbeitung, sondern vielmehr
eine Herabsetzung seine der Mathematik auf dem
Gymnasium — über Realans nen und die dadurch frei-
werdende Zeit dazu verwend zu bauen, daß alle, die am
Baue mitarbeiten, Schüler un r Festigkeit haben. Solche
Freude erzieht! Schützen w den Reformgelüsten jener
Neuerer! Warum sollten w vorbehalten waren, unsern
Schülern auch noch zumuten ymnasien auf dem Gebiete
der Mathematik doch nicht gen Gymnasialabiturienten,
welche Mathematik studieren r ein Kolleg mehr hören!
Das erscheint dem nicht als r Schule schon seit lange
mit jeder Stunde gegeizt we angespannt werden muß,
während sich die Herren St bemessen können.